$\sigma = \frac{ne^2}{m}\tau$ vezetőképesség fémben

$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_{elasztikus}} + \frac{1}{\tau_{inelast}}$

$\frac{1}{\tau_{inelast}} = \frac{2\pi}{\hbar}\sum |\langle 1|1|2\rangle|^2 \delta(\,)$

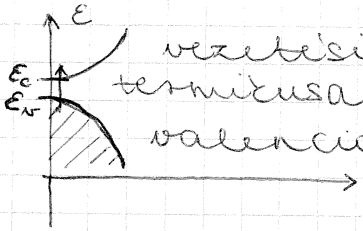
$\frac{1}{\tau_{inelast}} \propto T^{\alpha} \qquad \alpha \approx 1$

szigetelő $\varrho(T) \approx$ konstans

ha az ellenállás valamilyen exponenciális hőmérsékletfüggést mutat, akkor hívjuk félvezetőnek

$\varrho(T) \sim e^{-\frac{\varepsilon_g}{2k_B T}}$

(régi definíció a szobahőmérsékleti ellenállás értéke alapján volt)



(feltesszük, hogy 1 van)

töltéshordozók mozgékonysága:

$\vec{j} = -en\vec{v}_d = -en\mu\vec{E}$

szilícium, germánium félvezető, (szén)

$3s^2 3p^2$ $\quad 4s^2 4p^2$ $\quad 2s^2 2p^2$ ↳ gömbszimm. pot

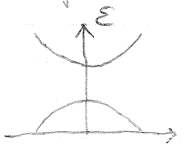
$\varepsilon_g = 1{,}12$ eV $\quad \varepsilon_g = 0{,}67$ eV

nem lehet Si, Ge { tetragonális szerk. grafén az élet alapja

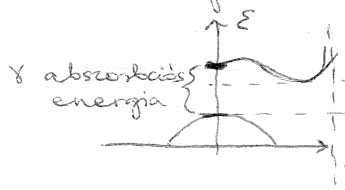
⇓

nincs szilícium alapú élet

direkt félvezető



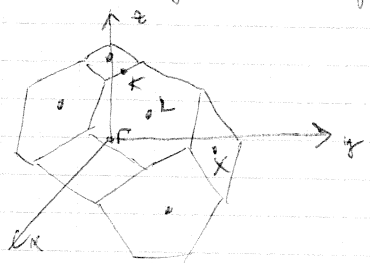
indirekt félvezető



ezzel foglalkozunk

elemi cella valós térben lapcentrált köbös
reciprokrács csonkolt oktaéder (gyémánt reciprok)

8 hatszög, 6 négyzet határolja



$\Gamma = (0,0,0)\frac{2\pi}{a}$

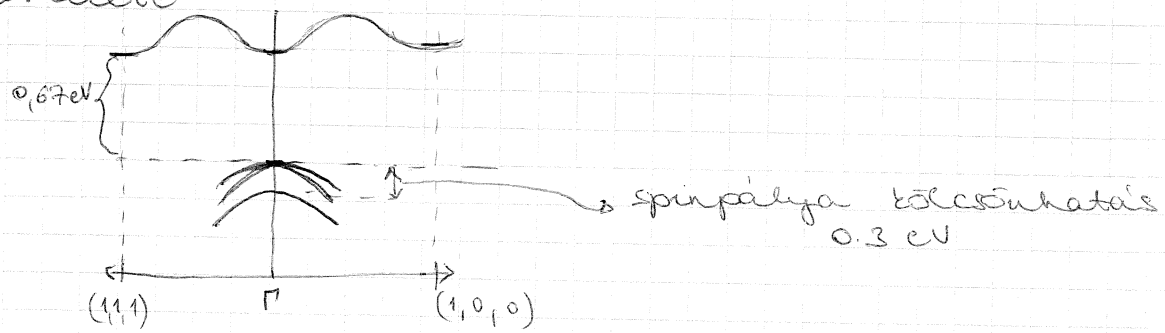
$X = (0,0,1)\frac{2\pi}{a}$ → X négyzet közepe

$L = (1,1,1)\frac{2\pi}{a}$ → hatszög közepe

$K = (3/4, 3/4, 0)\frac{2\pi}{a}$ → □ élközepe

ezek adják a kristálytani főirányokat

Ge sávszerkezete



ellenergetikus felületek ellipszoidok (4 db)
↓
alacsony energiára
abszolút forgás-
szimmetrikus

Ge vezetési sáv $\frac{m_\parallel}{m} = 1,6$

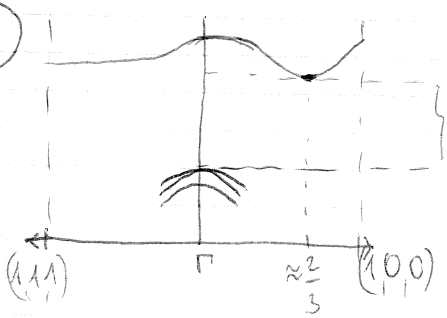
$\frac{m_\perp}{m} = 0,082$

valencia sáv $\frac{m_{h1}}{m} = 0,28$ nehéz lyuk tömeg

$\frac{m_{h2}}{m} = 0,044$ könnyű -"-

a négyzetes diszperzió erős közelítés pl a degenerált pontban nem használható

Si



6 ekvivalens forgási ellipszoid

vezetési sáv $\frac{m_\parallel}{m} = 0,916$

$\frac{m_\perp}{m} = 0,191$

valenciasáv $\frac{m_{h1}}{m} = 0,54$ $\frac{m_{h2}}{m} = 0,15$

$$n_c(T) = \int_{\varepsilon_c}^{\infty} d\varepsilon\, g_c(\varepsilon) \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{k_B T}} + 1}$$ töltések

$$p_v(T) = \int_{-\infty}^{\varepsilon_v} d\varepsilon\, g_v(\varepsilon) \left(1 - \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{k_B T}} + 1}\right)$$ lyukak

$\varepsilon_c - \mu$, $\mu - \varepsilon_v \gg k_B T$ $\Rightarrow$ Boltzmann-statisztikát lehet csinálni

$n_c(T) = p_v(T)$

$$n_c(T) = \int_{\varepsilon_c}^{\infty} d\varepsilon\, g_c(\varepsilon)\, e^{\frac{\mu-\varepsilon}{k_B T}} = e^{\frac{\mu-\varepsilon_c}{k_B T}} \int_{\varepsilon_c}^{\infty} d\varepsilon\, g_c(\varepsilon)\, e^{\frac{\varepsilon_c-\varepsilon}{k_B T}} =$$

$$= e^{\frac{\mu-\varepsilon_c}{k_B T}} N_c(T)$$

$g_c(\varepsilon) \sim \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_c}$

