Diplomamunka

Topográfiai és hőmérsékleti különbségek együttes hatása által vezérelt felszín alatti vízáramlás numerikus modellezése szintetikus egységmedencében

Szijártó Márk

Geofizikus MSc.

Kutató geofizikus szakirány



Témavezetők:

Dr. Galsa Attila

egyetemi adjunktus

Mádlné Dr. Szőnyi Judit

egyetemi docens

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Geofizikai és Űrtudományi Tanszék

Budapest, 2017

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **1**

2. Elméleti háttér **8**

2.1. A felszín alatti vízáramlást leíró alapegyenletek 8

2.2. A Tóth-féle egységmedence 12

2.3. Termikus konvekció porózus közegben 13

3. A véges elemes modell **16**

3.1. Alapparaméterek és változók 16

3.2. Geometria felépítése, rácsháló generálása 17

3.3. Fizikai háttér 19

3.3.1. Darcy's Law modul 20

3.3.2. Heat Transfer in Porous Media modul 20

3.4. Határ- és kezdeti feltételek 21

3.5. Stacionárius és időfüggő megoldás 22

4. Eredmények **23**

4.1. A numerikus modell verifikálása 23

4.2. Termikus konvekció az egységmedencében 26

4.3. A termikus konvekció kvantitatív vizsgálata 32

4.4. A termikus konvekció időbeli változása 42

4.5. A hidraulikus emelkedési magasság megváltozása 50

5. Összegzés **57**

6. Summary **60**

Köszönetnyilvánítás **62**

Ábrák jegyzéke **63**

Táblázatok jegyzéke **64**

Hivatkozások **65**

1. Bevezetés

Az élet első csírájának megjelenése óta földi létünk nélkülözhetetlen vegyülete a víz. Az evolúció hosszadalmas folyamatában résztvevő élőlények többsége olyan szervekkel rendelkezik, melyekkel a vizet minél hatékonyabban tudja felvenni és hasznosítani. Öntudatra ébredése után az ember felismerte az édesvíz kitüntetett szerepét életében, ezért folyók, patakok, tavak közelében telepedett le. Az ókori civilizációk már meglehetősen fejlett vízgazdálkodással rendelkeztek, beleértve a mezőgazdasági területek öntözését, a városok ivóvízellátását, illetve csatornarendszerek működtetését (Mays *et al.*, 2007). Sajnálatos, hogy ez a pozitív irányba mutató fejlődés is hanyatlásnak indult a középkorban, azonban az újkorban kialakult tudományos szemléletmód javított a víz alulértékelt megítélésén. A XIX. század elején kezdődő demográfiai robbanásnak köszönhetően az ivóvíz birtoklása mára komoly konfliktusforrássá vált, különösen az ivóvízhiányos területeken (Levy *et al.*, 2005). Manapság a legmodernebb eszközök segítségével törekednek a vízadórétegek kutatására, a fenntartható ivóvíz ellátásra, valamint a vízbázis védelmére. Bolygónk egy bonyolultan működő dinamikus rendszer, ahol a víz folyamatos hidrológiai körfolyamatban vesz részt. Így elméleti ismereteinkre és gyakorlati tapasztalatainkra támaszkodva tömeg- és energiatranszport folyamatokkal írjuk le a jelenségeket, akár a felszín alatti vízáramlást, a szénhidrogén migrációt vagy a klímaváltozás hatását akarjuk vizsgálni (Warren & Warren, 2014). Habár számításainkhoz a lehető legegyszerűbb, problémaspecifikus modelleket hozunk létre, tisztában kell lennünk a hidrogeológia alapfeltevéseivel, a közelítések korlátozottságával (NSF, 2009).

Noha Henry Darcy (1856) a XIX. század közepén már kísérleti tapasztalatai (Brown, 2002) alapján definiálta a hidrogeológiában jelenleg is használt empirikus összefüggését, tényleges használatára csaknem egy teljes évszázadot kellett várni. Korai munkáikban King (1899), D'Andrimont (1906) és Fourmarier (1939) – felismerve, hogy a felszín alatti víztükör helyzete jól követei a domborzatot – már feltételezték a topográfia által vezérelt, különböző hierarchiájú felszín alatti vízáramlási rendszerek kialakulását. Munn (1909) elmélete szerint, az áramlási rendszerek hatására kialakulhatnak olyan holt terek a felszín alatti térrészben, ahol szénhidrogén halmozódhat fel. Manapság eme posztulátumokra kizárólag koncepcionális magyarázatként tekinthetünk, azonban elvetették a hidrogeológia mint külön tudományág magvait. Először kvantitatívan Hubbert (1940) tudta a Bernoulli-egyenletből szár-

maztatott folyadélpotenciállal jellemezni a felszín alatti vízáramlást. Tulajdonképpen elvégezte a potenciáleloszlás – mint a fizika egyéb tudományterületein már alkalmazott skalártér definíció – medence adaptációját. Habár a jelenség teoretikus leírásánál matematikai összefüggést talált a vízáramlás, a topográfiai különbségek és a pórusnyomás között, elméletét gyakorlati megfigyelésekkel nem támasztotta alá.

Hubbert posztulátumát csaknem húsz évvel később Tóth József pontosította. Terepi megfigyelései alapján arra a következtetésre jutott, hogy egy medence megcsapolódási területe nem csupán a potenciáltér pontszerű globális és/vagy lokális minumumhelyével esik egybe, hanem a kiterjedt felszín alatti víztükörben zajlik. Alapfeltevése, hogy a felszín alatti vízáramlás főképp topográfiavezérelt folyamat, így annak irányát a hidraulikus emelkedési magasság különbségek határozzák meg. Első tanulmányában egy kétdimenzós, homogén, izotróp, lineárisan növekvő topográfiával (víztükörrel) jellemzett egységmedencében zajló stacionárius felszín alatti vízáramlás analitikus megoldását közölte (Tóth, 1962). Az eredmény alapján három különböző, véges kiterjedéssel jellemezhető hidraulikai rezsimet tudott elkülöníteni: a beáramlási (*recharge*), az átáramlási (*midline*) és a kiáramlási (*discharge*) területet. Az egységmedence modell (*unit basin*) napjainkban is alapkövét képezi a kutatásoknak, amely már elegendő bizonyítékkal szolgált az összetett áramlási rendszerek felépülésére és működésére vontakozóan. Következő lépésben Tóth (1963) egy hasonló homogén modellt hozott lére, de a topográfiát – mint felső határfeltételt – már egy lineáris és egy szinuszoidális függvény szuperpozíciójaként írta elő. A potenciáleloszlásból arra a következtetésre jutott, hogy hierarchikusan fészkelt regionális, intermedier és lokális áramlási rendszerek jönnek létre. A kialakult áramkép pontos szerkezete többek között erősen függ a medence szélesség-mélység arányától, valamint a topográfiát leíró függvény amplitúdójától. Továbbá bizonyította Munn (1909) feltételezését, hogy a különböző áramlási rendszerek találkozásánál, illetve szétágazásánál olyan stagnáló pontok azonosíthatóak, melyek kedvezőek a szénhidrogén akkumulációja szempontjából (Tóth, 1980). Ezeket hidraulikai migrációs csapdáknak nevezte el. Munkáját később kiegészítette valós morfológiai tulajdonságokkal jellemezhető példákkal is (Tóth, 2009). Tóth első modelljeinek publikálásával egyidőben megszületett a korai hidrosztratigráfia, mely vízvezető (*aquifer*), vízfogó (*aquitard*) és vízzáró (*aqiclude*) egységekre osztotta az inhomogén földtani közeget (Maxey, 1964). A hidrosztatigráfiai modellépítés nélkülözhetetlenné vált a modern hidrogeológia tudományában, azonban a hidraulikai és a kőzetfizikai paraméterek pontos

becslése manapság is rengeteg problémát okoz (Mádl-Szőnyi & Tóth, 2009). Ezeket a teljes modelltérre megadhatjuk akár egy határértékfüggvény gyökeként (Deming, 2004), egy lineáris, vagy egy nem-lineáris analitikus függvénnyel is (Jiang *et al.*, 2009). Tóth (1995) később bevezette a hidraulikus folytonosság tér- és időfüggő (relatív) fogalmát, ami forradalmasította a modern hidrogeológiai szemléletmódot.

A területspecifikus, változatos topográfiával jellemezhető, heterogén modelleket leíró csatolt parciális differenciálegyenlet-rendszerek megoldását klasszikus analízissel nem lehet megadni. A hidegháborúban résztvevő nagyhatalmak versenyének nyertese a tudomány volt, hiszen a gyorsan fejlődő számítástechnika segítséget tudott nyújtani az egyre bonyolultabb matematikai feladatok megoldásában. Az analitikus modelleken túlmutató numerikus számításokat először Freeze és Witherspoon végeztek (1966); (1967); (1968). Munkáikban véges differenciás módszerrel (*FDM – Finite Difference Method*) vizsgálták a különböző hidraulikus vezetőképességgel és eltérő geometriával jellemezhető rétegek, lencsék és vetők szerepét a medence be- (*recharge*) és kiáramlási (*discharge*) területéhez viszonyítva. Leegyszerűsített topográfia esetén a jól használható véges differenciás (*FDM*) eljárást a véges elemes módszer (*FEM – Finite Element Method*) váltotta fel (Person *et al.*, 1996). Később további eljárások – mint például a neurális hálózatok (*ANN – Artificial neural network*) (Kristinof *et al.*, 2010) és a *fuzzy sets* módszer (Igboekwe & Amos-Uhegbu, 2011) – segítették a számításokat, azonban nem terjedtek el a felszín alatti vízrámlás numerikus modellezésében. Azonban az eljárás kiválasztása technikai kérdés, hiszen még egy jól lehatárolható – feltétezhetően topográfia által vezérelt – terület (pl.: Tihanyi-félsziget) hidrogeológiai modellezése esetén is érdemes minél több szempont alapján (éghajlat, heterogén geológia, antropogén hatások, stb.) tanulmányozni a felszín alatti vízáramlást (Tóth *et al.*, 2016). Noha a felszín alatti vízáramlást első közelítésben topográfia vezérelt folyamatként írjuk le, nem szabad figyelmen kívül hagyni az üledékes kompakció, a tektonikus kompresszió, a hőtranszport (termikus konvekció) és az ozmózis hatását sem. Így először sor került a jelenségek szeparált, majd együttes vizsgálatára. Egyszerű geometriával leírható, szintetikus esetekben analitikus megoldást adtak a hő-, a tömegtranszport folyamatokra és egyéb felszín alatti vízáramlást irányító jelenségekre, melyek alapjául szolgáltak a területspecifikus, csatolt fizikai folyamatokkal leírható áramlási rendszerek numerikus modellezéséhez (Phillips, 2009).

Először Bredehoeft és Papadopulos (1965) adott egydimenziós analitikus megoldást a stacionárius vertikális irányú vízáramlás és a hőtranszport folyamatot leíró differenciálegyenlet-rendszerre. Pár évvel később, Bredehoeft és Hanshaw (1968a) szintén egydimenziós, de már az üledékes kompakciót is figyelembe vevő időfüggő analitikus megoldást közöltek. A vertikális feláramlás jelentőségére – terepi megfigyeléseivel és méréseivel együtt – Carrillo-Rivera (1996) hívta fel a figyelmet. Lapwood (1948) a XIX. század közepén számos egyszerűsítést alkalmazva (pl.: a lineáris stabilitás elmélet, Boussinesq-approximáció, megfelelő határ- és kezdeti feltételek) analitikusan bizonyította a termikus konvekció jelenlétét egy homogén, izotróp, kétdimenziós modellben. A termikus konvekció megindulásának feltételét egy dimenziótlan mennyiséggel, a *Rayleigh-szám* (Ra) kritikus értékével definiálta ($Ra_{cr} = 4\pi^2$). (A számítás módja és a termikus konvekció okozta áramlás térbeli struktúrája tovább pontosítható (Beck *et al.*, 1972).) Felismerve a felszín alatti vízáramlást irányító hőtranszport folyamatok jelentőségét, Domenico és Palciauskas (1973) egy egyszerűsített topográfiával rendelkező, kétdimenziós, homogén, konvektív hőtranszportot és vízáramlást egyszerre figyelembe vevő stacionárius modell analitikus megoldását közölték. Tanulmányukban a felszín alatti víztükör helyezetét és az ott értelmezett felszíni hőmérsékletet – a Tóth-féle (1963) analitikus megoldást felhasználva – perturbációs alakban közelítették. Feltételezték a felszín alatti víz sűrűségének hőmérséklet függetlenségét és inkompresszibilitását (ρ_f=állandó). A mélységgel lineárisan növekvő, konduktív hőmérsékleteloszlás a regionális áramlási rendszernek megfelelően torzul a beáramlási (*recharge*) terület irányából a kiáramlási (*discharge*) felé (Domenico & Palciauskas, 1973). Bories és Combarnous (1973) egy szintén kétdimenziós, de horizontálisan végtelen kiterjedésű zárt rétegben, majd a réteg dőlésétől függő termikus konvekció kialakulását és struktúráját írták le (Combarnous & Bories, 1975). Modelljüket Straus és Schubert (1977) pontosította a hőmérsékletfüggő viszkozitás figyelembe vételével. A közegben előforduló különböző porozitással, illetve permeabilitással jellemezhető rétegek okozta anizotrópia hőtranszport folyamatra gyakorolt hatását először Castinel (1975) és Epherre (1975) analitikus, majd Rubin (1981) numerikus eljárással vizsgálta. Ezek után Wood és Hewett (1982) leírta a termikus konvekció által vezérelt anyagtranszport folyamat elméleti megoldását porózus közegben. Kutatásukkal teoretikus magyarázatot adtak a közel sík területek alatt elhelyezkedő rezervoárokban tapasztalt cementációs és oldódási folyamatok manifesztációira. A hődiszperzió hatását először Tyvand

(1977) vizsgálta. Eredményei alapján arra következtetett, hogy a változatos topográfia okozta felszín alatti vízáramláshoz képest a hődiszperzió elhanyagolható. Az analitikus és a kezdeti numerikus modellek eredményei felhívták a figyelmet a hőtranszport folyamat mint a felszín alatti vízáramlás hajtóerejének jelentőségére. A következő évtizedekben sor került a porózus közegben zajló hőtranszport folyamatok numerikus modellezésére, így a termikus konvekció megindulásának és térbeli struktúrájának széleskörű vizsgálatára.

Általánosan elmondható, hogy a topográfia, a tektonikus kompresszió, illetve az üledékes kompakció elhanyagolhatósága esetén a felszín alatti vízáramlást a termikus konvekció irányíthatja, ha elegendően nagy a vizsgált tartomány teteje (felszíne) és alsó határa közötti hőmérséklet-különbség. Először egy téglalap alakú közegben kialakuló termikus konvekció struktúráját elemezték a permeabilitás és a hőmérséklet-eloszlásban jelentkező aniztorópia figyelembe vételével (Graham & Steen, 1994); (Otero *et al.*, 2004); (Hewitt *et al.*, 2014). A szerzők kifejezetten stacionárius esetben, *Ra* függvényében jellemezték a felszín alatti vízáramlást. Nield (1997) a közegben tapasztalható permeabilitás-anizotrópia kitüntetett irányait figyelembe vevő *effektív Rayleigh-szám* (Ra_e) bevezetését javasolta, ami később nem terjedt el a tudományos köztudatban. A stacionárius megoldások tanulságait felhasználva, először Clauser és Villinger (1990) végeztek hatástanulmányt a Rajna-árok felszín alatti vízáramlásviszonyainak modellezésére. Véges differenciás modelljükben elnagyolt topográfiával írták le a valós felszínt, mint felső határfeltételt. A területen mért, illetve számított hőáramadatok segítségével – figyelembe véve a valós geológiai körülményeket – el tudták különíteni azt a tartományt, ahol a temikus konvekció irányítja a felszín alatti vízáramlást. Viszont ezeket az eredményeket Rabinovicz (1998) szintetikus két- és háromdimenziós téglalap és téglatest alakú, homogén modelljeivel nem tudta általánosítani. Tapasztalatai alapján a termikus konvekció megindulásához irreálisan nagy hőmérséklet-különbségre lenne szükség a homogén modell felszíne és alja között, így azt az átlagos hőáramviszonyok nem teszik lehetővé. Ezt az állítást Pestov (2000) és Lazear (2006) területspecifikus háromdimenziós modelljeik segítségével módosították és azt találták, hogy az átlagnál nagyobb hőárammal jellemezhető területeken előfordulhat termikus konvekció. Sőt, meleg vertikális feláramlásra utaló mérési eredmények alapján a konvekció jelenléte bizonyítható is. Habár a stacionárius modellek felhívják a figyelmet a termikus konvekció fontosságára, a jelenség kialakulását, időbeli változását, így dinamikáját sem jellemzik.

Cserepes és Lenkey (2004) két- és háromdimenziós, véges kiterjedésű lejtővel rendelkező szintetikus modelljeik segítségével írták le a termikus konvekció megindulásának feltételeit és típusait. A kezdeti konduktív hőmérsékleteloszlást szabályos perturbációval látták el, ami segítette a termikus konvekció kialakulását. Adott hőmérséklet-különbség esetén, különböző határfeltételek és beállítások mellett, a lejtőszög szisztematikus változtatásával csoportosították a kialakuló áramlásokat struktúrájuk alapján. Hasonló meggondolások alapján, Voss és Simmons (2010) háromdimenziós modelljükben vizsgálták a koncentráció-különbség okozta konvekciós áramlást. A hőtranszport egyenlet és a topográfia által együttesen vezérelt felszín alatti vízáramlás komplex medence (Tóth, 1963) adaptációját Ran (2015) vizsgálta. Azonban a modell teteje és alja közötti kis hőmérséklet-különbség ($\Delta T \simeq 10$ °C) miatt a rendszerben nem indult meg időfüggő termikus konvekció, tehát hatása elhanyagolható volt. Természetesen az intermedier és a regionális kiáramlási területeken a felszín alatti vízáramlás hőszállítása miatt lehet esély meleg feláramlásra. Ran a komplex medencénél már ismertetett stagnáló pontok vertikális mozgását vizsgálta különböző anizotrópia esetén. Noha a földköpenyben zajló idöfüggő termikus konvekció struktúrájának és dinamikai sajátosságainak vizsgálata manapság is kutatott terület (Herein *et al.*, 2013); (Galsa & Lenkey, 2007), hasonló jellegű elemzésre a felszín alatti vízáramlásra irányuló modellezésekben ezidáig nem került sor. Így a felsorolt analitikus és numerikus modellezések egyikében sem vették figyelembe a termikus konvekció dinamikáját és annak felszín alatti vízáramlásra gyakorolt pontos hatását.

Olyan esetekben, ahol jóval nagyobb hőáram tapasztalható, mint az adott területre jellemző átlag, a porózus közegben termikus konvekció alakulhat ki (Lenkey, 1993). A folyamat intenzitása függ a porózus réteg teteje és alja közötti hőmérséklet-különbségtől, a közeg heterogenitásától, illetve a topográfiai viszonyoktól. Továbbá a kezdeti- és határfeltételek alapvetően befolyásolják a kialakuló – szerencsés esetben stacionárius vagy kvázi-stacionárius – áramlás struktúráját. A termikus konvekció során létrejövő vertikális áramlások helyzetüket az idő függvényében változtathatják, ami – a csupán topográfia vezérelt vízáramláshoz képest – jelentős különbséget eredményezhet a hidraulikus emelkedési magasság értékekben. Azonban olyan munka még nem született, ami a Tóth-féle egységmedencében előírt topográfia (felszín alatti víztükör) és a termikus konvekció együttes hatását számszerűen vizsgálta volna. Így kvantitatívan összevethető a két hajtóerő együttes hatása a Tóth-féle

egysémedence analitikus megoldásával.

Diplomamunkámban a topográfia és a termikus konvekció által együttesen vezérelt felszín alatti vízáramlás együttes hatását vizsgáltam szintetikus egységmedencében. Dolgozatomat a topográfia vezérelt felszín alatti vízáramlás matematikai leírásának bemutatásával kezdem, melynek során ismertetem a Darcy- és a kontinuitási egyenletet, illetve a folyadékponteciál definícióját. A stacionárius vízáramlást leíró Laplace-egyenlet és a megfelelelő határfeltételek előírásával ismertetem a kétdimenziós Tóth-féle egységmedencében zajló felszín alatti vízáramlás főbb tulajdonságait. Ezek után röviden kitérek a hőtranszportfolyamatot leíró egyenletre, majd bemutatom a porózus közegben kialakuló termikus konvekció analitikus megoldását. A véges elemes numerikus modell megvalósítását és vizsgálatát COMSOL Multiphysics 5.2 szoftver segítségével végeztem el. A modell paramétereinek pontos ismertetése után összehasonlítom a numerikus és a Tóth-féle analitikus egységmedence modell stacionárius megoldásában tapasztalható különbségeket, abban az esetben, amikor a felszín alatti vízáramlást csupán a lineárisan lejtő felszín alatti víztükör okozza. A numerikus modell verifikálását követően kvalitatív módon mutatom be az egységmedencében kialakuló termikus konvekciót. Ezek után ismertetem az összetett felszín alatti vízáramlást jellemző kontrollparamétereket, illetve azok tér- és időbeli átlagának görbéit. Ezek segítségével meghatározható az a kritikus hőmérséklet-különbség, mely esetén megindul az időfüggő termikus konvekció. A termikus konvekció időbeli változását Fourier-analízissel vizsgálom, mely során karakterisztikus frekvenciák segítségével írom le a felszín alatti vízáramlást jellemző periodikus folyamatokat. A rendszerben tapasztalható időbeli változások jellemzése után rátérek a termikus konvekció által gyengén, illetve erősen befolyásolt tartományok lokalizálására, és azok számszerű jellemzésére. Végezetül összefoglalom munkám eredményeit, főbb következtetéseit, illetve rövid kitekintést nyútjok a kutatás jövőbeli folyatatására nézve.

2. Elméleti háttér

A topográfia vezérelt felszín alatti vízáramlás matematikai jellemzéséhez a kontinuitási egyenletből és a Darcy-egyenletből alkotott differenciálegyenlet-rendszert kell megoldani a megfelelő kezdeti és határfeltételekkel. Viszonylag egyszerű geometriai paraméterekkel jellemezhető (pl.: a Tóth-féle egységmedence) modell esetén a folyadékpotenciál-eloszlásra analitikus megoldás adható. Azonban összetett topográfiájú, heterogén geológiájú medence, valamint hőtranszport, diszperziós és diffúziós folyamatok együttes figyelembe vételével a megoldás csak numerikus módon számítható. A hőtranszport egyenletből különböző matematikai megszorítások és fizikai egyszerűsítések mellett, klasszikus analízis segítségével bizonyítható a porózus közegben meginduló termikus konvekció jelenléte. A topográfia és az időfüggő termikus konvekció által együttesen vezérelt felszín alatti vízáramlás leírására kizárólag numerikus módszer alkalmazható.

2.1. A felszín alatti vízáramlást leíró alapegyenletek

Darcy (1856) a XIX. század közepén laborkísérleteivel fenomenologikusan vizsgálta a folyadékáramlást: egy homokkal teli tartályba vizet áramoltatott át ismert hozammal, és két különböző pontban mérte a hidraulikus emelkedési magasság értékét. Eredményei alapján arra a következtetésre jutott, hogy a térfogati hozam, a hidraulikus emelkedési magasság változása és a tartály keresztmetszeti területe között lineáris kapcsolat áll fenn,

$$Q = AK\frac{\Delta h}{\Delta l} \tag{2.1}$$

ahol Q a térfogati hozam $[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}]$, A a tartály keresztmetszeti területe $[\mathrm{m}^2]$, $\frac{\Delta h}{\Delta l}$ a hidraulikus emelkedési magasság megváltozása $[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}}]$ és K a lineáris arányossági tényező $[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$, melyet hidraulikus vezetőképességnek neveznek. Ez az empirikus Darcy-összefüggés, mely lamináris áramlás mellett és telített porózus közeg estén érvényes. Ha a (2.1) egyenletet elosztjuk a tartály kerszetmetszeti felületével, és figyelembe vesszük az áramlás valódi irányát (kisebb hidraulikus emelkedési magasság irányába történik), akkor megkapjuk az egységnyi felületen egységnyi idő alatt átáramló folyadék térfogatát,

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\nabla h \tag{2.2}$$

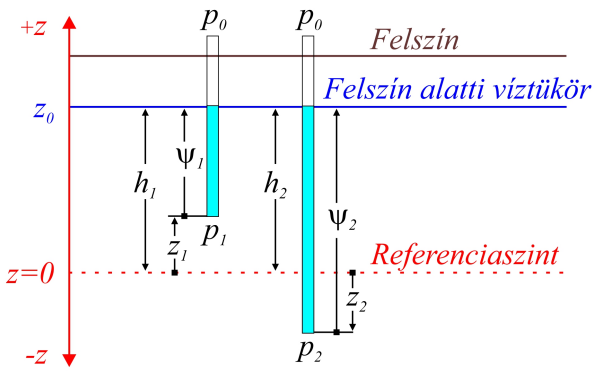
ahol $\mathbf{u}$ a Darcy-fluxus [$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$] és ∇h a hidraulikus emelkedési magasság gradiense [$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}}$]. Általános esetben a hidraulikus vezetőképességet – a közeg aniztrópiája miatt – tenzor mennyiségként kell definiálni ($\mathbf{K}$). Azonban izotróp esetben összefüggés található a hidraulikus vezetőképesség és az anyagfizikai paraméterek között,

$$K = \frac{Cd^2\rho_f g}{\eta} = \frac{k\rho_f g}{\eta} \tag{2.3}$$

ahol C a kőzetmátrix szerkezetére jellemző texturális paraméter [1], d az átlagos szemcseméret [m], ρ_f az áramló folyadék sűrűsége [$\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$], g a nehézségi gyorsulás értéke [$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$], η a folyadék dinamikus viszkozitása [Pa·s], illetve k a Hagen-Poiseuille egyenletből származtatott permeabilitás [m^2].

Hubbert (1940) úgy végezte el a skalártér medence adaptációját, hogy kiszámította egy egységnyi tömegű folyadékelem összes mechanikai energiáját:

$$\Phi = gz + \frac{v^2}{2} + \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho_f}, \tag{2.4}$$



2.1. ábra. *A (2.6) egyenlet szemléltetése, melyben a hidraulikus emelkedési magasság (h), a helyzeti magasság (z) és a vízoszlopmagasság (Ψ) előjeles összege.*

ahol Φ maga a folyadékpotenciál, az első tag az egységnyi tömegen végzett potenciális (helyzeti), a második a kinetikus (mozgási), a harmadik az elasztikus munkavégzést fejezi ki. A (2.4) egyenletben z a helyzeti magasság [m], v egy részecske áramlási sebessége [$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$], p a hidrosztatikus nyomás [Pa], valamint p_0 a referencia (atmoszférikus) nyomás [Pa]. A tér egy tetszőleges pontjában vett hidrosztatikus nyomás értékét a

$$p = p_0 + \rho_f g \Psi \tag{2.5}$$

összefüggés írja le, ahol Ψ a vízoszlop magassága [m].

