Szolitonok és instantonok II

SZOLITONOK II

1-ea

A szoliton kvantálás általános elvei

Szoliton: részecskeszerű megoldás, lokalizált, véges energiájú

$\xrightarrow{\text{QFT}}$ "kiterjedt" részecske

↓ lehetővé teszi a kv. állapot tulajdonságainak számolását a kl. megoldásból

↓ nem pontszerű

↓ szemiklasszikus QFT-beli általánosítás, nem perturbatív

klasszikus szoliton nem a hullámfüggvény a kv. állapotban!

Klasszikusan a mezők c-számok; meghat. a rendszer állapotát; ∄ részecskefogalom

Quantumosan: mezők q-számok (operátorok); $\mathcal{H}$-beli vektorokra hatnak; a rendszer állapotai $\in \mathcal{H}$

↓ Heisenberg egyenlet — nem beszél az állapotról

↓ klasszikus mozgásegyenlet

térelméleti Schrödinger egyenlet: állapotvektorok időfejlődése → nem hasonlít a kl. mozg. egyenletekre

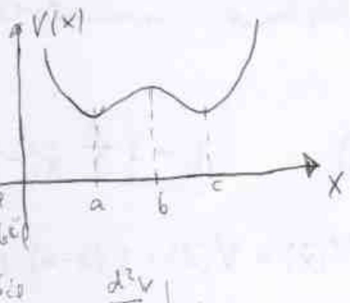
részecskék és $\mathcal{H}$: $[\vec{P}, H]=0$, $E^2-\vec{p}^2=M^2$ közös sajátállapotaik és ezt tudjuk

---

Sztatikus megoldásokra — Alapok

$m=1$ tömegű nem rel. részecske mozgása $V(x)$

kl. egyenlet $\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{dV}{dx}$



$x(t)$ megoldás

$x(t)\equiv a$ ✓ stabil

$x(t)\equiv b$ instabil

$x(t)\equiv c$ ✓ stabil

$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{a}>0$

kl. alapállapot

$x=a$ $\quad E_0^{kl}=V(a)$

kvantumosan: $\psi(x)$ hullámfv. E_n sajátállapotban — kvantumosan ∄ $x=a$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right)\psi_n(x)=E_n\psi_n(x)$$

$$E_0=E_0^{kl}+\Delta=V(a)+\Delta$$

$x=a$ körül $V(x)$-et Taylor sorba

$$V(x)=V(a)+\frac{1}{2}\underbrace{\omega^2}_{\text{kis rezgések frekvenciája}}(x-a)^2+\frac{\lambda_r}{r!}(x-a)^r+\dots$$

olyan hf.-re $\boxed{\lambda_r \langle (x-a)^r \rangle << \omega^2 \langle (x-a)^2 \rangle}$ effektíve oszcillátorunk van

gyenge csatolás

$\Delta_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \qquad E_0 = V(a) + \frac{1}{2}\hbar\omega + \mathcal{O}(\lambda_r)$

ameddig ez teljesül

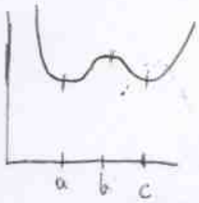
$\boxed{E_n = V(a) + \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega + \mathcal{O}(\lambda_r)}$ → $x=a$ körül → oszcilláló állapotok tornya

$\Psi_0(x)$ alapállapot

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; x \; |\Psi_0|^2 = a + \mathcal{O}(\lambda_r)$$

↳ klasszikus megoldás

az direkt tulajdonsága



$x(t) \equiv c$ megoldás

$\forall$-t elmondhatunk

$E_0^{cl} = V(c) > V(a)$

$V(x) \approx V(c) = \frac{1}{2}\omega'^2(x-c)^2 + \frac{\tilde{\lambda}_r}{r!}(x-c)^r$ $\qquad \boxed{E_n = V(c) + \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega' + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}_r)}$

alagutazás ?

mindenesetre ha a potenciálgát végtelen magas

Gyenge csatolással baj van, ha $\omega^2 = 0$

$V(x) = V_0$ konstans minden $\forall x = x_0$ klasszikus megoldás

transzlációs szimmetria $\quad E_n = V_0 + \frac{1}{2}p_n^2 \qquad e^{ipx}$

$\forall\ \omega = 0$ mögött van folytonos szimmetria

általánosítás: $\quad \vec{X} = (X_1, \dots, X_N) \qquad L = \frac{1}{2}\sum^N \dot{X}_i^2 - V(X)$

$\vec{x} = \vec{a} \quad V(\vec{x})$ minimuma $\quad V(\vec{x}) = V(\vec{a}) + \frac{1}{2}(x-a)_i (x-a)_j \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right| + \dots$

ξ_i-k között magasabb polinomiális csatolás

mátrix

↳ s.é. ω_i^2

diagonalizáljuk

ξ_i normálkoordináták

Ha a gyenge csatolás fennáll

$$E_{\{n_i\}} = V(\vec{a}) + \sum_{i=1}^{N}\left(n_i + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_i + \mathcal{O}(\lambda_r)$$

alapállapot $E_{\{0_i\}}$

Térelmélet: ∞ sok szab. fok $\quad x_1 \dots x_N(t) \longrightarrow \phi_{\vec{x}}(t) = \phi(\vec{x}, t)$

D + 1 Minkowski téridő $\quad \phi(\vec{x}, t) \quad$ 1 db valós skalármező

$$\mathcal{L} = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 - U(\phi) \right\} = T[\phi] - V[\phi]$$

$U(\phi) \geq 0$

kl. mozgásegyenlet $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\delta V[\phi]}{\delta \phi(\vec{x},t)}$

Sztatikus megoldás $0 = \frac{\delta V[\phi]}{\delta \phi(\vec{x})}$ $V[\phi(\vec{x})]$ minimuma $\phi_0(\vec{x})$

$V[\phi(\vec{x})]$-t funkcionál Taylor sorba fejtjük $\phi_0(\vec{x})$ körül $\phi(\vec{x}) = \phi_0 + \eta(\vec{x})$

$$V[\phi_0+\eta] = \int d^Dx \left\{ \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi_0)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\eta)^2 + \underbrace{\vec{\nabla}\phi_0 \vec{\nabla}\eta}_{\text{int.}} + U(\phi_0) + U'\big|_{\phi_0}\eta + \frac{1}{2}U''\big|_{\phi_0}\eta^2 + \dots \right\}$$

$$V[\phi_0+\eta] = V[\phi_0] + \int d^Dx \left\{ \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\eta)^2 \underbrace{- \eta\Delta\phi_0 + \eta U'\big|_{\phi_0}}_{\eta(-\Delta\phi_0 + U'|_{\phi_0})} + \frac{1}{2}U''\big|_{\phi_0}\eta^2 + \dots \right\}$$

0, a sztatikus megoldás miatt

$$\frac{\delta V}{\delta \phi} = 0 \to \frac{\delta V}{\delta \eta}\bigg|_{\eta=0} = 0 = -\Delta\phi_0 + U'\big|_{\phi_0}$$

$$\boxed{V[\phi_0+\eta] = V[\phi_0] + \int d^Dx \, \frac{1}{2}\eta(x) \underbrace{\left\{-\Delta + U''\big|_{\phi_0(\vec{x})}\right\}}_{\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}} \eta(\vec{x}) + \dots}$$

általánosítása

$\eta(\vec{x}) = \phi(\vec{x}) - \phi_0(\vec{x})$ normál koordináták általánosítása

$$\boxed{\left(-\Delta + \frac{1}{2}\frac{d^2U}{d\phi^2}\bigg|_{\phi_0(\vec{x})}\right)\eta_i(\vec{x}) = \omega_i^2 \eta_i(\vec{x})}$$

ω_i^2 valós

$\eta_i(\vec{x})$ ortonormált

$$\eta(\vec{x},t) = \phi(\vec{x},t) - \phi_0(\vec{x}) = \sum C_i(t)\,\eta_i(\vec{x})$$

$\mathcal{L} = T[\phi] - V[\phi]$

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_i \left(\dot{C}_i(t)\right)^2 - \left[V[\phi_0] + \frac{1}{2}\omega_i^2 C_i^2(t)\right] + \text{km}}$$

$O(\lambda_-)$

$\forall C_i(t)$-re oszcillátor!

$\to C_i C_j C_k$ szerű kh.

gyenge csatolásban $\forall C_i \to$ kvantum oszcillátor

$$E_{\{n_i\}} = V[\phi_0] + \sum_i \left(n_i + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_i + \text{km} \quad O(\lambda_-)$$

$\to \phi_0(\vec{x})$ stab. frekvenciái

klasszikus megoldás energiái

$\forall$ stabil sztatikus megoldásra el lehet végezni

nem spontán sértett ϕ^4

klasszikus alapállapothoz asszociált kv. állapotok $\leftrightarrow$ standard térelmélet

$$\mathcal{L} = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}(\vec\nabla\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \right\} \qquad m^2, \lambda > 0$$

$$V[\phi] = \int d^D x \left\{ -\frac{1}{2}\phi\Delta\phi + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 \right\} \qquad \frac{\delta V}{\delta\phi} = 0 = -\Delta\phi + m^2\phi + \lambda\phi^3$$

triv megold. $\phi \equiv 0$ $(=\phi_0)$ $\qquad V[\phi_0 = 0] = 0$

$$\left.\frac{d^2 U}{d\phi^2}\right|_{\phi_0} = m^2$$ normálkoordináták egyenlete

$$(-\Delta + m^2)\,\eta_i(\vec x) = \omega_i^2\,\eta_i(\vec x)$$

L^D dobozban periodikus peremfelt. (végén $L \to \infty$)

$$\eta_i(\vec x) = L^{-D/2} e^{i\vec k_i \vec x} \qquad \vec k_i = \frac{2\pi}{L}\vec N_i \quad \text{(egész)} \qquad \boxed{\omega_i = \sqrt{k_i^2 + m^2}}$$

$$E_{\{n_i\}} = 0 + \hbar \sum_i \left(n_i + \frac{1}{2}\right)\omega_i + \mathcal{O}(\lambda_r)$$

alapáll.

$$E_{\{0_i\}} = \frac{\hbar}{2}\sum_i \sqrt{\vec k_i^2 + m^2} + \mathcal{O}(\lambda_r)$$ végtelen, regularizálni kell

első gerjesztett állapot $\omega_{min} = m$ egyszer gerjesztve

ω_{min} $\quad E_{\{\omega_{min},1\}} - E_{\{0_i\}} = \hbar\omega_{min} = \hbar m + \mathcal{O}(\lambda_r) \longleftrightarrow$ éppen 1 db ülő m tömegű részecske

$\vec k_i \neq 0 \qquad \omega_i = \sqrt{k_i^2 + m^2}$

A kink megoldás levantálása

$1+1$ dim $\phi(x,t)$

$$L = \int dx\, \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - V[\phi] \qquad V[\phi] = \int dx \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\lambda}{4}\left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda}\right)^2\right]$$

$$\frac{\delta V}{\delta\phi} = 0 = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - m^2\phi + \lambda\phi^3 = 0$$ vákuum $\phi \equiv \pm\frac{m}{\sqrt\lambda}$

kink $\phi_{cl} = \frac{m}{\sqrt\lambda}\,\mathrm{th}\left(\frac{m(x-a)}{\sqrt 2}\right)$

Szemiklasszikus kv. $\forall$-re ált

$$\phi_1 = \frac{m}{\sqrt\lambda} \qquad \tilde\phi = \phi - \phi_1 \qquad \sqrt\lambda\text{-ban perturbációs}$$

$$V[\tilde\phi] = \int dx\,\frac{1}{2}\left\{\tilde\phi\left(-\partial_x^2 + 2m^2\right)\tilde\phi\right\} + m\sqrt\lambda\int dx\,\tilde\phi^3 + \frac{\lambda}{4}\int\tilde\phi^4\,dx$$

normálkoordináták egyenlete

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + 2m^2\right)\eta_n(x) = \omega_n^2\,\eta_n(x) \qquad \omega_n = \sqrt{k_n^2 + 2m^2} \qquad \eta_n(x) \sim e^{ik_n x} \qquad \boxed{k_n L = 2\pi n}$$

$$L\to\infty \quad \sum_n \equiv \sum_{k_n} \longrightarrow \frac{L}{2\pi}\int dk \qquad E_{\{n_i\}} = 0 + \hbar\sum_{k_n} N_n\sqrt{k_n^2 + 2m^2} + \mathcal{O}(\sqrt\lambda)$$

a részecske tömege $\hbar m\sqrt 2$

vákuum szektor ilyen tömegű részecskék "megoldk"

$$\tilde\phi = \phi - \phi_1 \qquad \langle(\tilde\phi)\rangle = \langle(\phi - \phi_1)\rangle = 0 \rightsquigarrow \langle\phi\rangle = \phi_1 = \frac{m}{\sqrt\lambda}$$

SZOLITONOK

A kvantum kink és gerjesztései

a: paraméter $a=0$

$$V[\phi_k] = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\phi^3}{\lambda} \qquad \tilde{\Phi} = \phi - \phi_k$$

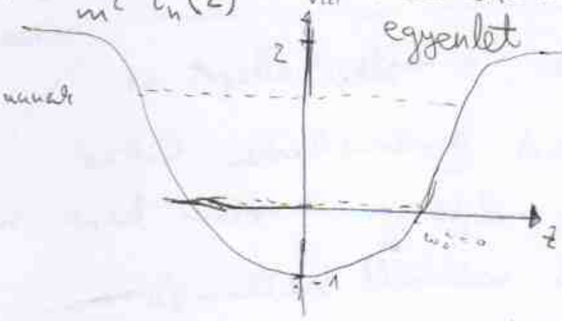
$$V[\phi] = V[\phi_k] + \int dx\, \frac{1}{2}\,\tilde{\Phi}(x)\overbrace{\Big(\underbrace{-\frac{d^2}{dx^2} + 3\lambda\phi_k^2 - m^2}_{\text{ebben igazából már nincs } \lambda}\Big)}^{\mathcal{O}(\lambda^0)}\tilde{\Phi}(x) + \underbrace{\lambda\int dx\left[\phi_k\tilde{\Phi}^3 + \frac{\tilde{\Phi}^4}{4}\right]}_{\text{perturbáció}}$$

$$\boxed{z = \frac{mx}{\sqrt{2}}}$$

normálkoordináták egyenlete

$$\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 3\,\mathrm{th}^2 z - 1\right]\tilde{\eta}_n(z) = \frac{\omega_n^2}{m^2}\tilde{\eta}_n(z)$$

1 dimenziós Schrödinger egyenlet



$q=0$ $2m^2$-nél vagyunk

kötött + kontinuum állapotok is vannak

$\omega_0^2 = 0 \qquad \tilde{\eta}_0(z) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 z}$