$N_c(T) \sim T^{3/2}$

$$p_v(T) = P_v(T)\, e^{\frac{\varepsilon_v-\mu}{k_B T}}$$

$$p_v(T) = n_c(T) = n_i(T) = \sqrt{n_c(T)\, p_v(T)} =$$

(n_i: intrinsic)

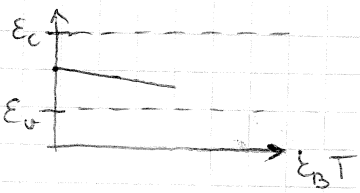
$$= \sqrt{N_c(T) P_v(T)}\, e^{-\frac{\varepsilon_g}{2k_B T}}$$

$$\mu = \frac{\varepsilon_c + \varepsilon_v}{2} + \frac{k_B T}{2} \ln \frac{P_v(T)}{N_c(T)}$$ a kémiai potenciál

a sávok között van $T = 0$-nál pont középen

$$\approx \frac{\varepsilon_c + \varepsilon_v}{2} + \frac{3}{4} k_B T \ln \frac{m_v}{m_c}$$ a tömegektől függ

melyik irányba mennyi nem 0 kám-en



<u>adalékolt félvezetők:</u>

ugyanabba a kristályba beraknak egy szomszéd oszlopból egy atomot

V. főcsoportból $\Rightarrow$ +1 elektron $\rightarrow$ hidrogén-szerű kötött állapot, de a Bohr-sugár sokkal nagyobb, mint az atomi távolság $\Rightarrow$ nem Coulomb-ék.

$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ helyett $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{1}{\epsilon}$ és m helyett m^*

$$E_0 = \frac{m^* e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 \varepsilon_r^2} \frac{1}{2\hbar^2} = 13{,}6\ \text{eV} \cdot \frac{m^*}{m} \frac{1}{\varepsilon_r^2}$$

↑ kötési energia ↑ kicsi

$\varepsilon_r \approx 10 - 30 - 50$

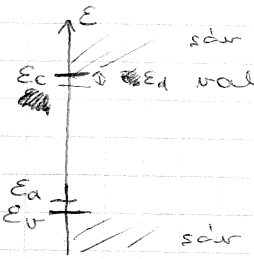
$10^{-2} - 10^{-3}$

Bohr - sugara: $r_0 = a_0 \varepsilon_r \frac{m}{m^*}$ 10 - 20 rácsállandó

többi atomot, mint hátteret vehetjük figyelembe

Si $E_d \sim 20$ meV

Ge $E_d \sim 55$ meV



aljától mért energia

donorállapot $\Rightarrow \varepsilon_d$

ha III. főcsoporttól adunk hozzá, akkor lesz egy hiány $\Rightarrow$ lyuk

$\Rightarrow$ inverz H atom, akceptorenergia valenciasáv teteje fölött

azok a donorállapotok számítanak, amik felgerjeszthetnek a sávba, mert a donorállapotok nem alkotnak sávot

$\left.\begin{matrix}\varepsilon_c - \varepsilon_d \\ \varepsilon_a - \varepsilon_v\end{matrix}\right| \approx 10$ meV $\Rightarrow$ szobahőmérsékleten is jelentős

$\varepsilon_c - \varepsilon_v \approx 1$ eV

töltéshordozók sűrűsége:

$$\langle n_d \rangle = \frac{\sum_j N_j e^{-\frac{E_j - \mu N_j}{k_B T}}}{\sum_j e^{-\frac{E_j - \mu N_j}{k_B T}}}$$

betöltöttség $\langle n_d \rangle = \frac{2 e^{-\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_d - \mu}{k_B T}}}{e^{-\frac{\varepsilon_0}{k_B T}} + 2 e^{-\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_d - \mu}{k_B T}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} e^{\frac{\varepsilon_d - \mu}{k_B T}}}$

$$n_d = \frac{N_d}{1 + \frac{1}{2} e^{\frac{\varepsilon_d - \mu}{k_B T}}}$$

üres nívók eloszlása: $1 - n_d = \frac{N_d}{1 + 2e^{\frac{\mu - \varepsilon_d}{k_B T}}}$

ugyanez elmondható az akceptor nívókra, de lehet 1 lyuk 2 lyuk, de 0 nem lehet

$n_a - 1 = \frac{N_a}{1 + 2e^{\frac{\varepsilon_a - \mu}{k_B T}}}$ ionizált akceptornívók

$n_c + n_d = N_d - N_a + p_v + p_a$ ← acceptor lyuk

⇑ ↑ valencia lyuk

negatív töltések = pozitív töltések

$N_c e^{-\frac{\varepsilon_c - \mu}{k_B T}} + N_d \frac{1}{1 + 2e^{\frac{\varepsilon_d - \mu}{k_B T}}} = N_d - N_a + \dots$

$n_c(T) = N_c e^{-\frac{\varepsilon_c - \mu}{k_B T}} = N_c e^{-\frac{\varepsilon_c - \mu_i}{k_B T}} e^{\frac{\mu - \mu_i}{k_B T}} = n_i(T) e^{\frac{\mu - \mu_i}{k_B T}}$

$p_v(T) = n_i(T) e^{\frac{\mu_i - \mu}{k_B T}}$

↑ adalékolás nélküli

$n_c p_v = n_i^2$

tfh. csak donornívók vannak (μ -t azanyuk)

$n_c = p_v + n_d^+$

↑ ↑ ionizált donornívók száma

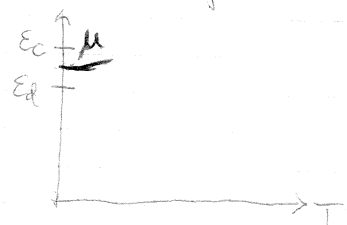
alacsony hőmérsékleten elhagyható

$N_c(T) e^{-\frac{\varepsilon_c - \mu}{k_B T}} = N_d \frac{1}{1 + 2e^{\frac{\mu - \varepsilon_d}{k_B T}}}$

Ezt már meg lehet oldani μ -re

$\mu = k_B T \ln\left(\frac{1}{4} e^{\frac{\varepsilon_d}{k_B T}} \left[\sqrt{1 + \frac{8 N_d}{N_c(T)} e^{\frac{\varepsilon_c - \varepsilon_d}{k_B T}}} - 1\right]\right)$

alacsony hőm-en $\mu \xrightarrow[\varepsilon_c - \varepsilon_d \gg T k_B]{} \frac{\varepsilon_c + \varepsilon_d}{2} + k_B T \ln \frac{N_d}{2 N_c(T)}$



$\mu \xrightarrow[\varepsilon_c - \varepsilon_d \ll k_B T]{} \varepsilon_c + k_B T \ln \frac{N_d}{N_c(T)}$?