Felszín alatti vízáramlás vizsgálatánál élhetünk azzal a feltételezéssel, hogy a szivárgási sebesség elhanyagolható ($v \to 0$), valamint az áramló folyadék inkompresszibilis (ρ_f=állandó). Így a (2.4) összefüggés először a Hubbert-féle energiaegyen-

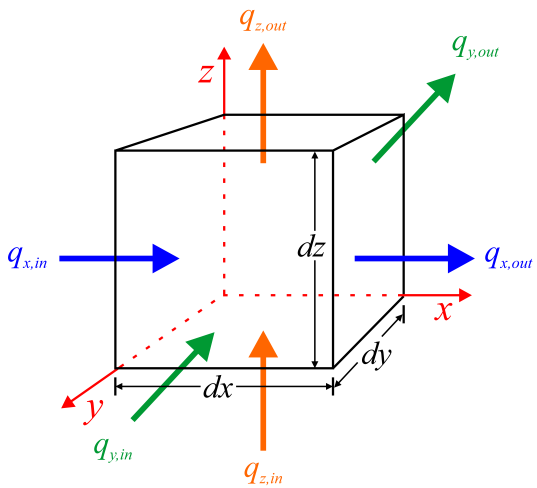
letre egyszerűsíthető, majd a (2.5) definíciót alkalmazva lineáris kapcsolat található a folyadékpotenciál és a hidraulikus emelekedési magasság között,

$$\Phi = gz + \frac{p - p_0}{\rho_f} = g(z + \Psi) = gh \tag{2.6}$$

ahol z a helyzeti magasság [m], Ψ a vízoszlop magasság [m], a h hidraulikus emelkedési magasság [m] pedig az előző kettő előjeles összege. A hidraulikus emelkedési magasság – mint skalármennyiség – egy egységnyi tömegű folyadékelem összenergiáját fejezi ki. Definícióját a (2.6) egyenlet átalakításával kaphatjuk meg, melyet a *2.1. ábra* szemléltet,

$$h = z + \Psi = z + \frac{p}{\rho_f g}. \tag{2.7}$$

Az áramlási egyenlet felíráshoz még a kontinuitási egyenlet (hőtranszport, diszperziós és diffúziós folyamatok nélküli alakjának) rövid ismertetése szükséges (Fetter, 1994). A levezetés során tekintsünk egy olyan elemi (differenciális) térfogatot, mely jóval nagyobb mint a pórustérfogat, azonban kisebb mint a felszín alatti vízáramlás karakterisztikus mérete. Az elemi térfogat lapjain egységnyi idő alatt beáramló tömegáramot a következő összefüggésekkel lehet felírni,



2.2. ábra. *Az elemi térfogaton keresztül történő átáramlás, ahol q a normális irányú tömegáram.*

$$q_{in,x} = \rho_f u_x dydz, \tag{2.8}$$

$$q_{in,y} = \rho_f u_y dxdz, \tag{2.9}$$

$$q_{in,z} = \rho_f u_z dxdy, \tag{2.10}$$

ahol q a felületre normális irányú tömegáram $[\frac{\text{kg}}{\text{s}}]$, $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ a Darcy-fluxus lapra merőleges irányú komponense $[\frac{\text{m}}{\text{s}}]$ és $dx{=}dy{=}dz$ az elemi térfogat odalai [m]. A test lapjain kiáramló tömegáram – egyenlőre elhanyagolva a testen belüli forrás,

illetve nyelő jelenlétét – a következő egyenletrendszerrel írható le,

$$q_{out,x} = -\left[\rho_f u_x + \frac{\partial(\rho_f u_x)}{\partial x}dx\right]dydz, \tag{2.11}$$

$$q_{out,y} = -\left[\rho_f u_y + \frac{\partial(\rho_f u_y)}{\partial y}dy\right]dxdz, \tag{2.12}$$

$$q_{out,z} = -\left[\rho_f u_z + \frac{\partial(\rho_f u_z)}{\partial z}dz\right]dxdy. \tag{2.13}$$

Az eredményeket összegezve ((2.8)-(2.13) egyenletek) a stacionárius állapotra vonatkozó kontinuitási egyenlethez jutunk, amit a *2.2. ábra* mutat. Általános esetben az összefüggést további két taggal kell kiegészíteni, melyek egyrészt leírják az elemi térfogatban egységnyi idő alatt történő tömegváltozást ($\frac{\partial(\phi\rho_f)}{\partial t}$), másrészt előjelhelyesen veszik figyelmebe a forrás és a nyelő (q_m $[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}]$) hatását,

$$\begin{aligned}(\rho_f u_x dydz + \rho_f u_y dxdz + \rho_f u_z dxdy) + \Bigg[&- \Big(\rho_f u_x + \tfrac{\partial(\rho_f u_x)}{\partial x}dx\Big)dydz \\ -\Big(\rho_f u_y + \tfrac{\partial(\rho_f u_y)}{\partial y}dy\Big)dxdz &- \Big(\rho_f u_z + \tfrac{\partial(\rho_f u_z)}{\partial z}dz\Big)dxdy\Bigg] = \\ \Big(\tfrac{\partial(\phi\rho_f)}{\partial t} - q_m\Big)dxdydz.&\end{aligned} \tag{2.14}$$

Ha a kapott eredményt elosztjuk az elemi kőzettest térfogatával és azt egy infinitezimálisan kicsi térrészre vonatkoztatjuk (dx, dy, $dz \to 0$), akkor megkapjuk a kontinuitási egyenletet,

$$\frac{\partial(\phi\rho_f)}{\partial t} = -\nabla(\rho_f \mathbf{u}) + Q_m \tag{2.15}$$

ahol ϕ a kőzet porozitása [1], és Q_m a forrás/nyelő $[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{s}}]$. Felhasználva a (2.2) Darcy-egyenletet, a hidraulikus emelkedési magasság definícióját ((2.7) egyenlet) és az általános kontinuitási egyenletet ((2.15) egyenlet) felírhatjuk a lamináris áramlásra vonatkozó összefüggést,

$$\frac{\partial(\phi\rho_f)}{\partial t} = \nabla(\rho_f(\mathbf{K}\nabla h)) + Q_m \tag{2.16}$$

melyet további feltételezések mellett egyszerűsíthetünk. Stacionárius áramlás esetén, homogén, izotróp, vízzel telített porózus közegben a (2.16) összefüggés a Laplace-

egyenletre vezethető vissza,

$$\nabla^2 h = 0. \tag{2.17}$$

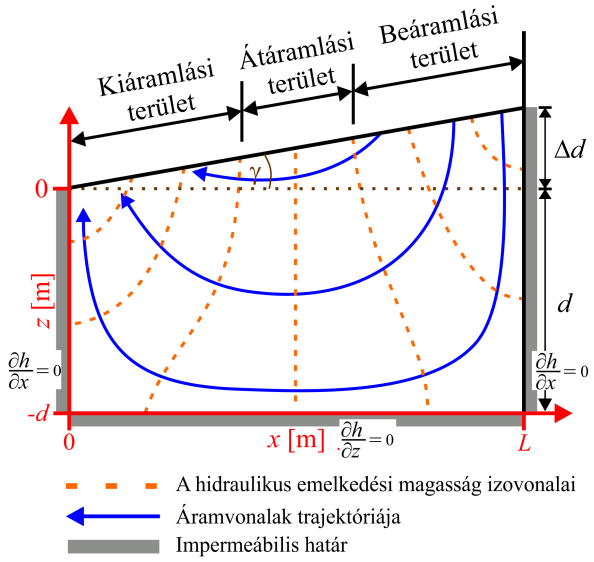
Időfüggő áramlás esetén, de homogén, izotróp közegben az összefüggés a

$$\nabla^2 h = \frac{S_s}{K}\frac{\partial h}{\partial t} \tag{2.18}$$

alakot veszi fel, ahol S_s a fajlagos tározási tényező, amely meghatározza az egységnyi kőzettérfogatból, egységnyi hidraulikus emelkedési magasságcsökkenés hatására kitermelhető víz mennyiségét $[\frac{1}{\mathrm{m}}]$.

2.2. A Tóth-féle egységmedence

Tóth (1962) egységmedence koncepciójára a mai napig mérföldkőként tekintünk a modern hidrogeológia tudományában. A modell egy kétdimenziós, – hidraulikus vezetőképességét tekintve – homogén, izotróp, alulról egy horizontális impermeábilis réteggel határolt egységmedence, melynek tetején a felszín alatti víztükör lineárisan emelkedik. Oldalsó határai a szimmetrikus geometria miatt impermeábilisnak tekinthetők. A *2.3. ábra* az egységmedence modell geometriáját mutatja be. Az áramlás stacionárius, ezért a (2.17) Laplace-egyenlet és a modell fizikai tulajdonságait hordozó határfeltételek segítségével analitikus megoldás kapható a potenciáltérre. Abban az esetben, ha a lejtő kellően lapos ($\gamma \simeq 1°$), akkor a felső határfeltételt egy valós vertikális kiterjedés nélküli perturbációs alakban adhatjuk meg,



2.3. ábra. *Az egységmedence modell, ahol L a medence szélessége, d a vastagsága, Δd a referencia mélység feletti vastagság és γ a lejtőszög. A lejtő tízszeresen túlmagasított.*

$$\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)_{z=0} = h_{wt} = x \tan\gamma \tag{2.19}$$

ahol h_{wt} a víztükör magassága [m] és γ a lejtőszög [rad]. Az alsó és az oldalsó határfeltételeket a

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{x=L} = \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)_{z=-d} = 0 \tag{2.20}$$

matematikai kifejezésekkel írhatjuk elő, ahol L jelöli a medence szélességét [m]. A hidraulikus emelkedési magasság analitikus megoldását a partikuláris harmonikus megoldások szuperpozíciójával adhatjuk meg az egységmedence tetszőleges pontjára (részletesen ld. (Tóth, 2009)-ben):

$$h(x,z) = \frac{L\tan\gamma}{2} - \frac{4L\tan\gamma}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos[(2m+1)\frac{x}{L}\pi]\cosh[(2m+1)\frac{(z+d)}{L}\pi]}{(2m+1)^2\cosh[(2m+1)\frac{d}{L}\pi]}, \tag{2.21}$$

ahol $m = 1; 2; 3; \ldots \infty$. Azonban ez az összefüggés csak abban az esetben igaz, ha a lejtőt perturbációs határfeltételként kezeljük. Így a (2.21) egyenlet kizárólag a $z = 0$ m referenciamélység alatti téglalap alakú területre szolgáltat valós megoldást a hidraulikus emelkedési magasságeloszlásra. Az analitikus megoldás szerint az egységmedencén belül három különböző rezsimjellegű terület különíthető el: a beáramlási (*recharge*), az átáramlási (*midline*), valamint a kiáramlási (*discharge*) terület. A megcsapolódás a véges kiterjedésű felszín alatti víztükrön keresztül zajlik. Noha az egységmedencében kialakuló áramkép analitikus leírása manapság is matematikai alapját képezi a gyakorlati hidrogeológiának, bonyolultabb topográfia, illetve a hajtóerők együttes figyelembe vétele esetén a megoldás csak numerikus módon számítható. A valós áramtér leírásához és modellezéséhez szükséges a hidrogeológiai környezet elemeinek (Tóth, 1971) megértése és azok hatásának numerikus értelmezése a felszín alatti vízrezsimre vonatkozóan.

2.3. Termikus konvekció porózus közegben

Az 1. fejezetben felsorakoztatott szakirodalom alapján kijelenthető, hogy a hőtranszport folyamatnak fontos szerepe van a felszín alatti vízáramlásban, melyet a

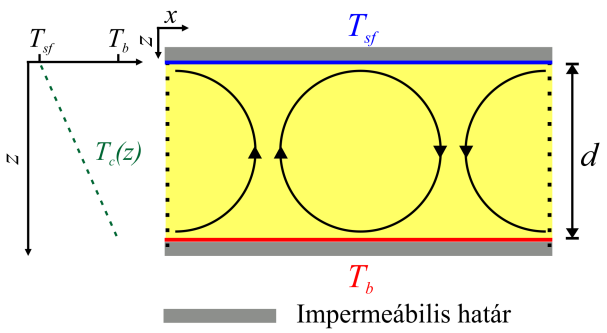
$$\rho_m c_{pm}\frac{\partial T}{\partial t} + \rho_f c_{pf}(\mathbf{u}\nabla T) = K_m\nabla^2 T \tag{2.22}$$

hőtranszport egyenlet ír le, ahol ρ_m a közeg (mátrix és pórusvíz) átlagos sűrűsége $[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}]$, c_{pm} a közeg állandó nyomáson vett fajhője $[\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}]$, T a hőmérséklet [K], t az

idő [s], ρ_f a folyadék sűrűsége $[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}]$, c_{pf} a folyadék állandó nyomáson vett fajhője $[\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}]$, $\mathbf{u}$ a Darcy-fluxus $[\frac{\text{m}}{\text{s}}]$ és K_m a közeg hővezető-képessége $[\frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}]$. Az egyenlet első tagja a hőmennyiség időbeli megváltozását, a második az advektív, a harmadik tagja pedig a konduktív hőtranszport folyamatot írja le (belső hőtermelés nélkül).

A porózus közegbeli termikus konvekció megoldását analitikus formában csak a folyamat megindulásának pillanatában lehet megadni egy meglehetősen leegyszerűsített esetben (Turcotte & Schubert, 2002), melyet a *2.4. ábra* szemléltet. A kétdimenziós, vízzel telített, porózus közegmodell tetejét és alját két horizontálisan végtelen kiterjedésű, impermeábilis, izotermikus határ alkotja, melyek között $\Delta T = T_b - T_{sf}$ a hőmérséklet-különbség. Feltételezzük, hogy a modell forrásmentes, és a porózus közegben szaturált folyadék összenyomhatatlan. Kis áramlási sebesség esetén élhetünk azzal a közelítéssel is, hogy a kőzet és a szaturált folyadék termikus egyensúlyban van. A hőtranszport kezdetben konduktív ($T_c(z)$), így a kialakuló hőmérsékleteloszlás a mélységgel lineárisan növekszik.

A problémára a (2.2) Darcy-, a (2.15) kontinuitási és a (2.22) hőtranszport egyenlet megfelelő alakjaiból felírható differenciálegyenlet-rendszert kell megoldani a leírt kezdeti és határfeltételekkel. Áramlást kizárólag a hidrosztatikai nyomásváltozástól való eltérés okozhat, ezért a Darcy-egyenlet vertikális áramlást leíró tagjába egy perturbációs tag definiálható. A Boussinesq-approximáció szerint a közegjellemzők állandónak tekinthetőek – kivéve az áramló folyadék sűrűségét (ρ_f) – a termikus felhajtóerőben, melyet csupán a hőmérséklet-különbségből adódó változások okozhatnak. Azt feltételezzük, hogy a termikus konvekció megindulásának pillanatában a hőmérsékleteloszlás csak kicsit tér el a $T_c(z)$ lineáris konduktív profiltól, így a másodrendű tagok elhanyagolhatóak. Ez a lineáris stabilitás elmélete. A differenciálegyenlet-rendszer dimenziótlanítása után a partikuláris megoldásból a termikus konvekció hevességét mutató dimenziótlan szám a *Rayleigh-szám* definiálható,



2.4. ábra. *A porózus közegben zajló termikus konvekció analitikus bizonyítása egy egyszerű modellen, ahol T_{sf} a modell felső, T_b az alsó impermeábilis határ hőmérséklete, $T_c(z)$ a konduktív hőmérsékleteloszlás és d a homogén közeg vastagsága.*

$$Ra = \frac{k\rho_f^2 g c_{pf} \alpha \Delta T d}{K_m \eta} \tag{2.23}$$

ahol k a közeg permeabilitása [m^2], ρ_f a folyadék sűrűsége [$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$], g a nehézségi gyorsulás [$\frac{\text{m}}{\text{s}}$], c_{pf} a folyadék állandó nyomáson vett fajhője [$\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$], α a folyadék térfogati hőtágulási együtthatója [$\frac{1}{\text{K}}$], ΔT a két határ közti hőmérséklet-különbség [K], d a közeg vastagsága [m], K_m a közeg hővezető-képessége [$\frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}$], η a folyadék dinamikus viszkozitása [Pa·s]. Az Ra függvény szélsőértéke adja azt a *kritikus Rayleigh-számot*, amely mellett megindul a termikus konvekció,

$$Ra_{cr} = 4\pi^2 \simeq 39,5; \tag{2.24}$$

melyet először Lapwood (1948) publikált. Ha *Rayleigh-számot* a térségünkben elhelyezkedő üledékes medencék általános kőzetfizikai, hidrodinamikai és geometriai paramétereivel becsüljük, az eredmény Ra_{cr} értékének többszöröse is lehet. Abban az esetben, ha a modell felső határa permeábilis, Ra_{cr} értéke már 27,1-re csökken (Cserepes & Lenkey, 2004). Tehát Ra_{cr} szakirodalomban közölt értékei iránymutató jellegűek, hiszen a paramétersereg és a határfeltételek együttesen befolyásolják a termikus konvekció kialakulását, intenzitását és térbeli struktúráját. Horizontálisan rétegzett közegben kialakuló konvekció esetén az áramlást Ra és az *anizotrópia koefficiens* ($\varepsilon = \frac{K_{xx}}{K_{zz}}$) együttesen határozzák meg (McKibbin & Tyvand, 1982). Cserepes és Lenkey (2004) háromdimenziós, időfüggő numerikus számításai rámutattak a kialakuló termikus konvekció megindulásának feltételeire és annak térbeli strukturáltságára. Ugyanakkor nem vizsgálták a kialakuló áramlás dinamikáját azon esetekben, mikor a közegre jellemző *Rayleigh-szám* jóval felülmúlja a kritikus értéket ($Ra \gg Ra_{cr}$).

A topográfia és a termikus konvekció által együttesen vezérelt felszín alatti vízáramlás numerikus modellezése alapvető fontosságú, hogy megértsük az összetett áramlási rendszerek működését. A Tóth-féle szintetikus egységmedence kiváló referenciát nyújt csak a topográfia és a két hajtóerő okozta együttes felszín alatti vízáramlás közötti különbségek kvantitatív jellemzéséhez.

3. A véges elemes modell

A véges elemes modell megalkotásához átgondolt geometriai felépítésre, előre definiált paraméterekre és alkalmazható fizikai alapmodulok kiválasztására volt szükség. Kutatásomban az összetett (a topográfia és a hőtranszport folyamat által közösen irányított) és a kizárólag topográfia által vezérelt felszín alatti vízáramlás közötti eltérés kvantitatív vizsgálatát kellett elvégeznem. Tehát szükségem volt egy olyan analitikus modellre, amellyel először ellenőriztem a numerikus számítás helyességét, majd számszerűsíteni tudtam a két eset közti különbséget a tér minden pontján. Ezért referenciamodellként Tóth József (1962) egységmedence koncepcióját használtam, melyet a 2.2. alfejezetben már részletesen bemutattam. Ebben a fejezetben részletezem a numerikus modell geometriai tulajdonságait, a számítások során használt fizikai paramétereket, a véges elemes rácshálóra vonatkozó beállításokat, illetve a rendszer működését leíró differenciálegyenleteket a megfelelő határ- és kezdeti feltételekkel. Ezen kívül röviden kitérek a stacionárius és az időfüggő megoldások közti eltérésekre, a numerikus számítások menetére.

3.1. Alapparaméterek és változók

A modell felépítése során először olyan paramétereket és változókat definiáltam, melyek értékét a számítások során állandónak tekintettem (kivéve a modell alsó határának T_b hőmérsékletét). A *3.1. táblázat* foglalja össze az egységmedence geometriai paramétereit, a vízre, illetve a mátrixra vonatkozó kőzetfizikai és hidrodinamikai tulajdonságokat, az alsó és a felső határ hőmérsékletét. A numerikus számítás során figyelembe vettem a víz sűrűségének hőmérsékletfüggését, amit több módon is becsülhetünk (*3.1. ábra*). A Boussinesq-approximációban használt lineáris sűrűségfüggvényt a

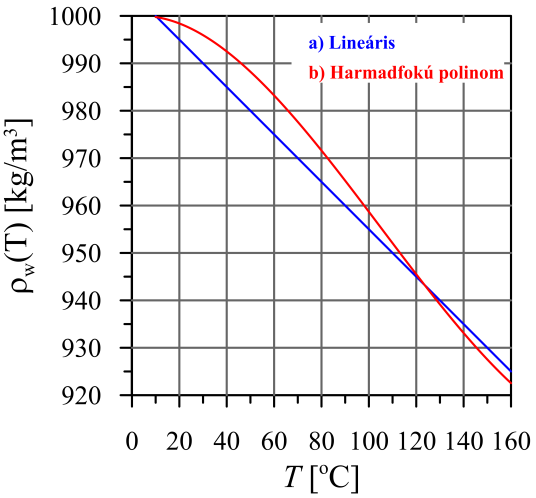
$$\rho_B(T) = \rho_0(1 - \alpha(T - T_{sf})) \tag{3.1}$$

összefüggés írja le, ahol $\rho_0(T{=}4°\mathrm{C}){=}1000\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ a víz referenciasűrűsége, $\alpha = 5{\cdot}10^{-4}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$ a víz átlagos hőtágulási tényezője a vizsgált hőmérséklettartományban és $T_{sf} = 10\ °\mathrm{C}$ a modell tetejének hőmérséklete. Habár a (3.1) egyenlet a gyakorlatban használható, matematikailag pontatlan, hiszen így a víz referencia-hőmérsékletét $T_{sf} = 10\ °\mathrm{C}$-on rögzítjük. A numerikus számítások során a víz sűrűségfüggvényét egy harmadfokú

polinommal adtam meg (Molson & Frind, 2016), ahol $T_r = 4$ °C és

$$\rho_w(T) = \rho_0[1 + [-6,562 \cdot 10^{-6} + 2,166 \cdot 10^{-8}(T - T_r)](T - T_r)^2]. \tag{3.2}$$

Tehát a hőmérséklet-különbség (ΔT) növelésével a mélyebb tartományokban egyre kisebb lesz a víz sűrűsége, nő a felhajtóerő, így megindulhat a felszín alatti víz sűrűségkülönbsége okozta áramlás. Diplomamunkámban a következő hőmérséklet-különbség értékek szisztematikus tesztelésével vizsgáltam a felszín alatti vízáramlás tulajdonságait: $\Delta T = T_b - T_{sf} = 0; 10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90; 100; 110; 120; 130; 140; 150$ °C. A litofszférában előforduló valós nyomásokon a víz forráspontja megnő, ami magyarázza a $\Delta T > 90$ °C hőmérséklet-különbségéggel rendelkező modellek relevanciáját. A numerikus számítások során további paraméterek hőmérsékletfüggése is figyelembe vehető (pl.: dinamikus viszkozitás ($\eta(T)$) (Jame & Norum, 1980), stb.), azonban vizsgálatom során ezeket a hatásokat elhanyagolhatónak tekintettem a sűrűség változása mellett.



3.1. ábra. *A vízsűrűség hőmérsékletfüggése (a) Boussinesq-approximációban használt lineáris ($\rho_B(T)$), illetve (b) harmadfokú polinom sűrűségfüggvénnyel ($\rho_w(T)$).*

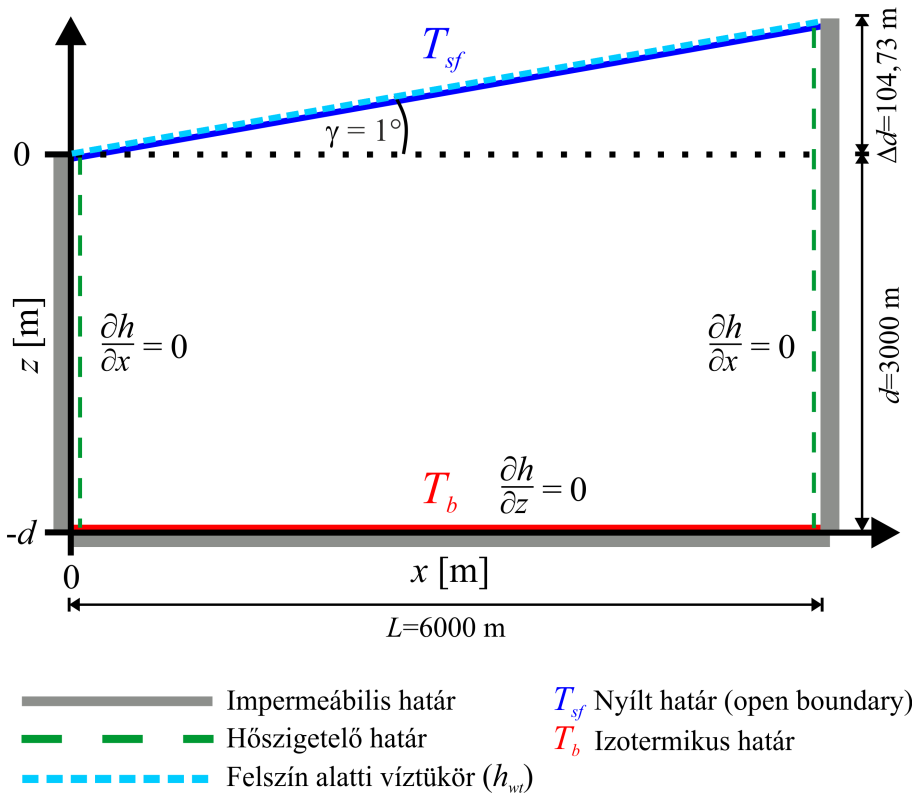
3.2. Geometria felépítése, rácsháló generálása

A modell az egységmedence koncepciónak (Tóth, 1962) megfelelően egy kétdimenziós, közel téglalap alakú, homogén, izotróp közeg, ahol a lejtő meredeksége γ=1°. Az egységmedence felszínének legmélyebb pontját (a kiáramlási terület szélét) választottam referenciamagasságnak, ahol z=0 m. A medence szélessége L=6000 m, míg a referenciamagasságtól mért vastagsága d=3000 m. Így a lejtő legmagasabb pontja közelítőleg Δd=104, 73 m-rel helyezkedik el a referenciamagasság felett (*3.2. ábra*). A véges elemes numerikus módszer alkalmazásakor a teret véges számú, egymáshoz kapcsolódó elemre osztjuk fel (Zimmerman, 2006). A szoftver az elemek kapcsolódási pontjaiban, határvonalaiban és az elemeken belül oldja meg a problémát. A véges

Paraméterek	**Jelölés**	**Érték**	**Mértékegység**
Az egységmedence szélessége	L	6000	m
Az egységmedence vastagsága	d	3000	m
A lejtő meredeksége	γ	1	°
A referenciamagasság feletti vastagság	Δd	104,73	m
A modell felső határának hőmérséklete	T_{sf}	10	°C
A modell alsó határának hőmérséklete	T_b	10–160	°C
A kőzet porozitása	ϕ	0,2	1
A közeg hidraulikus vezetőképessége	K	10^{-5}	m/s
A víz referenciasűrűsége	ρ_0	1000	kg/m^3
A víz hővezető-képessége	K_w	0,6	W/(m·K)
A víz fajhője (p=állandó)	c_{pw}	4200	J/(kg·K)
A víz dinamikai viszkozitása	η	$5 \cdot 10^{-4}$	Pa·s
A mátrix sűrűsége	ρ_{ma}	2600	kg/m^3
A mátrix hővezető-képessége	K_{ma}	3,6	W/(m·K)
A mátrix fajhője (p=állandó)	c_{pma}	900	J/(kg·K)
A nehézségi gyorsulás (COMSOL 5.2)	g	9,80665	m/s^2

3.1. táblázat. *Az egységmedence geometriai tulajdonságai, a definiált kőzetfizikai, hidrodinamikai, anyagfizikai paraméterek és egyetemes állandók.*

elemeken belül a megoldást másodfokú Legrende-polinommal közelíti. A rácsháló (*mesh*) generálásakor célszerű optimális felbontást (*extremly fine*) elérni a modell teljes területén és határain is. Így az egész teret háromszög alakú (*free triangular*) véges elemekkel diszkretizáltam, melyek maximális mérete 20 (ΔT=0–110 °C), majd 10 m (ΔT=120–150 °C) volt. Ezekkel a beállításokkal az egyeségmedence modellre vonatkozó véges elemek száma először 123˙826, majd 515˙843 darabnak adódott. A későbbiekben a verifikált stacionárius modell, illetve a topográfia és a termikus konvekció által együttesen vezérelt felszín alatti vízáramlás tulajdonságait megegyező rácsfelbontás mellett hasonlítottam össze (ld. 4. fejezet).