$\omega_1^2 = \frac{3}{2}m^2 \qquad \tilde{\eta}_1(z) = \frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}^2 z}$

kontinuum q folytonos paraméter $\quad \omega_q^2 = m^2\left(\frac{1}{2}q^2 + 2\right)$

$$\tilde{\eta}_q(z) = e^{iqz}\left(3\,\mathrm{th}^2 z - 1 - q^2 - 3iq\,\mathrm{th}\, z\right)$$

q lehetséges értékei periodikus peremfeltétel L méretű dobozban $(L\to\infty)$

$$2\pi n = q_n \frac{mL}{\sqrt{2}} + \delta(q_n)$$

$$\tilde{\eta}_q(z) \xrightarrow[z\to\pm\infty]{} e^{iqz}\left(2 - q^2 \mp 3iq\right) = e^{i(qz \pm \frac{1}{2}\delta(q))}$$

$$\mathrm{tg}\frac{\delta(q)}{2} = -\frac{3q}{2-q^2} \qquad \delta(q) = -2\,\mathrm{arctg}\frac{3q}{2-q^2}$$

$$\tilde{E}_{\{N_i\}} = \frac{2\sqrt{2}\,m^3}{3\lambda} + \left(N_1 + \frac{1}{2}\right)\hbar m\sqrt{\frac{3}{2}} + m\hbar\sum_{q_n}\left(N_{q_n} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{2}q_n^2 + m^2} + \mathcal{O}(\lambda)$$

ha $\forall N_i = 0$ kv kink alapállapota

ha N_1-et gerjesztjük $\leftarrow$ értelmezni kell

$N_q \neq 0 \qquad \leftarrow$ -‖-

2. óra

$$E_N \quad \tilde{E}_{\{\hat{N}\}} = \frac{2\sqrt{2}\,m^3}{3\lambda} + \left(N_1 + \frac{1}{2}\hbar m\right)\sqrt{\frac{3}{2}} + m\hbar\sum_{q_n}\left(N_{q_n} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{2}q_n^2 + 2} + \mathcal{O}(\lambda)$$

$x \to z = \frac{mx}{\sqrt{2}}$ $\quad \boxed{\frac{Lmq_n}{\sqrt{2}}\ \delta(q_n) = 2\pi \underset{\text{egész}}{n}}$ $\quad$ L méretű doboz $(L\to\infty)$

hiányzik az $\omega_0 = 0$ módus

$$\delta(q) = -2\,\mathrm{arctg}\frac{3q}{2-q^2}$$

alapállapot $\forall N_n = 0$ $\quad \tilde{E}_0 = \frac{2\sqrt{2}\, m^3}{\lambda} + \frac{1}{2}\hbar m \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{\hbar m}{2}\sum_{q_n}\sqrt{\frac{1}{2}q_n^2 + 2} + \mathcal{O}(\lambda)$

nem egyezik a vákuum szektor alapállapotaival ! E_0^{vac}

fizika $\tilde{E} - E_0^{vac} \rightarrow$ értelmezendő: kvantum kink energiája (álló) $\leftarrow M_{kink}$ $\lambda \to 0$ nagy!

kvantumállapot: kiterjedt részecske

$\not\ni$

első gerjesztett $\quad N_1 = 1 \quad \tilde{E}_1 - \tilde{E}_0 = \hbar m \sqrt{\frac{3}{2}} < \hbar m\sqrt{2}$ kvantum kink gerjesztett állapota

ha $N_1 = 2$ lenne $\quad \tilde{E}_2 - \tilde{E}_0 = 2\hbar m\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{2}\,\hbar m\sqrt{3}$

$N_n = 0 \qquad N_{q_n} \neq 0$ a megfelelő állapot az elmélet mezonjainak (kvantum) kinken történő szórási állapota, melyben a kvantum kink csak külső potenciálként

vákuum szektorbeli mezon $\sqrt{3} > 1$
el tudna bomlani alapállapot + mozgó mezonra
nem rendelünk állapotot

$\bar{\eta}_q(z)$ mezonok redukált hullámfv.-e

$\hbar\omega_q$ potenciálban szóródó mezonok energiája $\quad \hbar\omega_q = \hbar\sqrt{\frac{1}{2}m^2 q_n^2 + 2m^2}$ $\quad \hbar m\sqrt{2}$ nagy. tömegű impulzus

$p_n = \hbar\frac{m q_n}{\sqrt{2}} \rightarrow$

konzisztens

$e^{i(qz \pm \delta(q))} = e^{i\left(\frac{q m_0}{\sqrt{2}} \pm \delta(q)\right)}$

$\delta(q)$ szóródó mezon fázistolása

nincs kink mozgási energia

magyarázata $\quad M \sim \frac{1}{\lambda} \quad \lambda \to 0 \quad$ kin. $\frac{p^2}{2M} \sim \mathcal{O}(\lambda)$

A kink tömeg és renormálása

$\tilde{E}_0 - E_0^{vac}$ divergensek, óvatosan

$$\tilde{E}_0 - E_0^{vac} = \frac{2\sqrt{2}\,m^3}{3\lambda} + \frac{1}{2}\hbar m\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{\hbar}{2}\sum_n\left\{m\sqrt{\frac{1}{2}q_n^2 + 2} - \sqrt{k_n^2 + 2m^2}\right\} + \mathcal{O}(\lambda)$$

L méretű doboz periodikus peremfeltétel

$$2\pi n = k_n L = q_n \frac{mL}{\sqrt{2}} + \delta(q_n) \qquad \frac{m q_n}{\sqrt{2}} = k_n - \frac{\delta(q_n)}{L}$$

$L \to \infty$

$$\sum_n = \sum_{k_n} \rightarrow \frac{L}{2\pi}\int dk$$

$$\{\ \}: \sqrt{\left(k_n - \frac{\delta_n}{L}\right)^2 + 2m^2} - \sqrt{k_n^2 + 2m^2} \approx -\frac{k_n\delta_n}{L}\frac{1}{\sqrt{k_n^2 + 2m^2}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^2}\right)$$

$$\tilde{E}_0 - E_0^{vac} = \frac{2\sqrt{2}\,m^3}{3\lambda} + \frac{1}{2}\hbar m\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{\hbar}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk\, k\,\delta(k)}{\sqrt{k^2 + 2m^2}} + \mathcal{O}(\lambda)$$

$q = \frac{\sqrt{2}k}{m} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L}\right)$

$k \to \infty$ $\quad \lim_{k\to\infty}\delta(k) = \lim_{k\to\infty}\left(-2\arctg\frac{3\sqrt{2}\,km}{2m^2 - 2k^2}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(2\arctg\frac{3\sqrt{2}\,m}{2k}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{k}m$

parciálisan integrálunk

$$\tilde{E}_0 - E_0^{vac} = \frac{2\sqrt{2}\,m^3}{3\lambda} + \frac{1}{2}\hbar m\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{\hbar}{4\pi}\left[\delta(k)\sqrt{k^2+2m^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{\hbar}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\,\sqrt{k^2+2m^2}\,\frac{d\delta(k)}{dk} + \mathcal{O}(\lambda) =$$

új változó $p = \frac{k\sqrt{2}}{m}$

$$= \frac{2\sqrt{2}\,m^3}{3\lambda} + \frac{1}{2}\hbar m\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{3\hbar}{\pi\sqrt{2}}m - \frac{6m\hbar}{4\pi\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp\,(p^2+2)}{(p^2+1)\sqrt{p^2+4}} + \mathcal{O}(\lambda)$$

$\hookrightarrow$ log divergál !?

divergencia a pert. számítás "szokásos" divergenciája

$$H = \int dx \left[\frac{1}{2}\hat{\pi}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\hat{\phi}^2 + \frac{\lambda}{4}\hat{\phi}^4 + \frac{m^4}{4\lambda}\right]$$

$\hat{\phi}^2$ $\hat{\phi}^4$ rosszul definiált

A vákuum szektorban 1+1 dim $\forall$ divergencia normálrendezéssel kontratagokkal

$:\hat{\phi}^4: = \hat{\phi}^4 - A\hat{\phi}^2 - B$ A, B, C konstansok

$:\hat{\phi}^2: = \hat{\phi}^2 - C$ $A = A(\lambda, m, \Lambda)$ Λ levágás

$\hookrightarrow$ $\forall$ rendjében úgy vannak meghatározva

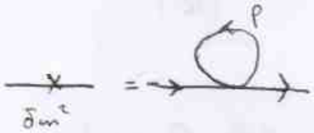
hogy a naiv divergenciák mellett az A, B, C-ből jövőket is

akkor már $\Lambda \to \infty$ limeszt végrehajtható és véges eredményt ~~kap~~ ad

energia szintek különbségéből

$$:H: = H - \int_{-\infty}^{\infty} dx\left(\frac{1}{2}\underset{\sim}{\delta m^2}\,\phi^2 + \underset{\sim}{D}\right)$$

δm^2 legalacsonyabb rendben


$+\,\mathcal{O}(\lambda^2)$

textbook eredmény

$$\delta m^2 = \frac{3\lambda\hbar}{4\pi}\int_{-m\Lambda}^{m\Lambda}\frac{dp}{\sqrt{p^2+2m^2}} = \frac{3\lambda\hbar}{4\pi}\int_{-\Lambda}^{\Lambda}\frac{dp}{\sqrt{p^2+2}}$$

vákuum szektorban (1 részecske - alapállapot) energia

normálrendezés :H:

$$V[\phi] \to \Delta V[\phi] = -\frac{1}{2}\delta m^2\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\phi^2(x)$$

kink szektor $\phi(x) \to \phi_k(x) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}\,\mathrm{th}\frac{mx}{\sqrt{2}}$

vákuum szektor $\phi(x) \to \phi_0 = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$

$$\Delta\tilde{E}_0 - \Delta E_0^{vac} = -\frac{1}{2}\delta m^2\int_{-\infty}^{\infty}dx\left[\phi_k^2(x) - \phi_0^2\right] = -\frac{1}{2}\delta m^2\frac{m^2}{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}dx\left(\mathrm{th}^2\left(\frac{mx}{\sqrt{2}}\right) - 1\right) = \delta m^2\frac{m}{\lambda}\sqrt{2}$$

$$M = \tilde{E}_0 + \Delta\tilde{E}_0 - E_0^{vac} - \Delta E_0^{vac} = \frac{2\sqrt{2}\,m^3}{3\lambda} + m\hbar\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{3}{\pi\sqrt{2}}\right] - \frac{3\sqrt{2}\,m\hbar}{4\pi}\int_{-\Lambda}^{\Lambda}dp\,\underbrace{\left(\frac{p^2+2}{(p^2+1)\sqrt{p^2+4}} - \frac{1}{\sqrt{p^2+2}}\right)}_{p\to\infty\ \frac{1}{p}\ \text{kiesik}} + \mathcal{O}(\lambda)$$

$$\boxed{M = \frac{2\sqrt{2}\,m^3}{\lambda} + m\hbar\left[\frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{3}{\pi\sqrt{2}}\right] + \mathcal{O}(\lambda)}$$

klasszikus tag $\frac{1}{\lambda}$ → nem perturbatív

kv. korrekció kicsi λ $\hbar$ -nál

$c = 1$ $\hbar$ visszaírtuk

$\frac{\lambda\hbar}{m^2}$ dimenziótlan

$$\frac{\text{második}}{\text{első}} \sim \frac{\lambda\hbar}{m^2}$$

gyenge csatolás $\frac{\lambda\hbar}{m^2} \ll 1$ $M \gg m\sqrt{2}\,\hbar$

3. ea 7/11

A nullamódus $\leftrightarrow$ transzláció módus

$\omega_0^2 = 0 \qquad \eta_0(x) = \dfrac{1}{ch^2\left(\frac{mx}{\sqrt{2}}\right)}$ $\qquad \forall$ tr. inv. elméletben fellép ha helyfüggő

megoldás körül kvantálunk

kink modellben $\phi_1(x)$ konfig $\quad V[\phi_1(x)] = V[\phi_1(x-a)] \quad \forall\, a$-ra $\longrightarrow$ ekvipotenciális

$\{\phi\}$-k terében 1 pont $\quad \phi_1(x-a) \rightarrow$ 1 paraméteres görbe

Spec. vannak triviális görbék $\phi_1(x) \equiv \phi_0 \rightarrow$ eltoltja önmaga

$\phi_k(x) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}\, th\left(\frac{mx}{\sqrt{2}}\right) \qquad \phi_k(x-a) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}\, th\left(\frac{m(x-a)}{\sqrt{2}}\right) \qquad \boxed{V[\phi_k(x-a)] = \frac{2\sqrt{2}\, m^3}{3\lambda}}$

1 pont $\phi_v \equiv \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \qquad V[\phi_v] = 0$

görbe mentén $\left.\frac{\delta^n V}{\delta \phi^n}\right|_{\text{görbe}} = 0$

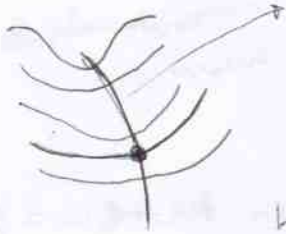
$$\Delta\phi_k = \phi_k(x-\varepsilon) - \phi_k(x) = -\varepsilon \frac{\partial \phi_k}{\partial x} = -\frac{m^2}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda}}\, \varepsilon \frac{1}{ch^2\left(\frac{mx}{\sqrt{2}}\right)} = -\varepsilon\, \eta_0(x)$$

infinitezimális

0 módus hatása v. kezelése

kink modell: 1db 0 módus

$V(\phi)$



V ebben az irányban „nem húz vissza" $\rightarrow$ szabad terjedés van

$\rightarrow$ szabad részecskeként kvantáljuk

$V(x) \equiv V_0 \qquad \forall\, x = x_0$ klassz. megoldás

hullám fv. e^{ikx} $\quad p = \hbar k$

$E = V_0 + \frac{1}{2M}(\hbar k)^2$

klassz. potenciál $\qquad$ kv. mozg. energiát

Kink modellben relativisztikus $\quad E = \sqrt{p^2 + M^2} \approx M + \frac{p^2}{2M} + \ldots \qquad \lambda \to 0 \quad M \sim \frac{1}{\lambda} \to \infty \qquad \frac{p^2}{2M} \sim \mathcal{O}(\lambda)$

Axiomatikus megfogalmazás és a kl. kink megoldás pontos szerepe

(Goldstone + Jackiw) $\qquad$ csak 1+1 dim kink modellre $\hbar = 1$

(I) Állapottér (Hilbert tér)

vákuum szektor $\qquad$ kink szektor

$|0\rangle$ vákuum; $|k_1, \ldots k_n\rangle$ n mezon állapotok $\qquad$ energia-impulzus sajátállapotok kink szektor energia-imp sajátállapotai

ⓐ $|p\rangle$ p impulzusú $E=\sqrt{p^2+M^2}$ kink

ⓑ $|p^*\rangle$ p impulzusú $E=\sqrt{p^2+M_*^2}$ gerjesztett kink

ⓒ $|p, k_1, \dots k_n\rangle$

ⓓ $|p^*, k_1, \dots, k_m\rangle$

(II) kink szektor ortogonális vákuumszektorra

(III) kv. kink tömege $\lambda \to 0$ $\sim \frac{1}{\lambda}$

(IV) $\hat{\Phi}(x,t)$ kink szektorbeli mátrixelemei $\lambda \to 0$ limeszben

$\langle p' | \hat{\Phi} | p\rangle \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$ $\quad \langle p' | \hat{\Phi} | p^*\rangle \sim \mathcal{O}(1)$ $\quad \langle p' | \hat{\Phi} | p, k\rangle \sim \mathcal{O}(1)$

$\langle p, k_1, \dots k_s | \hat{\Phi} | p, k_1, \dots, k_n\rangle \sim \mathcal{O}\left(\lambda^{(s+n-1)/2}\right)$

---

gerjesztett kink $\leftrightarrow$ $\omega^2 = \frac{3}{2}m^2$ diszkrét pont

$\lambda \neq 0$ $\omega_0 = 0$ módushoz NEM rendeltünk állapotot $\leftrightarrow$ de kink + gerjesztett kink -mozoghat!