sávban lévő
vezetési elektronok száma:

$$n_c(T) = N_c(T) e^{\frac{\varepsilon_c - \mu}{k_B T}} = \sqrt{\frac{N_c(T) N_d}{2}} e^{-\frac{\varepsilon_c - \varepsilon_d}{k_B T}} \quad \text{ha } \varepsilon_c - \varepsilon_d \gg k_B T$$

$$n_c = N_c(T) e^{\ln \frac{N_d}{N_c(T)}} = N_d \quad \text{ha } \varepsilon_c - \varepsilon_d \ll k_B T$$

↑ összes donornívó ionizálódik

⇒ kimerülési tartomány

tiszta félvezetőre $n_c = p_v$

adalékolt félvezető $n_c - p_v = \Delta n$

$$n_c \cdot p_v = n_i^2 \qquad n_i(T) = \sqrt{N_c(T) P_v(t)}\, e^{-\frac{\varepsilon_g}{2 k_B T}}$$

$$n_c = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(\Delta n)^2 + 4 n_i^2} + \Delta n\right)$$

$$p_v = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(\Delta n)^2 + 4 n_i^2} - \Delta n\right)$$

n_i kicsi ⇒ általában $|\Delta n| \gg n_i$

ha $\Delta n > 0$ $\quad n_c \approx \Delta n + \frac{n_i^2}{\Delta n}$ ⇒ többségi töltés-hordozók

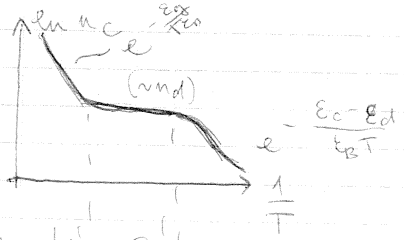
$p_v \approx \frac{n_i^2}{\Delta n}$ ⇒ kisebbségi -"-

mindig jelentkeznek (adalékolástól függetlenül) kisebbségi töltéshordozók!

ha $\Delta n > 0$ n típusú } félvezetők

ha $\Delta n < 0$ p típusú }

töltéshordozók számát tekintve összefoglalás:

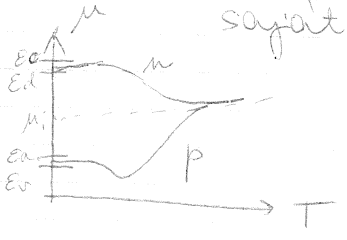


n típusú

telítési tartomány ⇒ itt alkalmazzuk működni

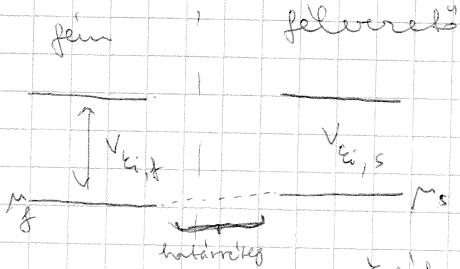
kimerülési tartomány

saját vezetés



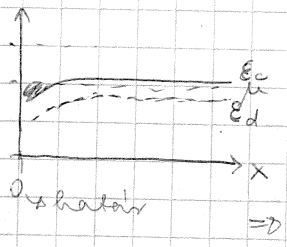
donor v. akceptornívó koncentrációk $10^{12} - 10^{14}$ / cm³

fém - félvezető érintkezés



a két kémiai potenciálnak ki kell egyenlítődni ⇒ elektronok átvándorolnak ⇒ a határrétegben (makroszkopikus) feltölt egy ΔV potenciál, ami kiegyenlíti

$|\Delta V| = |\mu_s - \mu_f|$



⇒ felületen a vezetési sáv alja a kémiai potenciál alá kerül ⇒ makroszkopikusan betöltött vált ⇒ kvázi 2D elektrongáz

---

a kváziklasszikus közelítés volt ⇒ félvezetőre működik legjobban

Boltzmann - egyenlet:

kvázirklasszikus közelítés → hullámcsomagok ⇒ $\underline{r}, \underline{\xi}$ paraméterek eltérve

$\underline{r}, \underline{\xi}$ pont körül hány részecske van? (elektronállapot)

$$dN(\underline{\xi}, \underline{r}, t) = \boxed{f(\underline{\xi}, \underline{r}, t)} \frac{d\underline{\xi}\, d\underline{r}}{(2\pi)^3}$$

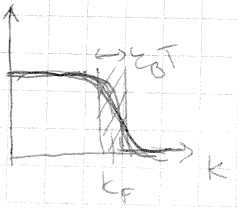
eloszlásfüggvény

$f(\underline{\xi}, \underline{r}, t)$ elektronokra $f_0(\underline{\xi}) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_\xi - \mu}{k_B T}} + 1}$ (Fermi)

stacionárius $\mu = \mu(\underline{r})$

$T = T(\underline{r})$

lassú változás



$$f_0(\underline{r}, \underline{k}) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_k - \mu(\underline{r})}{k_B T(\underline{r})}} + 1}$$

időben lassan változó teret is bekapcsolunk

$f(\underline{k}, \underline{r}, t)$ nem lehet sorfejteni a ε_F-nél az ugrás miatt

$$f(\underline{k} + d\underline{k}, \underline{r} + d\underline{r}, t + dt) = f(\underline{k}, \underline{r}, t) + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial \underline{r}} \dot{\underline{r}}\, dt + \frac{\partial f}{\partial \underline{k}} \dot{\underline{k}}\, dt$$

$$\dot{\underline{r}} = \underline{v}_k = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \underline{k}}$$

$$\dot{\underline{k}} = \frac{1}{\hbar}(-e)(\underline{E} + \underline{v}_k \times \underline{B})$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{coll} \rightarrow \text{ütközési tag} \rightarrow \text{részecskeszám változik}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{in} - \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{out}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\underline{r}} \frac{\partial f}{\partial \underline{r}} + \dot{\underline{k}} \frac{\partial f}{\partial \underline{k}} = \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{coll}$$ fáristérfogat megmarad

$$\underline{v}_k \frac{\partial f}{\partial \underline{r}} + \left(\frac{-e}{\hbar}(\underline{E} + \underline{v}_k \times \underline{B})\right) \frac{\partial f}{\partial \underline{k}} + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{coll}$$