3.2. ábra. *A kétdimenziós numerikus modell geometriája, ahol* 6000 m *az egységmedence szélessége (L),* 3000 m *a medence mélysége (d), illetve* 140, 73 m *a lejtő teje és a referenciamagasság közötti különbség (*Δd*). A modell alját* T_b*=10–160 °C esetenként változó izotermikus, tetejét* $T_{sf} = 10\,°\mathrm{C}$ *hőmérsékletű, hőtani szempontból nyílt határ (open boundary) definiálja ((3.8) egyenlet). A modell oldalsó határai impermeábilisak, illetve hőszigetelők. A lejtő tízszeresen túlmagasított.*

3.3. Fizikai háttér

A topográfia és a hőtranszport által együttesen vezérelt felszín alatti vízáramlást leíró differenciálegyenleteket a 2. fejezetben tárgyaltam, melyek szoftverspecifikus alakját és összekapcsolását ebben az alfejezetben mutatom be. A COMSOL Multiphysics 5.2 modulokba rendezi a különböző fizikai problémákhoz tartozó differenciálegyenlet-rendszereket, melyeket előre definiált paraméterek beágyazásával oldhatunk meg. Munkám során a *Darcy's Law*, azaz a porózus közegben történő folyadékáramlásra, illetve a *Heat Transfer in Porous Media*, tehát a porózus közegre vonatkozó hőtranszport folyamatokat leíró modult használtam fel.

3.3.1. Darcy's Law modul

A modul a termikus felhajtóerőt is figyelembe vevő (2.2) Darcy-egyenletettel végzi el a számítást (*gravity effects*):

$$\mathbf{u} = -\frac{K}{\rho_w(T)g}(\nabla p + \rho_w(T)g\nabla z) \tag{3.3}$$

ahol K a közeg hidraulikus vezetőképessége $[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$, $\rho_w(T)$ a pórustérben áramló felszín alatti víz hőmérsékletfüggő sűrűsége $[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}]$, g a nehézségi gyorsulás értéke $[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$, p a hidrosztatikus nyomás [Pa], z a helyzeti magasság (eleváció) [m]. Így az algoritmus a (3.3) összefüggést használja a (2.15) kontinuitási egyenletben. A modul előnye, hogy az összetett topográfia által vezérelt felszín alatti vízáramlásra a modelltér teljes egészén megoldást ad (Magyar, 2016). Tehát a Tóth-féle egységmedence esetében a referenciamagasság feletti tartományban is valós megoldást ad a hidraulikus emelkedési magasságeloszlásra.

3.3.2. Heat Transfer in Porous Media modul

A modul előnye, hogy együttesen kezeli magában a mátrixban és a pórustérben zajló hőterjedést. A szoftver a következő alakban felírt hőtranszport egyenletet oldja meg,

$$(\rho c_p)_e \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_w(T) c_{pw} \mathbf{u} \nabla T = \nabla(k_e \nabla T) + Q \tag{3.4}$$

ahol e index jelöli a teljes közegre (mátrix és pórusvíz) vonatkozó térfogatátlagolt mennyiséget, ρ a közeg együttes sűrűsége $[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}]$, c_p a közeg állandó nyomáson vett fajhője $[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}]$, T a közeg hőmérséklete [K], t az idő [s], $\rho_w(T)$ a pórustérben áramló felszín alatti víz hőmérsékletfüggő sűrűsége $[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}]$, c_{pw} a víz állandó nyomáson vett fajhője $[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}]$, $\mathbf{u}$ a Darcy-fluxus $[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$, Q a térfogati hőtermelés $[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^3}]$ és k_e a közeg együttes hővezető-képessége $[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}}]$. Az egyenlet első tagja a hőmennyiség időbeli megváltozását, a második a pórustérben áramló felszín alatti víz által vezérelt advekciót (hőszállítást), a harmadik a kondukciót (hővezetést), míg az utolsó tag a belső hőtermelést írja le. Az egyenlet utolsó tagját a modellezés során figyelmen kívül hagytam, hiszen az egységmedencében hőforrást nem definiáltam. A (3.4) egyenletben megjelenő térfogatátlagot mennyiségeket a *3.1. táblázatban* összefoglalt értékekkel számítottam.

3.4. Határ- és kezdeti feltételek

A *Darcy's Law* és a *Heat Transfer in Porous Media* modult a mindkét differenciálegyenletben ((3.3) és (3.4) egyenlet) felhasznált Darcy-fluxus ($\mathbf{u}$) és a hőmérsékletfüggő vízsűrűség ($\rho_w(T)$) segítségével kapcsoltam össze. A differenciálegyenletrendszert a fizikai folyamatoknak megfelelő határ- és kezdeti feltételekkel egészítettem ki.

Az eredeti egységmedence modell alapján (Tóth, 1962), az oldalsó és alsó határok impermeábilisnak tekinthetőek, így az ott jelentkező normálirányú áramlás intenzitása zérus,

$$-\mathbf{n} \cdot \rho_w(T)\mathbf{u} = 0 \tag{3.5}$$

ahol $\mathbf{n}$ az adott oldalra merőleges irányú egységvektor. Az oldalsó határokat hőtani szempontból szigetelőként definiáltam,

$$-\mathbf{nq} = 0 \tag{3.6}$$

ahol $\mathbf{q}$ a hőáram $[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}]$. Az alsó határt T_b izotermikus hőmérsékleten rögzítettem, ahol $T_b = 10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90; 100; 110; 120; 130; 140; 150; 160$ °C volt. A felső határfeltétel maga a lineárisan lejtő topográfia, amit a felszín alatti víztükörnek feleltethetünk meg (γ=1°),

$$h_{wt} = x \tan(\gamma). \tag{3.7}$$

A modelltartomány teteje hőtani szempontból nyílt határként (*open boundary*) értelmezhető, így a feláramlással érkező felszín alatti víz tetszőleges hőmérsékleten csapolódhat meg a víztükörben. Ahol leáramlás történik, ott a hőmérséklet mindig T_{sf}=10 °C,

$$\begin{aligned} T = T_{sf},\ \text{ha} \quad & \mathbf{nu} < 0 \\ -\mathbf{nq} = 0,\ \text{ha} \quad & \mathbf{nu} \geq 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Az időfüggő modellszámítások kezdeti feltétele minden esetben – az adott T_b-nek megfelelő – $T_c(x, z)$ konduktív hőmérsékleteloszlás volt. Kezdeti feltételként nem írtam elő szabályos hőmérsékleti perturbációt!

3.5. Stacionárius és időfüggő megoldás

A szisztematikus vizsgálat előtt elvégeztem a numerikus modell verifikálását a Tóth-féle egységmedence folyadékpotenciál eloszlását leíró analitikus megoldás segítségével. Ebben az esetben egy perturbációs, majd egy valós kiterjedésű lejtővel jellemezhető egységmedence hidraulikus emelkedési magasságeloszlását számítottam numerikus módon. A rendszernek – csak a topográfia vezérelt felszín alatti vízáramlást figyelembe véve – stacionárius megoldása van, így azt össze tudtam vetni az analitikus megoldással. Az előzetes tesztelések során azonban kiderült, hogy a topográfia és a hőtranszport által együttesen vezérelt felszín alatti vízáramlásnak – a *3.1. táblázatban* közölt paraméterek, illetve kezdeti és határfeltételek mellett – általában nincs stacionárius megoldása. A γ=1 $^\circ$ szöggel leírt lejtő igen csekély térbeli megszorítást biztosít a termikus konvekció stuktúrájára vonatkozóan, így a rendszer működését csak időfüggő megoldással tudtam jellemezni. A számítás kvázistacionárius megoldásaira a későbbiek során térek ki (4. fejezet). Mindegyik modellt $t = 0 - 5 \cdot 10^6$ nap [d] között ($\sim 13{\cdot}700$ évig) vizsgáltam. A modellszámítás során először 10^5 napig [d] tíz hatványaival növekvő, majd konstans maximális iterációs időlépést (Δt_s) használtam (*3.2. táblázat*). A hőmérséklet-különbség (ΔT) és a térbeli felbontás növelésével (*mesh*) a számítás CPU ideje jelentősen megnövekedett, akár több napot is igénybe vett, valamint 13 GB memóriát használt az Intel szerveren.

Hőmérséklet-különbség (ΔT)	Δt_s 10^5 napig [d]	Δt_s 10^5 nap után [d]
$0 - 100$°C	$10^{(0;0,5;5)}$	3000
$110 - 130$°C	$10^{(0;0,5;5)}$	2000
$140 - 150$°C	$10^{(0;0,5;5)}$	1000

3.2. táblázat. *A modellszámítások során beállított maximális iterációs időlépések (Δt_s), ahol ΔT a modell alsó (T_b) és felső (T_{sf}) határa közötti hőmérsékletkülönbség.*

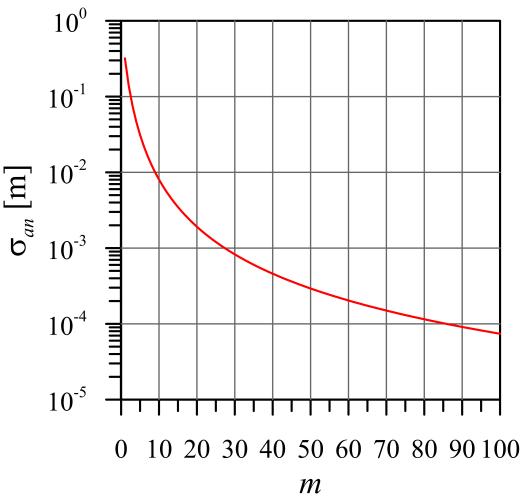
Összefoglalva, az ismertetett geometrai tulajdonságok, kőzetfizikai és hidrodinamikai paraméterek gondos megválasztásával állítottam elő a véges elemes numerikus modellt. A *3.1. táblázatban* található paraméterek értékét a számítások során nem változtattam, kivéve az alsó határ hőmérsékletét. Az időfüggő modellszámításokat minden esetben a rájuk jellemző konduktív hőmérsékleteloszlásból indítottam, majd a *3.2. táblázatban* összefoglalt maximális iterációs időlépéseket használtam.

4. Eredmények

A fejezet elején kitérek a numerikus modell verifikálására, majd ismertetem a topográfia és a termikus konvekció által együttesen vezérelt felszín alatti vízáramlás modellezése során elvégzett számításaim eredményeit. A modell alsó és felső határa közti hőmérséklet-különbség ($\Delta T = T_b - T_{sf}$) növelésével különböző módszerek segítségével mutatom be a termikus konvekció megindulásának feltételeit, valamint a hidraulikus emelkedési magasságeloszlásra gyakorolt hatását. Ezen kívül Fourier-analízissel vizsgálom a rendszer dinamikai tulajdonságait, majd elkülönítem azokat a térrészeket, ahol a termikus konvekció gyengén, illetve erősen befolyásolja a felszín alatti vízáramlást.

4.1. A numerikus modell verifikálása

A eredeti Tóth-féle egységmedence tetszőleges pontjában számított hidraulikus emelkedési magasság értéke a (2.21) egyenlettel adható meg. Azonban ez az összefüggés kizárólag a topográfia vezérelt felszín alatti vízáramlás esetén a referenciamagasság alatti téglalaptartományban ($z \leq 0$ m) ad valós megoldást (*2.3. ábra*). Az analitikus megoldás vizsgálatához MATLAB R-2014a környezetet használtam. A (2.21) egyenlet harmadik tagjában szereplő összegzés felső határát ($m \to \infty$) olyan pozitív egész számhoz kellett rögzítenem, ami már elhanyagolható járulékot adott az összegzés előző tagjaihoz képest. Az egyre magasabb rendű közelítéssel számított hidraulikus emelkedési magasság értékek közti átlagnégyzetes eltérés értéke a tér minden pontján az alábbi összefüggéssel adható meg (*4.1. ábra*),

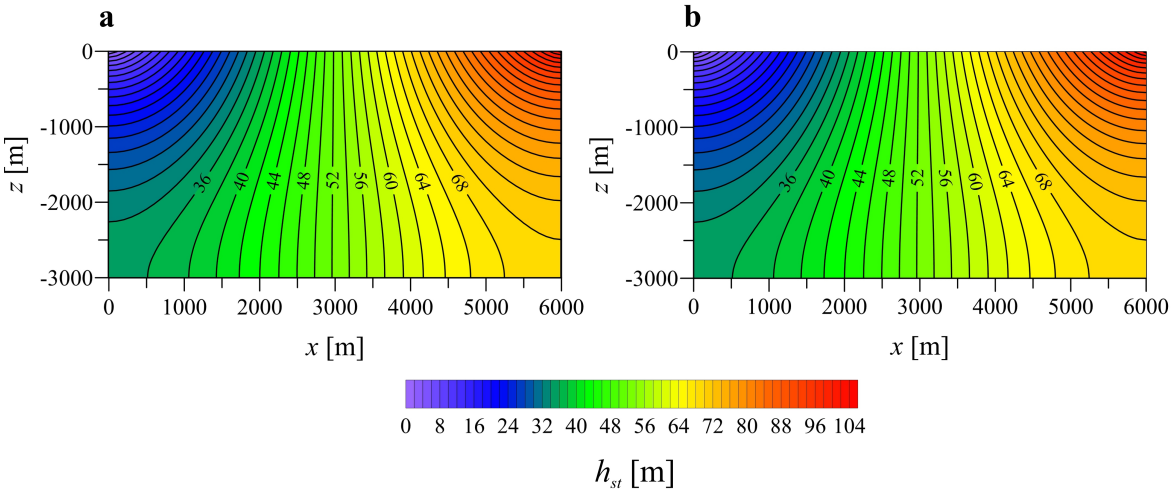


4.1. ábra. *Az analitikus megoldás egyre magasabb rendű közelítéssel számított eredményei közti átlagnégyzetes eltérés (σ_{an}) m index függvényében ((2.21) egyenlet).*

$$\sigma_{an}(m) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}[h_{i,j}(m+1) - h_{i,j}(m)]^2}{(M-1)N}} \tag{4.1}$$

ahol i a horizontális, j a vertikális irányba növekvő futóváltozó, M és N a horizontális és vertikális felbontást meghatározó állandók és m az analitikus megoldásban ((2.21) egyenlet) felírt összegzés. A hidraulikus emelkedési magasság értékekre vonatkozó átlagnégyzetes eltérés $m = 100$ esetén csupán $7,399 \cdot 10^{-5}$ m-nek adódott, ami már elhanyagolható különbségnek tekinthető. Így az analitikus és a numerikus modell összehasonlítása során is $m = 100$ felső határig végeztem el az összegzést (Tóth, 1962).

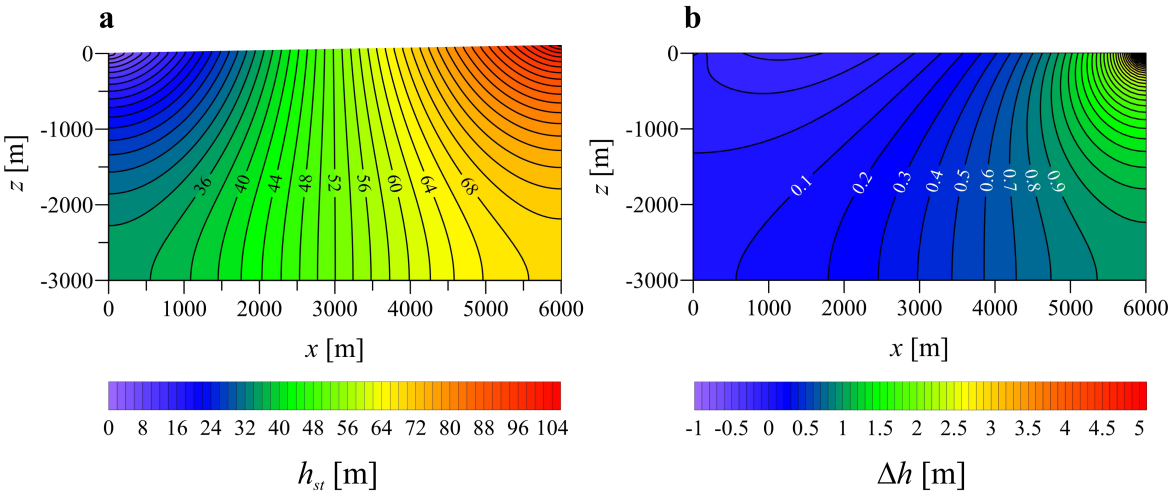
A numerikus számítás első, nélkülözhetetlen lépése az volt, hogy a véges elemes alapmodell hidraulikus emelkedési magasság értékeit – kizárólag a lejtő okozta topográfiai különbséget figyelembe véve – összevetettem az analitikus megoldással. Először Tóth egységmedence koncepciójával analóg módon, egy téglalap alakú numerikus modellt hoztam létre, ahol az alsó és oldalsó határokat impermeábilisnek tekintettem, és a felszín alatti víztükör helyzetét – mint felső határfeltétel – a horizontális felső határon írtam elő (ld. 2.2. alfejezet). Ebben az esetben a numerikus számítás időfüggetlen, stacionárius megoldást adott a rendszer működésére ((3.3) egyenlet). Az analitikus és a legegyszerűbb geometriával jellemezhető numerikus modell teljes területére vonatkozó hidraulikus emelkedési magasság eloszlását a *4.2.a* és *b ábra* mutatja. A két modell azonos pontjaiban kiszámítottam a hidraulikus emelkedési magasság értékek közti különbséget.



4.2. ábra. *(a) A hidraulikus emelkedési magasságeloszlás analitikus és (b) numerikus megoldása a téglalap alakú egységmedencében. A topográfia vezérelt stacionárius modellek hidraulikus emelkedési magasságát h_{st} jelöli.*

A teljes területre vonatkozó átlagnégyzetes eltérés mindösszesen $2,467 \cdot 10^{-3}$ m volt. A téglalaptartomány jobb felső sarkában (a valós kiterjedés nélküli lejtő tetején) tapasztalható maximális eltérés $0,105$ m-nek adódott, ami az átlagos hidraulikus emelkedési maggasság ($\frac{h_{max}}{2} = 52,365$ m) $0,20\%$-a. Tehát ilyen egyszerű geometriájú elrendezés esetén a két modell eredményei közti különbség nem számottevő, így a verifikáció sikeresnek tekinthető. Az eredmény alapján kijelenthető, hogy a numerikus modell alkalmas a felszín alatti vízáramlás vizsgálatára.

A tesztelés során azt is megvizsgáltam, hogy a valós γ=1°-os felszíni lejtéssel rendelkező numerikus modell megoldása (*4.3.a ábra*) mennyire tér el a vízszintes felső határral jellemzett analitikus modelltől. Mivel a két modell eltérő, ezért itt nagyobb különbségre számítottam. A hidraulikus emelkedési magasság átlagnégyzetes eltérése $0,702$ m-nek, a maximális eltérése pedig 5 m-nek adódott. Tehát az eltérés ott a legnagyobb, ahol a két modell jobban különbözik, vagyis a modellek jobb felső tartományában. Ugyanakkor az eltérés a teljes modellben megmutatkozik (*4.3.b ábra*). A vizsgálat rámutatott arra, hogy a numerikus modellekben több m-es hidraulikus emelkedési magasságeltérést okozhat, ha a felső határt vízszintesnek (Tóth, 1962) tekintjük a valós felszín alatti víztükör helyett. A további numerikus modellekben, ahol a hőmérséklet változás hatását is figyelembe veszem, a felső határ minden esetben γ=1° lejtéssel bír.



4.3. ábra. *(a) A hidraulikus emelkedési magasságeloszlás valós kiterjedésű lejtővel rendelkező egységmedence esetén. (b) A hidraulikus emelkedési magasság értékek közti különbség ($\Delta h = h_{num} - h_{an}$) (a) a valós geometriájú numerikus modell és az analitikus megoldás (4.2.a ábra) között az eredeti téglalap alakú tartományon.*

4.2. Termikus konvekció az egységmedencében

A homogén, izotróp, kétdimenziós modell felső és alsó határa közötti hőmérséklet-különbség növelésével (ΔT =10–150 °C) először kvalitatív módon jellemzem az egységmedencében kialakult hőmérsékleteloszlást. A számítások kezdeti feltétele az adott T_b hőmérsékletnek megfelelő konduktív hőmérsékletprofil ($T_c(x, z)$), amit a topográfia okozta felszín alatti vízáramlás módosít. A kérdés, hogyan befolyásolja ez az állandó intenzitással jelentkező felszín alatti vízáramlás a kezdeti hőmérsékleteloszlást, valamint milyen feltételek mellett alakul ki termikus konvekció az egységmedencében.

A *4.4.* és a *4.5.* ábra az egységmedencében kialakuló hőmérsékleteloszlást mutatja $\Delta T = 20\,^{\circ}\mathrm{C}$ és $\Delta T = 80\,^{\circ}\mathrm{C}$ hőmérséklet-különbség esetén. Az ábrákon $t = 10^6$ napig tüntettem fel a kezdeti konduktív ($t = 0$) és az állandó intenzitású felszín alatti vízáramlás módosította hőmérsékleteloszlást. Kis hőmérséklet-különbség esetén a felszín alatti vízáramlást szinte teljes mértékben a topográfia okozta hidraulikus emelkedési magasság változása irányítja. A beáramlási zónában beszivárgó hideg víz kisepri a konduktív profilnak ($T_c(x, z)$) megfelelő nagyobb hőmérsékletű felszín alatti vizet, így a melegebb részek a kiáramlási terület alatti és a termikus határréteghez közeli mélyebb tartományokra szorulnak vissza (*4.4. ábra*). Ez a jelenség az izotermikus alsó és szigetelő oldalsó határfeltételeknek köszönhető. Ilyen kis ΔT esetén a hőmérséklet érdemben nem befolyásolja az áramlást, így t=10^6 nap után a megoldás stacionárius állapotba ér. A topográfia által vezérelt vízáramlásban a hőtranszport advektív tagja domináns. Habár nagyobb, $\Delta T = 80\,^{\circ}\mathrm{C}$ hőmérséklet-különbség esetén $t = 3 \cdot 10^5$ napig szintén csupán stacionárius hőszállítás figyelhető meg a medence teljes tartományán, $t = 4 \cdot 10^5$ napnál már megindul az időfüggő termikus konvekció (*4.5. ábra*). A jelenség először a kiáramlási terület alatt azonosítható, melyet sok kisebb – a beáramlási terület felől balra sodródó – meleg feláramlás (*plume*) követ. Ezzel egy időben kialakul a beáramlási terület alatt jelentkező, folyamatos fel-le mozgást végző nagyobb hőoszlop is, mely az egész rendszer működését befolyásolja. A termikus konvekció megindulását követően – amikor a hőmérsékleteloszlás érdemben befolyásolja az áramlást – a rendszer működését kizárólag időfüggő megoldásokkal lehet jellemezni. (A rendszerben tapasztalható időfüggő változások részletes vizsgálatát a 4.4. alfejezetben tárgyalom). Noha a konvekció az izotermikus határréteg és az oldalsó határok közelében helyenként növe-

li a közeg hőmérsékletét, a topográfia irányította felszín alatti vízáramlás okozta hőszállítás döntően hűti a modell felső tartományait. Ez alól csak a kiáramlási terület képez részben kivételt, ahol folyamatos meleg feláramlás azonosítható. Tehát a modellre jellemző rögzített paraméterek mellett, a ΔT-nek létezik egy kritikus értéke, ahol megindul az időfüggő termikus konvekció.

