Szolitonok és instantonok II

SZOLITONOK II

1-ea

A szoliton kvantálás általános elvei

Szoliton: részecskeszerű megoldás, lokalizált, véges energiájú

$\xrightarrow{\text{QFT}}$ "kiterjedt" részecske → nem pontszerű

lehetővé teszi a kv. állapot tulajdonságainak számolását a kl. megoldásból

szemi klasszikus QFT-beli általánosítás, nem perturbatív

klasszikus szoliton nem a hullámfüggvény a kv. állapotban!

Klasszikusan a mezők c-számok — meghat. a rendszer állapotát, ∄ részecskefogalom

Quantumosan: mezők q-számok (operátorok) — ℋ-beli vektorokra hatnak — a rendszer állapotai ∈ ℋ

↓

Heisenberg egyenlet — nem beszél az állapotról

↓

klasszikus mozgásegyenlet

térelméleti Schrödinger egyenlet — állapotvektorok időfejlődése → nem hasonlít a kl. mozg. egyenletekre

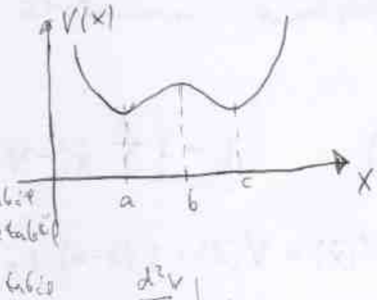
részecskék a ℋ-ban: $[\vec{P}, H] = 0$, $E^2 - \vec{P}^2 = M^2$ közös sajátállapotai, és ezt tudjuk

---

statikus megoldásokra — Alapok

$m=1$ tömegű nem rel. részecske mozgása $V(X)$

kl. egyenlet $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dV}{dx}$



$x(t)$ megoldás

$x(t) \equiv a$ ✓ stabil

$x(t) \equiv b$ instabil

$x(t) \equiv c$ ✓ stabil

$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_a > 0$

kl. alapállapot

$x = a$ $\quad E_0^{kl} = V(a)$

kvantumosan

$\psi(x)$ hullámfv. E_n sajátállapotban — kvantumosan ∄ $x=a$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\psi_n(x) = E_n \psi_n(x)$$

$$E_0 = E_0^{kl} + \Delta = V(a) + \Delta$$

$x=a$ körül $V(x)$-et Taylor sorba

$$V(x) = V(a) + \underbrace{\tfrac{1}{2}\omega^2}_{\text{kis rezgés frekvenciája}}(x-a)^2 + \frac{\lambda_r}{r!}(x-a)^r + \dots$$

olyan hf.-re $\boxed{\lambda_r \langle (x-a)^r \rangle << \omega^2 \langle (x-a)^2 \rangle}$ effektíve oszcillátorunk van

gyenge csatolás

$\Delta_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \qquad E_0 = V(a) + \frac{1}{2}\hbar\omega + \mathcal{O}(\lambda_r)$

ameddig ez teljesül

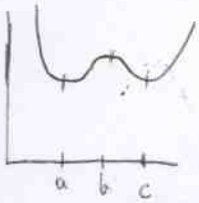
$\boxed{E_n = V(a) + \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega + \mathcal{O}(\lambda_r)}$ ~ $x=a$ -hoz → oszcilláló állapotok tornya

$\Psi_0(x)$ alapállapot

$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; x \; |\Psi_0|^2 = a + \mathcal{O}(\lambda_r)$

↳ klasszikus megoldás

az direkt tulajdonsága



$x(t) \equiv c$ megoldás

$\forall$ -t elmondhatunk

$E_0^{cl} = V(c) > V(a)$

$V(x) \approx V(c) = \frac{1}{2}\omega'^2(x-c)^2 + \frac{\tilde{\lambda}_r}{r!}(x-c)^r$

$\boxed{E_n = V(c) + \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega' + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}_r)}$

alagutazás ?

nincsen ha a potenciálgát végtelen magas

Gyenge csatolással baj van, ha $\omega^2 = 0$

$V(x) = V_0$ konstans minden $\forall x = x_0$ klasszikus megoldás

transzlációs szimmetria $\quad E_n = V_0 + \frac{1}{2}p_n^2 \qquad e^{ipx}$

$\forall \omega = 0$ mögött van folytonos szimmetria

általánosítás: $\quad \vec{X} = (x_1, \dots, x_N) \qquad L = \frac{1}{2}\sum^N \dot{x}_i^2 - V(X)$

$\vec{x} = \vec{a} \quad V(\vec{x})$ minimuma

$V(\vec{x}) = V(\vec{a}) + \frac{1}{2}(x-a)_i (x-a)_j \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right| + \dots$

ξ_i-k között magasabb polinomiális csatolás

mátrix

↳ s.é. ω_i^2

diagonalizáljuk

ξ_i normálkoordináták

Ha a gyenge csatolás fennáll

$E_{\{n_i\}} = V(\vec{a}) + \sum_{i=1}^{N}\left(n_i + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_i + \mathcal{O}(\lambda_r) \qquad$ alapállapot $E_{\{0_i\}}$