$f = f_0 + f_1$ (nem sorfejtés)

külső terekben csak első rendig nézzük

stacionáriusban esetben $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ $\rightarrow$ tfh. $\exists$ ilyen

$$\frac{\partial f_0}{\partial \underline{r}} = \frac{\partial f_0}{\partial\left(\frac{\varepsilon_k - \mu(\underline{r})}{k_B T(\underline{r})}\right)} \frac{\partial\left(\frac{\varepsilon_k - \mu(\underline{r})}{k_B T(\underline{r})}\right)}{\partial \underline{r}} = \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_k} k_B T(\underline{r}) \left(-\frac{1}{k_B T(\underline{r})} \frac{\partial \mu(\underline{r})}{\partial \underline{r}} - \frac{\varepsilon_k - \mu(\underline{r})}{(k_B T(\underline{r}))^2} \frac{\partial T(\underline{r})}{\partial \underline{r}}\right)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial \underline{k}} = \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_k} \cdot \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \underline{k}} = \hbar\, \underline{v}_k \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_k}$$

$$-\left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_k}\right) \underline{v}_k \left(-e\left(\underline{E} + \frac{\nabla \mu(\underline{r})}{e}\right) - \frac{\varepsilon_k - \mu(\underline{r})}{k_B T(\underline{r})} \nabla T(\underline{r})\right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{coll} - \underline{v}_k \frac{\partial f_1}{\partial \underline{r}} + \frac{e}{\hbar}(\underline{E} + \underline{v}_k \times \underline{B}) \frac{\partial f_1}{\partial \underline{k}}$$

csak ε_F-nél $\neq 0$; térihangolás esetén ≈ 0 ; m.o. ; másodrendű

Fermi - rendszerre a Boltzmann - egyenlet arra alkalmazható, mert az eloszlásfv. deriváltja éles Dirac - delta szerű függvény alacsony hőmérsékleten Bose - rendszerre is fel szokták írni, de arra ez nem igaz

$\underline{k}$ állapot → kiszóródik $W_{\underline{k}\underline{k}'} f(\underline{k})(1-f(\underline{k}'))$

→ beszóródik $W_{\underline{k}'\underline{k}} f(\underline{k}')(1-f(\underline{k}))$

ütközési amplitudó → feltesszük, hogy csak $\underline{k}$ és $\underline{k}'$ - től függ



$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{coll} = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{in} - \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{out}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{in} = (1-f(\underline{k})) \int \frac{d\underline{k}'}{(2\pi)^3} W_{\underline{k}\underline{k}'} f(\underline{k}')$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{out} = f(\underline{k}) \int \frac{d\underline{k}'}{(2\pi)^3} W_{\underline{k}\underline{k}'} (1-f(\underline{k}'))$$

Ezek az integrodifferenciálegyenlet

$f = f_0$ egyensúlyban

$$W_{\underline{k}\underline{k}'} e^{-\frac{\varepsilon_{\underline{k}}}{k_B T}} = W_{\underline{k}'\underline{k}} e^{-\frac{\varepsilon_{\underline{k}'}}{k_B T}}$$ mérlegegyenlet

$$f_0(\underline{k})(1-f_0(\underline{k})) = -k_B T \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_{\underline{k}}}$$

ha W - t tudjuk elvileg megoldható, de bonyolult ⇒ további feltételezések tesszük

$f(\underline{k}) - f(\varepsilon_{\underline{k}})$ feltevés, hogy csak $\varepsilon_{\underline{k}}$ - n keresztül függ a $\underline{k}$ - tól

(kvázi izotróp Fermi - felület esetén jó)

legegyszerűbb eset → elasztikus ütközések

ekkor csak: $W_{\underline{k}\underline{k}'} = W_{\underline{k}'\underline{k}}$ $\varepsilon_{\underline{k}} = \varepsilon_{\underline{k}'}$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{coll} = \int \frac{d\underline{k}'}{(2\pi)} W_{\underline{k}\underline{k}'} \left\{ (1-f(\underline{k}))(f(\underline{k}')) - f(\underline{k})(1-f(\underline{k}')) \right\}$$

$$f(\underline{k}) = f_0(\underline{k}) + f_1(\underline{k})$$

$f_1(\underline{\xi})$-re feltesszük, hogy $= -\tau_{BT} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_\xi} \mathcal{K}(\underline{\xi})$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{coll} = -\int \frac{d\underline{\xi}'}{(2\pi)^3} \left(-\tau_{BT} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_\xi}\right) W_{\xi\xi'} \left(1 - \mathcal{K}(\underline{\xi}')/\mathcal{K}(\underline{\xi})\right) \mathcal{K}(\underline{\xi}) =$$

$$= -\left(f(\underline{\xi}) - f_0(\underline{\xi})\right) \int \frac{d\underline{\xi}'}{(2\pi)^3} W_{\xi\xi'} \left(1 - \frac{\mathcal{K}(\underline{\xi}')}{\mathcal{K}(\underline{\xi})}\right)$$

ha egy külső $\underline{E}$ tér van, akkor $\mathcal{K}(\underline{\xi})$ fv.-t olyan alakban keressük, hogy $\mathcal{K}(\underline{\xi}) = a(\xi)\, \underline{\xi}\underline{E}$

$|\underline{\xi}| \approx |\underline{\xi}'|$

$$\frac{\mathcal{K}(\underline{\xi}')}{\mathcal{K}(\underline{\xi})} \approx \cos\Theta_{\xi\xi'}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{coll} = -\left(f(\underline{\xi}) - f_0(\underline{\xi})\right) \int \frac{d\underline{\xi}'}{(2\pi)} W_{\xi\xi'} \left(1 - \cos\Theta_{\xi\xi'}\right) = -\frac{f(\underline{\xi}) - f_0(\underline{\xi})}{\tau_{tr}(\underline{\xi})}$$

$$\frac{1}{\tau_\xi} = \int \frac{d\underline{\xi}'}{(2\pi)^3} W_{\xi\xi'}$$

ξ állapot élettartama — csak a nagyszögű szórásokat számítanak

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{coll} \cong -\frac{f(\underline{\xi}) - f_0(\underline{\xi})}{\tau_{tr}}$$ ← transport relaxációs idő definíciója

tovább közelítjük $\approx -\dfrac{f(\varepsilon_\xi) - f_0(\varepsilon_\xi)}{\tau_{tr}(\varepsilon_\xi)}$

$$-\left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_\xi}\right) \underline{v}_\xi \left(-e\left(\underline{E} + \frac{\nabla \mu}{e}\right) - \frac{\varepsilon_\xi - \mu}{T} \frac{\nabla T}{T}\right) = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{coll} \approx -\frac{f(\varepsilon_\xi) - f_0(\varepsilon_\xi)}{\tau(\varepsilon_\xi)}$$

$$\boxed{f(\varepsilon_\xi) = f_0(\varepsilon_\xi) + \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_\xi}\right) \tau(\varepsilon_\xi)\, \underline{v}_\xi \left(-e\left(\underline{E} + \frac{\nabla \mu}{e}\right) - \frac{\varepsilon_\xi - \mu}{T} \nabla T\right)}$$

ez itt a megoldás ebben a közelítésben

most alkalmazzuk ⇒

elektromos áram:

$$\underline{j} = -e \frac{1}{V} \sum_{\xi,\sigma} \underline{v}_\xi \left(f(\underline{\xi}) - f_0(\varepsilon_\xi)\right)$$ csak $\underline{E}$ van

$$= -e2 \int \frac{d\underline{p}}{(2\pi)^3} \underline{v}_\xi \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_\xi}\right) \tau(\varepsilon_\xi) \left(\underline{E}\, \underline{v}_\xi\right)(-e)$$