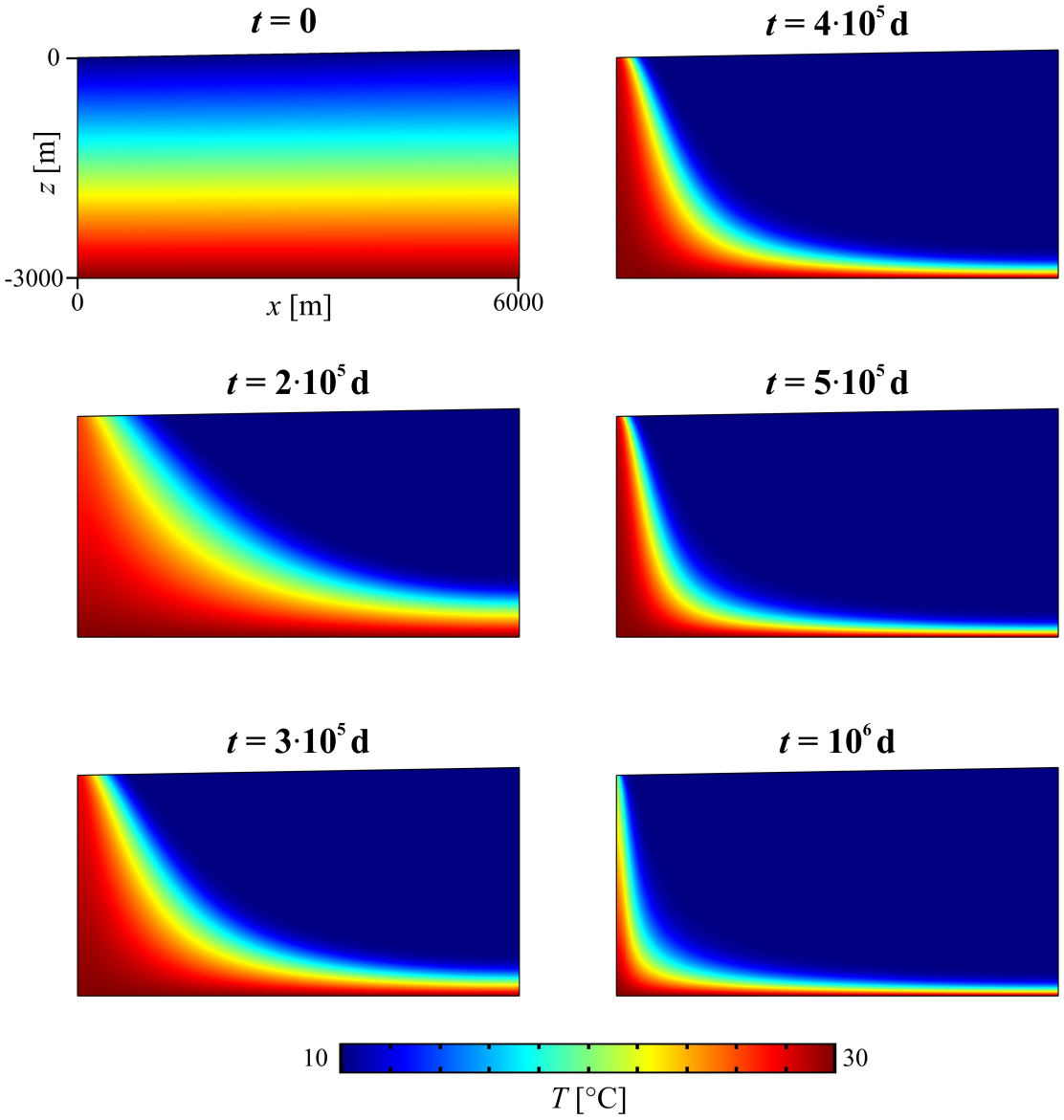
A termikus konvekció megindulása, intenzitása és térbeli strukturáltsága legegyszerűbben a dimenziótlan *Rayleigh-számmal* (*Ra*) jellemezhető (Graham & Steen, 1994); (Otero *et al.*, 2004); (Hewitt *et al.*, 2014), mely a mátrix kőzetfizikai, a pórusfluidum hőtani paramétereinek, valamint a modell geometriai tulajdonságainak együttes konfigurációja (Lapwood, 1948). A numerikus modellek eredményeinek vizsgálata során a (2.23) egyenlet módosított alakját használtam fel,

$$Ra = \frac{K \rho_0 c_{pf} \alpha \Delta T d}{K_m} \tag{4.2}$$

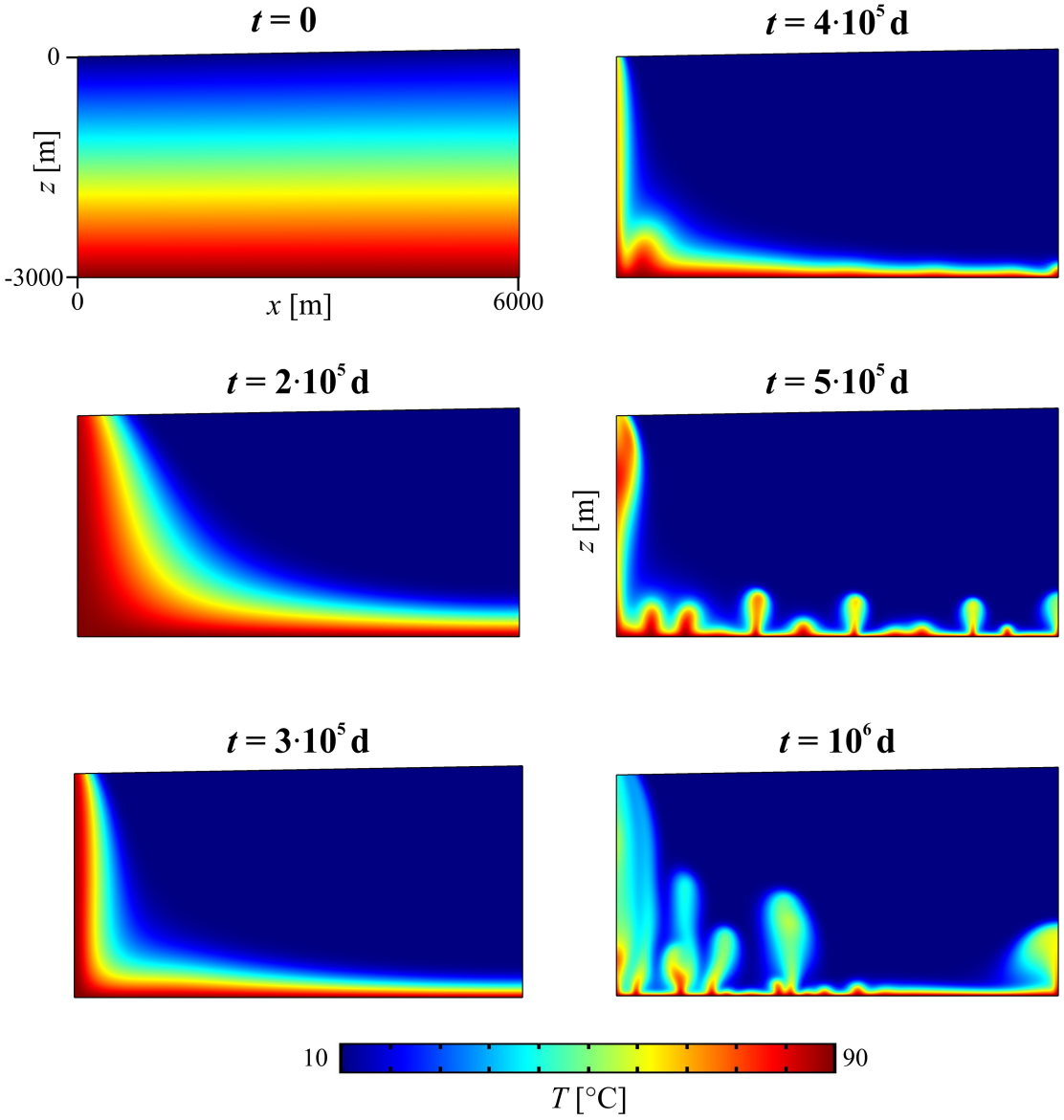
ahol K a közeg hidraulikus vezetőképesség [10^{-5} $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$], ρ_0 a víz T_r=4 °C-hoz rögíztett referenciasűrűsége [1000 $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$], c_{pf} a víz állandó nyomáson vett fajhője [4200 $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg \cdot K}}$], α a víz térfogati hőtágulási együtthatója [$\frac{1}{\mathrm{K}}$], ΔT a modell alja és teteje közötti hőmérséklet-különbség [10–150 °C], d a közeg vastagsága [$\sim$ 3000 m] és K_m a közeg hővezető-képessége [3 $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m \cdot K}}$]. A víz térfogati hőtágulási együtthatóját – amit a numerikus számítás közvetlenül nem használ – az

$$\alpha = \frac{1 - \frac{\rho_w(T=T_b)}{\rho_w(T=T_{sf})}}{\Delta T} \tag{4.3}$$

egyenlettel határoztam meg, ahol $\rho_w(T{=}T_b)$ a víz sűrűsége az alsó határ T_b hőmérsékletén ((3.2) egyenlet alapján). A numerikus vizsgálat során – a (4.2) egyenletben felírt paramétereket állandó értéken tartva (*3.1. táblázat*) – a hőmérséklet-különbség értékét szisztematikusan változtatva (ΔT=0; 10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90; 100; 110; 120; 130; 140; 150°C) figyeltem a rendszerben kialakuló termikus konvekció jellemzőit. Az eltérő hőmérséklet-különbséggel rendelkező modellekhez tartozó *Ra* értékeket a *4.1. táblázatban* foglaltam össze. Noha Clauser és Villinger (1990) kétdimenziós, valamint Cserepes és Lenkey (2004) háromdimenziós numerikus modelljeikben részletesen vizsgálták a termikus konvekció megindulásának feltételeit és térbeli strukturáltságát, a folyamat megindulását kezdeti periodikus hőmérsékleti perturbációval segítették. A szakirodalomban közölt Ra_{cr} értékek (a termikus kon-



4.4. ábra. *A lineárisan lejtő felszín alatti víztükörrel jellemezhető (valós) egységmedencében kialakuló hőmérsékleteloszlás t=0 (konduktív hőmérsékletprofil) és t=10^6 [d] között ΔT = 20 °C hőmérséklet-különbség esetén (T_{sf} = 10 °C és T_b = 30 °C).*



4.5. ábra. *A lineárisan lejtő felszín alatti víztükörrel jellemezhető (valós) egységmedencében kialakuló hőmérsékleteloszlás t=0 (konduktív hőmérsékletprofil) és* t=10^6 [d] *között,* ΔT=80 °C *hőmérséklet-különbség esetén.*

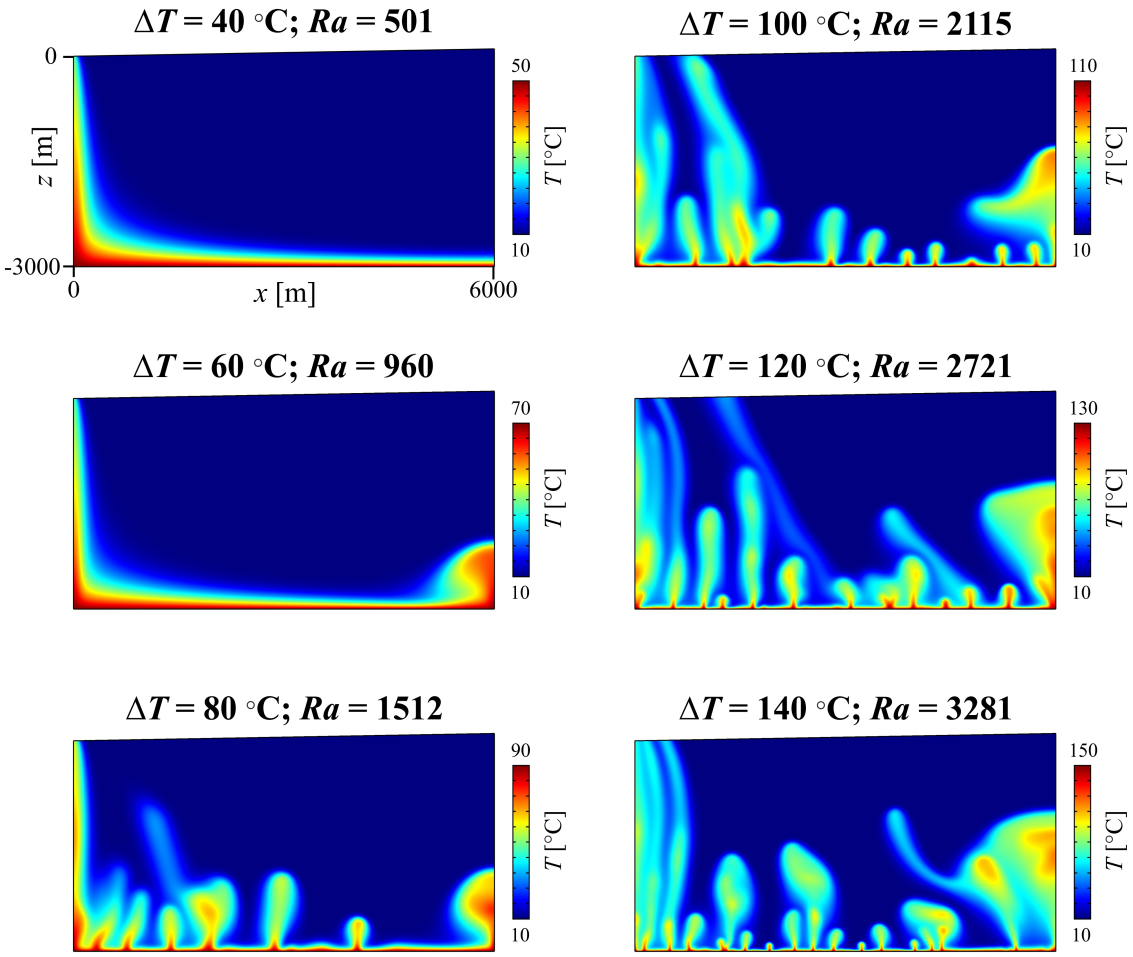
ΔT [°C]	*Ra* [1]	**ΔT** [°C]	*Ra* [1]	**ΔT** [°C]	*Ra* [1]
10	67	60	960	110	2420
20	171	**70**	**1227**	120	2721
30	317	80	1512	130	3011
40	501	90	1810	140	3281
50	717	100	2115	150	3527

4.1. táblázat. *Az eltérő ΔT hőmérséklet-különbség értékekkel rendelkező, időfüggő modellekhez számított Rayleigh-szám (Ra) a (4.2) egyenlet alapján.*

vekció megindulásához szükséges kritikus *Rayleigh-számok*) jóval kisebbek, mint a *4.1. táblázatban* találhatóak.

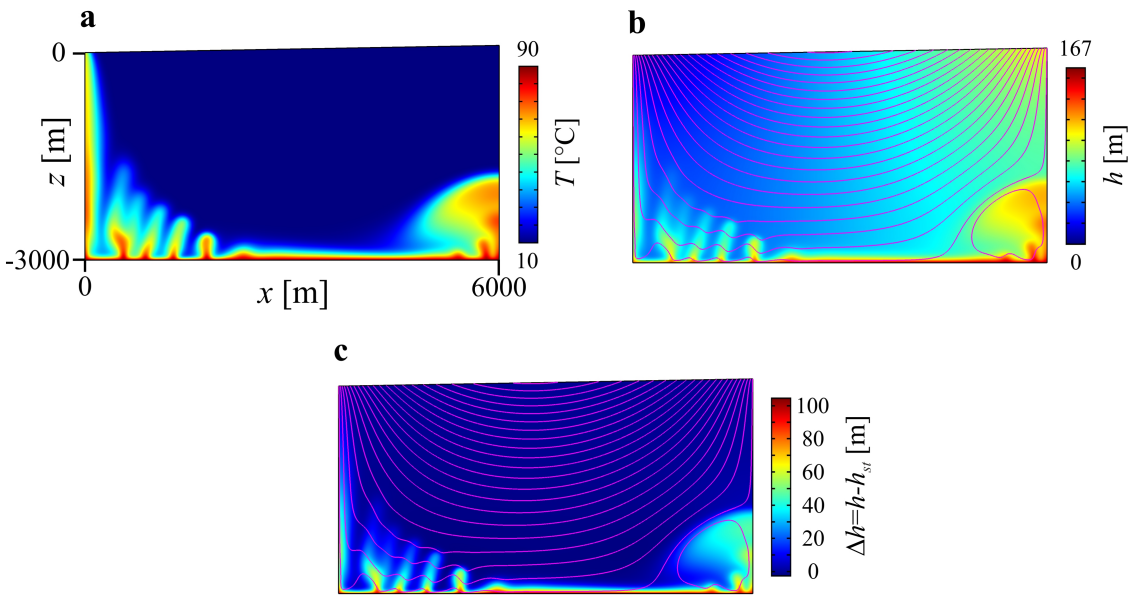
A *4.6. ábra* az egységmedencében kialakuló hőmérsékleteloszlást mutatja $t = 4 \cdot 10^6$ d elteltével különböző ΔT esetében. ΔT=40 °C különbségig döntően a topográfia által hajtott felszín alatti vízáramlás advekciója befolyásolja a hőmérsékleteloszlást a teljes modelltartományon, a végeredmény mindig stacionárius. Azonban ΔT=60 °C esetén – egy viszonylag rövid ideig tartó tranziens jelenség után – a termikus felhajtóerő és a beszivárgási zónában lefelé áramló hideg víz a beáramlási terület alatt kiegyenlíti egymás hatását. Az így képződő hőoszlop stacionárius, a rendszer dinamikus egyensúlyban van. Nagyobb hőmérséklet-különbség esetén (ΔT=80; 100; 120; 140 °C) a termikus konvekció egyre hevesebbé válik, így a pozitív hőmérsékleti anomália az egységmedence sekélyebb tartományaiban is észlelhető. A beáramlási terület alatt elhelyezkedő hőoszlop egyre nagyobb mértékű függőleges irányú oszcilláló mozgást végez. A hőmérséklet-különbség növelésével a folyamat felgyorsul, egyre több, kisebb méretű feláramlás sodródik a beáramlási terület felől, ami időben változó meleg feláramlást eredményez a kiáramlási területen.

A *4.7.a ábra* az egységmedencében tapasztalható hőmérséklet, b a hidraulikus emelkedési magasság (h) és c a hidraulikus emelkedési magasság különbség eloszlását (Δh) mutatja ΔT=80 °C-nál és t=2 · 10^6 d után. A hidraulikus emelkedési magasság különbséget a hőtranszport egyenletet figyelmen kívül hagyó stacionárius megoldáshoz képest számítottam, ahol $\Delta h = h - h_{st}$ (ld. 4.1. alfejezet). Általánosan elmondható, hogy a hidraulikus emelkedési magasság változása követi a homogén izotróp közegben létrejövő hőmérsékleteloszlást (termikus konvekciót). A maximális hidraulikus emelkedési magasság (h_{max}) elérheti a 167 m értéket is a termikus határrétegben. Így a különbség értéke ott Δh=105 m, ami



4.6. ábra. *Az egységmedencében kialakuló hőmérsékleteloszlás* $t = 4 \cdot 10^6$ *napnál* [d], *ahol* ΔT=40; 60; 80; 100; 120; 140 °C *a modell alja és teteje közötti hőmérséklet-különbség, illetve Ra az adott modellre jellemző Rayleigh-szám.*

csökken az egységmedence sekélyebb tartományai felé haladva. Tehát a hőmérséklet-különbség növelésével a konvekció egyre erősebben módosítja a topográfiai különbség által vezérelt felszín alatti vízáramlást, melyet a hidraulikus emelkedési magasság értékek (h) is mutatnak. Így a medence mélyebb tartományaiban a két hajtóerő együttes hatása érvényesül, melyet az időfüggő termikus konvekció által létrehozott hőoszlopok helyzete és kiterjedése határoz meg. A hidraulikus emelkedési magasság megváltozása közvetetlen kapcsolatban van az egységmedencében kialakuló pozitív hőmérséklet-anomáliával, tehát a hidraulikus emelkedési magasság ott változik jelentősen, ahol a konvekció hőoszlopok kialakulását eredményezi. Azonban az időfüggő termikus konvekció és a hidraulikus emelkedési maggasság kapcsolatát zárt alakban



4.7. ábra. *A $\Delta T = 80\,^{\circ}\mathrm{C}$ hőmérséklet-különbséghez tartozó (a) hőmérséklet, (b) hidraulikus emelkedési magasság (h), illetve (c) hidraulikus emelkedési magasság különbség eloszlása ($\Delta h = h - h_{st}$), $t = 2 \cdot 10^6$ d után. A felszín alatti vízáramlás irányát magenta színű vonal jelöli.*

nem lehet pontosan leírni.

Ebben az alfejezetben bemutattam, hogy a kétdimenziós, homogén, izotróp egységmedencében – a 3. fejezetben ismertetett paraméterek, határ- és kezdeti feltételek mellett – elegendően nagy hőmérséklet-különbség esetén megindul az időfüggő termikus konvekció. A hőmérséklet-különbség növelésével a termikus konvekció hevesebbé válik, és egyre nagyobb amplitúdójú vertikális kiterjedéssel mozog. A létrejövő meleg feláramlások helyzete közvetlen kapcsolatban áll a hidraulikus emelkedési magasság eloszlásának változásaival. Így az időfüggő termikus konvekció módosítja a topográfia vezérelt felszín alatti vízáramlást, nagyobb ΔT esetén akár a modell sekélyebb tartományaiban is.

4.3. A termikus konvekció kvantitatív vizsgálata

Az előző alfejezetben a hőmérsékleteloszlás, a hidraulikus emelkedési magasság és annak megváltozása segítségével világítottam rá a két hajtóerő által együttesen vezérelt felszín alatti vízáramlás vizsgálatának jelentőségére. Azonban a kvalitatív értelmezés önmagában nem szolgál megbízható információval a termikus konvekció

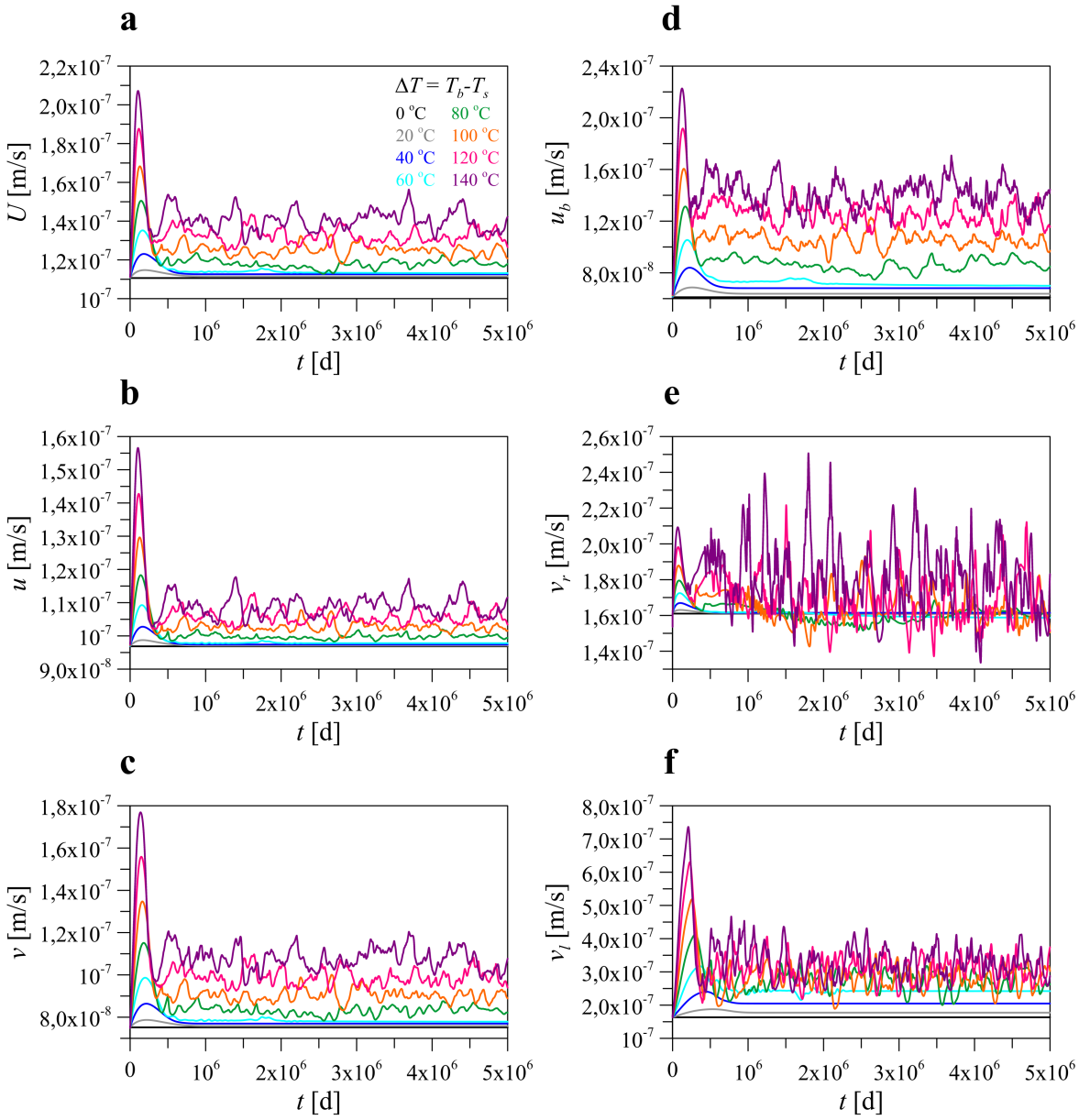
kialakulásának feltételeit és dinamikáját illetően.

Az időfüggő termikus konvekció megindulását követően a rendszer nem konvergált stacionárius állapothoz, így működését először időfüggő megoldásokkal kellett jellemeznem. Így a folyamat kvantitatív értelmezéséhez olyan kontrollparamétereket kellett definiálnom, melyek egyszerre írták le a rendszer tér- és időbeli változásait. A termikus konvekció dinamikáját a teljes modelltartományon és a különböző határokon számított átlagnégyzetes Darcy-fluxus (U, u, v, u_b, v_l, v_r), illetve az átlagos és a maximális hidraulikus emelkedés magasság (h_{av} és h_{max}) értékekkel jellemeztem. Továbbá a vizsgálat során kiszámítottam a modelltartomány átlaghőmérsékletét (T_{av}), valamint a modell alsó és felső határán jelentkező átlagos hőáramot (q_b és q_{sf}). A felsorolt kontollparamétereket – pontos megnevezésükkel, jelölésükkel és mértékegységükkel – a *4.2. táblázatban* foglaltam össze.

Kontrollpareméter	**Jelölés**	**Mértékegység**
Darcy-fluxus nagysága (*rms*)	U	m/s
Horizontális Darcy-fluxus (*rms*)	u	m/s
Vertikális Darcy-fluxus (*rms*)	v	m/s
Horizontális Darcy-fluxus az alsó határon (*rms*)	u_b	m/s
Vertikális Darcy-fluxus a bal oldali határon (*rms*)	v_l	m/s
Vertikális Darcy-fluxus a jobb oldali határon (*rms*)	v_r	m/s
Átlagos hidraulikus emelkedési magasság	h_{av}	m
Maximális hidraulikus emelkedési magasság	h_{max}	m
Átlaghőmérséklet	T_{av}	°C
Hőáram a modell felső határán	q_{sf}	W/m^2
Hőáram a modell alsó határán	q_b	W/m^2

4.2. táblázat. *A termikus konvekció kvantitatív vizsgálata során definált kontrollparaméterek, ahol (rms) az átlagnégyzetes értékeket jelöli.*

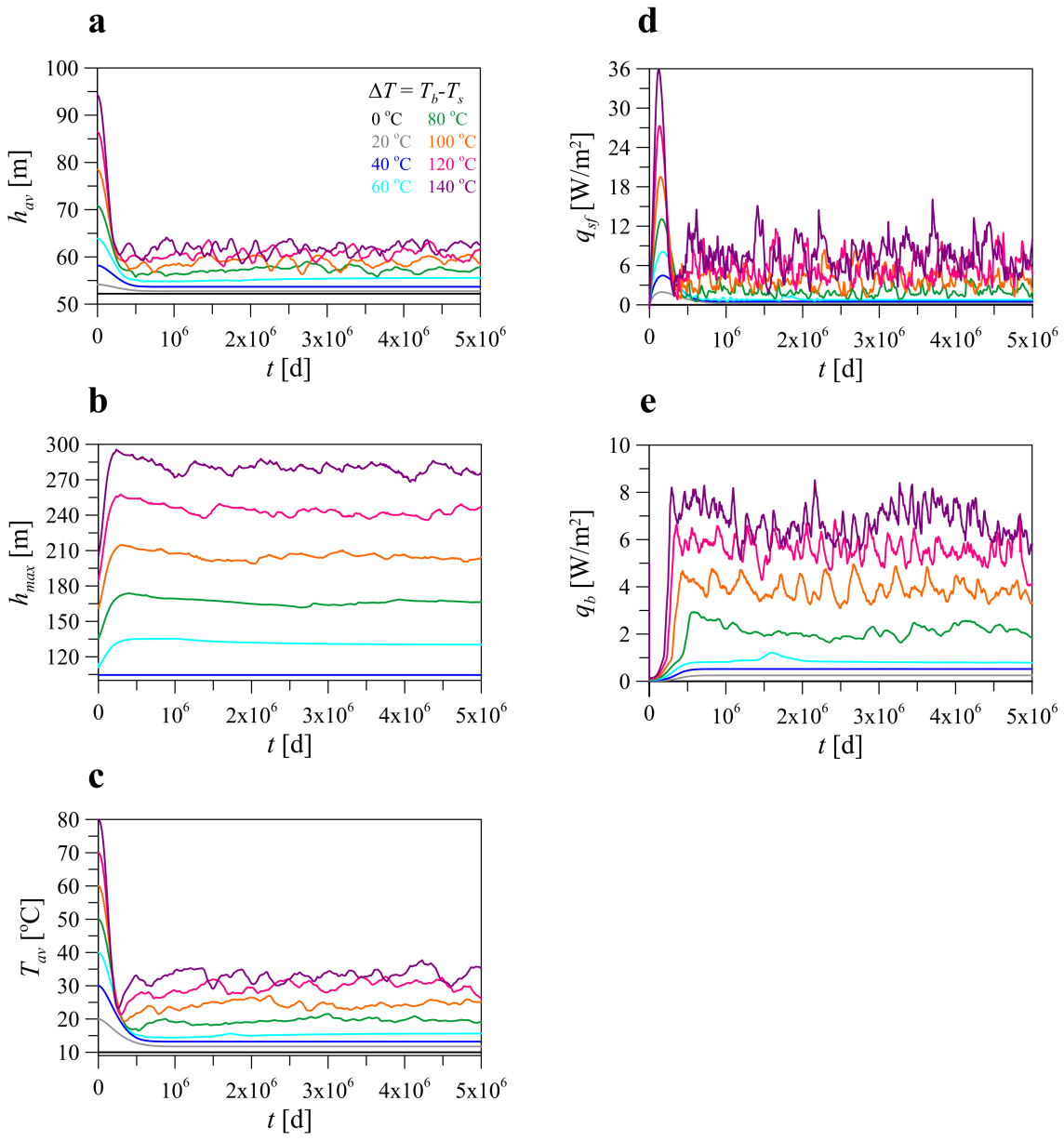
A *4.8. ábra* a modell teljes tartományán, illetve a határokon számított átlagnégyzetes Darcy-fluxus értékek változását mutatja az idő függvényében, $t = 0$ és $5 \cdot 10^6$ nap között. Izotermikus esetben, amikor nincs hőmérséklet-különbség a modell alja és teteje között ($\Delta T = 0$ °C), a görbék a stacionárius állapotnak megfelelő (referencia)értéket veszik fel. Az időfüggő modell kezdeti feltétele egy – az alsó határ hőmérsékletének megfelelő – konduktív hőmérsékletprofil ($T_c(x, z)$), amit a topográfia vezérelt felszín alatti vízáramlás okozta hőszállítás viszonylag rövid idő alatt módosít. Így mindegyik függvényen azonosítható egy $t \simeq 5 \cdot 10^5$ napig tartó