Térelmélet: ∞ sok szab. fok $\quad x_1 \dots x_N(t) \longrightarrow \phi_{\vec{x}}(t) = \phi(\vec{x}, t)$

D+1 Minkowski téridő $\quad \phi(\vec{x}, t)$ 1 db valós skalármező

$\mathcal{L} = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 - U(\phi) \right\} = T[\phi] - V[\phi]$

$U(\phi) \geq 0$

kl. mozgásegyenlet $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\delta V[\phi]}{\delta \phi(\vec{x},t)}$

Sztatikus megoldás $0 = \frac{\delta V[\phi]}{\delta \phi(\vec{x})}$ $V[\phi(\vec{x})]$ minimuma $\phi_0(\vec{x})$

$V[\phi(\vec{x})]$-t funkcionál Taylor sorba fejtjük $\phi_0(\vec{x})$ körül $\phi(\vec{x}) = \phi_0 + \eta(\vec{x})$

$$V[\phi_0+\eta] = \int d^Dx \left\{ \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi_0)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\eta)^2 + \vec{\nabla}\phi_0 \vec{\nabla}\eta + U(\phi_0) + U'\big|_{\phi_0}\eta + \frac{1}{2}U''\big|_{\phi_0}\eta^2 + \dots \right\}$$

$$V[\phi_0+\eta] = V[\phi_0] + \int d^Dx \left\{ \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\eta)^2 \underbrace{- \eta\Delta\phi_0 + \eta U'\big|_{\phi_0}}_{\eta(-\Delta\phi_0 + U'|_{\phi_0})} + \frac{1}{2}U''\big|_{\phi_0}\eta^2 + \dots \right\}$$

0, a sztatikus megoldás miatt

$$\frac{\delta V}{\delta\phi} = 0 \to \frac{\delta V}{\delta\eta}\bigg|_{\eta=0} = 0 = -\Delta\phi_0 + U'\big|_{\phi_0}$$

$$\boxed{V[\phi_0+\eta] = V[\phi_0] + \int d^Dx\, \frac{1}{2}\eta(x) \underbrace{\left\{-\Delta + U''\big|_{\phi_0(\vec{x})}\right\}}_{\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}} \eta(\vec{x}) + \dots}$$

általánosítása

$\eta(\vec{x}) = \phi(\vec{x}) - \phi_0(\vec{x})$ normál koordináták általánosítása

$$\boxed{\left(-\Delta + \frac{1}{2}\frac{d^2U}{d\phi^2}\bigg|_{\phi_0(\vec{x})}\right)\eta_i(\vec{x}) = \omega_i^2 \eta_i(\vec{x})}$$

ω_i^2 valós

$\eta_i(\vec{x})$ ortonormált

$$\eta(\vec{x},t) = \phi(\vec{x},t) - \phi_0(\vec{x}) = \sum c_i(t)\,\eta_i(\vec{x})$$

$\mathcal{L} = T[\phi] - V[\phi]$

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_i \left(\dot{c}_i(t)\right)^2 - \left[V[\phi_0] + \frac{1}{2}\omega_i^2 c_i^2(t)\right] + \text{km}}$$

$O(\lambda_{..})$

$\forall c_i(t)$-re oszcillátor!

$\to c_i c_j c_k$ szerű kh.

gyenge csatolásban $\forall c_i \to$ kvantum oszcillátor

$$E_{\{n_i\}} = V[\phi_0] + \sum_i \left(n_i + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_i + \text{km}\quad O(\lambda_{..})$$

$\to \phi_0(\vec{x})$ stab. frekvenciái

klasszikus megoldás energiája

$\forall$ stabil sztatikus megoldásra el lehet végezni

nem spontán sértett ϕ^4 klasszikus alapállapothoz asszociált kv. állapotok $\leftrightarrow$ standard térelmélet

$$\mathcal{L} = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}(\vec\nabla \phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \right\} \qquad m^2, \lambda > 0$$

$$V[\phi] = \int d^D x \left\{ -\frac{1}{2}\phi\Delta\phi + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 \right\} \qquad \frac{\delta V}{\delta \phi} = 0 = -\Delta\phi + m^2\phi + \lambda\phi^3$$

triv megold. $\phi \equiv 0 \ (=\phi_0)$

$V[\phi_0 = 0] = 0$

$$\left.\frac{d^2 U}{d\phi^2}\right|_{\phi_0} = m^2 \qquad \text{normálkoordináták egyenlete}$$

$$(-\Delta + m^2)\eta_i(\vec x) = \omega_i^2 \eta_i(\vec x)$$

L^D dobozban periodikus peremfelt. (végén $L \to \infty$)

$$\eta_i(\vec x) = L^{-D/2} e^{i\vec k_i \vec x} \qquad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{egész}}}{\vec k_i = \frac{2\pi}{L}\vec N_i} \qquad \boxed{\omega_i = \sqrt{k_i^2 + m^2}}$$

$$E_{\{n_i\}} = 0 + \hbar \sum_i \left(n_i + \frac{1}{2}\right)\omega_i + \mathcal{O}(\lambda_r)$$

alapáll.