↑ spin

$\underline{\underline{j}} = \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{E}$

↑ vezetési tenzor $\underline{\underline{\sigma}} = e^2 \int \frac{d\underline{\xi}}{4\pi^3} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_\xi}\right) \tau(\varepsilon_\xi) (\underline{v}_\xi \circ \underline{v}_\xi)$

köbös kristály esetén

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma \delta_{\alpha\beta}$$

$$\underline{v}_\xi \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_\xi}\right) = -\frac{1}{\hbar} \frac{\partial f_0}{\partial \underline{\xi}}$$

$$\sigma = e^2 \tau(\varepsilon_F) \int \frac{d\underline{\xi}}{4\pi^3} \underline{v}_\xi \left(-\frac{1}{\hbar} \frac{\partial f_0}{\partial \underline{\xi}}\right) = e^2 \tau(\varepsilon_F) \int \frac{d\underline{\xi}}{4\pi^3} \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon_\xi}{\partial \underline{\xi}} f_0(\varepsilon_\xi)$$

↑ Fermi-felületen transport relaxációs idő

$$\frac{1}{\hbar} \frac{\partial v_\xi}{\partial \underline{\xi}} = \left(\frac{1}{m^*}\right) = e^2 \tau(\varepsilon_F) \int \frac{d\underline{\xi}}{4\pi^3} \frac{1}{m^*(\xi)} f_0(\varepsilon_\xi)$$

= effektív tömegtenzor

$$\sigma = e^2 \tau(\varepsilon_F) \frac{1}{m^*} n$$

↑ részecskehordozók sűrűsége

pont ez volt a Drude modell eredménye

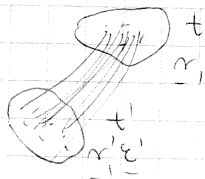
csak τ és m^* máshonnan jön.

↓ nem elektrontömeg, hanem sávtömeg

más a relaxációs idő definíciója, mint a fét ütközés közötti eltelt idő

mágneses tér a sebességben van benne

általánosítsuk ~~mágneses térre~~ a beszóródás és kiszóródás fogalmát



ha benne maradnak

$d\underline{r}\, d\underline{\xi} = d\underline{r}'\, d\underline{\xi}'$ ~~Liouville~~ Liouville-tétel

$$\frac{dt'}{\tau(\underline{\xi}(t'), \underline{r}(t'))} f_0\left(\underline{r}(t), \underline{\xi}(t')\right) \frac{dr'\, d\xi'}{(2\pi)^3}$$ beszóródó elektronok száma

annak a valószínűsége hogy t'-től t-ig nincs szórás

$$dN = \int_{-\infty}^{t} \frac{dt'}{\tau(\underline{r}(t'), \underline{\xi}(t'))} f_0\left(\underline{r}(t), \underline{\xi}(t')\right) \underbrace{P(\underline{r}, \underline{k}, t, t')}_{f(\underline{r}, \underline{\xi}, t)} \frac{d\underline{r}\, d\underline{\xi}}{(2\pi)^3}$$

$$dN = f(\underline{r}, \underline{\xi}, t) \frac{d\underline{r}\, d\underline{\xi}}{(2\pi)^3}$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{dt'}{\tau(t')} f_0(t') P(t,t')$$

$P(t,t) = 1$

$P(t,-\infty) = 0$ ⇐ termikus egyensúly

$P(t,t') = P(t, t'+dt')\left(1 - \frac{dt'}{\tau(t')}\right)$

$\frac{\partial P(t,t')}{\partial t'} = \frac{P(t,t')}{\tau(t')}$ $\quad P(t,t') = \exp\left\{-\int_{t'}^{t} \frac{dt''}{\tau(t'')}\right\}$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{dt'}{\tau(t')} f_0(t') P(t,t') = \int_{-\infty}^{t} dt' f_0(t') \frac{\partial P(t,t')}{\partial t'} =$$

$$= f_0(t) - \int_{-\infty}^{t} dt' P(t,t') \frac{d}{dt'} f_0(t')$$

$$\frac{df_0(t')}{dt'} = \frac{\partial f_0(t')}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t'} + \frac{\partial f_0(t')}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t'} + \frac{\partial f_0(t')}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t'} = \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t'}$$

↑ ebben van a mágneses tér Lorentz-erőn keresztül

$$\frac{\partial T}{\partial t'} = \frac{\partial T}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t'} = \frac{\partial \mu}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial t'}$$

$$f(t) = f_0(t) + \int_{-\infty}^{t} P(t,t') \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\right) \bar{v}_\varepsilon(t') \left[-e\left(\bar{E}(t') + \frac{\nabla \mu(t', \bar{r})}{e}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\varepsilon - \zeta}{T(\bar{r}, t')} \nabla T(t', \bar{r}) \right]$$

$\tau\left(\varepsilon(t), \bar{r}(t), \bar{\varepsilon}(t)\right) \approx \tau(\varepsilon)$ feltesszük $\Rightarrow P(t,t') = e^{-\frac{t-t'}{\tau(\varepsilon)}}$

ez a legegyszerűbb közelítés

stacionárius terek E, T, μ nem függ t'-től

$$\Rightarrow \left(\int_{-\infty}^{t} dt' P(t,t') \bar{v}_\varepsilon(t') \frac{1}{\tau(\varepsilon)} = \bar{w}_\varepsilon(t) \right)$$

ha $\bar{v}_\varepsilon(t) = \bar{v}_\varepsilon \Rightarrow \bar{w}_\varepsilon(t) = \bar{v}_\varepsilon$

mágneses tér hatása, hogy a sebesség nem konstans

relaxációs időt kell a hélix pálya periódusidejével összehasonlítani

SZILÁRDTESTFIZIKA 10.07.

Chambers megoldás → lényege, hogy figyelembe vesszük a történetet → beszóródás kiszóródás

$$\underline{v}_\varepsilon \longrightarrow \underline{w}_\varepsilon(t) = \frac{1}{\tau(\varepsilon_\varepsilon)} \int_{-\infty}^{t} dt' \, e^{-\frac{t-t'}{\tau(\varepsilon_\varepsilon)}} \underline{v}_\varepsilon(t)$$

$$f(t) = f_0 + \left(-\left\{\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_\varepsilon}\right\} \tau(\varepsilon_\varepsilon) \underline{w}_\varepsilon(t)\right)\left[-e\left(\underline{E} + \frac{\nabla_r}{e}\right) - \frac{\varepsilon_\varepsilon - \mu}{T} \nabla T\right]$$

$\underline{E} = \underline{E}(\omega) e^{-i\omega t}$ esetén vezetőképesség?