4.8. ábra. *(a) A Darcy-fluxus teljes tartományon vett nagyságának (U), (b) a horizontális (u) és (c) a vertikális (v) irányú, valamint (d) az alsó határon számított vízszintes (u_b), (e) a jobb oldali határon (beáramlási terület szélén) (v_r) és (f) a bal oldali határon (kiáramlási terület szélén) (v_l) vett függőleges irányú komponensének átlagnégyzetes értéke az idő függvényében, ahol a hőmérséklet-különbség* $\Delta T = 0; 20; 40; 60; 80; 100; 120; 140\ ^\circ\mathrm{C}$.

tranziens szakasz, mely után – megfelelően nagy hőmérséklet-különbség esetén – megindulhat a termikus konvekció. A *4.8. a, b* és *c ábrán* a tartomány egészére vonatkozó Darcy-fluxus nagyságának (abszolút értékének) (U), illetve annak horizontális (u) és vertikális (v) irányú komponensének átlagnégyzetes (rms) értéke látható. $\Delta T < 60\,^{\circ}\mathrm{C}$ esetén a felszín alatti vízáramlást egyértelműen a víztükör topográfiája irányítja. $\Delta T = 60^{\circ}\mathrm{C}$-nál rövid oszcillációt követően a rendszer dinamikus egyensúlyba kerül, azonban $\Delta T > 60\,^{\circ}\mathrm{C}$ estén már időfüggő termikus konvekció indul meg. Az egységmedence alsó határán számított horizontális irányú Darcy-fluxus (u_b) a kis hőoszlopok beáramlási területről a kiáramlási terület felé történő mozgását jellemzi (*4.8.d ábra*). A jobboldali határon számított vertikális irányú Darcy-fluxust (v_r) a beáramlási terület alatt kialakuló nagyobb kiterjedésű hőoszlop fel-le mozgása szabja meg, melynek értéke a hőmérséklet-különbség növelésével egyre erőteljesebb fluktuációt mutat (*4.8.e ábra*). Noha átlagos értelemben értékét csak igen kicsiny mértékben változtatja, a görbe karakterisztikája kvalitatív értelemben a felhajtó- és a nehézségi erő egymáshoz képesti viszonyát jellemzi. Az egységmedence bal oldalán (kiáramlási terület szélén) az áramlás iránya felfelé mutat, a két hajtóerő egyértelműen erősíti egymás hatását, ezért ΔT növelésével nő a függőleges irányú Darcy-fluxus nagysága (v_l) (*4.8.f ábra*). Habár a hőmérséklet-különbség emelkedésével az átlagnégyzetes értékek és azok időbeli változékonysága (frekvenciája) növekszik, a függvények $t = 2{\cdot}10^6$ és $5{\cdot}10^6$ nap közötti szakasza valamilyen szabályosságra, periodicitásra enged következtetni. Általánosan elmondható, hogy $\Delta T > 60\,^{\circ}\mathrm{C}$ esetén a rendszer $t \simeq 2 \cdot 10^6$ napnál eléri a kvázi-stacionárius állapotot. Továbbá a kontrollparaméterek átlagértékei ΔT emelkedésével nőnek, különösen az időfüggő termikus konvekció megindulását követően.

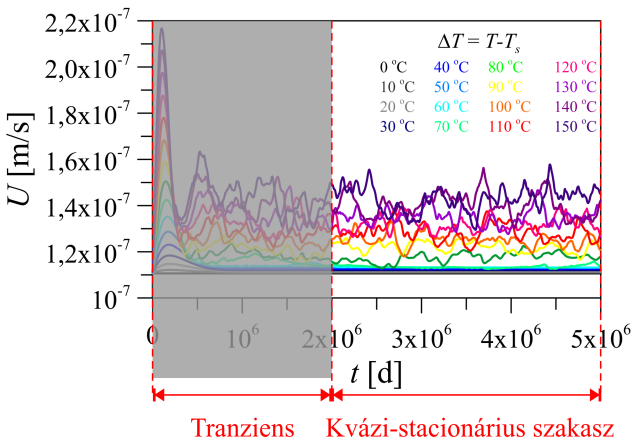
A *4.9.a ábra* a hidraulikus emelkedési magasság átlagos (h_{av}) értékét mutatja. Az izotermikus referencia esetben ($\Delta T = 0\,^{\circ}\mathrm{C}$; $h_{max} = 104,73\,\mathrm{m}$) a $h_{av} = 52,365\,\mathrm{m}$, mely $\Delta T = 140^{\circ}\mathrm{C}$ hőmérséklet-különbség esetén csupán 10–15 m-rel emelkedett. Ez azt jelenti, hogy a modelltartomány döntő részében a topográfia által vezérelt felszín alatti vízáramlás a meghatározó hajtóerő (ui. az egységmedence sekélyebb részein a termikus konvekció szinte egyáltalán nem befolyásolja a felszín alatti vízáramlást). A hidraulikus emelkedési magasság maximuma (h_{max}) – ami egyetlen pontra vonatkozó érték, általában az alsó termikus határrétegben – a hőmérséklet-különbség növekedésével ugrásszerűen emelkedik (*4.9.b ábra*). Azonban a rendszer globális dinamikájának átalános jellemzéséhez a h_{av} és a h_{max} abszolút értékei önmagukban kevés



4.9. ábra. *(a) A modell teljes tartományán vett átlagos (h_{av}), (b) maximális hidraulikus emelkedési magasság (h_{max}) és (c) átlaghőmérséklet (T_{av}), illetve (d) a felső (q_{sf}) és (e) az alsó határon jelentkező hőáram (q_b) átlagos értéke az idő függvényében $\Delta T = 0; 20; 40; 60; 80; 100; 120; 140$ °C hőmérséklet-különbség esetén.*

információt szolgáltatnak. A topográfia vezérelt felszín alatti vízáramlás okozta advekció viszonylag rövid időn belül módosítja a kezdeti, konduktív hőmérsékleteloszlást, melyet az átlaghőmérséklet értéke is mutat (*4.9.c ábra*). T_{av} nem túl nagy mértékben, de emelkedik ΔT növekedésével, hiszen a modell nagy része hideg a folyamatos beáramlás miatt. A modellben pozitív hőmérséklet-anomáliát kizárólag a termikus konvekció feláramlásai okozhatnak. A *4.9.d* és *e ábra* az átlagos hőáram viszonyokat mutatja az egységmedence felső (q_{sf}) és alsó határán (q_b). A felszíni hőáram (q_{sf}) intenzívebb fluktuációja a kiszivárgási zónában feláramló és a felszínen kiáramló magasabb hőmérsékletű víznek köszönhetően jelentkezik (ld. 3.4. alfejezet). Mivel az alsó határ izotermikus, ezért itt csak konduktív hőáram lép fel, mely kisebb fluktuációt eredményez. A q_{sf} és q_b értékek jóval meghaladják a gyakorlatban tapasztalható konduktív hőáram értékeket, ami Európa kontinentális részére vonatkoztatva 0,0644 $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$-nek adódik (Cermák, 1984).

A termikus konvekció általános jellemzéséhez a *4.8.* és a *4.9. ábra* segítséget nyújtott, de a részletesebb elemzéshez nem szolgált elegendő információval. Ezért meghatároztam a kontollparaméterek időbeli átlagértékét. A tranziens jelenségek kiküszöbölése miatt az adatsorokat csak $t = 2 \cdot 10^6 - 5 \cdot 10^6$ d között vizsgáltam, valamint eltávolítottam a numerikus számítás okozta eltéréseket (*4.10. ábra*). Az adatfeldolgozás további részében az idősorok kvázi-stacionárius szakaszaira ($\Delta t = 3 \cdot 10^6$ nap) számított átlagértékeket tanulmányoztam ΔT hőmérséklet-különbség függvényében. A *4.11. ábra* a modell teljes tartományán és a határokon számított Darcy-fluxusok időbeli átlagnégyzetes értékeit mutaja ΔT függvényében. Az adatok szórását (átlagnégyzetes eltérését) a következő összefüggéssel írtam le,



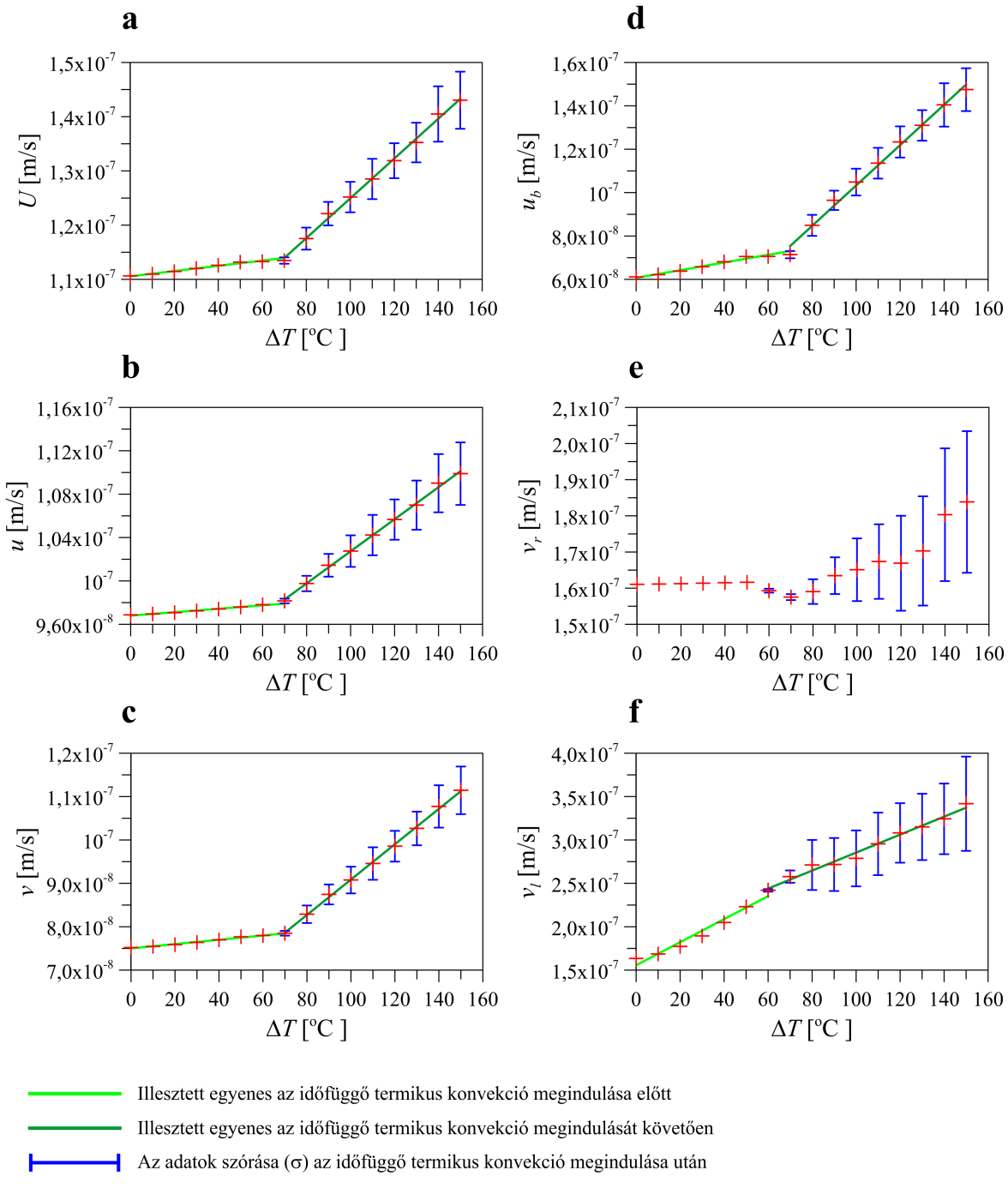
4.10. ábra. *Az adatfeldolgozás során vizsgált kvázi-stacionárius szakasz* $t = 2 \cdot 10^6$ *és* $5 \cdot 10^6$ d *között* ($\Delta t = 3 \cdot 10^6$ d).

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - y_{av})^2}{n-1}} \tag{4.4}$$

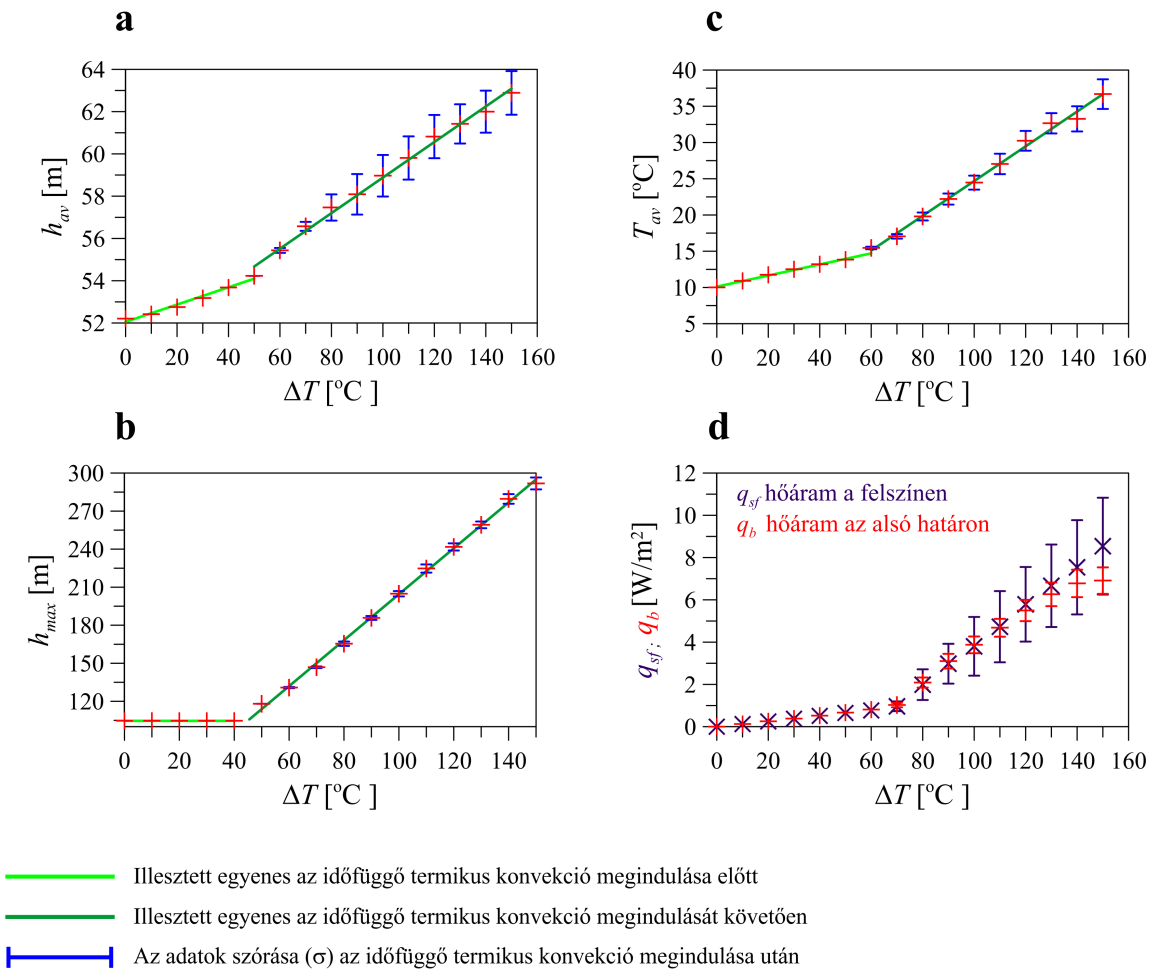
ahol y_t a vizsgált kontrollparaméter t időben, y_{av} a kvázi-stacionárius szakaszaszra számított időbeli átlag és n a mintaszám.

A *4.11.a, b* és *c ábra* alapján általánosan elmondható, hogy a hőmérséklet-különbség emelkedésével az adatok átlagnégyzetes értéke lineárisan változik. Az adatokra két eltérő meredekségű lineáris függvény illeszthető, melyek metszéspontja meghatározza az időfüggő termikus konvekció megindulásához szükséges kritikus ΔT értéket. A hőmérséklet-különbség növelésével arányosan a kontrollparaméterek szórása is változik, ami ebben az értelemben nem az értékek átlagnégyzetes hibájáról, hanem a rendszerben tapasztalható változások intenzitásáról szolgáltat információt. Az adatok szórását csak az időfüggő termikus konvekció beindulása után ábrázoltam. A modell teljes tartományára számított Darcy-fluxus értékek (U, u, v) alapján az időfüggő termikus konvekció körülbellül $\Delta T = 70\,^{\circ}$C-nál indul meg, míg $\Delta T = 60\,^{\circ}$C hőmérséklet-különbség mellett a modelltartomány jobb oldalán kialakuló hőoszlop dinamikus egyensúlyban van a beszivárgó hideg vízzel, s ez stacionárius megoldást eredményez.

A *4.11.d, e* és *f ábra* az egységmedence alsó (u_b), jobb (v_r) és bal oldalsó (v_l) határán számított horizontális és vertikális irányú Darcy-fluxus átlagnégyzetes értékeit jeleníti meg ΔT függvényében. Noha az u_b adatokra szintén két olyan lineáris függvény illeszthető, melyek metszéspontja $\Delta T = 70\,^{\circ}$C-nál jelentkezik, v_r és v_l esetén már változik a sebességgörbék karakterisztikája. A jobb oldalon kialakuló, állandó helyzetű feláramlás függőleges irányú mozgását a v_r függvénnyel lehet jellemezni (*4.11.e ábra*). $\Delta T = 50\,^{\circ}$C-ig v_r állandó értéket vesz fel, hiszen az időfüggő termikus konvekció megjelenése előtt a beáramlási tartományon kizárólag leáramlás tapasztalható. Azonban $\Delta T = 60\,^{\circ}$C-nál a termikus felhajtóerő és a topográfia hatása kiegyenlíti egymást, az áramlás mérséklődik, majd v_r minimum értékénél ($\Delta T = 70\,^{\circ}$C) megindul az időfüggő termikus konvekció. A hőmérséklet-különbség növelésével a függőleges irányú Darcy-fluxus szórása jelentősen megnövekszik, így v_r a termikus konvekció hevességéről ad információt. A bal oldalon számított vertikális Darcy-fluxus (v_l) értéke ΔT növekedésével arányosan változik, hiszen a topográfiai különbség és a termikus konvekcióból adódó áramlás a kiszivárgási zónában azonos



4.11. ábra. *(a) A Darcy-fluxus teljes tartományon vett nagyságának (U), (b) a horizontális (u) és (c) a vertikális (v) irányú, valamint (d) az alsó határon számított vízszintes (u_b), (e) a jobb oldali határon (beáramlási terület szélén) (v_r) és (f) a bal oldali határon (kiáramlási terület szélén) (v_l) vett függőleges irányú komponensének időbeli átlagnégyzetes értéke és szórása a hőmérséklet-különbség függvényében (ΔT).*



4.12. ábra. *(a) A modell teljes tartományán vett átlagos (h_{av}), (b) maximális hidraulikus emelkedési magasság (h_{max}) és (c) átlaghőmérséklet (T_{av}), illetve (d) a felső (q_{sf}) és az alsó (q_b) határon számított hőáram időbeli átlaga a hőmérséklet-különbség függvényében (ΔT).*

irányba mutat, így erősítik egymás hatását (*4.11.f ábra*). A konvekció megindulása után a v_l adatokra illesztett egyenes szintén monoton nő, de meredeksége csökken. Ez azzal magyarázható, hogy ekkor meleg feláramlás már nem csak a bal oldalsó határ közelében jelentkezik (*4.5 ábra*).

A *4.12.a ábra* a hidraulikus emelkedési magasság átlagos értékét mutatja. A hőmérséklet-különbség növelésével h_{av} folyamatosan növekszik (már $\Delta T < 70\,°C$ esetén is), hiszen a termikus határrétegben és a kiáramlási tartományon a pozitív hőmérséklet-anomália hatására megnő a hidraulikus emelkedési magasság értéke, habár ez az áramlásban még nem jelentkezik. Amikor ΔT értékét 0 °C-ról 150 °C-ra

növeltem, a hidraulikus emelkedési magasság átlagos értéke mindösszesen 10 m-rel emelkedett. Az időbeli átlagszámítás során sem különítettem el a modell alsó és felső (topográfia vezérelt) tartományát, ezért az adatokra illetsztett két egyenes meredeksége csak kis mértékben tér el, metszéspontjuk $\Delta T = 50$ °C-nál található. A h_{max} függvény $\Delta T = 40$ °C-ig állandó értéket vesz fel, mely megegyezik az eredeti stacionárius modell legmagasabb pontjára vonatkozó maximummal ($h_{max} \simeq 104,73$ m). Magasabb hőmérséklet-különbség esetén h_{max} értéke jelentősen növekszik, akár elérheti a 170 m-t, bár az eredmények h_{max} térbeli elhelyezkedéséről és változásáról nem adnak információt (*4.12.b ábra*). A szórás csekély mértékben növekszik. Az átlaghőmérséklet (T_{av}) adatokra szintén két eltérő meredekségű egyenes illeteszhető, melyek metszéspontja $\Delta T = 60$ °C-nál található (*4.12.c ábra*). Az átlaghőmérséklet értéke elmarad a konduktív átlagtól ($\frac{T_b - T_{sf}}{2}$), hiszen a topográfia által vezérelt hideg víz leáramlása termikusan továbbra is uralja a rendszert. A modell felső (q_{sf}) és alsó határán (q_b) számított átlagos hőáram értékeket a *4.12.d ábra* mutatja. A hőáram átlagos értéke gyengén emelkedik a stacionárius áramlás alatt, míg az időfüggő termikus konvekció megjelenése után jóval erőteljesebben változik. Noha átlagértékük különbözik, szóráshatáron belül egyenlőnek tekinthetők. A felső és alsó határon számított hőáram abszolút értékben több nagyságrenddel meghaladják a valóságban mért konduktív felszíni hőáram értékét ($0,0644 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$) (Cermák, 1984), mely a modell felső határán kilépő meleg víz következménye.

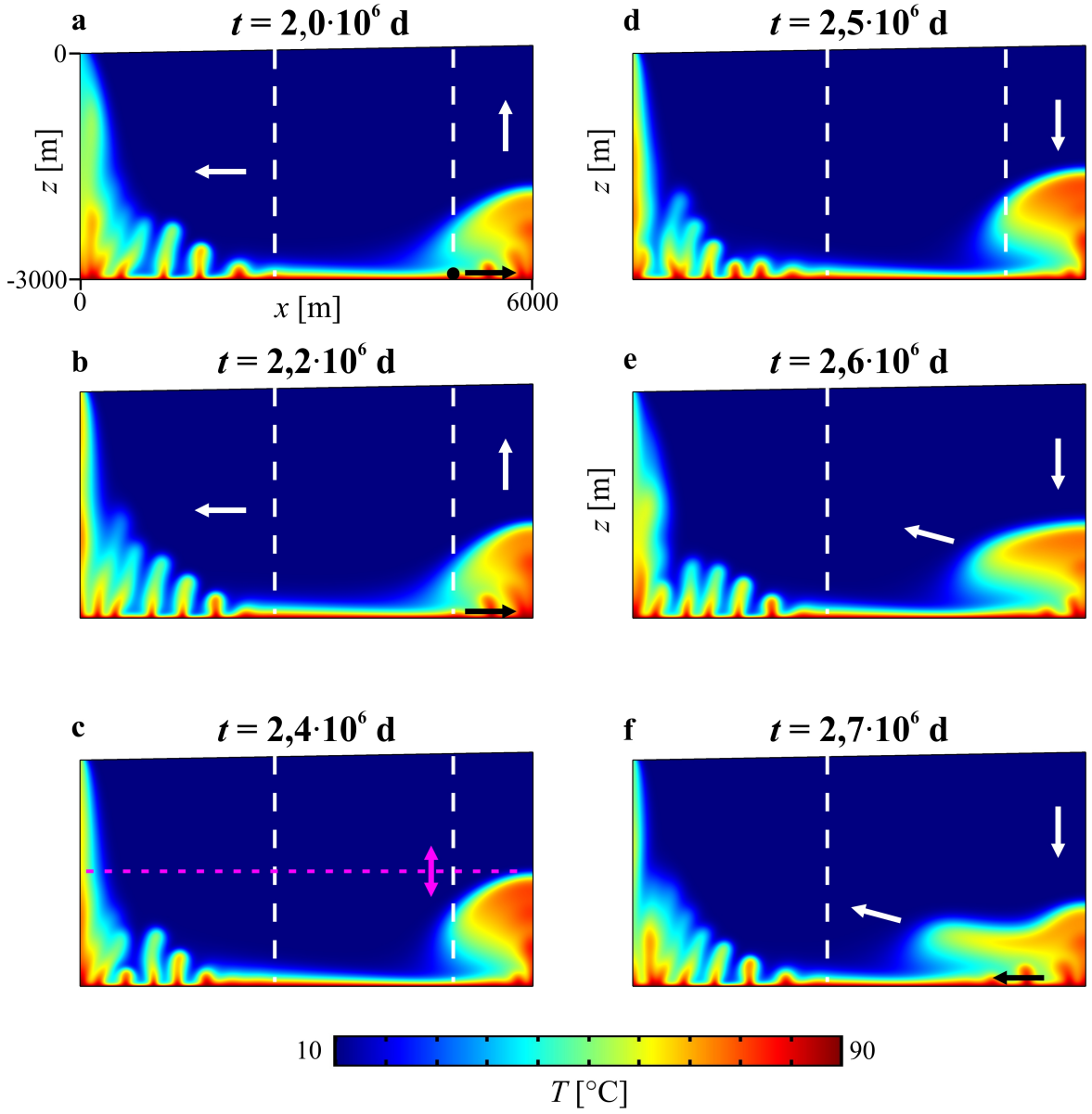
Általánosan elmondható, hogy a hőmérséklet-különbség emelkedésével a kontrollparaméterek átlagos értéke és szórása megnő. A *Rayleigh-szám* definíciója alapján (4.2 egyenlet), ΔT lineáris kapcsolatban van Ra-val, ami a termikus konvekció intenzitását és struktúráját kifejező dimenziótlan szám. Ezért a paraméterek tér- és időbeli átlagértékeire két egyenest illesztettem, melyek metszéspontjainál határoztam meg az időfüggő termikus konvekció megindulásához szükséges minimális hőmérséklet-különbséget. Habár a hidraulikus emelkedési magasság maximális (h_{max}) és átlagos (h_{av}) értékei már $\Delta T = 40$ és 50 °C-nál változó trendet mutatnak, az időfüggő termikus konvekció még nem indul meg a rendszerben. Az értékek növekedése az (alsó) termikus határréteg és a kiáramlási tartományban tapasztalható hőmérséklet-anomália okozta hidraulikus emelkedési magasság megváltozásának köszönhető. Az egységmedence jobb oldali határán számított vertikális Darcy-fluxus (v_r) értéke $\Delta T = 60$ °C-nál csökken (dinamikus egyensúly), majd $\Delta T > 60$ °C esetén – az időfüggő konvekció megindulása után – monoton nő. Az átlagérték emelkedésével

v_r szórása is fokozódik, ami a beáramlási terület alatt létrejövő nagyobb kiterjedésű hőoszlop mozgásának hevességére utal. A modell bal oldali határán számított vertikális Darcy-fluxus (v_l) értékeire illesztett egyenesek metszéspontja szintén a rendszer dinamikus egyensúlyi állapotát jelöli ki ($\Delta T = 60$ °C). A modell teljes tartományán (U, u, v) és alsó határán (u_b) számított Darcy-fluxusok alapján $\Delta T = 70$ °C-nek adódott az a kritikus hőmérséklet-különbség ($Ra_{cr} \simeq 1227$), amelynél az egységmedencében – a 3. fejezetben tárgyalt kezdeti, határfeltételek és paraméterek mellett – megindul az időfüggő termikus konvekció. A numerikus modellre számított Ra_{cr} jóval meghaladja a Lapwood (1948) által közölt, $Ra_{cr} = 4\pi^2 \simeq 39,5$ értékét. Habár a tér- és időbeli átlagértékek segítségével ki tudtam jelölni az időfüggő termikus konvekció megindulásához szükséges kritikus hőmérséklet-különbséget, a rendszer működéséről, dinamikájáról egyenlőre nem kaptam információt.