II: topológiai kiválasztási szabályok kvantumos általánosítása.

klasszikusan $E<\infty$ konf. tere $\searrow$ k diszjunkt osztály $\quad \phi(+\infty,t) = \pm\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$

időfejlődés nem visz át $\quad \phi(-\infty,t) = \pm\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$

kv.-osan is működik minden

$\hat{Q} = \int \hat{j}_0 dx = \frac{\sqrt{\lambda}}{2m}\left[\hat{\phi}(\infty,t) - \hat{\phi}(-\infty,t)\right]$ $\qquad \hat{j}_\mu = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\varepsilon_{\mu\nu}\partial^\nu\hat{\phi}$ $\qquad \partial_\mu \hat{j}^\mu = 0$

ϕ valós $\hat{\phi}$ hermitikus $\hat{Q}$ is

$\hat{Q}|vac\rangle = 0 \qquad \hat{Q}|kink\rangle = |kink\rangle$

motiváció: $\Psi[\phi(x)]$ hullámfv. $\xrightarrow{\text{QFT-ben}}$ hullámfunkcionál

vákuum szektor $\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$ körül kvantálunk $\qquad \langle vac|\hat{\phi}|vac\rangle = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} + \dots$

olyan $\Psi[\phi]$ csak az olyan ϕ-ken $\neq 0$ $\qquad \phi(-\infty) = \phi(+\infty) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$

$\langle\Psi|\hat{Q}|\Psi\rangle = 0$

kink szektor $\phi_k(x)$ körül kv. $\qquad \Psi[\phi]$ csak olyan $\phi \neq 0$

$\phi(-\infty) = -\frac{m}{\sqrt{\lambda}} = -\phi(+\infty)$

$\langle\Psi|\hat{Q}|\Psi\rangle = 1$

kink és vákuum szektor között szuperkiválasztás van (nincs olyan lokális $\hat{A}$ operátor, ami átvinné a két szektor között)

perturbáló potenciál $\lambda\int dx \left[\underset{\frac{m}{\sqrt{\lambda}}}{\phi_k}\tilde{\Phi}^3 + \frac{\tilde{\Phi}^4}{4}\right]$ mezon kisugárzási amplitúdó $\sim\sqrt{\lambda}$, $(\sqrt{\lambda})^2$

továbblépés $f_1(x)$, $f_2(x,k)$ $\underset{\text{vagy komplex konjugált}}{f_2^*(x)}$

$$\langle p|\hat{\Phi}(x,0)|p'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{da}{2\pi}e^{i(p-p')a}f_1(x-a)$$

$$\langle p,k|\hat{\Phi}(x,0)|p'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{da}{2\pi}e^{i(p+k-p')a}f_2(x-a,k)$$

$$\langle p^*|\hat{\Phi}(x,0)|p'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{da}{2\pi}e^{i(p-p')a}f_2^*(x-a)$$

Heisenberg egyenlet $\hat{\Phi}(x,t)$-re $t=0$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+m^2\right)\hat{\Phi}(x,t) = -\lambda\hat{\Phi}^3(x,t) \rightarrow \langle p| \quad |p'\rangle\Big|_{t=0}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\langle p|\hat{\Phi}(x,t)|p'\rangle\Big|_{t=0} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\langle p|e^{-iHt}\hat{\Phi}(x,0)e^{iHt}|p'\rangle\Big|_{t=0} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{e^{-iE_pt}e^{iE_{p'}t}\langle p|\hat{\Phi}(x,0)|p'\rangle\right\}\Big|_{t=0} =$$

$$= -(E_{p'}-E_p)^2\langle p|\hat{\Phi}(x,0)|p'\rangle$$

ez a domináns tag $\left(\frac{p^2-(p')^2}{2M}+\dots\right)^2 \sim \lambda^2$ $\quad O(\lambda^{1/2})$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{da}{2\pi}e^{i(p-p')x}\left(-\frac{d^2}{dx^2}-m^2\right)\underset{O(\lambda^{-1/2})}{f_1(x-a)}$$

$O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$ csak akkor ha $|n\rangle\to|\tilde{p}\rangle$, $|n'\rangle\to|\tilde{\tilde{p}}\rangle$

$$-\lambda\langle p|\hat{\Phi}(x,0)^3|p'\rangle = -\lambda\sum_{n,n'}\langle p|\hat{\Phi}(x,0)|n\rangle\langle n|\hat{\Phi}(x,0)|n'\rangle\langle n'|\hat{\Phi}(x,0)|p'\rangle =$$

$$= -\lambda\underset{\int dp_1dp_2}{\sum_{p_1p_2}}\langle p|\hat{\Phi}(x,0)|p_1\rangle\langle p_1|\hat{\Phi}(x,0)|p_2\rangle\langle p_2|\hat{\Phi}(x,0)|p'\rangle = -\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\frac{da}{2\pi}e^{i(p-p')a}f_1^3(x-a)$$

$\forall a$-ra csak úgy $\boxed{\left(\frac{d^2}{dx^2}+m^2\right)f_1(x-a)-\lambda f_1^3(x-a)=0}$ ① Sztatikus klasszikus mozgásegyenlet

② kink szektorbeli premfeltételekkel $f_1(x-a) = \phi_k(x-a) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}\, th\left(\frac{m(x-a)}{\sqrt{2}}\right)$

$$\langle p|\hat{\phi}(x,0)|p'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\underset{?\ dm}{\frac{da}{2\pi}}\, e^{i(p-p')a}\,\phi_k(x-a) + \mathcal{O}(\text{magasabb rendek})$$

$\phi_k(x)$ klasszikus kink megoldás

(I) kl. megoldás pontos szerepe

(II) integrálás az ~~eltolt~~ megoldásokra: a kl kink „szétfolyt" a transzláció mentén

(III) $\phi_k \sim \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ IV. konzisztens

(IV) $\phi_k(x) = \int dQ\, e^{iQx}\, \langle p+Q|\hat{\phi}(a0)|p\rangle$ + korr.

fizikailag érdekes mennyiségek v.é. formfaktora

$\mathcal{O}(x,t)$ operátor $\mathcal{O}_k(x)$ kink megoldásból felépül

$$\langle p|\hat{\mathcal{O}}(x,0)|p'\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{da}{2\pi}\, e^{i(p-p')a}\, \mathcal{O}_k(x-a) + \text{korr.} \longleftarrow \text{invertálni lehet}$$

energiasűrűség ⟷ a kink kiterjedt részecske

$$\mathcal{E}(x) = \int dQ\, e^{iQx}\, \langle p+Q|\hat{\mathcal{H}}(0,0)|p\rangle + \text{korr.}$$

$\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_{kl}(x) + \ldots$

$$\hat{\mathcal{H}}(x,t) = \underbrace{\tfrac{1}{2}\hat{\pi}^2}_{\text{mozg. energia}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}\right)^2 + \frac{\lambda}{4}\left(\hat{\phi}^2 - \frac{m^2}{\lambda}\right)^2}_{\text{nem kinetikus tagok}}$$

teljes rendszert beszúrunk vezető rendben csak az 1 kink közbülső állapotot

$$\left\langle P+Q\left|\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}\right)^2 + \frac{\lambda}{4}\left(\hat{\phi}^2 - \frac{m^2}{\lambda}\right)^2\right|P\right\rangle\Bigg|_{x=0=t} =$$

ezekre az eddigi eredményt

$$= \int\frac{da}{2\pi}\, e^{iQa}\left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_k}{\partial x}\right)^2\Bigg|_{x=-a} + \frac{1}{4}\left(\phi_k^2(-a) - \frac{m^2}{\lambda}\right)^2\right] + \text{korr} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{da}{2\pi}\, e^{iQa}\, \overset{\mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\mathcal{E}_{kl}(-a)} + \text{korr.}$$

kinetikus tag $\displaystyle \frac{1}{2}\sum_{P_1}\left\langle P+Q\left|\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|P_1\right\rangle\left\langle P_1\left|\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|P\right\rangle\Bigg|_{\substack{t=0\\x=0}} = \frac{1}{2}\sum_{P_1} \underbrace{i(E_{P+Q}-E_{P_1})}_{\mathcal{O}(\lambda)}\, \underbrace{i(E_{P_1}-E_P)}_{\mathcal{O}(\lambda)}\,\cdot$

$$\cdot\, \underbrace{\underbrace{\langle P+Q|\hat{\phi}(0,0)|P_1\rangle}_{\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)}\underbrace{\langle P_1|\hat{\phi}(0,0)|P\rangle}_{\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)}}_{\mathcal{O}(\lambda)\ \text{elhanyagolható}}$$

$$\boxed{\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_{kl}(x) + \text{korr}}$$ $\mathcal{E}_{kl}(x)$ lokalizált kiterjedt részecske

$\hookrightarrow \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$ $\hookrightarrow \mathcal{O}(1)\,\mathcal{O}(\lambda)$

$$\langle p|\hat{H}|p'\rangle = \langle p|\int dx\, \hat{\mathcal{H}}(x,0)|p'\rangle = 2\pi\,\delta(p-p')\langle p|\hat{\mathcal{H}}(0,0)|p'\rangle$$

$= \delta(p-p')E_p$

$$\boxed{E_p = 2\pi\langle p|\hat{\mathcal{H}}(0,0)|p\rangle = 2\pi\int\frac{da}{2\pi}\mathcal{E}_{kl}(-a) + \text{korr} = \frac{2\sqrt{2}m^3}{3\lambda} + \text{korr}}$$

$$\langle p,k|\hat{\phi}(x,0)|p'\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{da}{2\pi}\,e^{i(p+k-p')a}f_2(x-a,k)$$

Heisenberg egyenlet $\hat{\phi}(x,t)$-re $\langle p,k|$ $|p'\rangle$ szendvicselni

$$\left(\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial x^2} - m^2\right)\hat{\phi}(x,t) = -\lambda\hat{\phi}^3(x,t)$$

k impulzusú mezon energiája ω_k $\qquad E_p - E_{p'} \sim \mathcal{O}(\lambda)$

$$\langle p,k|\left(\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial x^2} - m^2\right)\hat{\phi}(x,t)|p'\rangle\Big|_{t=0} = \langle p,k|\left(-[\overbrace{E_p+\omega_k-E_{p'}}^{\omega_k}]^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2\right)\hat{\phi}(x,0)|p'\rangle =$$

$$f_2 \sim \mathcal{O}(\lambda^0) \qquad = \int\frac{da}{2\pi}e^{i(p+k-p')a}\left\{-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2 - \omega_k^2\right\}f_2(x-a,k)$$

$$-\lambda\langle p,k|\hat{\phi}^3(x,0)|p'\rangle = -3\lambda\sum_{p_1,p_2}\langle p,k|\hat{\phi}(x,0)|n_1\rangle\langle n_1|\hat{\phi}(x,0)|n_2\rangle\langle n_2|\hat{\phi}(x,0)|p'\rangle$$

$|p_1\rangle\langle p_1|$ $\qquad |p_2\rangle\langle p_2|$

$$= -3\lambda\int_{-\infty}\frac{da}{2\pi}e^{i(p+k-p')}f_2(x-a,k)\,\phi_k^2(x-a)$$

$$\boxed{\left(-\frac{d^2}{dx^2} - m^2 + 3\lambda\phi_k^2(x-a)\right)f_2(x-a,k) = \omega_k^2 f_2(x-a,k)}$$

$\left.\frac{\delta^2 V}{\delta\phi^2}\right|_{\phi=\phi_k}$ sajátérték egyenlet

ω_k^2 s. érték a folyt. spektrumban

Szolitonos normálással $\quad f_2(x-a,k) = \frac{\eta_k(x)}{\sqrt{2\omega_k}}$

$$f_2^*(x) = \frac{\eta_1(x)}{\sqrt{2\omega_1}} \qquad \omega_1 = m\sqrt{\tfrac{3}{2}} = M^* - M$$

$\eta_0(x)$ 0 módus $\qquad \eta_0 \;\; \eta_1 \;\; \eta_k$ teljes rendszer

$$\eta_0^*(x)\eta_0(y) + \eta_1^*(x)\eta_1(y) + \sum_k \eta_k^*(x)\eta_k(y) = \delta(x-y) \quad \text{teljességi reláció}$$

Egyidejű cserereláció az axiomatikus keretben

$$[\hat{\phi}(x,t), \hat{\pi}(y,t)] = \left[\hat{\phi}(x,t), \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial t}(y,t)\right] = i\delta(x-y) \qquad \text{op. egyenlet}$$

$$\langle p|\left[\hat{\phi}(x,0), \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial t}(x,0)\right]|p'\rangle = i\,\delta(x-y)\,\delta(p-p') \longrightarrow \mathcal{O}(\lambda^0)$$

$\hookrightarrow$ teljes rsz.-t beszúrunk + vezető tagokat tartjuk meg

1 kink
1 gerjesztett kink ; 1 kink + 1 mezon (a többi nullát ad (de nem bizonyítjuk))
ezeket tesszük be

1 kink közbülső tagok járuléka

$$\sum_Q \left(i(E_Q - E_p) \overbrace{\langle p|\hat\Phi(x,0)|Q\rangle}^{\mathcal{O}(1/\sqrt{\lambda})} \overbrace{\langle Q|\hat\Phi(y,0)|p'\rangle}^{\mathcal{O}(1/\sqrt{\lambda})} - i(E_p - E_Q)\langle p|\hat\Phi(y,0)|Q\rangle\langle Q|\hat\Phi(x,0)|p'\rangle \right) =$$

$$E_Q - E_{p'} = \frac{Q^2 - p^2}{2M} + \mathcal{O}(\lambda^2) \qquad M \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$= i\int \frac{da}{2\pi}\int\frac{db}{2\pi}\int dQ \left\{ \phi_k(x-a) e^{i(p-Q)a} \phi_k(y-b) e^{i(Q-p')b} \frac{Q^2 - p'^2}{2M} - \phi_k(y-b)\phi_k(x-a) e^{i(p-Q)b} e^{i(Q-p')a} \frac{p^2 - Q^2}{2M} \right\} =$$

II. tag $\tilde{Q} = p + p' - Q$ ($\sim$-t lehagyjuk) (változócsere) $= \%$

$$\% = i\int\frac{da}{2\pi}\int\frac{db}{2\pi}\int dQ\; \phi_k(x-a)\phi_k(y-b) e^{i(p-Q)a} e^{i(Q-p')b} \frac{(Q-p')(Q-p)}{M} =$$

$$= \frac{i}{M}\int\frac{da}{2\pi}\int\frac{db}{2\pi}\int dQ\; \frac{\partial\phi_k(x-a)}{\partial x} e^{i(p-Q)a} \frac{\partial\phi_k(y-b)}{\partial y} e^{i(Q-p')b} =$$

$$= \frac{i}{M}\int\frac{da}{2\pi} \frac{\partial\phi_k(x-a)}{\partial x}\frac{\partial\phi_k(y-a)}{\partial y} e^{i(p-p')a} \qquad \frac{\partial\phi_k(x-a)}{\partial x} = A\,\eta_0(x-a)$$

normálás $\quad \int_{-\infty}^{\infty} \eta_0^2(x)\,dx = 1 \Rightarrow A = \sqrt{M}$

$$= i\int\frac{da}{2\pi} e^{i(p-p')a}\eta_0^*(x-a)\eta_0(y-a)$$

<u>5. (?) óra</u>

Egyidejű csererelációk az axiomatikus rendben

$$\langle p| [\hat\Phi(x,t), \partial_t\hat\Phi(y,t)] |p'\rangle = i\,\delta(x-y)\,\delta(p-p')$$

1 kink, 1 kink + 1 mezon, 1 gerjesztett kink

$$\eta_0(x) = \frac{1}{\sqrt{M}}\frac{\partial\phi_k(x)}{\partial x} \quad \text{nullmódus}$$

$$i\int\frac{da}{2\pi} e^{i(p-p')a}\eta_0^*(x-a)\eta_0(y-a)$$

$$\langle p,k| \partial_t\hat\Phi(y,0)|p'\rangle = i\left(\underbrace{E_p - E_{p'}}_{\mathcal{O}(\lambda)} + \overset{\mathcal{O}(\lambda^0)}{\omega_k}\right)\int\frac{da}{2\pi} e^{i(p+k-p')a} f_2(y-a,k)$$

$$\sum_{Q,k}\left(\langle p|\hat\Phi(x,0)|Q,k\rangle\langle Q,k|\partial_t\hat\Phi(y,0)|p'\rangle - \langle p|\partial_t\hat\Phi(y,0)|Q,k\rangle\langle Q,k|\hat\Phi(x,0)|p'\rangle\right) =$$

$$= i\int\frac{da}{2\pi}\sum_k 2\omega_k f_2^*(x-a,k) f_2(y-a,k) e^{i(p-p')a} = i\int\frac{da}{2\pi}\sum_k \eta_k^*(x-a)\eta_k(y-a) e^{i(p-p')a}$$

1 gerjesztett tiénk $i\int \frac{da}{2\pi} e^{i(p-p')x}\, \eta_1^*(x-a)\,\eta_1(y-a)$ $\nexists$ több közbülső állapot ebben a rendben

$$\underbrace{i\int \frac{da}{2\pi} e^{i(p-p')a}}_{i\delta(p-p')} \Big\{ \underbrace{\eta_0^*(x-a)\eta_0(y-a) + \eta_1^*(x-a)\eta_1(y-a) + \sum_k \eta_k^*(x-a)\eta_k(y-a)}_{\text{teljesség } \delta(x-y)} \Big\}$$

baloldalon λ-ban magasabb rendű tagok 0-t adnak (megmutatható)

általában a posztulátum /axiomatikus kezdésől
1+1 dim modellek módusokra kifejtést meg kell csinálni
(pl sine-gordon-ban $\nexists$ diszkrét gerjesztés)

Szektorok száma modellfüggő sine-gord ∞ sok szoliton

magasabb dimenziókban:
alapelképzelések O.K. technikailag sokkal nehezebb
UV problémák nehezebbek, mértékrögzítés!