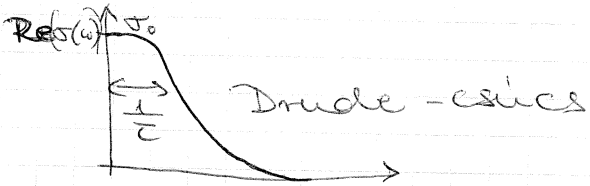
$$f(t) = f_0 + e \int_{-\infty}^{t} dt' \, e^{-\frac{t-t'}{\tau(\varepsilon_\varepsilon)}} e^{-i\omega t'} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_\varepsilon}\right)(-e) \underline{v}_\varepsilon \underline{E}(\omega) =$$

$$= f_0 - e^{-i\omega t} \frac{1}{\frac{1}{\tau(\varepsilon_\varepsilon)} - i\omega} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_\varepsilon}\right) e \underline{v}_\varepsilon \underline{E}(\omega)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = e \int \frac{d\underline{\varepsilon}_p}{(2\pi)^3} \oint 2 v_\alpha(\varepsilon) v_\beta(\varepsilon) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_\varepsilon}\right) \frac{1}{\frac{1}{\tau(\varepsilon_\varepsilon)} - i\omega}$$

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau(\varepsilon_\varepsilon)} \qquad \sigma_0 = \frac{4e^2}{m^*} \tau$$

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{\omega + \frac{i}{\tau}} \frac{i}{\tau} = \frac{ne^2}{m_{opt}} \frac{i}{\omega + \frac{i}{\tau}}$$



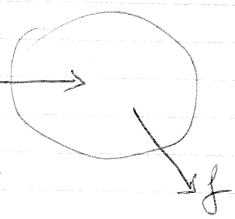
Drude-csúcs

minden fém alapvető jellemzője → optikailag megállapítható, hogy fém-e

pormintán is elvégezhető → nem kell kontaktus

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{coll} = -\frac{1}{\tau(\varepsilon_\varepsilon)}\left[f(\underline{r}, \underline{\varepsilon}, t) - f_0(\underline{r}, \underline{\varepsilon})\right]$$

↑ kiszóródás ↑ beszóródás



feltesszük, hogy a környezet egyensúlyban van

közelítés, hogy csak Markov-folyamatok vannak → kiszóródás után elfelejti a múltját → 3D-ben jó

⇓ → 2D a kritikus dimenzió (Pólya-féle tétel)

$$\sigma = \frac{ne^2}{m_{op}} \frac{i}{\omega + M(\omega)} \qquad \omega \to 0 \quad M(\omega \to 0) = \frac{i}{\tau}$$

$M(\omega)$ – ra lehet perturbációszámítást csinálni
$\rightarrow \frac{1}{\tau}$ lehet kis paraméter $\Rightarrow$ közvetlenül
a vezetőképességre nem lehet felírni perturbá-
ciószámítást $\rightarrow$ τ-val megy $\sigma_0 \sim \tau$
$M(\omega) \rightarrow$ memóriafüggvény

külső mágneses és elektromos tér esetén figye-
lembe kell venni az elhagyott másodrendű
tagot

gyenge, konstans mágneses és elektromos tér

$$e\underline{E}\underline{v}_k\left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_k}\right) = -\frac{f_1}{\tau} + \frac{e}{\hbar}(\underline{v}_k \times \underline{B})\frac{\partial f_1}{\partial \underline{k}}$$

$$f_1 = f - f_0 = -e\left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_k}\right)\tau\, \underline{v}_k \underline{A} \quad \bullet$$

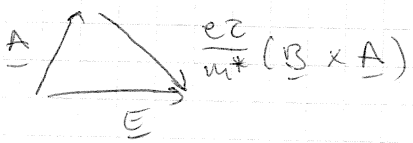
$$e\underline{E}\cdot\underline{v}_k\left(\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_k}\right) = -e\left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_k}\right)\underline{v}_k \underline{A} - \frac{e^2}{\hbar}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_k}\right)(\underline{v}_k \times \underline{B})\cdot$$
$$\cdot \tau \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \underline{k}}(\underline{v}_k \underline{A})$$

$$\underline{v}_k = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \underline{k}}$$

$$\underline{E}\,\underline{v}_k = \underline{v}_k \underline{A} - \frac{e\tau}{m^*}(\underline{v}_k \times \underline{B})\underline{A}$$

$$\underline{j} = \sigma_0 \underline{A}$$

$$\underline{E} = \underline{A} - \frac{e\tau}{m^*}(\underline{B} \times \underline{A})$$



$\parallel$ B $\parallel$ komponens: $E_\parallel = A_\parallel$

$$j_\parallel = \sigma_0 E_\parallel$$

$\perp$ B $\perp$ komponens:

$$\underline{A}_\perp = a\underline{E}_\perp + b(\underline{B} \times \underline{E}_\perp)$$

$$\underline{A}_\perp = \frac{\underline{E}_\perp + \frac{e\tau}{m^*}(\underline{B} \times \underline{E}_\perp)}{1 + \left(\frac{e\tau}{m^*}\right)^2 B^2}$$

teljesen izotróp eset

$$j_\perp = \sigma_0 A_\perp$$

$$\underline{E} = \frac{1}{\sigma_0}\underline{j} - \frac{e\tau}{m^*}\frac{1}{\sigma_0}(\underline{B} \times \underline{j})$$

ha $\underline{B} \perp \underline{j}$ $\quad E_{Hall} = -\frac{e\tau}{m^*} \rho_0 B j$

pl.: $B \parallel z \quad j \parallel x \Rightarrow E_{Hall} \parallel y$

$$R_H = \frac{E_y}{j_x B} = \frac{\rho_{yx}(B)}{B}$$

$$R_H = -\frac{e\tau}{m^*}\rho_0 = -\frac{1}{nee}$$

$\rho_{yx}(B) = \rho_{yx}(-B)$ alapján → mérésre

$R_H = \frac{1}{2B}\left(\rho_{yx}(B) - \rho_{yx}(-B)\right)$ alapján számolhatunk mágneses tér hogyan befolyásolja az ellenállást

külső $\underline{E}$ és $\underline{B}$ tér $\quad (\underline{E} \perp \underline{B})$

ciklotronfrekvencia $\quad \omega_c = \frac{eB}{m} \qquad \underline{B} \parallel z$