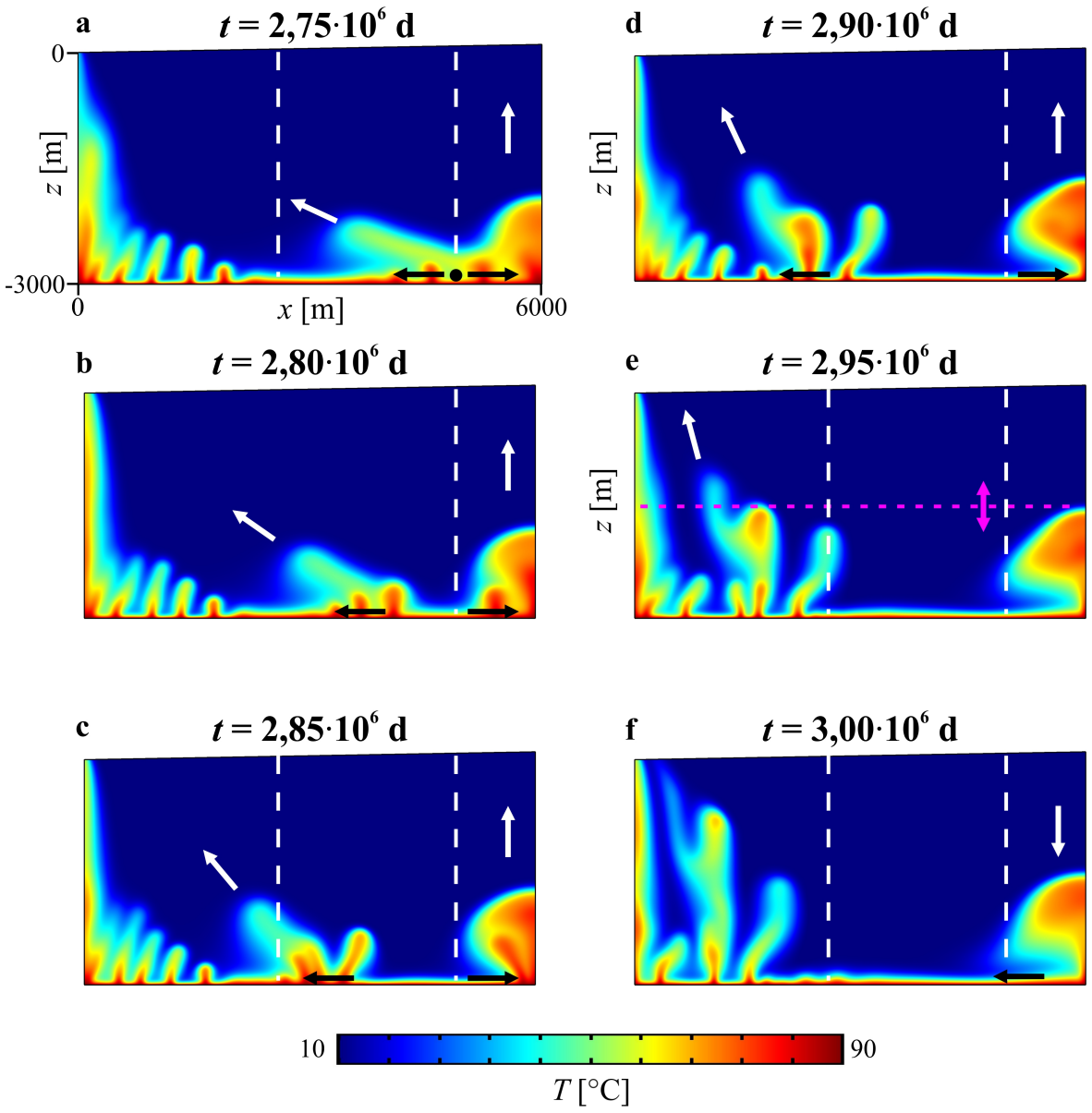
4.4. A termikus konvekció időbeli változása

Az előző alfejezetben bemutattam a kontrollparaméterek (*4.2. táblázat*) tér- és időbeli átlagértékeinek változását a hőmérséklet-különbség függvényében, melyek segítségével kvantitatív módon határoztam meg az időfüggő termikus konvekció megindulásához szükséges kritikus hőmérséklet-különbséget ($\Delta T = 70$ °C, $Ra_c \simeq 1227$). Habár ΔT emelkedésével ($\Delta T > 70$°C) az adatok átlagos értéke és szórása növekszik, nem adnak közvetlen információt a rendszerben tapasztalható időbeli változásokról. Azonban *4.8.* és *4.9. ábrák* $t = 2 \cdot 10^6$ és $t = 5 \cdot 10^6$ d közötti szakasza alapján feltételezhető, hogy a felszín alatti vízáramlást olyan karakterisztikus folyamatok befolyásolják vagy akár irányítják, melyek nagysága és iránya az időben periodikusan változik.

A *4.13.* és *4.14. ábra* az egységmedence teljes tartományán kialakuló hőmérséklet-eloszlás időbeli változását mutatja $t = 2 \cdot 10^6$ és $3 \cdot 10^6$ d között, $\Delta T = 80$ °C esetén. A modell jobb oldalán kialakuló nagy kiterjedésű feláramlás a felszín felé mozog. Ezt a vertikális áramlást közvetlenül az alsó termikus határrétegben kialakuló, a beáramlási terület széle felé sodródó kisebb hőoszlopok táplálják. A modell középső tartományán a termikus határréteg kevésbé instabil (fehér szaggatott vonalak között). A zónától balra, a kiáramlási területen kialakuló hőoszlopok a lejtő okozta felszín alatti vízáramlással egyező irányba sodródnak, melyek a topográfiai minimum közelében érik el a modell tetejét (*4.13.a* és *b ábra*). A beáramlási terület alatt



4.13. ábra. *A rendszer hőmérsékleteloszlásának (T) időbeli változása* $t = 2 \cdot 10^6$ *és* $2,7 \cdot 10^6$ d *között,* $\Delta T = 80$ °C *esetén. A beáramlási terület alatt elhelyezkedő hőoszlop maximális vertikális kitérését magenta színű vonal jelöli. Folytatás a 4.14. ábrán.*



4.14. ábra. *A rendszer hőmérsékleteloszlásának (T) időbeli változása* $t = 2,75 \cdot 10^6$ *és* $3 \cdot 10^6$ d *között,* $\Delta T = 80\,^{\circ}\mathrm{C}$ *esetén. A beáramlási terület alatt elhelyezkedő hőoszlop maximális vertikális kitérését magenta színű vonal jelöli. A 4.13. ábra folytatása.*

létrejövő feláramlás addig emelkedik, amíg megfelelő mennyiségű utánpótlást nem kap a termikus határrétegből. A feláramlás eléri a függőleges irányú maximális kiterjedését ($z \simeq -1500\,\mathrm{m}$; $\Delta T = 80\,^{\circ}\mathrm{C}$ esetén), azonban a termikus felhajtóerő és a topográfia tartósan nem egyenlítik ki egymás hatását, így a rendszer nem stacionárius, mint volt a $\Delta T = 60\,^{\circ}\mathrm{C}$ állapotban (*4.13.c ábra*). A nagyobb feláramlás süllyedni kezd, teteje egyre jobban ellaposodik, és egy csóva válik le és sodródik a kiáramlási terület felé, ami elősegíti a termikus határrétegben közvetlenül fejlődő kis hőoszlopok kialakulását és mozgását (*4.13.d, e* és *f ábra*). A csóva leszakadásával azonos időben definiálhatunk egy olyan kitüntetett pontot a termikus határrétegben, amely két oldalán képződő feláramlások ellentétes irányú horizontális mozgást végeznek (*4.14.a ábra*). Így a beáramlis terület felé mozgó hőoszlopok, ismét a nagy kiterjedésű feláramlást fogják táplálni (*4.14.b ábra*). Azonban az elválást követően a csóva magával vonszol egy kisebb hőoszlopcsoportot, ami a kiáramlási terület alatt jelentkező állandó meleg feláramlás hatását erősíti. Ezzel egy időben, a jobb oldalon zajló nagy kiterjedésű feláramlás teteje ismételten eléri maximális helyzetét (*4.14.c,d* és *f ábra*), majd a folyamat kvázi-periodikusan ismétlődik a modellszámítás végig, $t = 5 \cdot 10^6$ napig (*4.14.f ábra*). Habár a termikus konvekció nem áll be stacionárius állapotba, a folyamat időben lassú, közel periodikus változást mutat, így egy átlagos érték között kvázi-stacionáriusan változik. Az ábrák alapján olybá tűnik, hogy a beáramlási terület alatt kialakuló, nagy kiterjedésű feláramlás vertikális fel-le mozgása uralja az egységmedencében kialakuló felszín alatti vízáramlás dinamikáját. Azonban a hőmérséklet-különbség növelésével a termikus konvekció egyre gyorsabbá és hevesebbá válik, a rendszer periodikus viselkedése mérséklődik, majd megszűnik (*4.6. ábra*). Általnosan elmondható, hogy ΔT emelkedésével a beáramlási terület alatti hőoszlop felér az egységmedence sekélyebb részeibe is, így a termikus konvekció egyre jobban módosítja a topográfia okozta felszín alatti vízáramlást.

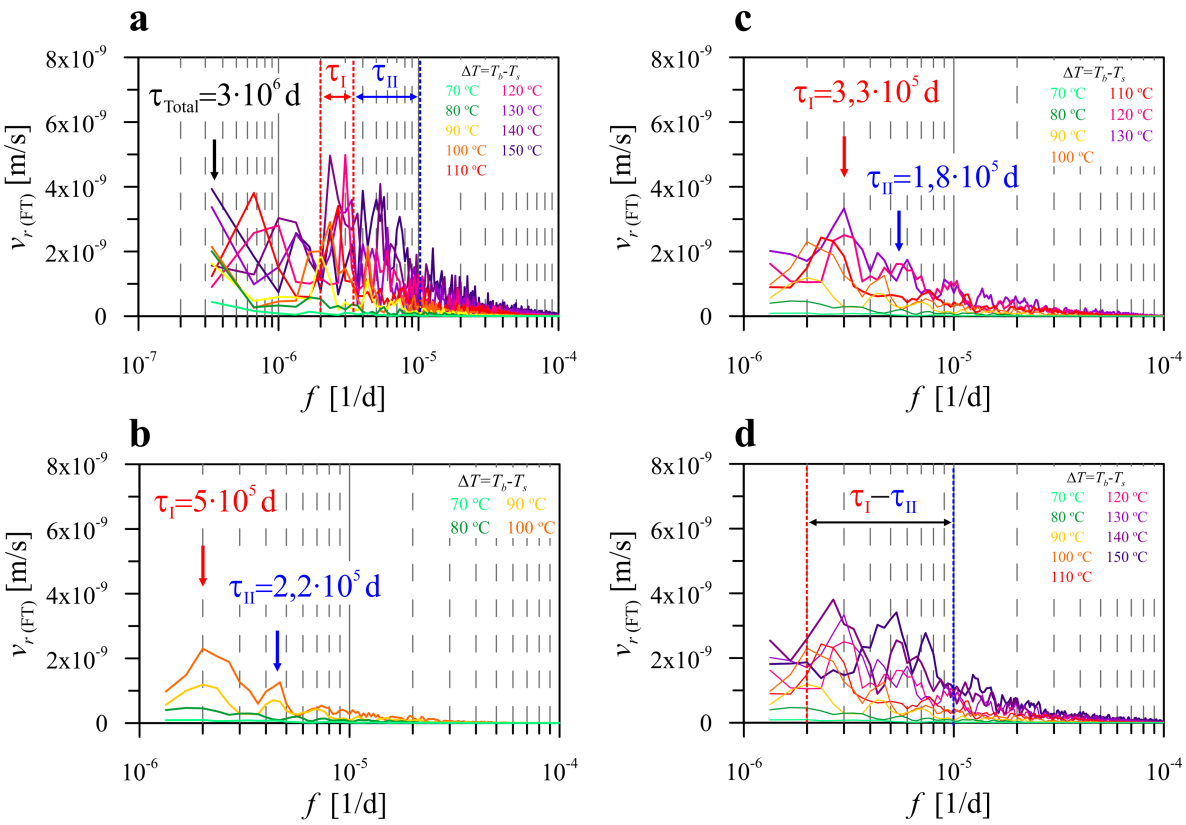
A termikus konvekció dinamikáját meghatározó karakterisztikus folyamatok elsősorban az egységmedence jobb és bal oldali, valamint az alsó határának – vagyis a termikus határréteg – közelében jelentkeznek. Így a be- (v_r) és a kiáramlási terület szélén (v_l) számított vertikális, illetve az alsó határon értelmezett horizontális irányú Darcy-fluxus (u_b) átlagnégyzetes értéke és szórása közvetett módon jellemzi a termikus konvekció időbeli változását. A konvekció okozta meleg feláramlások jelentősen befolyásolják a felszín alatti vízáramlás irányát (ld. 4.2. alfejezet), ezért a hidraulikus emelkedési magasság átlagos értéke (h_{av}) és szórása is jellemezheti a rend-

szer dinamikáját (ld. 4.3. alfejezet). A kvantitatív értelmezést – a földköpeny konvekciómodellezésnél is használatos (Galsa & Lenkey, 2007); (Herein *et al.*, 2013) – Fourier-analízissel végeztem el. Noha a kontrollparamétereket ugyanazon a $t = 2 \cdot 10^6$ és $5 \cdot 10^6$ nap közötti kvázi-stacionárius szakaszon vizsgáltam ($\Delta t = 3 \cdot 10^6$ d), a számítás stabilizálása érdekében ΔT növelésével egyidejűleg csökkentenem kellett a maximális időlépés nagyságát (*3.2. táblázat*). A transzformációt megelőzően az adatokat a digitális mintavételezési törvénynek megfelelően kellett előkészítenem. A $v_r(t)$, $v_l(t)$, $u_b(t)$ és $h_{av}(t)$ adatokra harmadfokú polinomot illesztettem (*cubic spline*), majd $\Delta t_s = 1000$ d mintavételezési idővel újramintavételeztem. Ezzel a módszerrel növeltem az adatsűrűséget, illetve csökkentettem a numerikus számítás eltérő hosszúságú időlépéseiből adódó torzitást (Kiss & Prácser, 2016). Az átmintavételezett kontrollparaméterek amplitúdóspektrumát ($v_{r\,(\mathrm{FT})}$, $v_{l\,(\mathrm{FT})}$, $u_{b\,(\mathrm{FT})}$ és $h_{av\,(\mathrm{FT})}$) Mathcad 14 szoftver beépített CFFT (*complex fast Fourier transform*) algoritmusával állítottam elő (Brigham, 1988). (A további számítások előtt ellenőriztem a transzformáció inverzét (ICFFT), amivel minden esetben visszakaptam az átmintavételezett adatsort.) A transzformált kontrollparaméterek abszolút értékének amplitúdóspektrumát a *4.15.* és a *4.16. ábra* mutatja a frekvencia ($f\ [\frac{1}{\mathrm{d}}]$) függvényében. Az ábrákon a karakterisztikus folyamatokhoz tartozó τ periódusidőket is jelöltem, melyeket a

$$\tau = \frac{1}{f} \tag{4.5}$$

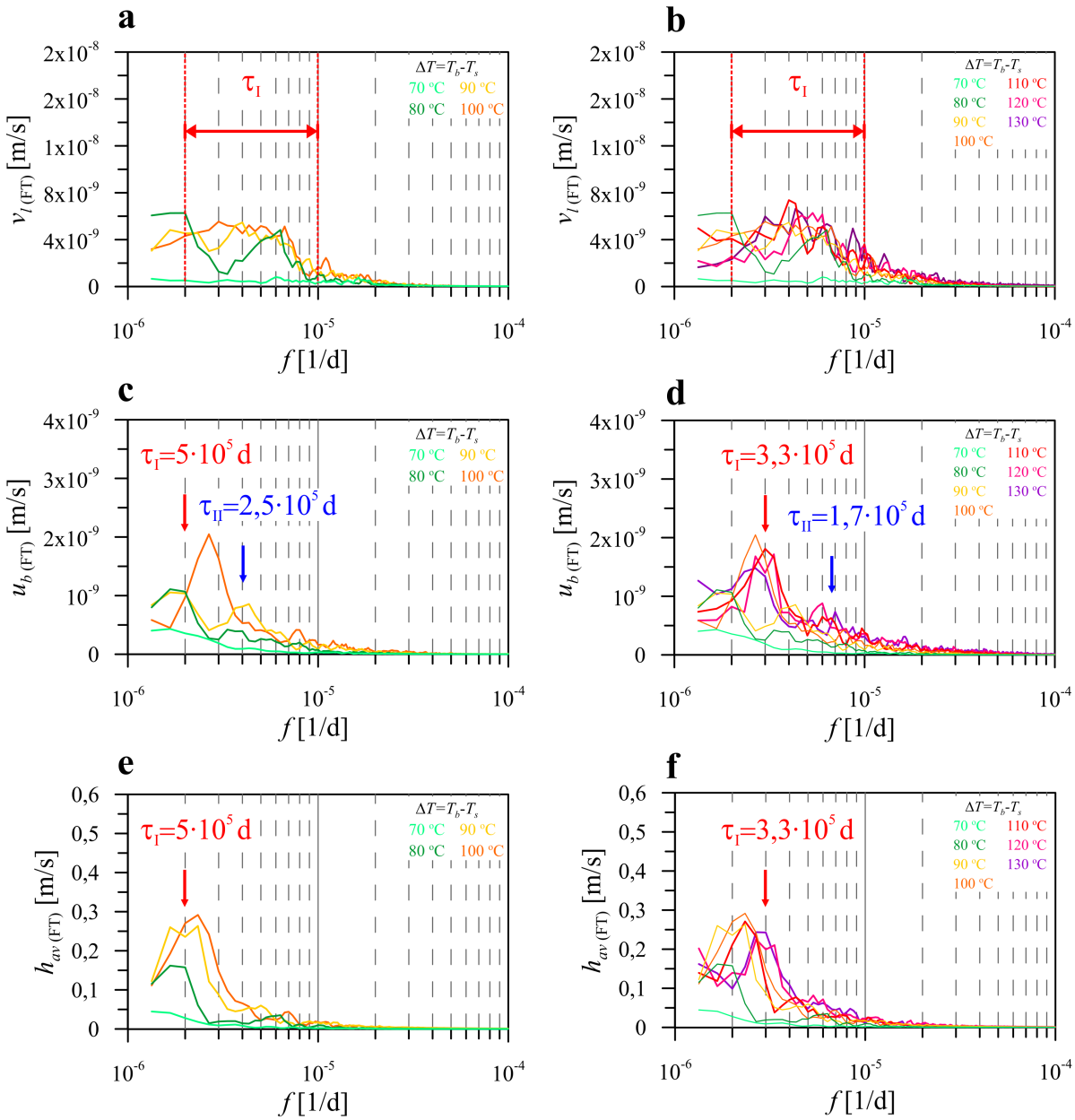
összefüggés segítsévével számítottam ki.

A beáramlási terület szélén számított vertikális Darcy-fluxus teljes amplitúdóspektrumát ($v_{r\,(\mathrm{FT})}$) a *4.15.a ábra* mutatja. Alacsonyabb frekvenciatartományokon az adatok Fourier-tanszformáltja már nem nyújt információt a karakterisztikus folyamatokra vonatkozóan, hiszen $\Delta t = \tau_{Total} = 3 \cdot 10^6$ d. Magasabb frekvenciák esetén ($f > 10^{-5}\ \frac{1}{\mathrm{d}}$) pedig már csak kisebb amplitúdójú zaj tapasztalható. Így a karakterisztikus folyamatokat jellemző domináns frekvenciaértékek elemzését $f = 3,3 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\mathrm{d}}$ és $10^{-5} \frac{1}{\mathrm{d}}$ között végeztem el. (Jobb láthatóság kedvéért a további ábrákon a háromablakos futóátlag szűrővel feldolgozott amplitúdóspektrumokat ábrázoltam (Guinon *et al.*, 2007).) A *4.15.b ábrán* a $v_{r\,(\mathrm{FT})}$ amplitúdóspektrum látható $\Delta T = 70$ és 100 °C között. A hőmérséklet-különbség növekedésével a termikus konvekció egyre erősödik, így $v_{r\,(\mathrm{FT})}$ értéke nő. A spektrumon két karakterisztikus frekvencia különíthető el. Az első a beáramlási terület alatt létrejövő, nagyobb kiterjedésű



4.15. ábra. *(a) A beáramlási terület szélén számított vertikális rms Darcy-fluxus ($v_{r\,(\mathrm{FT})}$) szűretlen és (b) $\Delta T = 70-100°\mathrm{C}$, (c) $\Delta T = 70-130°\mathrm{C}$, (d) $\Delta T = 70-150°\mathrm{C}$ között, háromablakos futóátlag szűrővel ellátott amplitúdóspektruma az f frekvencia $[\frac{1}{\mathrm{d}}]$ függvényében. Jelölések: τ_{Total} a vizsgált szakasz hossza ($\Delta t = 3 \cdot 10^6$ d), τ_I az első, τ_{II} a második karakterisztikus folyamathoz tartozó periódusidő.*

hőoszlop vertikális mozgásának feleltethető meg, melynek periódusideje $\tau_I = 5{\cdot}10^5$d. A csóva leszakadását követően a termikus határrétegben jobbra sodródó kisebb hőoszlopok keletkeznek, melyek táplálják a folyamatos vertikális oszcilláló mozgást végző áramlást. Ezt a folyamatot egy másik domináns frekvenciával lehet jellemezni, amelynek periódusideje $\tau_{II} = 2,2 \cdot 10^5$ d. A hőmérséklet-különbség növekedésével a termikus konvekció felgyorsul, így a karakterisztikus folyamatok periódusideje némileg csökken: $\tau_I = 3,3 \cdot 10^5$ d, $\tau_{II} = 1,8 \cdot 10^5$ d (*4.15.c ábra*). Azonban az amplitúdóértékek nem változnak jelentősen, hiszen a rendszer egyre összetettebb mozgást végez, a spektrum ,,elmosódik". $\Delta T = 140$ és 150 °C esetén a konvekció periodikus jellege elenyészik, csupán egy karakterisztikus frekvenciasáv jelölhető ki (*4.15.d ábra*).



4.16. ábra. *(a), (b) A kiáramlási terület szélén értelmezett vertikális ($v_{l\,(\mathrm{FT})}$) és (c), (d) az alsó határon számított horizontális ($u_{b\,(\mathrm{FT})}$) (rms) Darcy-fluxus; illetve (e), (f) az egységmedence teljes tartományára átlagolt hidraulikus emelkedési magasság ($h_{av\,(\mathrm{FT})}$) amplitúdóspektruma a frekvencia [$\frac{1}{\mathrm{d}}$] függvényében. Az (a), (c), (e) $\Delta T = 70-100\,^{\circ}\mathrm{C}$; illetve a (b), (d), (f) $\Delta T = 70-130\,^{\circ}\mathrm{C}$ között jeleníti meg a spektrumot. Jelölés: τ_I az első, τ_{II} a második karakterisztikus folyamathoz tartozó periódusidő.*

A *4.16.a ábra* a kiáramlási terület oldalsó határán számított vertikális Darcy-fluxus ($v_{l\,(\mathrm{FT})}$) amplitúdóspektrumát mutatja $\Delta T = 70$ és 100 °C között. A $v_{l\,(\mathrm{FT})}$ görbéken nem azonosítható a jellegzetes periódusidővel bíró folyamat. Ugyanakkor $\Delta T > 100$ °C esetén a karakterisztikus frekvenciákat egy intervallummal lehet meghatározni. A kiáramlási területen tapasztalható – topográfia okozta – állandó meleg feláramlást a jobb oldalról beérkező kisebb hőoszlopok erősítik. Azonban a hőmérséklet-különbség növekedésével a jobb oldalról érkező meleg csóva – melynek periódusideje megegyezik a beszivárgási terület alatt oszcilláló hőoszlop periódusidejével – és az alsó határon balra sodródó egyszerű feláramlások együttes mozgása mind összetettebbé válik (*4.16.b ábra*). Így úgy tűnik, hogy a bal oldali határon lévő áramlásban a két eltérő dinamikájú jelenség összemosódik. Az alsó határon számított horizontális Darcy-fluxus ($u_{b\,(\mathrm{FT})}$) spektrumát a *4.16.c* és *d ábra* mutatja. $\Delta T < 100$ °C esetén az első karakterisztikus folyamat hozzávetőlegesen $5 \cdot 10^5$ d periódusidővel jelentkezik, és a hőmérséklet-különbség növelésével $\tau_I = 3,3 \cdot 10^5$ d-ra csökken. Miközben a beáramlási terület alatt kialakuló feláramlás emelkedik, gyökere elvékonyodik, így jelentős horizontális mozgást is végez. Noha a $v_{r\,(\mathrm{FT})}$ amplitúdóspektrumában megjelenő τ_I periódusidő $u_{b\,(\mathrm{FT})}$ függvényben is egyértelműen jelentkezik, τ_{II} definiálása bizonytalanabb, de talán azonosítható a $\tau_{II} = 2,5 \cdot 10^5$ d, majd a $\tau_{II} = 1,7 \cdot 10^5$ d-nál jelentkező kisebb anomáliával. A *4.16.e* és *f ábrán* az átlagos hidraulikus emelkedési magasság amplitudóspektruma látható ($h_{av\,(\mathrm{FT})}$), amely csupán az első karakterisztikus folyamat (jobboldali hőoszlop oszcillációja) τ_I periódusidejét mutatja.