$$E_{\{0_i\}} = \frac{\hbar}{2}\sum_i \sqrt{\vec k_i^2 + m^2} + \mathcal{O}(\lambda_r) \qquad \text{végtelen, regularizálni kell}$$

első gerjesztett állapot $\omega_{min} = m$ egyszer gerjesztve

ω_{min} $E_{\{\omega_{min},1\}} - E_{\{0_i\}} = \hbar\omega_{min} = \hbar m + \mathcal{O}(\lambda_r)$ $\longleftrightarrow$ éppen 1 db álló m tömegű részecske

$\vec k_i \neq 0$ $\omega_i = \sqrt{k_i^2 + m^2}$

A kink megoldás levantálása

$1+1$ dim $\phi(x,t)$

$$L = \int dx \, \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - V[\phi] \qquad V[\phi] = \int dx \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\lambda}{4}\left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda}\right)^2\right]$$

$$\frac{\delta V}{\delta\phi} = 0 = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - m^2\phi + \lambda\phi^3 = 0 \qquad \text{vákuum } \phi \equiv \pm\frac{m}{\sqrt\lambda}$$

kink $\phi_a = \frac{m}{\sqrt\lambda}\,\mathrm{th}\left(\frac{m(x-a)}{\sqrt 2}\right)$

Szemiklasszikus kv. $\forall$-re ált

$$\phi_1 = \frac{m}{\sqrt\lambda} \qquad \tilde\phi = \phi - \phi_1$$

$$V[\tilde\phi] = \int dx \, \frac{1}{2}\left\{\tilde\phi\left(-\partial_x^2 + 2m^2\right)\tilde\phi\right\} + \overbrace{m\sqrt\lambda\int dx\,\tilde\phi^3 + \frac{\lambda}{4}\int\tilde\phi^4 dx}^{\sqrt\lambda\text{-ban perturbációs}}$$

normálkoordináták egyenlete

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + 2m^2\right)\eta_n(x) = \omega_n^2\eta_n(x) \qquad \omega_n = \sqrt{k_n^2 + 2m^2} \qquad \eta_n(x) \sim e^{ik_n x} \qquad \boxed{k_n L = 2\pi n}$$

$$L \to \infty \quad \sum_n = \sum_{k_n} \longrightarrow \frac{L}{2\pi}\int dk \qquad E_{\{n_i\}} = 0 + \hbar\sum_{k_n} N_n\sqrt{k_n^2 + 2m^2} + \mathcal{O}(\sqrt\lambda)$$

a részecske tömege $\hbar m\sqrt 2$

vákuum szektor ilyen tömegű részecskék "megoldé"

$$\tilde\phi = \phi - \phi_1 \qquad \langle(\tilde\phi)\rangle = \langle(\phi - \phi_1)\rangle = 0 \rightsquigarrow \langle\phi\rangle = \phi_1 = \frac{m}{\sqrt\lambda}$$

A kvantum kink és gerjesztései

a: paraméter $a=0$

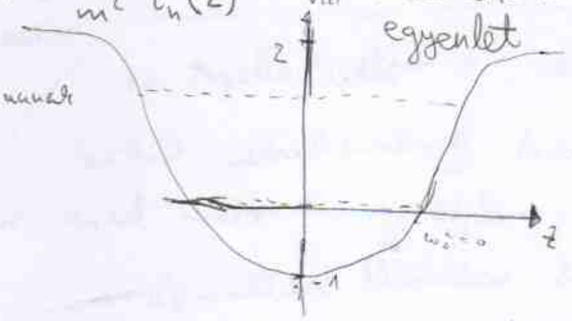
$V[\phi_k] = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\phi^3}{\lambda}$ $\tilde{\Phi} = \phi - \phi_k$

$$V[\phi] = V[\phi_k] + \int dx \, \tfrac{1}{2} \tilde{\Phi}(x)\overbrace{\Big(\underbrace{-\frac{d^2}{dx^2} + 3\lambda\phi_k^2 - m^2}_{\text{ebben igazából már nincs } \lambda}\Big)}^{\mathcal{O}(\lambda^0)}\tilde{\Phi}(x) + \underbrace{\lambda\int dx\left[\phi_k\tilde{\Phi}^3 + \frac{\tilde{\Phi}^4}{4}\right]}_{\text{perturbáció}}$$

$\boxed{z = \frac{mx}{\sqrt{2}}}$ normálkoordináták egyenlete

$$\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 3\,\mathrm{th}^2 z - 1\right]\tilde{\eta}_n(z) = \frac{\omega_n^2}{m^2}\tilde{\eta}_n(z)$$

1 dimenziós Schrödinger egyenlet



$q=0$ $2m^2$-nél vagyunk

kötött + kontinuum állapotok is vannak

$\omega_0^2 = 0$ $\tilde{\eta}_0(z) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 z}$