$v_z(t) = \text{konstans} = v_z$

$v_x(t) = v_\perp \cos(\omega_c t + \phi)$

$v_y(t) = v_\perp \sin(\omega_c t + \phi)$

$v_x(t=0) = v_\perp \cos\phi$

$v_y(t=0) = v_\perp \sin\phi$

$$\underline{v}_\varepsilon(t) = \left[v_x\cos(\omega_c t) - v_y \sin(\omega_c t),\ v_x \sin(\omega_c t) + v_y \cos(\omega_c t),\ v_\parallel\right]$$

$$\underline{w}_\varepsilon = \frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t-t'}{\tau}}\ \underline{v}_\varepsilon\, dt'$$

$$\frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{t} dt'\ e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \begin{Bmatrix}\cos\omega_c t' \\ \sin\omega_c t'\end{Bmatrix} = \frac{1}{1+(\omega_c\tau)^2}\begin{Bmatrix}1 \\ -\omega_c\tau\end{Bmatrix}$$

$$\underline{w}_\varepsilon(t) = \left(\frac{v_x}{1+(\omega_c\tau)^2} + \frac{v_y\,\omega_c\tau}{1+(\omega_c\tau)^2},\ \frac{v_y}{1+(\omega_c\tau)^2} - \frac{v_x\,\omega_c\tau}{1+(\omega_c\tau)^2},\ v_\parallel\right)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}(B) = \sigma_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{1+(\omega_c\tau)^2} & -\frac{\omega_c\tau}{1+(\omega_c\tau)^2} & 0 \\ \frac{\omega_c\tau}{1+(\omega_c\tau)^2} & \frac{1}{1+(\omega_c\tau)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_0 = \frac{ne^2}{m}\tau$$

$$\rho_{\alpha\beta}(B) = \rho_0 \begin{pmatrix} 1 & \omega_c\tau & 0 \\ -\omega_c\tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ez az izotróp eset is érdekes → gömbi Fermi-felület

$$\omega_c\tau = \frac{eB}{m}\tau$$

extrém nagy mágneses tér esetén $\omega_c\tau \gg 1$

$$\sigma_{xx} = A_{xx} + \frac{C_{xx}}{B^2} + \dots$$

$$\sigma_{xy} = \frac{B_{xy}}{B} + \dots \quad \text{antiszimmetrikus}$$

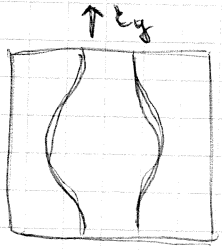
zárt pálya esetén $A_{xx} = A_{yy} = 0$ elég nagy mágneses térben

$B \parallel z$

$$\sigma_{\alpha\beta}(B) = \begin{pmatrix} \frac{C_{xx}}{B^2} & \frac{B_{xy}}{B} & \frac{B_{xz}}{B} \\ -\frac{B_{xy}}{B} & \frac{C_{yy}}{B^2} & \frac{B_{yz}}{B} \\ -\frac{B_{xz}}{B} & -\frac{B_{yz}}{B} & A_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\rho_{xx} \sim \frac{C_{yy}A_{zz} + B_{yz}^2}{A_{zz}\cdot B_{xy}^2}$$

transzverzális mágneses ellenállás
⇒ véges ha $\omega_c\tau \gg 1$ $\left(\frac{\tau}{T_c} \gg 1\right)$



ilyen alak esetén az x komponens nem átlagolódik ki

⇒ nyílt pálya esetén

$$\begin{pmatrix} A_{xx} & \frac{B_{xy}}{B} & A_{xz} \\ -\frac{B_{xy}}{B} & \frac{C_{yy}}{B^2} & \frac{B_{yz}}{B} \\ -A_{xz} & -\frac{B_{yz}}{B} & A_{zz} \end{pmatrix}$$

$\rho_{xx} \to$ telítésbe megy

$\rho_{yy} \to \alpha B^2$

⇒ kimérhető merre van zárt és nyílt pálya

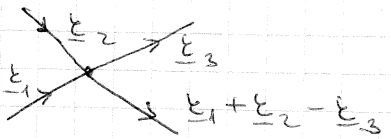
kvantummechanika megértése Feynman - féle pályákkal → látható, hogy R ellenállás függ a mágneses térből önmagába visszatérő pálya két dimenzióban lehet véges valószínűséggel → látható, hogy függ a vezeték a bezárt mágneses térből és fluxustól

---

relaxációs idő hőmérsékletfüggése?

elasztikus ütközés: ⟹ τ elasztikus nem függ a hőmérséklettől ∼ konst

elektron - elektron ütközés:



$$\varepsilon_{\underline{\xi}_1} + \varepsilon_{\underline{\xi}_2} = \varepsilon_{\underline{\xi}_3} + \varepsilon_{\underline{\xi}_1+\underline{\xi}_2-\underline{\xi}_3}$$

$$\varepsilon_{\underline{\xi}_1} > 0 \qquad \varepsilon_{\underline{\xi}_2} < 0$$

$$\varepsilon_{\underline{\xi}_3} > 0 \qquad \varepsilon_{\underline{\xi}_1+\underline{\xi}_2-\underline{\xi}_3} > 0$$

$\frac{1}{\tau}$ és $\frac{1}{\tau_{tr}} \sim T^2$

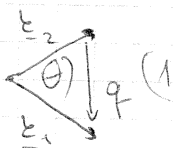
$\rho_{el-el} \sim T^2$

elektron - fonon ütközés: $T > \Theta_D$ elég nagy T

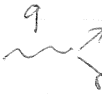
a legfontosabb hány fonon van

$\frac{1}{\tau} \sim n_B(\omega_{fonon}) \sim \frac{T}{\Theta_D}$ lineáris minden hőm. függés eltűnt

$cq \ll \varepsilon_F$ alacsony hőmérsékleten vagyunk (c hang sebesség)



$q(1-\cos\theta) \sim \left(\frac{q}{\xi_2}\right)^2$ csak alacsony energiás hosszú hullámhosszú fononok



$\rho_{el-fonon} \sim \sqrt{q}$ $\qquad |q|^2 \to q$

$\sum_q \sim \int q^2 dq$ lineáris diszperzió

$\frac{1}{q}\int q^2 dq\, q \to \frac{1}{\tau} \sim q_{max}^3 \sim T^3$ ellentétben

SZILÁRDTESTFIZIKA 10.11.

relaxációs idő $\frac{1}{\tau_{tr}} \sim T^5$!!!