Kanonikus formalizmus, kanonikus kvantálás a szoliton szektorban

Kollektív koordináták (Khrist, Lee '75)
$\hookrightarrow$ 0 módus helyett szoliton (rendszer) egészének mozgását

$\forall$ 0 módus helyett kollektív koordinátát
először 1+1 dim. valós skalármező 1 db nulla módus (transzláció)

$$L = \frac{1}{g^2}\int dx \left\{ \frac{1}{2}\dot\phi^2 - \frac{1}{2}(\phi')^2 - U(\phi) \right\}$$ g: csatolási állandó $g\to 0$ ($\hbar$ osztva: $g^2\hbar \to 0$)

$U(\phi)$ $\exists$ degenerált abszolút minimumai $\rightsquigarrow$ $\exists$ sztatikus szoliton

$$\phi_{kl}(x) = \sigma(x-X) \qquad \sigma'' - \frac{dU}{d\phi}\Big|_\sigma = 0 \qquad \frac{1}{2}(\sigma')^2 = U(\sigma)$$

kl. energia: $M_{kl} = V[\sigma] = \frac{1}{g^2}\int dx \left\{ \frac{1}{2}(\sigma')^2 + U(\sigma) \right\} = \frac{1}{g^2}\int dx\, (\sigma')^2 = \frac{A}{g^2}$

X paraméter $\hookrightarrow$ X független

eddig: $\phi_x(t) \equiv \phi(x,t)$ helyett $\phi(x,t)$ normál módusok szerint együtthatók

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2U}{d\phi^2}\Big|_{\sigma(x-X)} \right)\eta_n(x-X) = \omega_n^2\,\eta_n(x-X)$$ $\eta_n(x-X)$ ortonormált teljes fv. rendszer

$$\phi(x,t) = \sigma(x-X) + g\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)\,\eta_n(x-X)$$ σ, η_n, ω_n, c_n g-től függetlenek

$$L = -\frac{A}{g^2} + \frac{1}{2}\sum_0^\infty \left(\dot{c}_n^2 - \omega_n^2 c_n^2\right) + \mathcal{O}(g) \longrightarrow E_{\{n_i\}} = \frac{A}{g^2} + \underbrace{\sum_i \left(N_i + \tfrac{1}{2}\right)\omega_i + \mathcal{O}(g)}$$

$\omega_0 = 0$ gond nem oszcillátor

perturbáció számolással $\mathcal{O}$ nehezebb!?

$$\eta_0(x-X) = \frac{1}{\sqrt{A}}\sigma'(x-X)$$

kollektív koordináta: $X \longrightarrow X(t)$ $\quad c_0(t) \rightarrow$ kidobjuk

$$\boxed{\phi(x,t) = \sigma\left(x - X(t)\right) + g\sum_{n=1}^\infty q_n(t)\,\eta_n\left(x - X(t)\right)}$$

$\{X(t), q_n(t)\}_{n\geq 1} = \{u_0^{(t)}, u_n^{(t)}\}$ → ezek a kanonikus koordináták

$$\dot\phi(x,t) = -\left(\sigma'(x-X(t)) + g\sum_{n=1}^\infty q_n(t)\,\eta_n'(x-X(t))\right)\dot X + g\sum_{n=1}^\infty \dot q_n\,\eta_n\left(x - X(t)\right)$$

L kinetikus tagja $\quad K = \frac{1}{g^2}\int dx\,\frac{1}{2}\dot\phi^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^\infty \dot u_i D_{ij}\dot u_j \quad$ D_{ij} $\infty\times\infty$ mátrix, szimmetrikus

$$D_{00} = \frac{1}{g^2}\int dx\left[\sigma' + g\sum_{n=1}^\infty q_n\eta_n'\right]^2$$

$$D_{0n} \overset{n\geq 1}{=} -\frac{1}{g^2}\int dx\left[\sigma' + g\sum_{m=1}^\infty q_m\eta_m'\right] g\,\eta_n(x-X) = -\int dx\left(\sum_{m=1}^\infty q_m\eta_m'\right)\eta_n$$

$\sigma' \sim \eta_0$ orto. η_n-re

$D_{nm} = \delta_{nm}$

$$\begin{matrix} D_{00} & D_{01} & D_{02} & \dots & D_{0n} & \dots \\ D_{10} & 1 & 0 & & 0 & \\ D_{20} & 0 & 1 & & & \\ \vdots & & & & & \\ D_{n0} & 0 & & & 1 & \end{matrix}$$

D_{ij} $X(t)$-től nem függ csak q_n-től (tr. invariancia miatt)

$V[\phi]$ potenciáltag (tr. inv) X-től ez sem függ, csak q_n-től

$$V[\phi] = \frac{1}{g^2}\int dx\left(\frac{1}{2}(\phi')^2 + U(\phi)\right) = \frac{A}{g^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty \omega_n^2 q_n^2 + \mathcal{O}(g) = V(\{q_n\})$$

$\nexists$ $\frac{1}{g}$ tag (sztat. mozg. egyenletek)

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\dot u_i D_{ij}(q)\dot u_j - V(\{q_n\}) \qquad \pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot u_i} = D_{ij}\dot u_j$$

$$H_{kl} = \sum \pi_i\dot u_i - L = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\pi_i\left[D^{-1}\right]_{ij}\pi_j + V(\{q_n\}) + \mathcal{O}(g) \qquad D^{-1} \text{ kell ezután}$$

$$D = \det D_{ij} = D_{00} - \sum_{n=1}^\infty D_{0n}^2 \qquad \left[D^{-1}\right]_{00} = \frac{1}{D} \quad \left[D^{-1}\right]_{0n} = -\frac{D_{0n}}{D}\ \ (n\neq 0) \quad \left[D^{-1}\right]_{nm} = \delta_{nm} + \frac{D_{0n}D_{0m}}{D}\ \ n,m\neq 0$$

D_{00} négyzetre emelést

$$D=\frac{A}{g^2}+\frac{2}{g}\int dx\, \sigma'\left(\sum_{m=1}^{\infty} q_n \eta_m'\right)+\int dx\left(\sum_{m=1}^{\infty} q_m \eta_m'\right)^2-\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(\underbrace{\int dx\, \eta_n\left(\sum_i q_m \eta_m'\right)}_{\alpha_n}\Bigg)^2$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} q_m \eta_m' = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s \eta_s\left(x-X(t)\right) \qquad \frac{1}{\sqrt{A}}\sigma' \sim \eta_0$$

$$\boxed{D=\frac{A}{g^2}+\frac{2\sqrt{A}}{g}\alpha_0+\sum_{s=0}^{\infty}\alpha_s^2-\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2=\left(\frac{\sqrt{A}}{g}+\alpha_0\right)^2} \qquad \alpha_0 : \mathcal{O}(g^0)$$

$X(t)$ impliciten

H_{kl} expliciten

$D_{ij}(q)$ H_{kl} független X-től (ciklikus koordináta)

X-hez konjugált impulzus Π_0 megmarad

$$\Pi_0 = D_{00}\dot{X} + \sum_{n=1}^{\infty} D_{0n}\dot{q}_n$$

térelméleti impulzus $P^\mu=(E,P)=(P^0,P^1)$

$P^\mu=\int dx\, T^{\mu 0}$ $T^{\mu\nu}$ kan. energia impulzus tenzor $T^{\mu\nu}=-g^{\mu\nu}\mathcal{L}+\Pi_i^\mu \partial^\nu\phi_i$

$\Pi_i^\mu=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_i}=\frac{1}{g^2}\partial^\mu\phi_i$ $\boxed{\Pi^0=P^1}$ bebizonyítjuk, hogy ez tényleg így van

$$P^1=\int dx\, T^{10}=-\frac{1}{g^2}\int dx\,\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial X}=\frac{1}{g^2}\int dx\left[\left[\sigma'+g\sum_1^{\infty} q_n\eta_n'\right]\dot{X}-g\sum_1^{\infty}\dot{q}_n\eta_n\right]\left[\sigma'+g\sum_1^{\infty} q_n\eta_n'\right]=D_{00}\dot{X}+D_{0n}\dot{q}_n=\Pi_0=P$$

$$H_{kl}=\frac{1}{2D}P^2-\frac{P}{D}\sum_{n=1}^{\infty}D_{0n}\Pi_n+\frac{1}{2}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left(\delta_{nm}+\frac{D_{0n}D_{0m}}{D}\right)\Pi_n\Pi_m+V(\{q_n\})+$$

Óra

1 db valós skalármező 1+1 dim

$$L=\frac{1}{g^2}\int dx\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2-\frac{1}{2}\phi'^2-U(\phi)\right] \qquad u_0=X(t) \quad u_n=q_n(t) \quad n\geq 1$$

$$\phi(x,t)=\sigma\left(x-X(t)\right)+g\sum_{n=1}^{\infty}q_n(t)\,\eta_n\left(x-X(t)\right) \qquad \Pi_0 \equiv P \leftarrow \text{egész rendszer térelméleti impulzusa}$$

$$\boxed{H_{kl}=\frac{P^2}{2D}-\frac{P}{D}\sum_{n=1}^{\infty}D_{0n}\Pi_n+\frac{1}{2}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left(\delta_{nm}+\frac{D_{0n}D_{0m}}{D}\right)\Pi_n\Pi_m+V(\{q_n\})}$$

$+ D=D(\{q_n\})$

Szolitonok 2

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} D_{00} & D_{01} & \cdots & D_{0n} \\ D_{10} & 1 & & \\ \vdots & & 1 & \\ D_{n0} & & & 1 \end{bmatrix}$$

$\phi(x,t) \to \{X, q_n\} = \{u_n\}$ kvantálás $\mathcal{D}\,\pi$ sorrend?

kanonikus kvantálás egyidős

$$\boxed{[u_n, u_m] = [\pi_n, \pi_m] = 0 \qquad [u_n, \pi_m] = i\delta_{nm}}$$

$$[\phi(x,t), \pi(y,t)] = \left[\phi(x,t), \frac{1}{g^2}\dot\phi(y,t)\right] = i\,\delta(x-y) \qquad [\phi(x,t), \phi(y,t)] = 0$$

$\hat H$ op? "derékszögű koordinátákban" $\phi(x)$ $\pi(x)$ Schrödinger kép

$$H = \frac{g^2}{2}\int dx\, \pi^2(x) + V[\phi(x)] = \qquad \pi(x) = -i\frac{\delta}{\delta\phi(x)}$$

$$= -\frac{g^2}{2}\int dx \frac{\delta^2}{\delta\phi^2(x)} + V[\phi(x)] \longrightarrow \text{ez egyértelmű } H_{op}$$

$\phi(x) \to u_n$ áttérést implementálva

emlékeztető: α_i $i = 1 \dots N$ koordináták

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial\alpha_i^2} = \sum_{i,j} \frac{1}{\sqrt{B}}\frac{\partial}{\partial\beta_i}(B^{-1})_{ij}\sqrt{B}\frac{\partial}{\partial\beta_j}} \quad \alpha_i \to \beta_i$$

$$B_{ik} = \sum_j \frac{\partial\alpha_j}{\partial\beta_i}\frac{\partial\alpha_j}{\partial\beta_k}$$

$$B = \det B_{ij}$$

∞ sok szab. fok $\qquad \alpha_i \to \phi(x)$

$\beta_i \to u_n$

$$B_{ij} = \int dx \frac{\partial\phi}{\partial u_i}\frac{\partial\phi}{\partial u_j} \underset{\text{állítás}}{=} \boxed{g^2 D_{ij}} \qquad (B^{-1})_{ij} = \frac{1}{g^2}(D^{-1})_{ij}$$

$$\hat H = -\frac{1}{2}\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{D}}\frac{\partial}{\partial u_n}(D^{-1})_{nm}\sqrt{D}\frac{\partial}{\partial u_m} + V(\{u_n\}) = \qquad -i\frac{\partial}{\partial u_n} = \pi_n \quad n \geq 1$$

$$-i\frac{\partial}{\partial u_0} = \pi_0 \equiv P$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{D}}\left[\frac{P^2}{\sqrt{D}} - P\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D_{0n}}{\sqrt{D}}\pi_n + \pi_n\frac{D_{0n}}{\sqrt{D}}\right) + \sum_{n,m=1}^{\infty}\pi_n\left(\delta_{nm}\sqrt{D} + \frac{D_{0n}D_{0m}}{\sqrt{D}}\right)\pi_m\right] + V(\{q_n\})$$

X nincs sehol $\quad [P, \hat H] = 0$

$P = 0$ rendszer

$$\hat H\Big|_{P=0} = \frac{1}{2\sqrt{D}}\sum_{n,m=1}^{\infty}\pi_n\left(\sqrt{D}\,\delta_{nm} + \frac{D_{0n}D_{0m}}{\sqrt{D}}\right)\pi_m + V(\{q_n\}) \qquad \text{szemiklasszikus közelítés } g \to 0$$

még egzakt

$$V(\{q_n\}) \to \frac{A}{g^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n^2 q_n^2 + O(g)$$

c-szám

$\sqrt{D} = \frac{\sqrt{A}}{g} + \alpha_0 \to q_n$ függő g független $\quad D_{0n}$ g független

$$\frac{1}{\sqrt{D}} = \frac{g}{\sqrt{A}}\left(1-\frac{g}{\sqrt{A}}\alpha_0 \dots\right)$$