$\omega_1^2 = \frac{3}{2}m^2$ $\tilde{\eta}_1(z) = \frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}^2 z}$

kontinuum q folytonos paraméter $\omega_q^2 = m^2\left(\frac{1}{2}q^2 + 2\right)$

$$\tilde{\eta}_q(z) = e^{iqz}\left(3\,\mathrm{th}^2 z - 1 - q^2 - 3iq\,\mathrm{th}\, z\right)$$

q lehetséges értékei periodikus peremfeltétel L méretű dobozban ($L\to\infty$)

$$2\pi n = q_n \frac{mL}{\sqrt{2}} + \delta(q_n)$$

$$\tilde{\eta}_q(z) \xrightarrow[z\to\pm\infty]{} e^{iqz}\left(2 - q^2 \mp 3iq\right) = e^{i(qz \pm \frac{1}{2}\delta(q))}$$

$$\mathrm{tg}\frac{\delta(q)}{2} = -\frac{3q}{2-q^2} \qquad \delta(q) = -2\,\mathrm{arctg}\frac{3q}{2-q^2}$$

$$\tilde{E}_{\{N_i\}} = \frac{2\sqrt{2}\,m^3}{3\lambda} + \left(N_1 + \frac{1}{2}\right)\hbar m\sqrt{\frac{3}{2}} + m\hbar\sum_{q_n}\left(N_{q_n} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{2}q_n^2 + m^2} + \mathcal{O}(\lambda)$$

ha $\forall N_i = 0$ kv kink alapállapota

ha N_1-et gerjesztjük ← értelmezni kell

$N_q \neq 0$ ← — " —

2. óra

$$E_{\{\hat{N}\}} \quad \tilde{E}_{\{\hat{N}\}} = \frac{2\sqrt{2}\,m^3}{3\lambda} + \left(N_1 + \frac{1}{2}\hbar m\right)\sqrt{\frac{3}{2}} + m\hbar\sum_{q_n}\left(N_{q_n} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{2}q_n^2 + 2} + \mathcal{O}(\lambda)$$

$x \to z = \frac{mx}{\sqrt{2}}$ $\boxed{\frac{Lmq_n}{\sqrt{2}}\,\delta(q_n) = 2\pi \underset{\text{egész}}{n}}$ L méretű doboz ($L\to\infty$)

hiányzik az $\omega_i = 0$ módus

$$\delta(q) = -2\,\mathrm{arctg}\frac{3q}{2-q^2}$$

alapállapot $\forall N_n = 0$ $\tilde{E}_0 = \frac{2\sqrt{2}m^3}{\lambda} + \frac{1}{2}\hbar m\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{\hbar m}{2}\sum_{q_n}\sqrt{\frac{1}{2}q_n^2+2} + \mathcal{O}(\lambda)$

nem egyezik a vákuum szektor alapállapotával ! E_0^{vac}

fizika $\tilde{E} - E_0^{vac}$ → értelmezendő : kvantum kink energiája ← M_{kink} $\lambda \to 0$ nagy!

(álló)

kvantumállapot: kiterjedt részecske

első gerjesztett $N_1 = 1$ $\tilde{E}_1 - \tilde{E}_0 = \hbar m\sqrt{\frac{3}{2}} < \hbar m\sqrt{2}$ kvantum kink gerjesztett állapota

ha $N_1 = 2$ lenne $\tilde{E}_2 - \tilde{E}_0 = 2\hbar m\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{2}\,\hbar m\sqrt{3}$

$N_n = 0$ $N_{q_n} \neq 0$ a megfelelő állapot az

vákuum szektorbeli mezon $\sqrt{3} > 1$

el tudna bomlani alapállapot + mozgó mezonra

nem rendelünk állapotot

elmélet mezonjainak (kvantum) kinken történő szórási állapota, melyben a kvantum kink csak külső potenciálként

$\bar{\eta}_q(z)$ mezonok redukált hullámfv.-e

$\hbar\omega_q$ potenciálban szóródó mezonok energiája $\hbar\omega_q = \hbar\sqrt{\frac{1}{2}m^2q_n^2 + 2m^2}$

$\hbar m\sqrt{2}$ nagy. tömegű impulzus

$p_n = \hbar\frac{mq_n}{\sqrt{2}}$ →

konzisztens

$e^{i(qz \pm \delta(q))} = e^{i\left(\frac{qm_0}{\sqrt{2}} \pm \delta(q)\right)}$

$\delta(q)$ szóródó mezon fázistolása

nincs kink mozgási energia

magyarázata $M \sim \frac{1}{\lambda}$ $\lambda \to 0$ kin. $\frac{p^2}{2M} \sim \mathcal{O}(\lambda)$

A kink tömeg és renormálása

$\tilde{E}_0 - E_0^{vac}$ divergensek, óvatosan

$$\tilde{E}_0 - E_0^{vac} = \frac{2\sqrt{2}m^3}{3\lambda} + \frac{1}{2}\hbar m\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{\hbar}{2}\sum_n\left\{m\sqrt{\frac{1}{2}q_n^2+2} - \sqrt{k_n^2+2m^2}\right\} + \mathcal{O}(\lambda)$$