A Fourier-analízis alapján összességében azon következtetés vonható le, hogy a jobb oldalon oszcilláló feláramlás uralja a beszivárgási tartomány időbeli viselkedését. Az alsó határon megjelenő termikus instabilitások időbelisége meglátszik mind $u_{b\,(\mathrm{FT})}$, mind $v_{r\,(\mathrm{FT})}$ spektrumon. A kiszivárgási oldalon azonban ezen két jelenség hatása (az alsó határon azonosítható termikus instabilitások és a jobb oldali feláramlás) az amplitúdóspektrumon összemosódik, nem szeparálható. Az átlagos hidraulikus emelkedési magasság ($h_{av\,(\mathrm{FT})}$) idősorai csak a beszivárgási oldalon jelentkező hőoszlop karakterisztikus viselkedését tartalmazzák, mely egyértelműsíti, hogy az alsó termikus határrétegből kifejlődő hőoszlopok szerepe az átlagos hidraulikus emelkedési magasságra nézve elenyésző. Az első karakterisztikus jelenség (jobb oldali hőoszlop oszcillációja) periódusidejét és a második karakterisztikus jelenség (alsó határrétegből kiáramló kisebb hőoszlopok) periódusidejét a *4.3. táblázat*

összegzi. A ΔT emelkedésével az időfüggő konvekció egyre hevesebben viselkedik, így a karakterisztikus frekvenciák kis mértékben eltolódnak, majd ($\Delta T > 120°\mathrm{C}$) esetén a termikus konvekció aperiodikussá válik, az amplitúdóspektrum elmosódik. Habár a hidrogeológiai modellezésnél figyelmen kívül hagyják a konvekció dinamikájára jellemző karakterisztikus folyamatok jelentőségét, hatásuk geológiai időskálán nem elhanyagolható. Viszont a struktúra időbeli változásainak mérésére a gyakorlatban nincs lehetőség. Ha a folyamat aperiodikussá válik, akkor a kőzetvázra gyakorolt hatása is módosul.

Megnevezés	**Jelölés**	$f\ [\frac{1}{\mathrm{d}}]$	τ [d]
A vizsgált szakasz hossza (Δt)	τ_{Total}	$3,3 \cdot 10^{-7}$	$3,0 \cdot 10^{6}$
Az első kar. folyamat ($\Delta T < 100\,°\mathrm{C}$)	$\tau_{I.}$	$2,0 \cdot 10^{-6}$	$5,0 \cdot 10^{5}$
Az első kar. folyamat ($\Delta T > 100\,°\mathrm{C}$)	$\tau_{I.}$	$3,0 \cdot 10^{-6}$	$3,3 \cdot 10^{5}$
A második kar. folyamat ($\Delta T < 100\,°\mathrm{C}$)	$\tau_{II.}$	$4,5 \cdot 10^{-6}$	$(2,5 - 2,2) \cdot 10^{5}$
A második kar. folyamat ($\Delta T < 100\,°\mathrm{C}$)	$\tau_{II.}$	$5,6 \cdot 10^{-6}$	$(1,7 - 1,8) \cdot 10^{5}$

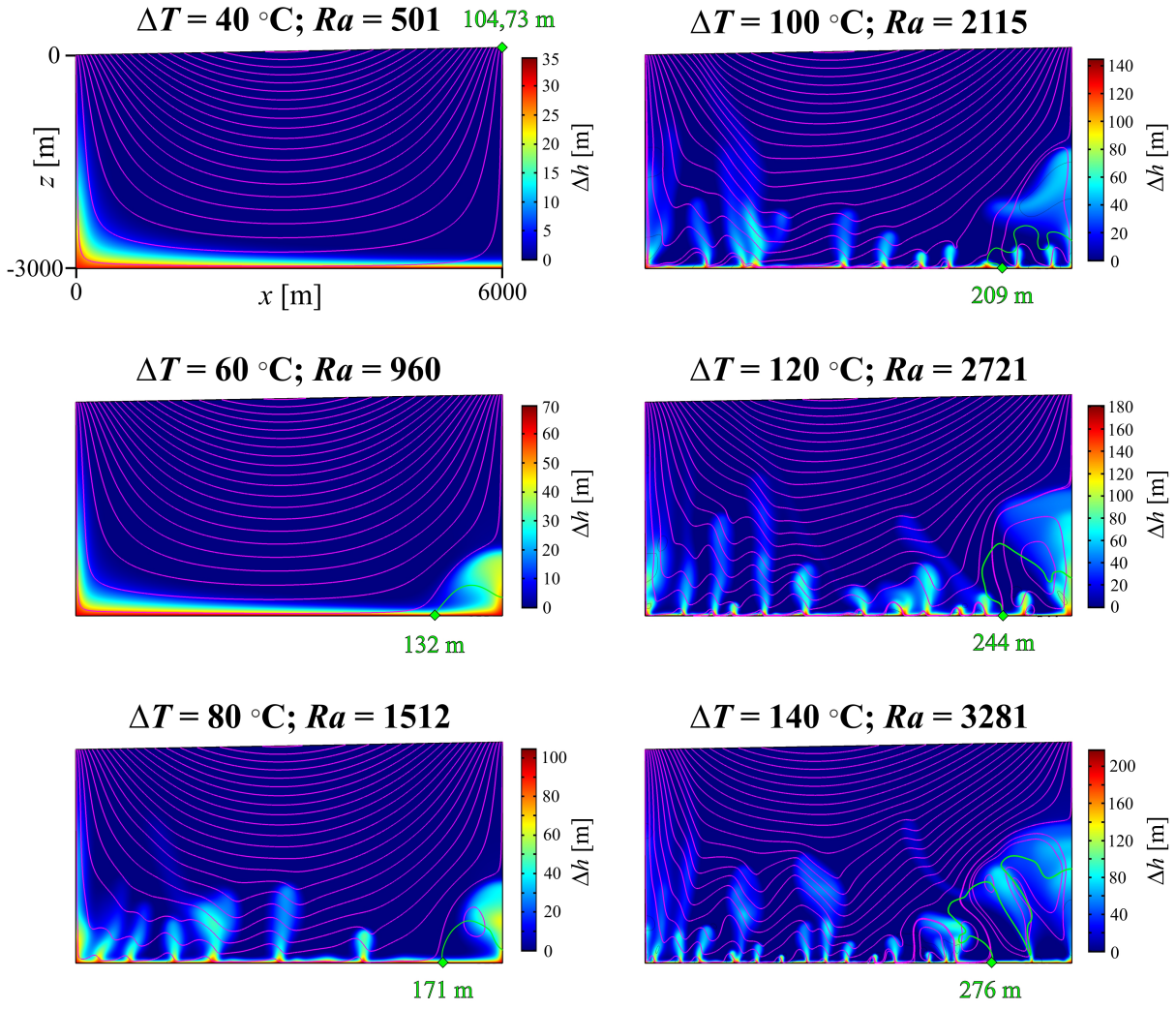
4.3. táblázat. *A termikus konvekció dinamikáját befolyásoló karakterisztikus folyamatok frekvenciaértéke ($f\ [\frac{1}{\mathrm{d}}]$) és az abból származtatott periódusidők (τ [d]).*

4.5. A hidraulikus emelkedési magasság megváltozása

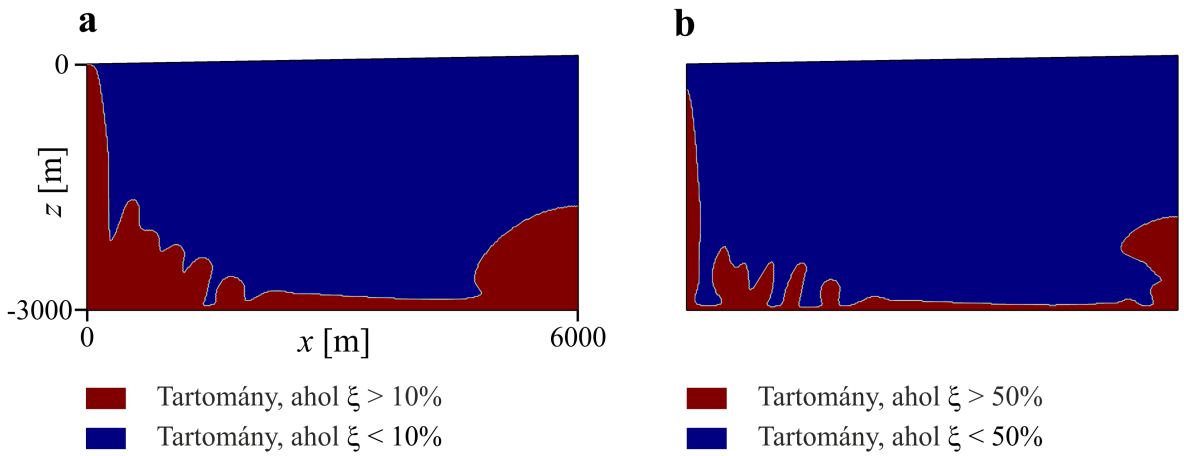
A Tóth-féle egységmedence modellben $\Delta T > 60\,°\mathrm{C}$ esetén – az ismertetett paraméterek, határ- és kezdeti feltételek mellett – megindul az időfüggő termikus konvekció (4.3. alfejezet). Noha a porózus közegben zajló termikus konvekció jelenlétére mérések és numerikus modellezések együttes alkalmazásával tudunk következtetni, annak időbeli változását (ha a számítás nem ad stacionárius megoldást) a valóságban csak becsülhetjük. A gyakorlati hidrogeológia szempontjából sokkal jelentősebb kérdés, hogy a termikus konvekció hol és milyen mértékben módosítja a topográfia okozta felszín alatti vízáramlást. A 4.2. alfejezet végén már röviden kitértem arra, hogy a termikus konvekció következtében fellépő felhajtóerő módosítja az áramlást, így a hidraulikus emelkedési magasságváltozás követi a hőmérsékleteloszlást (*4.7. ábra*). A szintetikus egységmedencében, a topográfia és a termikus konvekció által együttesen vezérelt felszín alatti vízáramlás (h) kvantitatívan összehasonlítható a csak topográfia vezérelt esettel (h_{st}).

A hidraulikus emelkedési magasság megváltozását ($\Delta h{=}h-h_{st}$) $t{=}4\cdot10^6$ d időnél a *4.17. ábra* mutatja $\Delta T = 40; 60; 80; 100; 120; 140$ °C esetén. (A *4.6. ábra* az ezekhez tartozó hőmérsékleteloszlást jeleníti meg.) $\Delta T < 60$ °C esetén az áramlás stacionárius, a topográfiai különbség okozta vízáramlás kisepri a konduktív hőmérsékleteloszlást, így kvalitatíve visszakapjuk az eredeti Tóth-féle egységmedencére jellemző áramképet. A hidraulikus emelkedési magasság megváltozása – a határfeltételekből adódóan – kizárólag a horizontális és vertikális termikus határréteg közelében azonosítható. $\Delta T = 60$°C-nál a rendszert egy tranziens, átmeneti dinamikus egyensúlyi, mégis stacionárius megoldás jellemzi. Ebben az esetben a jobb oldalon kialakuló feláramlás hatására már jelentős különbség tapasztalható a báramlási terület alatti régiókban ($\Delta h{=}$60–70 m), azonban a kiáramlási területen nem figyelhető meg változás. $\Delta T > 60$ °C estén megindul az időfüggő konvekció, így a termikus határrétegben kialakuló kisebb feláramlások egyre jobban módosítják a topográfia okozta felszín alatti vízáramlás szimmetrikus trajektóriáját, főként a termikus határréteg közelében ($\Delta h{=}$60–140 m), majd a medence mélyebb tartományaiban is ($z < -2000$ m). A hőmérséklet-különbség növelésével ($\Delta T > 100$°C) a konvekció egyre hevesebb, ezért a medence alsó felében már jelentősen befolyásolja az áramképet és a hidraulikus emelkedési magasság eloszlását ($\Delta h{=}$70–180 m). Közepes és nagy mélységben a modell jobb odalán tapasztalható felszín alatti vízáramlást a beáramlási terület alatt kialakuló hőoszlop irányítja. $\Delta T = 140$ °C esetén a feláramlás elérheti a medence sekélyebb tartományait ($z{=}-1200$ m), ahol akár $\Delta h{=}$80–120 m különbséget is okozhat. A kiáramlási terület alatt a termikus felhajtóerő fokozza az ott jelentkező meleg feláramlást, ezért megnő a hidraulikus emelkedési magasság értéke ($\Delta h \simeq 40$ m). Azonban az egységmedence átáramlási területének sekélyebb részein – az oldalsó határokhoz köthető ki- és beáramlási területektől eltekintve – gyakorlatilag nincs változás a hidraulikus emelkedési magasság értékekben, vagyis itt a topográfia hatása dominál.

Tehát a termikus konvekció jelentősen módosítja, helyenként irányítja a szintetikus egységmedencében kialakuló összetett áramlást. A termikus konvekció okozta, $\Delta h{=}$40–180 m hidraulikus emelkedési magasságkülönbséggel jellemezhető tartományok azonosítása segítséget nyújthat a hidrogeológiai modellépítésben. Azonban az időfüggő termikus konvekció miatt a hőmérsékleteloszlás, így a hidraulikus emelkedési magasság eloszlása is folyamatosan változik. Ezért érdemes tér- és időátlagolt mennyiségekkel vizsgálni a hidraulikus emelkedési magasság megválto-



4.17. ábra. *A hidraulikus emelkedési magasság megváltozása* ($\Delta h = h - h_{st}$), *különböző* $\Delta T = 40; 60; 80; 100; 120; 140\,^{\circ}\mathrm{C}$ *hőmérséklet-különbség esetén* $t = 4{\cdot}10^6\,\mathrm{d}$ *időnél. Ra az adott modellre jellemző Rayleigh-szám.*



4.18. ábra. *(a) Az izotermikus modellhez képest legalább 10%-kal ($\xi > 10\%$), illetve (b) 50%-kal ($\xi > 50\%$) nagyobb hidraulikus emelkedési magassággal jellemezhető területek $t = 2 \cdot 10^6$ d esetén.)*

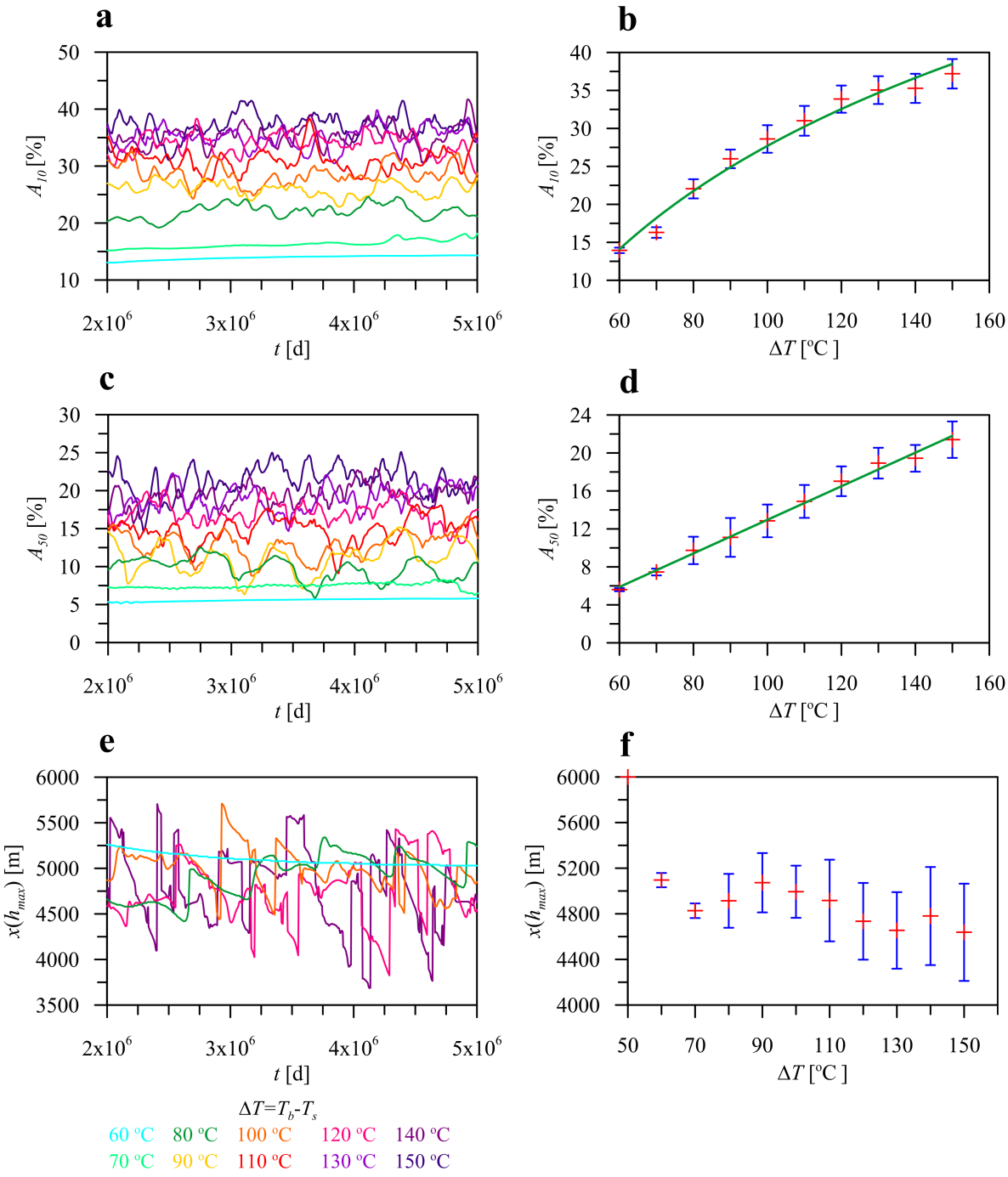
zását az egységmedence teljes területre vonatkoztatva. A modell minden pontjában meg lehet határozni egy olyan relatív mennyiséget (ξ [%]) ami megmutatja, hogy az adott pontban számított hidraulikus emelkedési magásság (h) mekkora arányban tér el az izotermikus esettől (h_{st}), amikor a felszín alatti vízáramlást kizárólag a topográfiai különbség okozza,

$$\xi = \left(\frac{h}{h_{st}} - 1\right) \cdot 100. \tag{4.6}$$

A *4.18. ábra* $\Delta T = 80\,^{\circ}\mathrm{C}$ esetén az egységmedence azon tartományait mutatja, ahol egy adott időpillanatban ($t = 2 \cdot 10^6$ d) a termikus konvekció (a) gyengén ($\xi > 10\%$), illetve (b) erősen ($\xi > 50\%$) befolyásolja a kialakuló felszín alatti vízáramlást. Azaz a termikus konvekció okozta hidraulikus emelkedési magasság növekedés legalább 10% (*4.18.a ábra*), illetve legalább 50% (*4.18.b ábra*). A számítás kvázi-stacionárius szakaszán ($t = 2 \cdot 10^6$ és $5 \cdot 10^6$ nap között) kiszámítottam ezen tartományok részarányát a medence teljes területéhez viszonyítva, melyek időbeli változása a *4.19.a* és *b ábrán* látható. Az izotermikus modellhez képest legalább 10%-kal nagyobb hidraulikus emelkedési magassággal jellemezhető területek arányának (A_{10}) értéke és frekvenciája növekszik a hőmérséklet-különbség emelkedésével, azonban a görbék amplitúdója körülbellül 8–10%-os relatív eltérésen belül marad. Ezért arra lehet következtetni, hogy az A_{10} relatív mennyiség segítségével – egy szórásintevallumon belül – jól becsülhető a termikus konvekció által kisebb mértékben befolyásolt területek

részaránya. A mennyiség tér- és időbeli átlagértékét és szórását a *4.19.b ábra* mutatja a hőmérséklet-különbség függvényében. A_{10} átlagértéke ΔT emelkedésével 14%-ról 37%-ra növekszik, de $\Delta T > 90$°C estén a szórásértékek gyakorlatilag nem változnak. Az adatokra természetes alapú logaritmikus függvényt illesztettem. Tehát a termikus konvekció ΔT=60 °C-nál a terület $\frac{1}{7}$, ΔT=110 °C-nál pedig már az $\frac{1}{3}$ részén befolyásolja gyengén a felszín alatti vízáramlást. Az 50%-kal nagyobb hidraulikus emelkedési magasságnövekedéssel jellemezhető területek arányát (A_{50}) a *4.19.c ábra* mutatja az idő függvényében. A görbék fluktuációja ebben az esetben sem haladta meg a 8–10%-os relatív eltérést. A_{50} átlagértéke ΔT emelkedésével 5, 5–21, 5% között lineárisan változik. A konvekció ΔT=60 °C-nál a terület $\frac{1}{18}$, majd $\Delta T > 110$ °C esetén már az egységmedence $\frac{1}{5}$–$\frac{1}{4}$ részén erősen befolyásolja (irányítja) a felszín alatti vízáramlást.

A *4.17. ábra* a hidraulikus emelkedési magasság eloszlásán kívül a maximális hidraulikus emelkedési magasság (h_{max}) pozícióját és értékét is mutatja. $\Delta T < 60$ °C esetén h_{max} egybeesik a modell legmagasabb pontjával ($x = 6000$ m; $z = 104, 73$ m). Azonban a beszivárgási oldalon kifejlődő feláramlás megjelenésével h_{max} már az alsó határon helyezkedik el, a beáramlási terület szélétől adott távolságra. A hőmérséklet-különbség növelésével az áramlási kép mind gyorsabban változik, így a maximum helyzete egyre intenzívebb vízszintes mozgást végez, azonban mindvégig a termikus határrétegben marad (z=−3000 m). A *4.17. ábrán* látható (zöld) szintvonalas ábrázolás a Darcy-fluxus horizontális komponensének zérus értékeit jelöli ($u = 0$), melyek minden esetben h_{max}-ban végződnek. Így belátható, hogy h_{max} pontban a Darcy-fluxusnak csak vertikális irányú komponse van. A termikus konvekció időbeli változásainak vizsgálata során már definiáltam egy olyan kitüntetett pontot, amely két oldalán a leszakadó csóva által képződő feláramlások ellentétes irányú horizontális mozgást végeznek (*4.14.a ábra*). Ezért a felszín alatti vízáramlásnak ebben a pontban – a széttartó horizontális áramlás miatt – csak lefelé irányúló komponense van. A további vizsgálatok során kiderült, hogy eme elválasztópont és h_{max} helyzete az időben mindevégig megegyezik! Feltételezhető, hogy a modell teljes tartományán h_{max}-ban a legvékonyabb a termikus határréteg, így ott jelentkezik a legnagyobb nyomásérték. A *4.19.a ábrán* a maximális hidraulikus emelkedési magasság pontjának horizontális koordinátája ($x(h_{max})$ [m]) látható az idő függvényében. Az értékek hirtelen változása, tehát a termikus határréteg legvékonyabb pontjának időbeli áthelyződését mutatja, mely egy újonnan megjelenő hőoszlop következménye.



4.19. ábra. *(a) Az izotermikus (ΔT=0) referencia modellhez képest legalább 10%-kal nagyobb hidraulikus emelkedési magassággal jellemezhető területek részaránya (A_{10}) az idő; illetve (b) azok tér- és időbeli átlaga és szórása a hőmérséklet-különbség függvényében. (c) Az 50%-kal nagyobb hidraulikus emelkedési magassággal jellemezhető területek részaránya (A_{50}) az idő; illetve (d) azok tér- és időbeli átlaga és szórása a hőmérséklet-különbség függvényében. (e) A maximális hidraulikus emelkedési magasság (h_{max}) horizontális koordinátájának változása az idő függvényében.*

A hőmérséklet-különbség növekedésével a pont egyre szélesebb tartományon mozog az egységmedence alsó határán, azonban a görbe karakterisztikája nem utal h_{max} pozíciójának periodikus időbeli változására. Ezt a tényt *4.19.b ábrán* látható $x(h_{max})$ tér- és időbeli átlagértékei is alátámasztják. Noha $\Delta T \leq 50\,^{\circ}\text{C}$-nál h_{max} a lineáris lejtő legfelső pontjában helyezkedik el, $\Delta T \geq 60\,^{\circ}\text{C}$ esetén már a modell alsó határán található. A hidraulikus emelkedési magasság maximum pontjának vízszintes helyzete a konvekciós áramlásnak megfelelően változik. Az adatok szórása $\Delta T = 60\,^{\circ}\text{C}$-nál 100 m, $\Delta T = 90\,^{\circ}\text{C}$-nál közel 600 m-t mutat. Ezért időfüggő megoldás esetén h_{max} pontos helyzetét nehéz meghatározni. Annyi azonban bizonyos, hogy h_{max} közvetlenül nem a be- és a kiáramlási terület alatt található, helyzetét az egységmedencében található nyomáseloszlás maximum pontja határozza meg.

A termikus konvekció akár $\Delta h = 100 - 200$ m hidraulikus emelkedési magasságkülönbséget is okozhat a kizárólag topográfia vezérelt felszín alatti vízáramláshoz képest. Tehát az egységmedence bizonyos részein a termikus felhajtóerő okozta hidraulikus emelkedési magasság összemérhető a topográfia okozta értékkel, sok esetben meg is haladja annak mértékét. A változás a beáramlási terület alatt periodikus mozgást végző hőoszlop közelében, az átáramlási terület mélyebb tartományaiban és a kiáramlási területen figyelhető meg. Ezen kívül a hidraulikus emelkedési magasság maximuma nem feltétlenül egyezik meg a topográfia legmagasabb pontjával. Helyzetét a termikus határrétegben vízszintesen, az időfüggő konvekciónak megfelelően változtatja. Általánosan elmondható, hogy az egységmedence sekélyebb részén a topográfia uralja a felszín alatti vízáramlást, amit a termikus konvekció jelentős mértékben módosít a be- és a kiáramlási terület szélén, valamint a modell mélyebb tartományain. Ezért szükséges a két hatás által együttesen vezérelt felszín alatti vízáramlás tulajdonságait egyszerre vizsgálni.

5. Összegzés

A felszín alatti vízáramlást invertált medencék esetén – amikor azok szárazra kerültek, így a csapadék beszivárgása lehetővé vált – topográfia vezérelt folyamatként írhatjuk le, azonban nem minden esetben hanyagolhatjuk el a többi hajtóerő (pl.: az üledékes kompakció, a tektonikus kompresszió, a hőtranszport és az ozmózis) hatását. A termikus konvekció figyelembe vétele különösen azokon a területeken fontos, ahol az átlagosnál nagyobb hőáramviszonyok (jelentős hőmérséklet-különbségek) uralkodnak (pl.: Pannon-medence, Rajna-árok, Great Artesian Basin (Ausztrália), stb.). Hidrogeológiai modellépítés esetén mérési adatokat felhasználva, numerikus számítások segítségével készítünk területspecifikus modelleket. Azonban nyitott kérdés, hogy általános esetben a termikus konvekció pontosan hol és milyen mértékben módosítja a topográfia vezérelt vízáramlást.