$g \to 0$ vezető járulék

$$\hat{H}\Big|_{P=0} = H_0+H_1 = \underbrace{\frac{A}{g^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\pi_n^2+\frac{\omega_n^2}{2}q_n^2\right)}_{H_0} + \underbrace{\mathcal{O}(g)}_{H_1}$$

H_0-ban $\nexists\, \mathcal{O}(g)$ $\quad E_{\{N_n\}} = \frac{A}{g^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(N_n+\frac{1}{2}\right)\omega_n$ $\quad \forall E_{\{N_n\}}$ szinthez

$\exists \sqrt{P^2+E^2_{\{N_n\}}}$-es szint $P\neq 0$-ban

Ált. megjegyzés $\vec{\Phi}(\vec{x},t)$ (belső vektor nem u. olyan dimenziójú)

sztatikus m.o. $\vec{\sigma}(\vec{x}, \underbrace{X_1 \dots X_N}_{\text{jellemzik a m.o. családot}})$ $\quad X_i \; i=1,\dots,N$ max. számú szimmetria transzf-val változtatható paraméter megoldást nem hagyja invariánsan

$\vec{x}$ — D dimenziós $\quad N \geq D$

$\forall X_i \to X_i(t)$

$$\vec{\Phi}(\vec{x},t) = \vec{\sigma}(\vec{x}, X_i(t)) + g\sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\,\vec{\eta}_n(\vec{x}, X_i(t))$$

$\vec{\eta}_n(\vec{x}, X_i)$ ortonormált

$$\int d^D x\, \vec{\eta}_n(\vec{x}, X_i(t))\cdot\vec{\eta}_m(\vec{x}, X_i(t)) = \delta_{nm}$$

$$\int d^D x\, \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial X_i}(\vec{x}, X_i(t))\cdot\vec{\eta}_n(\vec{x}, X_i(t)) = 0 \qquad \forall i,n$$

$L \quad \underbrace{X_i(t),\ \dot{X}_i(t)}_{\text{most is tartozik megmaradó mennyiség}},\ q_n(t),\ \dot{q}_n(t)$

Pl. 't Hooft Polyakov monopólus $\quad X_1, X_2, X_3$ térbeli eltolások

Φ globális $U(1)$ transzform.

megmaradó mennyiség: elektromos töltés

Instantonok a kvantumelméletben

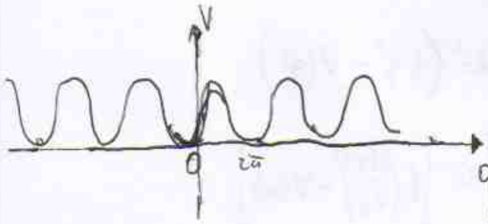
instanton: Euklideszi elmélet véges hatású megoldása, kv. elmélet alapállapotáról adnak információt

~~kv. mec~~

Ev. mechanikai példa — végeredményt szélfizből ismerjük instanton(ok) segítségével reprodukáljuk

"ritka instanton gáz" közelítés

$m=1$ tömegű nem. rel részecske, 1 dim periodikus potenciálban



$V(q+2\pi)=V(q)$ $\qquad -\infty \le q < \infty$

minimumok $q_N = 2\pi N$ -ben

$\left(V(q)=1-\cos q\right)$

Ismert dolgok: $V(q)=\frac{1}{2}\omega^2 q^2+\sum_{r\ge 2}\lambda_r q^r$ $\qquad \lambda_r \ll \omega^2$

(I)
ha $\nexists$ alagutazás $\quad u_0(q) \quad q=0$

$u_0(q-2\pi N)$ $\quad q_N$ körül $\quad \infty$ deg. alapállapot $\quad E_0=\frac{1}{2}\hbar\omega+\mathcal{O}(\lambda_r)$

Van alagutazás $\quad E_0 \to$ sáv $\quad \lambda_r$-ben vezető rendben

$$\phi_\Theta(q)=\sum_{N=-\infty}^{\infty} e^{iN\Theta}\, u_0(q-2\pi N) \qquad \Theta \text{ hullámf. paraméter}$$

(II) rácseltolás op.-nak sajátfv. $\quad \phi_\Theta(q+2\pi)=\sum_{N=-\infty}^{\infty} e^{iN\Theta}\, u_0(\underbrace{q+2\pi-N2\pi}_{q-\underbrace{(N-1)}_{N'}2\pi})=e^{i\Theta}\phi_\Theta(q)$

(III) Bloch tétel $\quad E$ sajátfv. periodikus potenciálban

$$\phi_k(q)=e^{ikq}\, v_k(q) \qquad v_k(q+2\pi)=v_k(q) \qquad k \text{ hullámszám}$$

$$\phi_k(q+2\pi)=e^{ik(q+2\pi)}\, v_k(q+2\pi)=e^{ikq}\, v_k(q)\, e^{ik2\pi}=\phi_k(q)\, e^{ik2\pi} \qquad \boxed{k2\pi-\Theta}$$

(IV) Kitekben

legalsó sáv energiaszintjei

$E_k \sim E_0-\alpha\cos(ka)$ $\qquad \boxed{E_\Theta \sim \frac{1}{2}\hbar\omega-\alpha\cos\Theta}$

0 $\quad 2\pi$ átmenetel imaginárius időre

$$\langle 2\pi| e^{-H\tau/\hbar} |0\rangle = \int Dq(\tau') \exp\left[-\frac{S_E[q(\tau')]}{\hbar}\right]$$

miért ezt számoljuk?

$$\langle 2\pi| e^{-iHt/\hbar} |0\rangle = \int_{0,2\pi,T} D[q(t')] \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S[q(t')]\right\} \qquad S[q(t')] = \int_0^T dt' \left(\frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q)\right)$$

$t \to -i\tau$

$$+S_E = +\int_0^\tau d\tau' \left[\frac{1}{2}\left(\frac{dq}{d\tau'}\right)^2 + V(q)\right]$$

$$\langle 2\pi| e^{-H\tau/\hbar} |0\rangle = \int_{0,2\pi,T} D[q_E(\tau')] \exp\left\{-\frac{S_E[q(\tau')]}{\hbar}\right\}$$

teljes r.sz.

$$\sum_n \langle 2\pi|\phi_n\rangle\langle\phi_n|0\rangle e^{-E_n\tau/\hbar}$$

hely s. állapotok

energia s. állapotok

$\tau \to \infty$ legalacsonyabb marad

$$\lim_{\tau\to\infty} \sum_n \langle 2\pi|\phi_n\rangle\langle\phi_n|0\rangle e^{-E_n\tau/\hbar} \sim \langle 2\pi|\phi_0\rangle\langle\phi_0|0\rangle e^{-E_0\tau/\hbar}$$

$$S_E = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} d\tau'(\dots)$$

szemiklasszikus vagy Gauss-féle közelítésben

S_E extrémumai + fluktuációk körülöttük

óra

A ritka instanton gáz közelítés

periodikus pot. mozgó nem. rel. részecske

$0, 2\pi$ minimumok

$$\lim_{\tau\to\infty} \langle 2\pi| e^{-H\tau/\hbar} |0\rangle = \lim_{\tau\to\infty} \underbrace{\int D[q(\tau')] \exp\left(-\frac{S_E[q(\tau')]}{\hbar}\right)}_{\text{Gauss f. (szemiklassz.) közelítés}} = \%$$

$$S_E = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} d\tau' \left(\frac{1}{2}\left(\frac{dq}{d\tau'}\right)^2 + V(q)\right)$$

extrémum + fluktuációk

$$\hookrightarrow \frac{\delta S_E}{\delta q(\tau')} = 0 \Rightarrow -\frac{d^2q}{d\tau^2} + \frac{dV}{dq} = 0$$

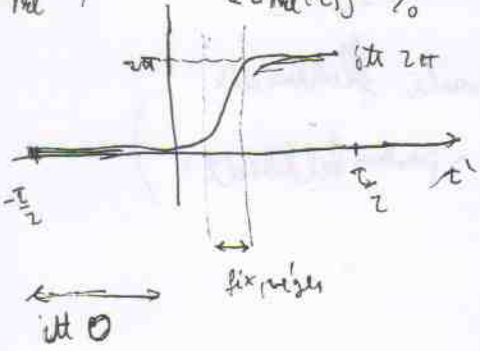
múlt félév

$$\underbrace{S_E < \infty \quad q\left(-\tfrac{\tau}{2}\right) = 0 \quad q\left(\tfrac{\tau}{2}\right) = 2\pi}_{\text{megoldás instanton}}$$

sztatikus szoliton egyenlet $\exists$ megoldás

SZOLITONOK

$q_{kl}(\tau')$ $\qquad S_E[q_{kl}(\tau)] = S_0$



$S_E[q(\tau')]$-ben kvadratikus tagokat tartjuk meg

$= S_0 +$ kvad.

$$\% = e^{-S_0/\hbar} B_E(\tau) \left\{ \mathrm{Det}\left(-\frac{d^2}{d\tau'^2} + V''(q_{kl}(\tau'))\right) \right\}^{-1/2} = \%_0$$

„kinematikai" funk. integrál mértékétől

$\tau' \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right]$ $\qquad \tau \to \infty$

① $\tau \to \infty$ VAN nulla módus $\to$? $0^{-1/2}$? végtelen

② $q_{kl}(\tau')$ $\quad q_{kl}(\tau'-\tau_0)$ $\quad \forall\, \tau_0$-ra $\quad \lim\limits_{\tau\to\infty} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} d\tau_0 = \lim\limits_{\tau\to\infty} (\tau)$?

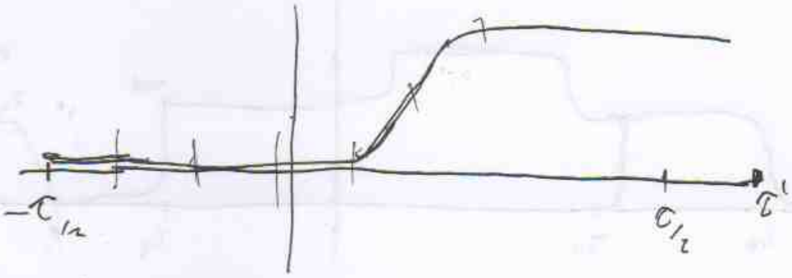
} nullamódus kezelése funkcionálintegrál-ban

$$\%_0 = e^{-\frac{S_0}{\hbar}} B_E(\tau) \, J \tau \left\{ \mathrm{Det}'\left(-\frac{d^2}{d\tau'^2} + V''(q_{kl})\right)\right\}^{-1/2}$$

$\lim\limits_{\tau\to\infty}$ $\qquad$ konstans ($J = \sqrt{S_0}$)

Det' nem nulla sajátértékek szorzata

$$\omega^2 = \frac{d^2V}{d\tau^2}(0) \left(= \frac{d^2V}{d\tau^2}(2\pi)\right)$$



részintervallumok legtöbbjében

$$\mathrm{Det}\left(-\frac{d^2}{d\tau'^2} + V''(q_{kl})\right) = \mathrm{Det}\left(-\partial_{\tau'}^2 + \omega^2\right)$$

$$\mathrm{Det}\left(-\frac{d^2}{d\tau'^2} + V''(q_{kl})\right)\Big|_\tau = \mathrm{Det}\left(-\partial_{\tau'}^2 + \omega^2\right)\Big|_\tau K$$

K: konstans (τ független)

$K^{-1/2} = \tilde{K}$

$$\lim_{\tau\to\infty} \langle 2\pi | e^{-H\tau/\hbar} | 0 \rangle = \lim_{\tau\to\infty} \Big(e^{-\frac{S_0}{\hbar}} B_E(\tau) J \tau \, \tilde{K} \underbrace{\left\{\mathrm{Det}'\left(-\partial_{\tau'}^2 + \omega^2\right)\right\}^{-1/2}}_{\text{harmonikus oszc.}}$$

$$\left[\mathrm{Det}\left(-\frac{d^2}{d\tau'^2} - \omega^2\right)\right]^{-1/2}$$ analóg módon elfogytatjuk $T = -i\tau$ -be

$t' = -i\tau'$

$y_n(t') = \sin\left(\frac{n\pi}{T} t'\right) \qquad y(0) = 0 = y(T)$ ($\to$ instanton körüli fluktuációk
$\hookrightarrow$ tudta a perem feltételt!)

$$\left(-\frac{d^2}{dt'^2} - \omega^2\right) y_n(t') = \left(\frac{n^2\pi^2}{T^2} - \omega^2\right) y_n(t')$$

$$\left[\mathrm{Det}\left(-\frac{d^2}{dt'^2} - \omega^2\right)\right]^{-1/2} = \left[\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2\pi^2}{T^2} - \omega^2\right)\right]^{-1/2} \equiv \hat{K}(T)\left(\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\omega^2 T^2}{n^2\pi^2}\right)\right)^{-1/2}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

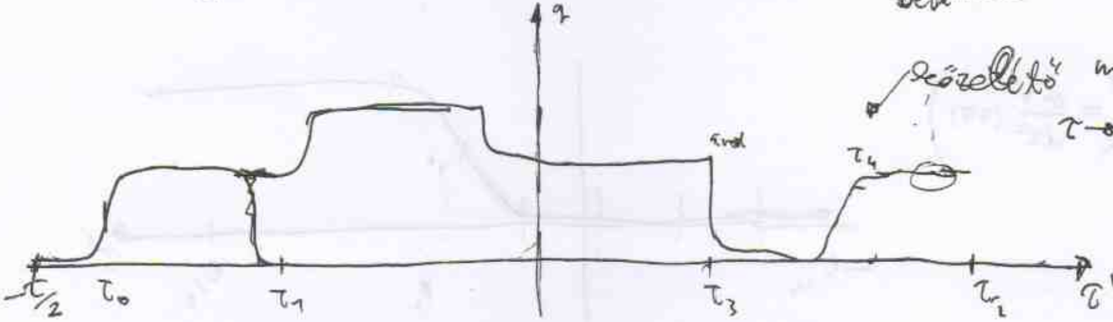
$$B(T)\left[\mathrm{Det}\left(-\frac{d^2}{dt'} - \omega^2\right)\right]^{-1/2} \qquad B(T)\hat{K}(T) = \left(\frac{1}{2\pi i T\hbar}\right)^{1/2}$$

$$B_E(\tau)\left(\mathrm{Det}\left(-\partial_{\tau'}^2 + \omega^2\right)\right)^{-1/2} = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\frac{\omega}{\mathrm{sh}\,\omega\tau}\right)^{1/2} \xrightarrow[\tau\to\infty]{} \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega\tau/2}$$

$$\lim_{\tau\to\infty} \langle 2\pi | e^{-H\tau/\hbar} | 0\rangle_{(1,0)} = \lim_{\tau\to\infty} e^{-S_0/\hbar}\, \mathcal{J}\tilde{K}\tau \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega\tau/2}$$

betehetők instantont, antiinstantont

közelítő megoldások, $\tau\to\infty$ ne legyenek újra



ha $\tau\to\infty$ $\quad n_1 \quad n_2$ instanton, antiinstanton
$(\tau_i - \tau_j \to \infty)$

$$S_0 \to (n_1+n_2) S_0 \qquad \tilde{K} \to \tilde{K}^{(n_1+n_2)}$$

$$\mathcal{J}\tau \to (\mathcal{J}\tau)^{n_1+n_2}$$

$$\lim_{\tau\to\infty} \langle 2\pi | e^{-H\tau/\hbar} | 0\rangle_{(n_1 n_2)} = \delta_{[n_1 - n_2, 1]} \frac{e^{-(n_1+n_2)S_0/\hbar} (\mathcal{J}\tilde{K}\tau)^{n_1+n_2} \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega\tau/2}}{n_1!\, n_2!}$$

teljes járulék

$$\lim_{\tau\to\infty} \langle 2\pi | e^{-H\tau/\hbar} | 0\rangle = \lim_{\tau\to\infty} \sum_{n_1, n_2}$$

felcseréljük $\sum_{n_1 n_2}$ + $\int_0^{\infty} d\theta$ -t

$$\delta_{[n_1 - n_2, 1]} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-i\theta[n_1 - n_2 - 1]}$$

$$\sum_{n_1} \frac{\left(e^{-S_0/\hbar} \mathcal{J} \tilde{K} \tau e^{-i\Theta}\right)^{n_1}}{n_1!} \sum_{n_2} \frac{\left(e^{-S_0/\hbar} \mathcal{J} \tilde{K} \tau e^{i\Theta}\right)^{n_2}}{n_2!}$$

$$\lim_{\tau\to\infty} \sum_n \langle 2\pi|\phi_n\rangle\langle\phi_n|0\rangle e^{-E_n\tau/\hbar} = \int_0^{2\pi} \frac{d\Theta}{2\pi} e^{i\Theta} \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega\tau/2} e^{\left[2\mathcal{J}\tilde{K}\tau e^{-S_0/\hbar}\cos\Theta\right]}$$

legalacsonyabb sáv

$$\exp\left\{\mathcal{J}\tilde{K}\tau e^{-S_0/\hbar} 2\cos\Theta - \omega\tau/2\right\}$$

$$\sum_\Theta \langle 2\pi|\phi_\Theta\rangle\langle\phi_\Theta|0\rangle e^{-E_\Theta\tau/\hbar} \quad \boxed{E_\Theta = \frac{\hbar\omega}{2} - \hbar 2\mathcal{J}\tilde{K} e^{-S_0/\hbar} \cos\Theta}$$