L méretű dobot periodikus peremfeltétel

$L \to \infty$

$$2\pi n = k_n L = q_n\frac{mL}{\sqrt{2}} + \delta(q_n) \qquad \frac{mq_n}{\sqrt{2}} = k_n - \frac{\delta(q_n)}{L} \qquad \sum_n \equiv \sum_{k_n} \to \frac{L}{2\pi}\int dk$$

$$\{\ \}: \sqrt{\left(k_n - \frac{\delta_n}{L}\right)^2 + 2m^2} - \sqrt{k_n^2+2m^2} \approx -\frac{k_n\delta_n}{L}\frac{1}{\sqrt{k_n^2+2m^2}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^2}\right)$$

$$\tilde{E}_0 - E_0^{vac} = \frac{2\sqrt{2}m^3}{3\lambda} + \frac{1}{2}\hbar m\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{\hbar}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk\,k\,\delta(k)}{\sqrt{k^2+2m^2}} + \mathcal{O}(\lambda) \qquad q = \frac{\sqrt{2}k}{m} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L}\right)$$

$k \to \infty$ $\lim_{k\to\infty}\delta(k) = \lim_{k\to\infty}\left(-2\,\mathrm{arctg}\frac{3\sqrt{2}km}{2m^2-2k^2}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(2\,\mathrm{arctg}\frac{3\sqrt{2}m}{2k}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{k}m$

parciálisan integrálunk

$$\tilde{E}_0 - E_0^{vac} = \frac{2\sqrt{2}\,m^3}{3\lambda} + \frac{1}{2}\hbar m\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{\hbar}{4\pi}\left[\delta(k)\sqrt{k^2+2m^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{\hbar}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\,\sqrt{k^2+2m^2}\,\frac{d\delta(k)}{dk} + \mathcal{O}(\lambda) =$$

új változó $p = \frac{k\sqrt{2}}{m}$

$$= \frac{2\sqrt{2}\,m^3}{3\lambda} + \frac{1}{2}\hbar m\sqrt{\frac{3}{2}} - \underset{\pi?}{\frac{3\hbar}{\hbar\sqrt{2}}}\, m - \frac{6m\hbar}{4\pi\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp\,(p^2+2)}{(p^2+1)\sqrt{p^2+4}} + \mathcal{O}(\lambda)$$

↳ log divergál !?

divergencia a pert. számítás "szokásos" divergenciája

$$H = \int dx \left[\frac{1}{2}\hat{\pi}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\hat{\phi}^2 + \frac{\lambda}{4}\hat{\phi}^4 + \frac{m^4}{4\lambda}\right]$$ $\hat{\phi}^2$ $\hat{\phi}^4$ rosszul definiált

A vákuum szektorban 1+1 dim $\forall$ divergencia normálrendezéssel kontratagokkal

$:\hat{\phi}^4: = \hat{\phi}^4 - A\hat{\phi}^2 - B$ A, B, C konstansok

$:\hat{\phi}^2: = \hat{\phi}^2 - C$ $A = A(\lambda, m, \Lambda)$ Λ levágás

↳ $\forall$ rendjében úgy vannak meghatározva

hogy a naiv divergenciák mellett az A, B, C-ből jövőket is

akkor már $\Lambda \to \infty$ limeszt végrehajtható és véges eredményt ~~kapunk~~ ad

energiaszintek különbségéből

$$:H: = H - \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{2}\underset{\sim}{\delta m^2}\,\phi^2 + \underset{\sim}{D}\right)$$

δm^2 legalacsonyabb rendben

$\underset{\delta m^2}{\times}$ =  $+\,\mathcal{O}(\lambda^2)$

textbook eredmény

$$\delta m^2 = \frac{3\lambda\hbar}{4\pi}\int_{-m\Lambda}^{m\Lambda}\frac{dp}{\sqrt{p^2+2m^2}} = \frac{3\lambda\hbar}{4\pi}\int_{-\Lambda}^{\Lambda}\frac{dp}{\sqrt{p^2+2}}$$ ↗ vákuum szektorban (1 részecske-alapállapot) energia

normálrendezés :H: $V[\phi] \to \Delta V[\phi] = -\frac{1}{2}\delta m^2\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\phi^2(x)$ kink szektor $\phi(x) \to \phi_k(x) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}\,\mathrm{th}\frac{mx}{\sqrt{2}}$

vákuum szektor $\phi(x) \to \phi_0 = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$

$$\Delta\tilde{E}_0 - \Delta E_0^{vac} = -\frac{1}{2}\delta m^2\int_{-\infty}^{\infty} dx\left[\phi_k^2(x) - \phi_0^2\right] = -\frac{1}{2}\delta m^2\frac{m^2}{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} dx\left(\mathrm{th}^2\left(\frac{mx}{\sqrt{2}}\right) - 1\right) = \delta m^2\frac{m}{\lambda}\sqrt{2}$$