Tóth József (1962) egy kétdimenziós, lineárisan lejtő topográfiával rendelkező szintetikus modellben analitikusan írta le a hidraulikus emelkedési magasság eloszlását. Ezért az egységmedence modell kiváló referenciát nyújt a kizárólag topográfia és a két hajtóerő által együttesen vezérelt felszín alatti vízáramlás kvantitatív összehasonlításához. A topográfia és a termikus konvekció által együttesen vezérelt felszín alatti vízáramlás vizsgálatát a véges elemes COMSOL Multiphysics 5.2 numerikus modellező szoftver segítségével végeztem el. A hőtranszport egyenletet csak a numerikus modell sikeres verifikálását követően csatoltam a differenciálegyenlet-rendszerbe. Az egységmedence alja és teteje közötti hőmérséklet-különbség növelésével (a kőzetfizikai és hidrodinamikai paramétereket állandó érteken tartva) vizsgáltam a termikus konvekció megindulását, térbeli struktúráját, a hidraulikus emelkedési magasságra gyakorolt hatását. Már a műhelymunka kezdeti fázisában kiderült, hogy az előírt kezdeti és határfeltételek mellett az időfüggő konvekció megindulását követően a rendszernek nincs stacionárius megoldása.

A termikus konvekció vizsgálatához számos kontrollparamétert definiáltam, melyek elemzését megfelelő előfeldolgozást követően végeztem el. A paraméterekkel leírtam a modell teljes tartományán, illetve alsó és oldalsó határain tapasztalható időbeli változásokat. A hőmérséklet-különbség emelkedésével a kontrollparaméterek (tér- és időbeli) átlagértéke és szórása megnövekedett. Az adatokra két lineáris függvényt illesztettem ($Ra \sim \Delta T$), melyek töréspontja határozta meg az időfüggő konvekció megindulásához szükséges kritikus hőmérséklet-különbséget. A topográfia

okozta felszín alatti vízáramlás $\Delta T = 50$ °C-ig (az advekciónak köszönhetően) teljes mértékben ,,kiseperte" a konduktív hőmérsékleteloszlással jellemezhető szaturált pórusfolyadékot, mely kvalitatíve hasonló stacionárius eredményre vezetett. $\Delta T = 60$ °C-nál a beáramlási terület alatt kialakuló feláramlás okozta termikus felhajtóerő és a topográfia okozta áramlás kiegyenlítette egymást, így a rendszer egy dinamikus egyensúlyi, de stacionárius állapotba került. Az egész tartományon számított átlagnégyzetes Darcy-fluxus értékek alapján $\Delta T = 70$ °C-nak adódott az a kritikus hőmérséklet-különbség ($Ra_{cr} \simeq 1227$), ahol megindult az időfüggő termikus konvekció. Habár a kontrollparaméterek átlagértéke lineáris trend szerint változott, szórásuk – bizonyos esetekben – egyre hevesebb fluktuációt mutatott. Az egységmedence alsó és oldalsó határain számított Darcy-fluxusok szórása a termikus konvekciót jellemző periodikusan ismétlődő, karakterisztikus folyamatokról adtak közvetlen információt.

A rendszer dinamikájának kvalitatív értelmezését a *4.13.* és *4.14. ábrák* segítségével mutattam be $\Delta T = 80$°C esetén. Minden időfüggő megoldás kvázi-stacionárius jelleget mutatott. A kvázi-stacionárius állapot beállta után ($t \geq 2{\cdot}10^6$ d) vizsgáltam. A modell határain számított Darcy-fluxusok (CFFT) amplitúdóspektruma segítségével karakterisztikus frekvenciaértéket tudtam rendelni a termikus konvekciót jellemző folyamatokhoz. A Fourier-analízis alapján összességében elmondható, hogy a jobb oldalon oszcilláló feláramlás uralja a beszivárgási tartomány időbeli viselkedését ($\tau_I = 5{\cdot}10^5$d). Az alsó határon megjelenő termikus instabilitások időbelisége meglátszik mind $u_{b\,(\mathrm{FT})}$, mind $v_{r\,(\mathrm{FT})}$ spektrumon ($\tau_{II} = (2,2\text{–}2,5) \cdot 10^5$ d). A kiszivárgási oldalon azonban ezen két jelenség hatása az amplitúdóspektrumon összemosódik, így a karakterisztikus folyamatok nem szeparálhatóak. Az átlagos hidraulikus emelkedési magasság ($h_{av\,(\mathrm{FT})}$) idősorai csak a beszivárgási oldalon jelentkező hőoszlop karakterisztikus viselkedését tartalmazzák, mely egyértelműsíti, hogy az alsó termikus határrétegből kifejlődő hőoszlopok szerepe az átlagos hidraulikus emelkedési magasságra nézve elenyésző. A ΔT emelkedésével az időfüggő konvekció egyre hevesebben viselkedik, így a karakterisztikus frekvenciák eltolódnak ($\tau_I = 3,3 \cdot 10^5$ d; $\tau_{II} = (1,7\text{–}1,8) \cdot 10^5$ d), majd ($\Delta T > 120$ °C) esetén a termikus konvekció aperiodikussá válik, az amplitúdóspektrum elmosódik. Habár a hidrogeológiai modellépítésnél általában figyelmen kívül hagyják a konvekció dinamikájára jellemző karakterisztikus folyamatok jelentőségét, hatásuk a geológiai időskálán nem elhanyagolható. A területspecifikus modelleknél a topográfia erősen befolyásolja a

termikus konvekció térbeli kiterjedését, így a rendszer működése akár stacionárius megoldást is felvehet.

A gyakorlati hidrogeológia szempontjából sokkal fontosabb, hogy a termikus konvekció hol és mennyire módosíthatja az egyszerű egységmedencében leírt stacionárius áramlást (izotermikus eset). A konvekció hevességétől függően a hidraulikus emelkedési magasságváltozás elérte a Δh=40–100 m, helyenként a Δh=100–200 m-t. A termikus konvekció által (gyengén, illetve erősen) befolyásolt tartományok nagyságát megpróbáltam általánosan jellemezni a hőmérséklet-különbség függvényében. A 10%-kal nagyobb hidraulikus emelkedési magassággal jellemezhető területek aránya 14–37% között változott, míg az 50%-kal nagyobb értékeket mutató területek részaránya 5, 5–21, 5%-nak adódott. A változást a beáramlási terület alatt kvázi-periodikus mozgást végző hőoszlop közelében, az átáramlási terület alsó felében és a kiáramlási területen azonosítottam. Tehát a termikus konvekció az egységmedence jelentős részén befolyásolhatja a felszín alatti vízáramlást. Ezen kívül megállapítottam, hogy a hidraulikus emelkedési magasság maximumának helyzete folyamatos horizontális mozgást végez az alsó határon. Valószínűsíthetően az említett pont jelöli ki a termikus határréteg legvékonyabb részét, ahol egy lokális leáramlásnak köszönhetően maximális a nyomás.

Munkám során numerikus módszerek segítségével kvantitatívan vizsgáltam a szintetikus egységmedence modellben kialakuló összetett áramlást. Kijelenthető, hogy a termikus konvekciónak jelentős szerepe lehet a felszín alatti áramlási viszonyok kialakításában. Azonban a dolgozatban csupán egy nagyobb, több szálon futó kutatás kezdeti lépéseit tettem meg. A területspecifikus modellezést megelőzően ahhoz, hogy a kapcsolt medenceléptékű folyamatokról többet megtudhassunk, még további számításokat kellene elvégezni. A lejtőszög változtatásával, anizotróp, inhomogén egységmedencében meg kell határozni a termikus konvekció kialakulásának feltételeit, majd a módszereket alkalmazni lehetne a komplex medencére (Tóth, 1963). A kétdimenziós szisztematikus tesztelést követően az elemzést érdemes lenne kiterjeszteni háromdimenziós térbe. Azonban újabb hajtóerő figyelembe vétele esetén (pl.: a sótartalom szerepének vizsgálatánál) érdemes visszatérni a modellépítés alapjaihoz, az egységmedencéhez.

6. Summary

According to first approximation, groundwater flow is driven by hydraulic gradient of water table, however other driving forces (e.g. differences in the density of porewater due to thermal expansion, changes in salinity, tectonic or sedimentary compression, etc.) should not be neglected. Two-dimensional finite element numerical calculations were carried out to investigate distortion of basin-scale groundwater flow system driven by hydraulic head difference due to inhomogeneous temperature distribution.

Tothian homogeneous unit basin (Tóth, 1962) with constant slope of water table (γ=1°) was used for the simulation. Equations of the continuity, the heat transfer and the Darcy's Law with temperature-dependent water density were solved to handle the problem, i.e. the interaction of different driving forces, the free thermal convection and water table gradient. Temperature differences between the bottom and the surface of the basin (ΔT) was systematically varied to reveal the influence of the thermal convection on several control parameters (root-mean-square Darcy velocity components, average of hydraulic head, temperature and heat flux time series). The system converged to stationary solution when $\Delta T < 60\,^{\circ}\mathrm{C}$ and the heat was advected toward the discharge area dominantly by water table differences. In the case of ΔT=60 °C a dynamic equilibrium (but stationary solution) formed under the recharge area, however time-dependent free convection started above 60 °C (from ΔT=70 °C, Ra_{cr}=1227).

Dominant frequencies of the time series of the monitoring parameters reflected the dynamics of the system, so the solution considered to quasi-stationary ($t \geq 2 \cdot 10^6$ d). As a result of a Fourier analysis (CFFT) the characteristic time periods of movement of convection were calculated. Analysing the amplitude spectrum of the observed parameters (Darcy's velocities, hydraulic head and temperature) two specific time period were determined. The longer one (τ_I=$5 \cdot 10^5$ d) observed in the time series of vertical Darcy velocity at the right side wall ($v_{r\,(\mathrm{FT})}$) corresponded to quasi-periodic, vertical pulsation of the large plume under the recharge area, which also was defined by spectrum of average hydraulic head ($h_{av\,(\mathrm{FT})}$). Spectrum of $v_{r\,(\mathrm{FT})}$ and the horizontal Darcy velocity at the bottom ($u_{b\,(\mathrm{FT})}$) defined the shorter period, which represented the smaller drifting plumes (evolved from the thermal boundary layer) (τ_{II}=$(2.2-2.5)\cdot 10^5$ d). As ΔT increased the time periods decreased

(τ_I=$3.3 \cdot 10^5$ d, τ_{II}=$(1.7-1.8) \cdot 10^5$ d), but in the case of $\Delta T > 120\,^{\circ}$C the amplitude spectra implied aperiodic dynamics of the system.

The derived hydraulic head values were compared to values of the isothermal unit basin (ΔT=0 °C). Differences in hydraulic head reached Δh=40–100 m, especially near the thermal boundary layer (Δh=100–200 m). The proportion of areas where the hydraulic head was at least 10% higher, than in the isothermal system varied between 14%–37%. Where the hydraulic head was at least 50% higher, the ratio of areas was ranged from 5.5% to 21.5%. Thus significant difference was observed around the pulsing plume under the recharge are, on the edge of the discharge area, and in deeper parts of the midline zone. In addition, in the phase of the time-dependent convection ($\Delta T > 60\,^{\circ}$C), maximum point of the hydraulic head was at the bottom of the basin (in the thermal boundary layer), where it was moving horizontally. This point defined probably the thinnest part of the thermal boundary layer, where the pressure was the highest due to a local downflow.

In conclusion, two-dimensional finite element numerical simulation used by COMSOL Multiphysics 5.2 software package was carried out to investigate simultaneous impact of the water table gradient and the free thermal convection in time-dependent models. High temperature anomaly modified groundwater flow significantly relative to the trajectory of isotherm one. Nevertheless, many new questions and issues emerged which need to be examined and investigated but these are beyond the scope of my thesis.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni Galsa Attila áldozatos munkáját, aki az elmúlt fél évben lelkiismeretesen segítette munkámat, a felmerülő kérdések esetén bölcs tancsaival iránymutatást adott az eredmények helyes értelmezéséhez, valamint dolgozatomat szakmailag lektorálta.
Hálával tartozom Mádlné Szőnyi Juditnak, aki már magával a témafelvetéssel lendületet adott kutatásomnak, továbbá a közös konzultációk során elmondott tanácsaival rávilágított a folyamatok gyakorlati jelentőségére. Köszönet illeti Tóth Ádámot, aki építőjellegű gondolataival szintén segítette munkámat. Ezenkívül köszönöm mindazok fáradozását, akik elolvasták és véleményezték készülő diplomadolgozatomat.
Köszönettel tartozom az Eötvös Loránd Tudományegyetem Geofizikai és Űrtudományi Tanszékének, hogy biztosította a kutatás számítógépes hátterét.
Végül, de nem utolsó sorban hálás köszönettel tartozom családomnak, barátnőmnek és barátaimnak, akik folyamatosan bíztattak, és a nehezebb napokon is végtelen türelmükkel tartották bennem a lelket.

Budapest, 2017. május 15.

Szijártó Márk

Ábrák jegyzéke

2.1. A hidraulikus emelkedési magasság. 9
2.2. A kontinuitási egyenlet szemléltetése. 10
2.3. A Tóth-féle egységmedence modell. 12
2.4. Termikus konvekció porózus közegben. 14
3.1. A víz sűrűségének hőmérsékletfüggése. 17
3.2. A véges elemes egységmedence modell. 19
4.1. Az analitikus megoldás numerikus közelítése. 23
4.2. A numerikus modell verifikálása (I.). 24
4.3. A numerikus modell verifikálása (II.). 25
4.4. A hőmérsékleteloszlás időbeli változása $\Delta T = 20\,^{\circ}\mathrm{C}$ esetén. 28
4.5. A hőmérsékleteloszlás időbeli változása $\Delta T = 80\,^{\circ}\mathrm{C}$ esetén. 29
4.6. Az egységmedencében kialakuló termikus konvekció. 31
4.7. A hőmérsékleteloszlás és a hidraulikus emelkedési magasság. 32
4.8. Kontrollparaméterek az idő függvényében (I.). 34
4.9. Kontrollparaméterek az idő függvényében (II.). 36
4.10. Az adatsor feldolgozása. 37
4.11. A kontrollparaméterek idő- és térbeli átlaga (I.). 39
4.12. A kontrollparaméterek idő- és térbeli átlaga (II.). 40
4.13. A termikus konvekció dinamikája (I.). 43
4.14. A termikus konvekció dinamikája (II.). 44
4.15. A kontrollparaméterek amplitúdóspektruma (I.). 47
4.16. A kontrollparaméterek amplitúdóspektruma (II.). 48
4.17. A hidraulikus emelkedési magasság megváltozása. 52
4.18. A termikus konvekció által befolyásolt tartományok. 53
4.19. A termikus konvekció által befolyásolt tartományok részaránya. . . . 55

Táblázatok jegyzéke

3.1. Alapparaméterek és változók. 18
3.2. Maximális iterációs időlépések. 22
4.1. A modellek hőmérséklet-különbség értékei. 30
4.2. Kontrollparaméterek. 33
4.3. A konvekció karakterisztikus folyamatainak periódusideje. 50

Hivatkozások

Beck, J.L., A., & Geer, G. 1972. Convection in a Box of Porous Material Saturated with Fluid. *The Physics of Fluids*, **15**(8), 1377–1383.

Bories, S.A., & Combarnous, M.A. 1973. Natural convection is a sloping porous layer. *J. Fluid Mech.*, **57**(1), 63–79.

Bredehoeft, J.D., & Hanshaw, B. 1968a. On the maintance of anomalous fluid pressures, I. Thick sedimentary sequences. *Geological Society of America Bulletin*, **79**, 1097–1106.

Bredehoeft, J.D., & Papadopulos, I.S. 1965. Rates of vertical groundwater movement estimated from the Earth's thermal profile. *Water Resources Research*, **1**, 238–325.

Brigham, O.E. 1988. The Fast Fourier Transform and Its Applications. *Prentice-Hall, Inc.*, 448p.

Brown, G.O. 2002. Henry Darcy and the making of a law. *Water Resources Research*, **38**(7), 1–11.

Carrillo-Rivera, J.J., & Cardona, A. 1996. Importance of the vertical component of groundwater flow: A hydrogeochemical approach in the valley of San Luis Potosi, Mexico. *Journal of Hydrology*, **185**(1-4), 23–44.

Castinel, G., & Combarnous, M.A. 1975. Convection naturelle dans une couche poreuse anisotrpoe. *Rev. Therm.*, **168**, 937–947.

Cermák, V. 1984. Heat flow and deep structure of Europe. *In: Proceedings of 27th international geological congress, Moscow*, **8**, 94–110.

Clauser, C., & Villinger, H. 1990. Analysis of conductive and convective heat transfer sedimentary basin, demonstrated for the Rheingraben. *Geophys. J. Int.*, **100**, 393–414.

Combarnous, M.A., & Bories, S.A. 1975. Hydrothermal convection in a saturated porous media. *Advances in Hydroscience, Academic Press, N.Y.*, **10**, 231–306.

Cserepes, L., & Lenkey, L. 2004. Forms of hydrothermal and hydraulic flow in a homogeneous unconfined aquifer. *Geophys. J. Int.*, **158**, 785–797.

D'Andrimont, R. 1906. La Science Hydrologique. *Revue Universelle des Mines. Liége: Béranger.*

Darcy, H. 1856. Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon. *Dalmond, Paris.*

Deming, D. 2004. Intoduction to Hydrogeology. *ISBN: 978-0072326222.*

Domenico, P.A., & Palciauskas, V.V. 1973. Theoretical Analysis of Forced Convective Heat Transfer in Regional Ground-Water Flow. *Geological Society of America Bulletin*, **84**, 3803–3814.

Ephere, J.F. 1975. Critére d'apparition de la convection naturelle dans une couche poreuse anisotrope. *Rev. Therm.*, **168**, 949–950.

Fetter, C.V. 1994. Applied hydrogeology. *McMillian College Publishing, USA*, 691p.

Fourmarier, P. 1939. Hydrogeology. Introduction to the Study of Water used for Human Consumption and by Industry. *Paris: Masson.*

Freeze, R.A., & Witherspoon, P.A. 1966. Theoretical analysis of regional groundwater flow: 1. Analytical and numerical solutions to the mathematical model. *Water Resources Research*, **2**(4), 641–656.

Freeze, R.A., & Witherspoon, P.A. 1967. Theoretical analysis of regional groundwater flow: 2. Effect of water table configuration and subsurface permeability variation. *Water Resources Research*, **3**(2), 623–634.

Freeze, R.A., & Witherspoon, P.A. 1968. Theoretical analysis of regional groundwater flow: 3. Quantitative interpretation. *Water Resources Research*, **4**(3), 581–590.

Galsa, A., & Lenkey, L. 2007. Quantitative investigation of physical properties of mantle plumes in three-dimensional numerical models. *Physics of Fluids*, **19**, 1160601–1–13.

Graham, M.D., & Steen, P.H. 1994. Plume formation and resonant bifurcations in porous-media convection. *J. Fluid Mech.*, **272**, 67–89.

Guinon, J.L., Ortega, E., Garcia-Anton, J., & Perez-Herranz, V. 2007. Moving Average and Savitzki-Golay Smoothing Filters Using Mathcad. *ICEE 2007 (International Conference on Engineering Education).*

Herein, M., Galsa, A., & Lenkey, L. 2013. Impact of the Rayleigh number and endothermic phase transition on the time behaviour of mantle avalanches. *Journal of Geodynamics*, **66**, 103–113.

Hewitt, D.R., Neufeld, J.A., & Lister, J.R. 2014. High Rayleigh number convection in porous medium containing a thin low-permeability layer. *J. Fluid Mech.*, **756**, 844–869.

Hubbert, M.K. 1940. The theory of ground-water motion. *The Journal of Geology*, **48**, 785–944.

Igboekwe, M.U., & Amos-Uhegbu, C. 2011. Fundamental Approach in Groundwater Flow and Solute Transport Modelling Using the Finite Difference Method. *Earth and Environmental Sciences, Dr. Imran Ahmad Dar (ed.), InTech.*

Jame, Y.W., & Norum, D.I. 1980. Heat and mass transfer in freezing unsaturated porous media. *Water Resour. Res.*, **16**(4), 811–819.

Jiang, X.-W., Wan, L., Wang, X.-S., Ge, S., & Liu, J. 2009. Effect of exponential decay hydraulic conductivity with depth on regional groundwater flow. *Geophys. Res. Lett.*, **36**(L24402), 1–4.

King, F.H. 1899. Principles and conditions of the movements of ground water. *U.S. Geological Survey 19th Annual Report, Part 2.*

Kiss, J., & Prácser, E. 2016. Data processing along a profile – semi-automated source detection, frequency filtering and depth slicing (CEL08 profile) (in Hungarian with English abstract). *Magyar Geofizika*, **2**, 69–87.

Kristinof, R., Ranjith, P.G., & Choi, S.K. 2010. Finite element simulation of fluid flow in fractured rock media. *Environ. Earth Sci.*, **60**, 765–773.

Lapwood, E.R. 1948. Convection of a fluid in a porous medium. *Math. Proc. Comb. Phil. Soc.*, **44**, 508–521.

Lazear, G.D. 2006. Evidence for deep groundwater flow and convective heat transport in mountainous terrain, Delta Country, Colorado, USA. *Hydrogeology Journal*, **14**, 1582–1598.

Lenkey, L. 1993. Study of thermal anomaly at Tiszakécske by numerical modelling of the thermal convection (in Hungarian with English abstract). *Magyar Geofizika*, **1**, 30–45.

Levy, M.A., Thorkelson, C., Vörösmarty, C., Douglas, E., & Humphereys, M. 2005. Freshwater Avialability Anomalies and Outbreak of Internal War: Result from a Global Spatial Time Series Analysis. *Human Security and Climate Change, International Workshop, Oslo (21-23 June)*, 26p.

Magyar, B. 2016. Komplex felszín alatti vízáramlások két- és háromdimenziós véges elemes numerikus modellezése szintetikus topográfia esetén. Diplomamunka. *Eötvös Loránd Tudományegyetem*, 80p.

Maxey, G.B. 1964. Hydrostratigraphic units. *Journal of Hydrology*, **2**, 124–129.

Mays, L.W., Koutsoyiannis, D., & Angelakis, A.N. 2007. A brief history of urban water supply in antiquity. *Water Science and Technology: Water Supply*, **7**(1), 1–12.

McKibbin, R., & Tyvand, P. 1982. Anisotropic modelling of thermal convection in multilayered porous media. *Journal of Fluid Mechanics*, **118**, 315–339.

Mádl-Szőnyi, J., & Tóth, J. 2009. A hydrogeological type section for the Duna-Tisza Interfluve, Hungary. *Hydrogeology Journal*, **17**, 961–980.

Molson, J.W., & Frind, E.O. 2016. HEATFLOW-SMOKER: density-dependent flow and advective-dispersive transport of thermal energy, mass or residence time. *Univ. Laval, Quebec City and Univ. Waterloo, Waterloo, ON*, 116p.

Munn, M.J. 1909. The anticlinal and hydraulic theories of oil and gas accumulation. *Economic Geology*, **4**(6), 509–529.

Nield, D.A. 1997. Notes on Convection in a Porous Medium: (i) an Effective Rayleigh Number for an Anisotropic Layer, (ii) the Malkus Hypothesis and Wavenumber Selection. *Transport in Porous Media*, **27**, 135–147.

NSF. 2009. Earth Science Literacy Principles: The big ideas and supporting concepts of earth science. *US National Science Foundation.*

Otero, J., Dontcheva, L., Johnston, H., Worthing, R.A., Kurganov, A., Petrova, G., & Doering, C.R. 2004. High-Rayleigh-number convection in a fluid-saturated porous layer. *J. Fluid Mech.*, **500**, 263–281.

Person, M., Raffensperger, J.P., Ge, G., & Garven, G. 1996. Basin-scale hydrogeologic modeling. *Reviwes of Geophysics*, **34**, 61–87.

Pestov, I. 2000. Thermal Convection in the Great Artesian Basin, Australia. *Water Resources Management*, **14**, 391–403.

Phillips, O.M. 2009. Geological fluid dynamics sub-surface flow and reactions. *Cambridge University Press, Cambridge, ISBN: 978-0-521-6555-5.*

Rabinowicz, M. 1998. Two- and three-dimensional modeling of hydrothermal convection in the sedimented Middle Valley segment, Juan de Fuca Ridge. *Journal of Geophysics Research*, **103**(B10), 24,035–24,065.

Ran, A., Jiang, X.-W., Wang, J.-Z., Wan, L., Wang, X.-S., & Li, H. 2015. A theoretical analysis of basin-scale groundwater temperature distribution. *Hydrogeology Journal*, **23**, 397–404.

Rubin, H. 1981. Thermal convection in a nonhomogeneous aquifer. *Journal of Hydrology*, **50**, 317–331.

Straus, J.M., & Schubert, G. 1977. Thermal convection of water porous medium: Effects of temperature- and pressure dependent thermodynamic and transport properties. *Journal of Geophysical Research*, **82**, 325–333.

Tóth, Á., Havril, T., Simon, Sz., Galsa, A., Santos, F.A.M., Müller, I., & Mádl-Szőnyi, J. 2016. Groundwater flow pattern and related environmental phenomena in complex geologic setting based on integrated model construction. *Journal of Hydrology*, **539**, 330–344.

Tóth, J. 1962. A Theory of Groundwater Motion in Small Drainage Basins in Central Alberta, Canada. *Journal of Geophysical Research*, **67**(11), 4375–4387.

Tóth, J. 1963. A Theoretical Analysis of Groundwater Flow in Small Drainage Basins. *Journal of Geophysical Research*, **68**(16), 4795–4809.

Tóth, J. 1971. Groundwater discharge: a common generator of diverse geological and morphological phenomena. *Bull. Intl. Assoc. Sci. Hydrology*, **XVI**(1.3), 7–24.

Tóth, J. 1980. Cross-formational gravity-flow of groundwater: a mechanism of the transport and accumulation of petroleum (the generalized hydraulic theory of petroleum migration). *American Association of Petroleum Geologist, Tulsa*, 121–167.

Tóth, J. 1995. Hydraulic continuity in large sedimentary basins. *Hydrogeology Journal*, **3**(4), 4–16.

Tóth, J. 2009. Gravitational Systems of Groundwater Flow: Theory, Evaluation, Utilization. *Cambridge University Press, United Kingdom, Cambridge*, 297p.

Turcotte, D.L., & Schubert, G. 2002. Geodynamics. *Cambridge University Press, Cambridge*, 456p.

Tyvand, P.A. 1977. Heat dispersion effect on thermal convection in anisotropic porous media. *Journal of Hydrology*, **34**, 335–342.

Voss, I.C., & Simmons, C.T. 2010. Three-dimensional benchmark for variable-density flow and transport simulation: matching semi-analytical stability modes for steady unstable convection in an inclined porous box. *Geochimica et Cosmochimica Acta, Pergamon Press, USA.*, **18**, 5–23.

Warren, W.W., & Warren, T.W. 2014. Fluxes versus the "Frankeinstein" model of Earth Science education. *Hydrogeology Journal*, **22**, 985–986.

Wood, J.R., & Hewett, T.A. 1982. Fluid convection and mass transfer in porous sandstones – a theoretical model. *Geochimica et Cosmochimica Acta, Pergamon Press, USA.*, **46**, 1707–1713.

Zimmerman, W.B.J. 2006. Multiphysics Modelling Finite Element Methods. *World Scientific Publishing Company, Singapore*, 422p.

NYILATKOZAT

Név: Szijártó Márk

ELTE Természettudományi Kar, szak: Geofizikus

NEPTUN azonosító: ESR61M

Diplomamunka címe:

Topográfiai és hőmérsékleti különbségek együttes hatása által vezérelt felszín alatti vízáramlás numerikus modellezése szintetikus egységmedencében

A **diplomamunka** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és az idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2017. május 15.

_____

a hallgató aláírása