2α sáv szélesség

$$\langle 2\pi|\phi_\Theta\rangle\langle\phi_\Theta|0\rangle = \frac{e^{i\Theta}}{2\pi}\left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}$$

$$\langle 2\pi N|\phi_\Theta\rangle\langle\phi_\Theta|0\rangle = \frac{e^{iN\Theta}}{2\pi}\left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \qquad \langle 2\pi N|\phi_\Theta\rangle = e^{iN\Theta}\langle 0|\phi_\Theta\rangle$$

konstans a Bloch fele- periodicitással

$$\delta_{[n_1-n_2, N]}$$

$$\langle q+2\pi N|e^{-H\tau/\hbar}|q\rangle \qquad \phi_\Theta(\tau) \qquad \phi_\Theta(q+2\pi N)$$

ritka inst-gáz reprodukálta

Megjegyzések ① $S_0<\infty$ konfig.-t szemiklassz. közelítésben

② ritka inst. gáz (kh. mentes "szabad") $e^{-S_0/\hbar}$ 0-t ad, $S_0=\infty$

n_1-n_2 fix τ tengely mentén mennyire teljesül a "ritkaság"

ehhez szükséges, hogy instantonnak fix mérete legyen (teljesül pl. 1+1 dim Ábeli Higgs-ben; nem teljesül 3+1 dim YM-ben!)

ritkaság teljesül-e $\dfrac{\left(\mathcal{J}\tilde{K}\tau e^{-S_0/\hbar}\right)^n}{n!}$ maximum $n\sim \mathcal{J}\tilde{K}\tau e^{-S_0/\hbar}$

inst. sűrűség $\longrightarrow$ $\boxed{\frac{n}{\tau} \sim \mathcal{J}\tilde{K} e^{-S_0/\hbar}}$ ha $\hbar$ kicsi exp. kis sűrűség

③ alagutazás $e^{-S_0/\hbar}$

alagutazási járulék

$$\frac{1}{2}\dot{q}_{cl}^2 = V(q_{cl}) \qquad S_0 = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \left(\frac{1}{2}\dot{q}_{cl}^2 + V(q_{cl})\right) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \dot{q}_{cl}^2 = \int_0^{2\pi} dq \sqrt{2V(q)}$$

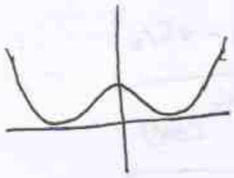
$$\dot{q}_{cl} \underbrace{\dot{q}_{cl} d\tau'}_{dq_{cl}}$$

④ Instantonok visszaállították az alapállapot transzl. szimmetriáját

Sáv van Θ $\qquad$ $\Theta=0$ legalacsonyabb energiájú $\qquad$ $q \to q+2\pi$

$$\Phi_{\Theta=0}(q) = \sum_{N=-\infty}^{\infty} u_0(q-N_{2\pi})$$

Φ_Θ $\quad$ Θ vákuum hullámfv.



itt diszkrét Θ vákuum van

Óra

periodikus potenciál probléma

$PPP \rightleftarrows KMR$ $\quad$ körön mozgó részecske

$V(q)$ periodikus $\quad$ lokálisan azon

$-\infty \leq q \leq \infty$ $\qquad$ $q = 0 \dots 2\pi$ $\quad$ $q \in S^1$

$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q)$

peremfeltételekben van a különbség

kl. mozg. egyenlet, Schrödinger egyenlet

$\phi(0) = \phi(2\pi)$

$\Theta = 0$-s Bloch hullám

Energiában is a adódnak $\Theta=0$

lehet-e ezt is instantonokkal

$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega - \hbar\, 2\xi K e^{-S_0/\hbar}$

Euklideszi egyenlet is u.a. $\quad$ instanton, (multi) $\quad$ vákuum alagutazás helyett konfigurációs teret bejárjuk

$n_1 - n_2 = 1$ $\quad$ ezt nem kell kiírni

Instanton, antiinstanton összeg szeletesít

PPP $\qquad$ KMR

$\Theta=0$ állapot $\longleftrightarrow$ alapállapota

Lehete, hogy ne $\Theta=0$, hanem Θ_0 feleljen meg? (igen)

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q) - \frac{\Theta_0 \dot{q}}{2\pi}$$

teljes derivált, klasszikusan nem változtat, de kvantumosan más lehet

$$p = \dot{q} - \frac{\Theta_0}{2\pi}$$

Θ_0 az elmélet paramétere

$$S_{\Theta_0} = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}(\dot{q}^2) + V(q) + \frac{i\Theta_0}{2\pi}\frac{dq}{d\tau}\right) = S_0 + i\Theta_0$$

$S_{\Theta_0}^{\text{anti}} = S_0 - i\Theta_0$ $\cancel{\rightarrow}$ $n_1 - n_2 = \text{fix}$ NÉLKÜL $\boxed{E_{\Theta_0} = \frac{\hbar\omega}{2} - 2\mathfrak{F}Ke^{-S_0/\hbar}\cos\Theta_0}$

Nulla módusok kezelési Euklideszi funkcionál integrálban

$$\langle 2\pi | e^{-H\tau/\hbar} | 0\rangle_{(1,0)} = \int D[q(\tau)] \exp\left(-\frac{S_E[q(\tau)]}{\hbar}\right)\Big|_{\text{szemi klasszikus}}$$

$q_{kl}(\tau-\tau_0)$ $\quad q_{kl}\left(-\frac{\tau}{2}\right) = 0 \quad q_{kl}\left(\frac{\tau}{2}\right) = 2\pi \quad (\tau \to \infty)$

$$q(\tau') = q_{kl}(\tau'-\tau_0) + \eta(\tau')$$

ebben kvadratikusan

$$S_E[q(\tau')] = S_0 + \frac{1}{2}\int d\tau' \eta(\tau')\left[-\frac{d^2}{d\tau'^2} - V''(q_{kl}(\tau'-\tau_0))\right]\eta(\tau') + \mathcal{O}(\eta^3)$$

normálmódusok

$$\hat{O}\eta_n(\tau'-\tau_0) = \omega_n^2 \eta_n(\tau'-\tau_0)$$

0 módus $\quad \eta_0(\tau'-\tau_0) = \frac{1}{\sqrt{S_0}}\frac{dq_{kl}(\tau'-\tau_0)}{d\tau'}$ $\quad$ csak η_n $n \neq 0$ $\quad \int_{-\tau/2}^{\tau/2} d\tau_0$ $\quad \tau_0$-ra

alap $\quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(g(x))\frac{dg}{dx} = 1$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_0\, \delta\left[\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau'\, \eta_0(\tau'-\tau_0)q(\tau') - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\tau'\, \eta_0(\tau'-\tau_0)q_{kl}(\tau'-\tau_0)}_{R = \frac{q_{kl}^2(\tau'-\tau_0)}{2\sqrt{S_0}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2\pi^2}{\sqrt{S_0}}}\right]\overbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\tau_0}\eta_0(\tau'-\tau_0)q(\tau')\,d\tau'}^{\Delta[q(\tau')]}$$

τ_0-tól független!

$$\delta\left[\int_{-\infty}^{\infty} d\tau'\, \eta_0(\tau'-\tau_0)\eta(\tau')\right]$$

$$\lim_{\tau\to\infty}\langle 2\pi|e^{-H\tau/\hbar}|0\rangle_{(1,0)} = \lim_{\tau\to\infty}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} d\tau_0 \int D[q(t)]\exp\left(-\frac{S_E(q)}{\hbar}\right)\delta\left[\int d\tau'\, \eta_0(\tau'-\tau_0)q(\tau') - R\right]\Delta[q(\tau')]\Big|_{\text{szemi klassz.}}$$

$$= \lim_{\tau\to\infty}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} d\tau_0\, e^{-S_0/\hbar}\Delta[q_{kl}(\tau'-\tau_0)]\int D[\eta_n]\exp\left(-\eta\frac{\hat{O}}{\hbar}\eta\right)\delta\left[\int d\tau'\, \eta_0(\tau'-\tau_0)\eta(\tau'-\tau_0)\right]$$

$$\sim \left[\mathrm{Det}'\left[-\frac{d^2}{d\tau'^2} + V''(q_{kl}(\tau'-\tau_0))\right]\right]^{-1/2} \quad \tau_0\text{-tól független}$$

$$\Delta[q_{kl}(\tau'-\tau_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau'\, \eta_0(\tau'-\tau_0)\frac{dq_{kl}}{d\tau'} = \frac{1}{\sqrt{S_0}}\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau'\left(\frac{dq_{kl}}{d\tau'}\right)^2 = \sqrt{S_0} \quad \tau_0 \text{ független}$$

$$\boxed{\lim_{\tau\to\infty} \langle 2\pi| e^{-H\tau/\hbar} |0\rangle_{(1,0)} = \lim_{\tau\to\infty} e^{-\frac{S_0}{\tau}} \mathcal{J} B_E(\tau) \left(\mathrm{Det}' \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''\right)\right)^{-1/2}}$$

megjegyzés: (I) feltettük $g(x)$-nek csak 1 db 0-ja

(II) $\mathcal{J} = \sqrt{S_0}$ $\quad S_0 = \frac{1}{g^2} \bar{S}[\dot{\phi}]$ $\quad \left(e^{-S_0} = e^{-\frac{1}{g^2}\bar{S}_0[\phi]} \quad g \to 0 \right)$

$\mathcal{J} \sim \frac{1}{g}$ $\quad$ több 0 módus $\forall$-re kell $(\mathcal{J})^k \sim \left(\frac{1}{g}\right)^k$

k db

Ábeli Higgs modellben 1+1 dim-ban

Topológiai vákuumok

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}(D_\mu \varphi)^* D^\mu \varphi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{4}\left(|\varphi|^2 - F^2\right)^2}$$

$\varphi(x)$ komplex skalár
$A_\mu(x)$ Lorentz skalár

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \qquad D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi - ie A_\mu \varphi$

mérték transzf. $\quad \varphi(x,t) \to e^{i\Lambda(x,t)} \varphi(x,t) \qquad A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \Lambda$

$$D_\mu \varphi \to e^{i\Lambda} D_\mu \varphi$$

$\mu, \nu = 0, 1$

ebben a modellben VAN instantonja $\quad$ Euklideszi folytatás
$= 2+1$ dim Landau - Ginzburg vortex

PPP $\quad q \equiv N 2\pi$ vákuumainak megfelelőt

$E = 0 \quad D_\mu \varphi \equiv 0 \equiv F_{\mu\nu} \quad |\varphi|^2 = F^2$

$\varphi = F e^{i\alpha(x,t)} \qquad A_\mu = \frac{-i}{e} \frac{\partial_\mu \varphi}{\varphi} = \frac{1}{ie} \partial_\mu e^{i\alpha} e^{-i\alpha} = \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha$

$\alpha(x,t)$ tetsz. fv. $\quad$ szokásos alap. (választás) $\quad \alpha \equiv 0 \quad \varphi = F \quad A_\mu \equiv 0$

időfüggés ? $\quad \boxed{A_0 \equiv 0 \text{ mérték}}$ $\quad$ időfüggő mértéktranszformációt nem végezhetünk

$\varphi = F e^{i\alpha(x)} \qquad A_1 = \frac{1}{e} \frac{d\alpha}{dx}$

$A^\mu = (A^0, A^1) = (\phi, A)$
$A_\mu = (\phi, -A) = (A_0, A_1)$

időfüggetlen mértéktranszformációt még végezhetünk

SZOLITONOK

Gauss törvény $I(x)=\frac{dE_x}{dx}-\frac{1}{2}ie\left(\varphi^* D_0\varphi-(D_0\varphi)^*\varphi\right)=0$ Euler-Lagrange egyenlet

nem egy dinamikai egyenlet (ha $t=0$-ban teljesül, később is fog)

~~nem dina~~ → kényszer

$E(x) = \partial_0 A_1 = -\partial_0 A = -\Pi_A(x)$ $\quad [E(x), A_1(y)] = i\,\delta(x-y)$

$\frac{d}{dx}:$ $\quad [I(x), A_1(y)] = i\partial_x\,\delta(x-y)$

⇒ $\boxed{\hat{I}(x)=0 \text{ nem lehet op. egyenlet}}$

(gyengén teljesül) $\boxed{\hat{I}|\Psi_{fiz}\rangle=0}$ $\{|\Psi\rangle\}$ állapotter

$\{\Psi_{fiz}\}\in\{\Psi\}$

Def.

$\Lambda(x)$ c szám fv.

$$\hat{U}_\Lambda=\exp\left\{\frac{i}{e}\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda(x)\hat{I}(x)\right\}$$

$$\left\{\tilde\Lambda(x)\,\Big|\,\lim_{x\to\pm\infty}\tilde\Lambda(x)=0\right\}\qquad \hat{U}_{\tilde\Lambda}|\Psi_{fiz}\rangle=|\Psi_{fiz}\rangle$$

parciál

$$\hat{U}_{\tilde\Lambda}=\exp\left\{\frac{i}{e}\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\tilde\Lambda(x)\left[\frac{dE}{dx}-\frac{1}{2}ie\left(\varphi^* D_0\varphi-\varphi(D_0\varphi)^*\varphi\right)\right]\right\}=\exp\left\{i\int_{-\infty}^{\infty}dx\left[-E\frac{\partial\tilde\Lambda}{e}-\frac{i\tilde\Lambda}{2}\varphi^* D_0\varphi+i\frac{\tilde\Lambda}{2}\varphi D_0\varphi^*\right]\right\}$$

$$=\exp\left\{i\int_{-\infty}^{\infty}dx\left[\Pi_A\frac{\partial_x\tilde\Lambda}{e}+\Pi_\varphi(-i\varphi^*\tilde\Lambda)+i\tilde\Lambda\varphi\Pi_\varphi\right]\right\}$$ → implementálja a mértéktrafót.