$$M = \tilde{E}_0 + \Delta\tilde{E}_0 - E_0^{vac} - \Delta E_0^{vac} = \frac{2\sqrt{2}\,m^3}{3\lambda} + m\hbar\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{3}{\pi\sqrt{2}}\right] - \frac{3\sqrt{2}\,m\hbar}{4\pi}\int_{-\Lambda}^{\Lambda} dp\,\underbrace{\left(\frac{p^2+2}{(p^2+1)\sqrt{p^2+4}} - \frac{1}{\sqrt{p^2+2}}\right)}_{p\to\infty\ \frac{1}{p}\ \text{kiesik}} + \mathcal{O}(\lambda)$$

$$\boxed{M = \frac{2\sqrt{2}\,m^3}{\lambda} + m\hbar\left[\frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{3}{\pi\sqrt{2}}\right] + \mathcal{O}(\lambda)}$$

klasszikus tag $\frac{1}{\lambda}$ → nem perturbatív

kv. korrekció kisebb λ hatvány

$c = 1$ $\hbar$ visszaírtuk

$\frac{\lambda\hbar}{m^2}$ dimenziótlan

$\frac{\text{második}}{\text{első}} \sim \frac{\lambda\hbar}{m^2}$ gyenge csatolás $\frac{\lambda\hbar}{m^2} \ll 1$ $M \gg m\sqrt{2}\,\hbar$

3. ea 7/11

A nullamódus $\leftrightarrow$ transzlációs módus

$\omega_0^2=0 \qquad \eta_0(x)=\dfrac{1}{ch^2\left(\frac{mx}{\sqrt{2}}\right)}$ $\qquad \forall$ tr. inv. elméletben fellép ha helyfüggő

megoldás körül kvantálunk

kink modellben $\phi_1(x)$ konfig $\quad V[\phi_1(x)]=V[\phi_1(x-a)] \quad \forall\, a$-ra $\longrightarrow$ ekvipotenciális

$\{\phi\}$-k terében 1 pont $\quad \phi_1(x-a) \rightarrow$ 1 paraméteres görbe

Spec. vannak triviális görbék $\phi_1(x)\equiv\phi_0 \rightarrow$ eltoltja önmaga

$\phi_k(x)=\frac{m}{\sqrt{\lambda}}\,th\left(\frac{mx}{\sqrt{2}}\right) \qquad \phi_k(x-a)=\frac{m}{\sqrt{\lambda}}\,th\left(\frac{m(x-a)}{\sqrt{2}}\right) \qquad \boxed{V[\phi_k(x-a)]=\frac{2\sqrt{2}\,m^3}{3\lambda}}$

1 pont $\phi_v\equiv\frac{m}{\sqrt{\lambda}} \qquad V[\phi_v]=0$

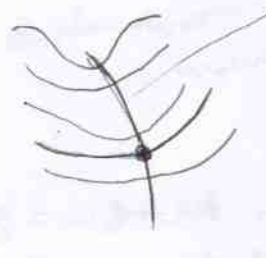
görbe mentén $\left.\dfrac{\delta^n V}{\delta\phi^n}\right|_{\text{görbe}}=0$

$$\Delta\phi_k=\phi_k(x-\varepsilon)-\phi_k(x)=-\varepsilon\frac{\partial\phi_k}{\partial x}=-\frac{m^2}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda}}\,\varepsilon\,\frac{1}{ch^2\left(\frac{mx}{\sqrt{2}}\right)}=-\varepsilon\,\eta_0(x)$$

infinitezimális

0 módus hatása v. kezelése $\qquad$ kink modell: 1db 0 módus

$V(\phi)$



$\rightarrow$ V ebben az irányban „nem húz vissza" $\rightarrow$ szabad terjedés van

$\rightarrow$ szabad részecskeként kvantáljuk

$V(x)\equiv V_0 \qquad \forall\, x=x_0$ klassz. megoldás

hullám fv. $e^{ikx} \qquad p=\hbar k$

$E=V_0+\frac{1}{2M}(\hbar k)^2$

klassz. potenciál $\qquad \rightarrow$ kv. mozg. energiát

Kink modellben relativisztikus $\quad E=\sqrt{p^2+M^2} \approx M+\frac{p^2}{2M}+\dots \qquad \lambda\to 0 \quad M\sim\frac{1}{\lambda}\to\infty$

$\frac{p^2}{2M}\sim\mathcal{O}(\lambda)$

Axiomatikus megfogalmazás és a kl. kink megoldás pontos szerepe

(Goldstone + Jackiw) $\qquad$ csak 1+1 dim kink modellre $\hbar=1$

(I) Állapottér (Hilbert tér)

vákuum szektor $\qquad$ kink szektor

$|0\rangle$ vákuum, $|k_1,\dots k_n\rangle$ n mezon állapotok $\qquad$ energia-impulzus sajátállapotok kink szektor energia-imp sajátállapotai