$\hat{U}_{\tilde\Lambda}A_\mu\hat{U}_{\tilde\Lambda}=A_\mu+\frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda$

$\hat{U}_{\tilde\Lambda}\varphi\hat{U}_{\tilde\Lambda}^{-1}=\varphi e^{i\Lambda}$

"kis mértéktranszformáció"

Óra

$K=\{\tilde\Lambda(x)\}$ kis mértéktrafó $\quad\tilde\Lambda(\pm\infty)=0$

$U_{\tilde\Lambda}$ → $U_{\tilde\Lambda}|\Psi_{fiz}\rangle=|\Psi_{fiz}\rangle$ Gauss kényszer megjelent

parc. integrál

$U_{\tilde\Lambda}$ → $U_{\tilde\Lambda}$ implementálja a mértéktr. $\phi\to\phi e^{ie\tilde\Lambda}$ $\quad A_{\tilde\Lambda}(x)\to A_\Lambda(x)+\frac{1}{e}\partial_x\tilde\Lambda$

$U_{\tilde\Lambda}|\phi(x),A_1(x)\rangle=|\phi e^{ie\tilde\Lambda},A_1+\frac{1}{e}\partial\tilde\Lambda\rangle$ nem invariáns, nem fizikai!

mező sajátállapot

fizikai állapotok (PPP q-nak megfelelői)

$$|\phi(x), A_1(x)\rangle_{fiz} = \int D\tilde{\Lambda}(x)\, U_{\tilde\Lambda} |\phi(x), A_1(x)\rangle$$

$\{\phi(x), A_1(x)\}$ ekvivalencia osztályai

$$\hat\phi(x) = e^{ie\hat\alpha(x)}\phi \qquad \hat\alpha \in K$$
$$\hat A_1 = A_1 + \frac{1}{e}\partial\hat\alpha$$

$q \equiv N 2\pi$ megfelelői alapállapotok $\{F e^{i\alpha(x)e}, \frac{1}{e}\partial\alpha\}$ ekvivalencia osztályai

Később látni fogjuk $\alpha(x) \equiv 0$

$$e^{i\alpha(+\infty)} = 1 = e^{+i\alpha(-\infty)} \longleftrightarrow x \text{ tengelyt } S^1 \text{ kompaktifikáljuk}$$

$S^1 \rightarrow U_1$

$$S^1 \rightarrow U_1 \qquad N = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{dx}\, dx\, \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\alpha(+\infty) - \alpha(-\infty)\right) = N_+ - N_- =$$
$$= N \text{ egész}$$

ha $\alpha(-\infty) = 0 \qquad N_+ = N$ csavarodási szám

$\{F e^{i\alpha}, \frac{1}{e}\partial\alpha\}$ ekvivalencia osztályait N jellemzi ∞ sok osztály van
osztály kis mértéktr. invariáns $\alpha \rightarrow \alpha + \tilde\Lambda = \hat\alpha \rightarrow$

$$\rightarrow \hat\alpha(+\infty) = \alpha(+\infty) + \tilde\Lambda(+\infty) = \alpha(+\infty)$$
$$\hat N = N$$

$|N\rangle$ térelméleti vákuum funkcionált N osztályú $F e^{i\alpha}, \frac{1}{e}\partial\alpha$ leíró felépítésű

$\rightarrow$ top. vákuum $\qquad$ (megfelelő $U_0(q - N2\pi)$)

$|0\rangle$ naiv vákuum

lesz közöttük alagutazás $\qquad$ igazi alapáll. $|N\rangle$ lin kombinációja

<u>nagy mértéktranszformációk</u> $T \longleftrightarrow$ PPP-ben rácseltolás $q \rightarrow q + 2\pi$

$\Lambda_1(x) \qquad \Lambda_1(-\infty) = 0 \qquad \Lambda_1(+\infty) = 2\pi$ $\qquad$ (pl. $\Lambda(x) = -\pi(1 + \operatorname{th} x)$)

$$\alpha \rightarrow \hat\alpha = \alpha + \Lambda_1 \qquad \hat N = \frac{1}{2\pi}\left(\hat\alpha(+\infty) - \hat\alpha(-\infty)\right) = N - 1$$

$$T_1 = \exp\left\{i\int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\pi_A \frac{\partial\Lambda_1}{e} - i\Lambda_1\phi^* \pi_{\phi^*} + i\Lambda_1\phi\pi_\phi\right)\right\} \qquad T_1 \phi T_1^{-1} = \phi e^{ie\Lambda_1}$$

várjuk $\qquad [T_1, H] = 0 \qquad \boxed{T_1 = \exp\left(\frac{2\pi i}{e} E(\infty)\right) U_{\Lambda_1}}$ $\rightarrow$ Gauss kényszer megjelenik

$$U_{\Lambda_1}|\Psi_{fiz}\rangle = |\Psi_{fiz}\rangle$$

$T_1|N\rangle = |N-1\rangle$

$[T_1,H]=0$ egyszerre diagonalizálhatók T_1 s.é. $e^{i\Theta}$ alakúak $|\Theta\rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\Theta N}|N\rangle$

$T_1|\Theta\rangle = e^{i\Theta}|\Theta\rangle$

A vákuum alagutazás az Abeli Higgs modellben a funkcionálintegrál segítségével

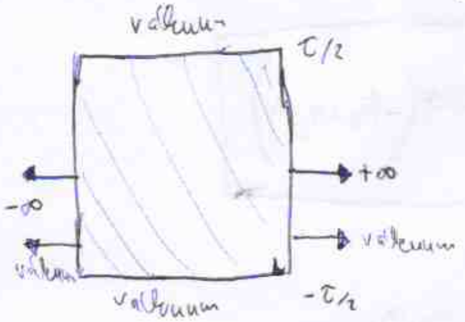
Euklideszi funk. integrál

$$G(\tau) = \int \underbrace{D\phi D\phi^* DA_\mu}_{\text{mértékinv.}} \exp\left(-S_E[\phi,\phi^*,A_\mu]\right)$$

$\alpha(\Theta)$ $\lim_{\tau\to\infty}$

$$S_E = \int d^2x \left(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}D_\mu\phi D_\mu\phi^* + \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2-F^2)^2\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\tau/2}^{\tau/2}d\tau$$



az egész peremen vákuum peremfeltétel van

$S_1(r,\Theta)$ $\quad \phi(x,\tau)_{r,\Theta} \xrightarrow[r\to\infty]{} Fe^{i\alpha(\Theta)}$

$A_\mu \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(\Theta)$

$\alpha(\Theta)$ fv. jellemez egy vákuum peremfeltételt

$S_1 \to U_1$ leképzés

$$Q = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\alpha}{d\Theta}d\Theta = \frac{e}{2\pi}\oint_r \vec{A}\,d\vec{s} = \frac{e}{2\pi}\int_{R^2} F_{\mu\nu}\,\varepsilon^{\mu\nu}\,d^2x$$

(I) Q és N is $S_1 \to U_1$ leképzések indexel, de nem azonosak (lesz közöttük kapcsolat)

(II) Q mértékinvariáns N nem $\quad A_0=0$ mértékben def. + nagy mértéktrafó megváltoztatják

(III) Q-val eddig a véges hatású konfig.-t osztályoztuk

Q fix $\Rightarrow$ még kontinuum $\alpha(\Theta)$ amik ugyanahhoz az osztályhoz tartoznak mértékinvariancia $\quad \alpha(\Theta) \to \tilde{\alpha}(\Theta) = \alpha(\Theta) + \Lambda(\Theta)$

$\Lambda(r,\Theta) \qquad \lim_{r\to\infty} \Lambda(r,\Theta) = \Lambda(\Theta)$

• funkc. integrál nem vált! $\alpha(\Theta)$, $\tilde{\alpha}(\Theta)$ u. abban a homotópia osztályban van

u.a. Q-hoz $\alpha(\Theta), \tilde{\alpha}(\Theta)$ mértéktr.-val átvihető egymásba

funkc. integrál csak Q-tól függ mindegy, hogy melyik $\alpha_Q(\Theta)$-val számoljuk ki

~~[illegible]~~

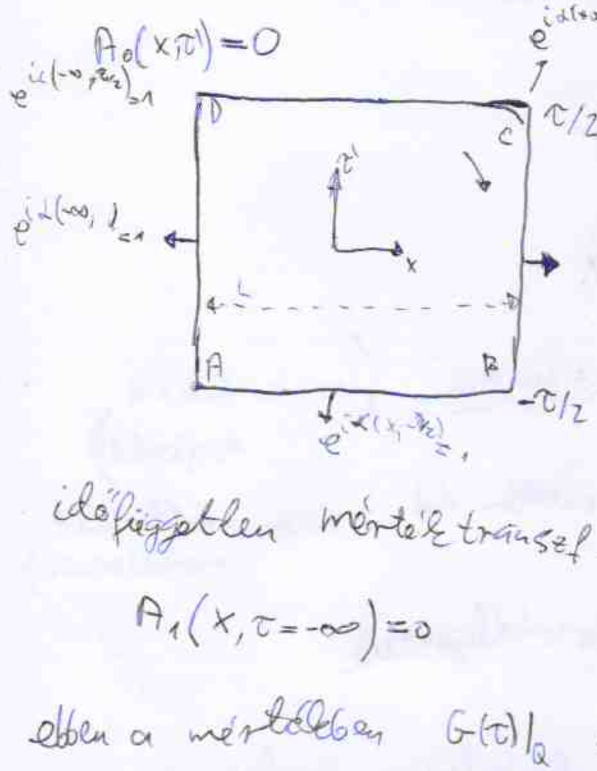
vannak még kis mérték transf. $\Lambda(\Theta) = 0$ szokásos mérték rögzítés

$$S_{gf} = -\frac{1}{2}\int d^2x\, (\partial_\mu A_\mu)^2 \qquad \boxed{G(\tau)\Big|_Q = \int D\phi\, D\phi^*\, DA \Big|_{\alpha_Q(\Theta)} \exp\left(-(S_E + S_{gf})\right)}$$

$$\phi \xrightarrow[r\to\infty]{} \phi\, e^{i\alpha_Q(\Theta)}$$

$$A_\mu \to \frac{1}{ie}\, e^{-i\alpha_Q(\Theta)}\, \partial_\mu e^{i\alpha_Q(\Theta)}$$

kapcs. Q és N között $\qquad$ funkc. integrálás és a Hamiltoni



$$Q = \frac{e}{2\pi}\oint \vec{A}\, d\vec{l} = \frac{e}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\, A_1(x,\tau=+\infty) - \int_{-\infty}^{\infty} dx\, A_1(x,\tau=-\infty)\right)$$

$$= \frac{e}{2\pi}\left(\frac{1}{e}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{d\alpha}{dx}(x,\tau=+\infty) - \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{1}{e}\frac{d\alpha}{dx}(x,\tau=-\infty)\right) = N_+ - N_-$$

csav. szám $\qquad \tau = +\infty \qquad \tau = -\infty$

időfüggetlen mérték transzf. $\qquad N_- \equiv 0$

$A_1(x,\tau=-\infty) = 0 \qquad Q = N_+$

ebben a mértékben $G(\tau)\big|_Q$ értelmezhető $N \equiv 0$ és $Q = N_+$ vákuumok közötti átmenetnek most $G(\tau)$-t számoljuk $Q=1$

$$G(\tau)|_{Q=1} \qquad \phi = \phi_{inst} + \tilde{\phi} \qquad A_\mu = A_\mu^{inst} + \tilde{A}_\mu$$

ritka instanton gáz $\quad Q=1$ miatt $\quad n_1 - n_2 = 1$

$$\lim_{\tau\to\infty} G(\tau)\Big|_{Q=1} = A \int_0^{2\pi} d\Theta\, e^{i\Theta} \exp\left(e^{-S_0}\cos\Theta\, 2B - C\right) \boxed{L\,\tau}$$

A, B, C konstans

B = det faktorok

S_0 : instanton hatása

2 dim tér térfogata

Θ módusok miatt van!

$$\frac{E_\Theta}{L} = C - 2B\cos\Theta\, e^{-S_0} \qquad \text{most is sáv} \qquad |\Theta\rangle = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} e^{iN\Theta}\,|N\rangle$$

energia sűrűség

óra

1+1 dim Ábeli Higgs-ben

Euklideszi funk. integrál ritka inst. gáz $\quad \frac{E_\Theta}{L} = C - 2B\,e^{-S_0}\cos\Theta \qquad 0 \le \Theta \le 2\pi$

$|N=0\rangle \quad |N=1\rangle$ között J átmenet $\qquad T_1|N\rangle = |N-1\rangle \qquad [T_1, H] = 0$

$A_0 = 0$-ban választás

T_1 s.é. $e^{i\Theta}$

$$\boxed{|\Theta\rangle = \sum_{N=-\infty}^{\infty} e^{iN\Theta}\,|N\rangle} \qquad T_1|\Theta\rangle = e^{i\Theta}|\Theta\rangle$$

$$\langle\Theta|\, e^{-H\tau}\,|\Theta'\rangle = 2\pi\,\delta(\Theta-\Theta')\, e^{-E_\Theta \tau} \rightsquigarrow \langle\Theta| e^{-H\tau} |\Theta\rangle = 2\pi\delta(0)\, e^{-E_\Theta\tau}$$

$$\sum_{M,N} e^{i(M-N)\Theta} \langle M|e^{-H\tau}|N\rangle = \sum_N \left(\sum_Q e^{-i\Theta Q} \langle N+Q|e^{-H\tau}|N\rangle\right) =$$

csak Q-tól függ N-től nem!

$$= \underbrace{\sum_N}_{2\pi\delta(0)} \sum_Q \langle N+Q|e^{-H\tau}|Q\rangle e^{-iQ\Theta}$$

$$\lim_{\tau\to\infty} e^{-E_\Theta\tau} = \lim_{\tau\to\infty} \sum_Q e^{-i\Theta Q} \int D\phi\, D\phi^*\, DA_\mu \Big|_Q \exp\left(-S_E - S_{gf}\right)$$

$$Q = \frac{e}{4\pi}\int d^2x\ \varepsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$ minden

→ nem érdekel a peremfeltétel, az összeset

összegzésbe veszzük

$$\lim_{\tau\to\infty} e^{-E_\Theta \tau} = \lim_{\tau\to\infty} \int D\phi\, D\phi^* DA_\mu \Big|_{\forall Q\text{-ra}} \exp\left(-S_E - S_{gf} - \underbrace{\frac{ie\Theta}{4\pi}\int F_{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu}\, d^2x}\right)$$

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \frac{ie\Theta}{4\pi}\varepsilon_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$ Minkowski-ban nincs i

$\mathcal{L}$ paramétere lett Θ → klasszikusan nem látszik

→ folytonos Lorentz-trafóra invariáns

Paritást sérti

C-t is sérti

töltés konj.

$$\Delta\mathcal{L}_{Min} = \partial^\mu\left(\frac{\Theta e}{2\pi}\varepsilon_{\mu\nu}A^\nu\right)$$

teljes derivált!

fizikai megfontolásból melyik a "jobb"?

A különböző $|\Theta\rangle$-kra különböző világok épülnek szuperkiválasztás van közöttük

B fiz. mennyiség operátora

mértékinv.

$$[T_1, B] = 0$$

nagy mértéktraf.

$$0 = \langle\Theta|\,[T_1,B]\,|\Theta'\rangle = e^{i(\Theta'-\Theta)}\langle\Theta|B|\Theta'\rangle$$

ha $\Theta \neq \Theta'$ $\boxed{\langle\Theta|B|\Theta'\rangle = 0}$

→ ez azt támogatja, hogy az a természetesebb

hogy Θ a L-fv. (modell paramétere)

különböző Θ-k között nem tudunk ugrálni

„Θ eredete az alaguzás" ← illetve mértékfüggő $A_0 = 0$ mértékben igaz

az 1+1 dim. Ábeli Higgs Θ vákuumban bezárás van

(A) ha $\Theta \neq 0, \pi$ akkor az alapállapotban $\exists$ konst. elektromos tér

$$\langle F_{12}\rangle_\Theta = \frac{1}{2L\tau}\langle\Theta|\int d^2x\, F_{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu}|\Theta\rangle = \frac{2\pi}{eL\tau}\langle\Theta|Q|\Theta\rangle =$$

$$= \frac{2\pi}{eL\tau}\, \frac{\int D\phi\, D\phi^* DA_\mu|_{\forall Q}\, e^{-S}e^{iQ\Theta}Q}{\int D\phi\, D\phi^* DA_\mu|_{\forall Q}\, e^{-S}e^{iQ\Theta}} = -\frac{2\pi}{eL\tau}\, i\frac{d}{d\Theta}\Big[\ln \overbrace{\int D\phi \ldots e^{-S}e^{iQ\Theta}}^{e^{-E_\Theta \tau}}\Big] =$$

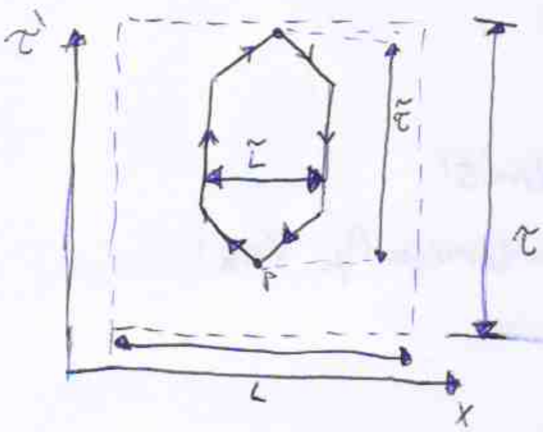
$$= -\frac{2\pi}{eL\tau} i \frac{d}{d\tau}\left[-E_\Theta \tau\right] = \frac{2\pi i}{e} 2B e^{-S_0} \sin\Theta$$

$$F_{12}\Big|_{Eu} = +i F_{01}\Big|_{Mink}$$

(B) $\pm q$ ~~statik~~ sztatikus (külső áramként) töltés pár egymástól $\tilde{L}$ távolságra [$\tilde{L} \to$ nagy]

ennek az állapotnak az energiája mennyivel különbözik az alapállapot energiájától

bezárás $\Delta E_\Theta \sim \tilde{L}$



$\tilde{L} < L$ $\quad \tilde{\tau} \ll \tau$

$\tilde{L} \to \infty$ $\quad \tilde{\tau} \to \infty$

$S_{int} = \int d^2x\, j_\mu A^\mu = q\oint A_\mu dx^\mu$ $\quad\Big|\quad$ $j_\mu d^2x = q\, dx_\mu$ $\quad dx_\mu$ vonalelem

funkc. integrálban $W = e^{iS_{int}} = \exp\left(iq\oint A_\mu dx^\mu\right)$

„Wilson loop"

Euklideszben is van i!

$$\langle W\rangle_\Theta = \frac{\int D\phi D\phi^* DA_\mu|_{vQ}\, e^{-S} e^{iQ\Theta} W}{\int D\phi D\phi^* DA_\mu|_{vQ}\, e^{-S} e^{iQ\Theta}} = \frac{\exp\left[-E_\Theta \tau - \Delta E_\Theta \tilde{\tau}\right]}{\exp\left[-E_\Theta \tau\right]} = \exp\left[-\Delta E_\Theta \tilde{\tau}\right] \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\Delta E_\Theta = \lim_{\tilde{\tau}\to\infty}\left(-\frac{1}{\tilde{\tau}}\ln\langle W\rangle_\Theta\right)}$$

nevező: $A e^{-CL\tau} e^{\left(2BL\tau e^{-S_0}\cos\Theta\right)}$

ritka inst. gáz közelítésben

számláló: $W = \exp\left(\frac{2\pi i q}{e}\frac{e}{4\pi}\int F_{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu} d^2x\right) =$ ($\tilde{L}\tilde{\tau}$ területre)

$$= \exp\left(\frac{2\pi i q}{e} Q_{belső}\right)$$

számláló

$$\int D\phi\, D\phi^* DA_\mu \Big|_{\forall Q} e^{-S} e^{iQ\theta} e^{\frac{2\pi i q}{e} Q_{belső}}$$

$Q = Q_{belső} + Q_{külső}$

$S = S_{belső} + S_{külső}$

$\Theta \to \Theta + \frac{2\pi i q}{e}$ belső tartományban

átlagoljuk a $\tilde{L}\tilde{\tau}$ peremére eső instantonokat/antiinstantonokat

$$A e^{-CL\tau} \exp\left[2Be^{-S_0}\,(\overbrace{L\tau - \tilde{L}\tilde{\tau}}^{\text{külső terület}})\cos\Theta + \underbrace{\tilde{L}\tilde{\tau}}_{\text{belső terület}}\cos\left(\Theta + \frac{2\pi q\theta}{e}\right)\right]$$

instanton mérete fix

$$\langle W_i\rangle_\Theta = \exp\left[2Be^{-S_0}\tilde{L}\tilde{\tau}\left(\cos\left(\Theta+\frac{2\pi q}{e}\right) - \cos\Theta\right)\right]$$

$$\boxed{\Delta E_\Theta(\tilde{L}) = 2B e^{-S_0}\tilde{L}\left(\cos\Theta - \cos\left(\Theta+\frac{2\pi q}{e}\right)\right)}$$

bezárás!

naivan tömeges A_μ van!

ha $\frac{q}{e} = N$ egész

$\Delta E_\Theta = 0!$ csak a tört töltések vannak bezárva

ha $q = Ne$ $\pm e$ párok vákuumból történő kipolarizálása

$\tilde{L}$-től független energiát igényel

óra

Instantonok a tiszta YM elméletben $\nexists$ anyagterek

$G = SU(2)$

$F_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu}\frac{\sigma_a}{2}$ $\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ $\Omega = e^{-\Lambda(\vec{x},t)}$; $\Lambda(\vec{x},t) = \frac{\sigma^a}{2i}\Lambda^a(\vec{x},t)$

$F \to \Omega F \Omega^\dagger$

(A) Top. vákuumok, Gauss kényszer, mértékinvariancia

$A_0 \equiv 0$ mérték $\Lambda(\vec{x})$ vákuum $F_{\mu\nu} \equiv 0$ $\to A_i = e^{-\alpha(\vec{x})}\nabla_i e^{\alpha(\vec{x})}$

$\alpha(\vec{x})$ 2×2 spúrtalan hermitikus

megköveteljük $e^{\alpha(\vec{x})}\Big|_{|\vec{x}|\to\infty} = 1$ (érv: $\alpha(\vec{x}) \equiv 0$ csak ilyenekbe alagutazik)

Szolitonok II

3d teret S^3-á kompaktifikáljuk

$$e^{\alpha(\vec{x})} \in SU(2) \equiv S^3$$

$$S^3 \to S^3 \qquad \pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$$ végtelen sok ekvivalencia osztály

egész szám „csavarodási szám"

$$N = \frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \, \varepsilon_{ijk} \, \mathrm{Tr}\left(e^{\alpha} \nabla_i e^{-\alpha} e^{\alpha} \nabla_j e^{-\alpha} e^{\alpha} \nabla_k e^{-\alpha} \right)$$

$\forall N$-hez $\alpha_N(\vec{x})$-t

$$\boxed{\alpha_1(\vec{x}) = \frac{i\pi \vec{\sigma}\vec{x}}{(x^2+a^2)^{1/2}} + i\pi\sigma_3} \qquad e^{\alpha_1(\vec{x})}\Big|_{|\vec{x}| \to \infty} \text{ irányfüggetlenül} = 1$$

$|N\rangle$ térelméleti hullámfunkcionál ← top. vákuumok

$\Lambda_1(x)$ nagy mértéktranszformáció $N=0$ $N=1$ $|N-1\rangle \to |N\rangle$

(B) A Gauss törvény és a mértékinv. ekvivalencia

mátrixok (klasszikusan)

$$I(x) \equiv \partial_i F^{0i} = \partial_i E^i + [A_i, E^i] \equiv (D_i E^i) = 0$$ $A_i(x)$ konjugált impulzusa $\frac{2}{g^2} E^i$

$|\Psi_{fiz}\rangle$-t $\qquad D_i E^i |\Psi_{fiz}\rangle = 0$

implementálja a mértéktrafót

$\tilde{\Lambda}(\vec{x})$ kis mértéktr. $\qquad \lim_{|\vec{x}| \to \infty} \tilde{\Lambda}(\vec{x}) = 0 \qquad \hat{U}(\tilde{\Lambda}) = \exp\left(\frac{2i}{g^2} \int d^3x \, \mathrm{Tr}\,(D_i \tilde{\Lambda}) \hat{E}^i \right)$

$$= \exp\left(-\frac{2i}{g^2} \int d^3x \, \mathrm{Tr}\, \tilde{\Lambda} D_i \hat{E}^i \right)$$ ← a kényszer megjelent

$U(\tilde{\Lambda}) |\Psi_{fiz}\rangle = |\Psi_{fiz}\rangle$

$\hat{U}(\Lambda_1)$ két érték nem egyezik meg

$$\hat{U}(\Lambda_1)|N-1\rangle = |N\rangle \qquad [\hat{U}(\Lambda_1), H] = 0$$

$|N\rangle \to |N+1\rangle$ alagutazás

$N=0 \quad N=1 \qquad A_i^{(\beta)} = \beta A_i^{(1)} \quad \beta\in[0,1] \qquad A_i^{(1)} = e^{-\lambda_1(\vec{x})}\, \nabla_i\, e^{\lambda_1(\vec{x})}$

$\longrightarrow F_{ij}^{(\beta)} = (\beta^2-\beta)\left[A_i^{(1)}, A_j^{(1)}\right] \neq 0$

$A_i^{(\beta)}\Big|_{\beta=0} = 0 \qquad A_i^{(\beta)}\Big|_{\beta=1} = A_i^{(1)} \qquad \int d^3x\, F_{ij}^{(\beta)} F^{(\beta)\,ij}$

véges

$A_i^{(\beta)}$ A_i-k terében egy útnak van alagutazás

$$\rightsquigarrow \boxed{\exists\ |\Theta\rangle = \sum_N e^{iN\Theta}|N\rangle}$$

$|\Theta\rangle$ és $|\Theta'\rangle$ között szuperkiválasztás

Ⓒ Alagutazási amplitúdó számolása Euklideszi funkcionál integrállal

4dim Euklid határ $S^3 \longrightarrow$ tiszta gauge $\quad A_\mu \to e^{-\alpha}\partial_\mu e^{\alpha}$ ~~spur~~ α 2x2 spúrtalan mátrix

$S^3 \to S^3$

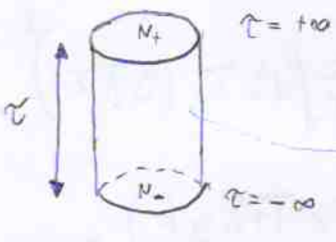
$$Q = -\frac{1}{16\pi^2}\int d^4x\, \mathrm{Tr}\left(F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}\right) = \frac{1}{24\pi^2}\oint_{S^3} d\sigma_\mu\, \varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\, \mathrm{Tr}\left(A_\nu A_\varrho A_\sigma\right)$$

$\to$ Q egész osztályokat jelenti

mértékinv.

$$\lim_{\tau\to\infty} G(\tau)\Big|_Q = \int DA_\mu\Big|_Q \exp\left(-(S_E+S_{gf})\right)$$ $\to$ csak Q-tól függ

$A_0 \equiv 0$ mértékben



$Q = N_+ - N_-$

peremen $e^{\alpha(x)}\big| = 1$

ha $N_-=0$

Θ értelmezése most is kérdéses

Θ vákuum most is lehet egy Θ-t tartalmazó Lagrange-fv. egyetlen alapállapota

$$\boxed{\Delta\mathcal{L}_\Theta = \frac{\Theta}{16\pi^2}\,\mathrm{tr}\left(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}\right)}$$

teljes divergencia $\qquad$ P, T-t sérti

$\mathrm{tr}\left(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}\right) = 4\,\mathrm{tr}\left(E_i B_i\right)$

eltérések az Abeli modell és a YM között

① YM-ben vannak egzakt multiinst. megoldások → ritka inst. gázban nem jelentősek

véges sokan végtelen térfogatban → 0 sűrűség

② YM-ben akármilyen méretű instantonok vannak!

λ szabad skála a BPST instantonban

tetsz. nagyok is! ↔ ritka gáz közelítés nem jó

1 inszt. 8 paraméter 4 hely. 3 globális SU(2) 1 skála

0 módus

csoport térfogata véges

Szokásos ritka inst. gáz:

$$E_\theta = -V\cos\theta \int_0^\infty d\lambda\, 2B(\lambda) e^{-S_0}$$

$$\boxed{\frac{E_\theta}{V} = -2\cos\theta \int_0^\infty d\lambda\, B(\lambda)\, e^{-S_0}}$$

integrál véges-e?

$[E_\theta] = \frac{1}{[l]}$

$[V] = [l]^3$

$B(\lambda)$: λ skálájú inst. körüli fluktuációk determinánsa

nem 0 frekv. vett összegzések

('t Hooft 1976)

regularizálni + renormálni kell

$\exists$ M renormálási tömeg v. skála

$B(\lambda)$ λ függését dim. analízisből áll $B(\lambda) = \frac{1}{\lambda^5} f(\lambda M)$

$g \to \bar{g}(\lambda M)$

futó csatolási állandó

$$e^{-S_0} = e^{-\frac{8\pi^2}{g^2}}$$

futó csat. állandót kell beírni

$\forall$ 0 módus $\frac{1}{g}$-t ad

$$\boxed{\frac{E_\theta}{V} = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^5} \frac{\exp\left(-\frac{8\pi^2}{\bar{g}^2(\lambda M)}\right)}{\bar{g}(\lambda M)^8}}$$

$\lambda \to 0$ YM elmélet AF perturbáció számítás

$$\left(\frac{1}{\bar{g}(\lambda M)}\right)^2 = \frac{1}{g_0^2} - \frac{11}{12\pi^2} \ln(\lambda M)$$ ha ez igaz

integrandus $\lambda \to 0$ $$\frac{e^{-\frac{8\pi^2}{g_0^2}} (\lambda M)^{22/3}}{\lambda^5 g_0^8} \left(1 - \frac{11 g_0^2}{12\pi^2} \ln(\lambda_1 M)^4\right) \to 0$$

növekvő λ-ból $\bar{g}(\lambda M)$ nő nem perturbatív eljárás kellene

top. vákuumok

Θ vákuum $\to \exists$ a $\mathcal{I}$-ben } vannak a YM-ben is

$\frac{E_\Theta}{V}$-t nem lehet a ritka inst. gázzal kiszámolni

a baj csak a skála inv.-ből van!

(d) ritka inst. gáz YM-ben NEM ad bezárást

Abeli Higgs

$A_\mu \to$ tiszta gauge!

YM peremen $A_\mu \to$ tiszta gauge-hoz

$$e^{-\alpha} \partial_\mu e^{\alpha} = g^{-1} \partial_\mu g$$

Wilson hurok v.é. csak a peremre eső inst. függ

QCD-ben

0 tömegű fermionok elnyomják a vákuum alagutazást!