SZOLITONOK

Ⓐ $|p\rangle$ p impulzusú $E=\sqrt{p^2+M^2}$ kink

Ⓑ $|p^*\rangle$ p impulzusú $E=\sqrt{p^2+M_*^2}$ gerjesztett kink

Ⓒ $|p,k_1,\dots,k_n\rangle$

Ⓓ $|p^*,k_1,\dots,k_m\rangle$

(II) kink szektor ortogonális vákuumszektorra

(III) kv. kink tömege $\lambda\to 0$ $\sim\frac{1}{\lambda}$

(IV) $\hat{\Phi}(x,t)$ kink szektorbeli mátrixelemei $\lambda\to 0$ limeszben

$$\langle p'|\hat{\Phi}|p\rangle \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \qquad \langle p'|\hat{\Phi}|p^*\rangle \sim \mathcal{O}(1) \qquad \langle p'|\hat{\Phi}|p,k\rangle \sim \mathcal{O}(1)$$

$$\langle p,k_1,\dots k_s|\hat{\Phi}|p,k_1,\dots,k_n\rangle \sim \mathcal{O}\left(\lambda^{(s+n-1)/2}\right)$$

---

gerjesztett kink ↔ $\omega^2=\frac{3}{2}m^2$ diszkrét pont

$\omega_0=0$ módushoz NEM rendeltünk állapotot ↔ de kink + gerjesztett kink -mozoghat!

II: topológiai kiválasztási szabályok kvantumos általánosítása.

klasszikusan $E<\infty$ konf. tere 2 diszjunkt osztály $\quad \phi(+\infty,t)=\pm\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$

időfejlődés nem viszi át $\quad \phi(-\infty,t)=\pm\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$

kv.-osan is működik minden

$$\hat{Q}=\int \hat{j}_0\,dx=\frac{\sqrt{\lambda}}{2m}\left[\hat{\phi}(\infty,t)-\hat{\phi}(-\infty,t)\right] \qquad \hat{j}_\mu=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\varepsilon_{\mu\nu}\partial^\nu\hat{\phi} \qquad \partial_\mu\hat{j}^\mu=0$$

ϕ valós $\hat{\phi}$ hermitikus $\hat{Q}$ is

$$\hat{Q}|vac\rangle=0 \qquad \hat{Q}|kink\rangle=|kink\rangle$$

motiváció: $\Psi[\phi(x)]$ hullámfv. $\xrightarrow{\text{QFT-ben}}$ hullámfunkcionál

vákuum szektor $\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$ körül kvantálunk $\quad \langle vac|\hat{\phi}|vac\rangle=\frac{m}{\sqrt{\lambda}}+\dots$

olyan $\Psi[\phi]$ csak az olyan ϕ-ken $\neq 0$ $\quad \phi(-\infty)=\phi(+\infty)=\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$

$$\langle\Psi|\hat{Q}|\Psi\rangle=0$$

kink szektor $\phi_k(x)$ körül kv. $\quad \Psi[\phi]$ csak olyan $\phi\neq 0$

$$\phi(-\infty)=-\frac{m}{\sqrt{\lambda}}=-\phi(+\infty)$$

$$\langle\Psi|\hat{Q}|\Psi\rangle=1$$

kink és vákuum szektor között szuperkiválasztás van (nincs olyan lokális $\hat{A}$ operátor, ami átvinné a két szektor között)

perturbáló potenciál $\lambda \int dx \left[\underset{\frac{m}{\sqrt{\lambda}}}{\phi_k} \tilde{\phi}^3 + \frac{\tilde{\phi}^4}{4} \right]$ mezon kisugárzási amplitúdó $\sim \sqrt{\lambda}$, $(\sqrt{\lambda})^2$

továbblépés $f_1(x)$, $f_2(x,k)$ $\quad f_2^*(x)$ van komplex konjugált

$$\langle p | \hat{\Phi}(x,0) | p' \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{2\pi} e^{i(p-p')a} f_1(x-a)$$

$$\langle p,k | \hat{\Phi}(x,0) | p' \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{2\pi} e^{i(p+k-p')a} f_2(x-a,k)$$

$$\langle p^* | \hat{\Phi}(x,0) | p' \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{2\pi} e^{i(p-p')a} f_2^*(x-a)$$

Heisenberg egyenlet $\hat{\Phi}(x,t)$-re $t=0$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2\right) \hat{\Phi}(x,t) = -\lambda \hat{\Phi}^3(x,t) \quad \rightarrow \quad \langle p | \quad | p' \rangle \Big|_{t=0}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle p | \hat{\Phi}(x,t) | p' \rangle \Big|_{t=0} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle p | e^{-iHt} \hat{\Phi}(x,0) e^{iHt} | p' \rangle \Big|_{t=0} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ e^{-iE_p t} e^{iE_{p'} t} \langle p | \hat{\Phi}(x,0) | p' \rangle \right\} \Big|_{t=0} =$$

$$= -\underbrace{(E_{p'} - E_p)^2}_{} \langle p | \hat{\Phi}(x,0) | p' \rangle$$

ez a domináns tag

$$\left(\frac{p^2 - (p')^2}{2M} + \dots \right)^2 \sim \lambda^2 \quad \mathcal{O}(\lambda^{1/2})$$

$\lambda \to 0$

$\mathcal{O}(\lambda^{-1/2})$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{2\pi} e^{i(p-p')x} \left(-\frac{d^2}{dx^2} - m^2 \right) f_1(x-a)$$

$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$ csak akkor ha $|n\rangle \to |\tilde{p}\rangle$, $|n'\rangle \to |\tilde{\tilde{p}}\rangle$

$$-\lambda \langle p | \hat{\Phi}(x,0)^3 | p' \rangle = -\lambda \sum_{n,n'} \langle p | \hat{\Phi}(x,0) | n \rangle \langle n | \hat{\Phi}(x,0) | n' \rangle \langle n' | \hat{\Phi}(x,0) | p' \rangle =$$

$$= -\lambda \sum_{p_1 p_2} \langle p | \hat{\Phi}(x,0) | p_1 \rangle \langle p_1 | \hat{\Phi}(x,0) | p_2 \rangle \langle p_2 | \hat{\Phi}(x,0) | p' \rangle = -\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{2\pi} e^{i(p-p')a} f_1^3(x-a)$$

$\int dp_1 dp_2$

$\forall a$-ra csak úgy $\boxed{\left(\frac{d^2}{dx^2} + m^2 \right) f_1(x-a) - \lambda f_1^3(x-a) = 0}$ ① Sztatikus klasszikus mozgás egyenlet

SZOLITONOK

② kink szektorbeli premfeltételekkel $f_1(x-a) = \phi_k(x-a) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}\, th\left(\frac{m(x-a)}{\sqrt{2}}\right)$

$$\langle p|\hat{\phi}(x,0)|p'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{2\pi}\, e^{i(p-p')a}\, \phi_k(x-a) + \mathcal{O}(\text{magasabb rendek})$$

$\phi_k(x)$ klasszikus kink megoldás

Ⅰ kl. megoldás pontos szerepe

Ⅱ integrálás az megoldásokra: a kl kink „szétfolyt" a transzláció mentén

Ⅲ $\phi_k \sim \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ IV. konzisztens

Ⅳ $\phi_k(x) = \int dQ\, e^{iQx} \langle p+Q|\hat{\phi}(0,0)|p\rangle + \text{korr.}$

fizikailag érdekes mennyiségek v.é. formfaktora

$\mathcal{O}(x,t)$ operátor $\mathcal{O}_k(x)$ kink megoldásból felépül

$$\langle p|\hat{\mathcal{O}}(x,0)|p'\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{da}{2\pi}\, e^{i(p-p')a}\, \mathcal{O}_k(x-a) + \text{korr.} \longleftarrow \text{invertálni lehet}$$

energiasűrűség ⟷ a kink kiterjedt részecske

$$\mathcal{E}(x) = \int dQ\, e^{iQx} \langle p+Q|\hat{\mathcal{H}}(0,0)|p\rangle + \text{korr.}$$

$\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_{kl}(x) + \ldots$

$$\hat{\mathcal{H}}(x,t) = \underbrace{\tfrac{1}{2}\hat{\pi}^2}_{\text{mozg. energia}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}\right)^2 + \frac{\lambda}{4}\left(\hat{\phi}^2 - \frac{m^2}{\lambda}\right)^2}_{\text{nem kinetikus tagok}}$$

teljes rendszert beszúrunk
vezető rendben csak az 1 kink közbülső állapotot

$$\langle p+Q|\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}\right)^2 + \frac{\lambda}{4}\left(\hat{\phi}^2 - \frac{m^2}{\lambda}\right)^2\Big|_{x=0=t}|p\rangle =$$

ezekre az eddigi eredményt

$$= \int \frac{da}{2\pi} e^{iQa}\left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_k}{\partial x}\right)^2\Big|_{x=-a} + \tfrac{1}{4}\left(\phi_k^2(-a) - \frac{m^2}{\lambda}\right)^2\right] + \text{korr} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{2\pi}\, e^{iQa}\, \mathcal{E}_{kl}(-a) + \text{korr.}$$

$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$

kinetikus tag $\quad \frac{1}{2}\sum_{p_1} \langle p+Q|\frac{\partial\phi}{\partial t}|p_1\rangle\langle p_1|\frac{\partial\phi}{\partial t}|p\rangle\Big|_{t=0,\,x=0} = \frac{1}{2}\sum_{p_1} \underbrace{i(E_{p+Q}-E_{p_1})}_{\mathcal{O}(\lambda)}\, \underbrace{i(E_{p_1}-E_p)}_{\mathcal{O}(\lambda)} \cdot$

$$\cdot\, \underbrace{\langle p+Q|\hat{\phi}(0,0)|p_1\rangle}_{\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)}\, \underbrace{\langle p_1|\hat{\phi}(0,0)|p\rangle}_{\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)}$$

$\mathcal{O}(\lambda)$ elhanyagolható