Elektronok mágneses térben

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla + e\underline{A}\right)^2 \Psi = \varepsilon\Psi$$

$\underline{A} \to \underline{A} + \nabla\underline{\chi}$ mértékinvariancia

tfh. $\underline{B} \parallel z$

Landau-mérték $\underline{A} = (0, Bx, 0)$

(szimmetrikus mérték $\underline{A} = \frac{1}{2}(-By, Bx, 0)$)

$$\left[\frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{1}{2m}(p_y + eBx)^2 + \frac{1}{2m}p_z^2\right]\Psi = \varepsilon\Psi$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{p}_y &= \frac{1}{\hbar}[H, p_y] = 0\\ \dot{p}_z &= \frac{1}{\hbar}[H, p_z] = 0\end{aligned}\right\}$$ megmaradó mennyiséget

$$\Psi(x,y,z) = u(x)\, e^{ik_y y}\, e^{ik_z z}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(x)}{dx} + \frac{\hbar^2}{2m}\left(k_y + \frac{eBx}{\hbar}\right)^2 u(x) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}u(x) = \varepsilon\, u(x)$$

új jelölések $x_0 = -\frac{\hbar k_y}{eB}$

$$\frac{eB}{m} = \omega_c$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{m}{2}\omega_c^2(x - x_0)^2 u(x) = \left(\varepsilon - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}\right)u(x)$$

harmonikus oszcillátor x_0 körül ω_c frekvenciával

$$\varepsilon - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} = \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$u(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}}\,\frac{1}{\ell_H^{1/2}}\,\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\,H_n\left(\frac{x - x_0}{\ell_H}\right)e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\ell_H^2}}$$

$$\ell_H = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}} \approx \frac{26{,}65\ \text{nm}}{\sqrt{B(\text{Tesla})}}$$

ha $B = 0$ $\quad \varepsilon(k_x, k_y, k_z) = \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$

$$k_\alpha = \frac{2\pi}{L_\alpha} \qquad \alpha = x, y, z$$

3 kvantumszám

ha $B \neq 0$ $\quad \varepsilon(k_z, n) = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right)$

elvileg tetszőleges állapot, tehát minden n-hez degeneráltnak kell lenni

$0 < x_0 < L_x$ (legyen x_0 a mintában)

$x_0 = -\ell_H^2 k_y$

$-L_x/\ell_H^2 < k_y < 0$ $\quad$ k_y lehetséges értékeinek száma

maximális értéke $\frac{2\pi}{L_y} N_p \rightarrow N_p = \frac{L_x L_y}{2\pi \ell_H^2}$

elemi fluxus kvantum

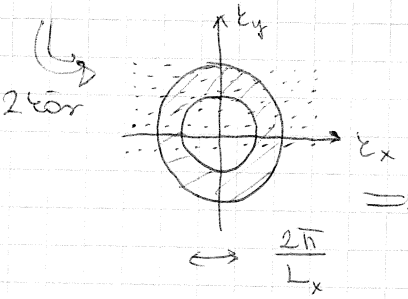
$\Phi_0 = \frac{h}{e} \Rightarrow N_p = \frac{L_x L_y B}{\Phi_0}$ → mintán átmenő összes fluxus

$n \Rightarrow$ Landau nívók

n. és $n+1$. Landau nívó között mi van?

$\varepsilon_\perp = \frac{\hbar^2 k_\perp^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(k_x^2 + k_y^2\right) = \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right)$

$\hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}\right) < \varepsilon_\perp < \hbar\omega_c\left(n + \frac{3}{2}\right)$ → nézzük ezt az esetet



$\updownarrow \frac{2\pi}{L_y}$ egységekben kvantálva

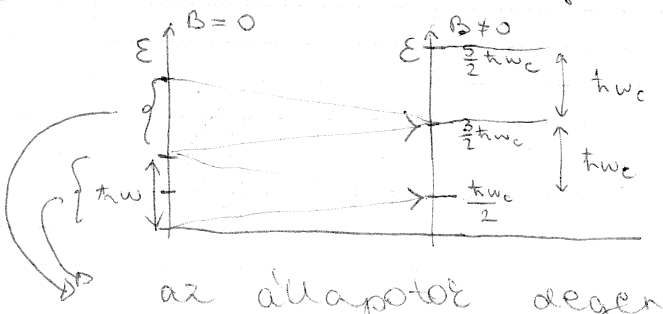
$\Rightarrow$ gyűrű területe: $\pi\left(k_{\perp,n+1}^2 - k_{\perp,n}^2\right)$

$= \pi \frac{2m}{\hbar^2}\left(\varepsilon_{\perp,n+1} - \varepsilon_{\perp,n}\right) =$

$= \pi \frac{2m}{\hbar^2} \hbar\omega_c$

ezt elosztjuk a pontok sűrűségével:

$$\frac{\pi \frac{2m}{\hbar^2} \hbar\omega_c}{\frac{2\pi}{L_x}\frac{2\pi}{L_y}} = N_p = \frac{L_x L_y B}{\Phi_0}$$



az állapotok degenerálódnak $B \neq 0$ esetben

1 - 1 állapotba bele formálisan

Kör területe $\underline{k}$ térben $A = \pi k_\perp^2$

$$A_n = \frac{2\pi}{\ell_H^2}\left(n+\frac{1}{2}\right) \Big) \cdot \ell_H^4$$

$\underline{r}$ térben

$$A_n(\underline{r}\text{ térben}) = 2\pi \ell_H^2 \left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{\Phi_0}{B}\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$BA_n = \Phi_0\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

mágneses fluxus

állapotsűrűség

- $\varepsilon_z = \pm\sqrt{2m\left(\varepsilon - \hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)}$

$$d\varepsilon_z = \frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon}\, d\varepsilon = \pm\sqrt{2m}\,\frac{d\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon - \hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}\right)}}$$

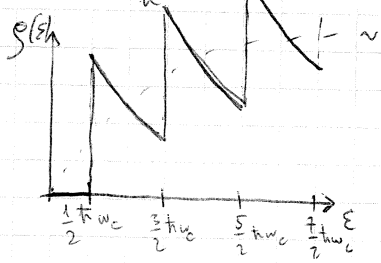
$(\varepsilon_z,\ \varepsilon_z + d\varepsilon_z)$ - ben állapotok száma adott n - re $dN_n = N_p \frac{L_z}{2\pi} d\varepsilon_z =$

$$= \frac{eB}{(2\pi)^2}\frac{V}{\hbar}\, d\varepsilon_z$$

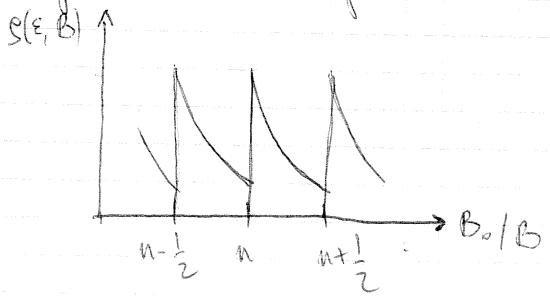
spin $\to$ 2es faktor

$$\varrho(\varepsilon) = \sum_n \varrho_n(\varepsilon) = \frac{eB}{(2\pi\hbar)^2}\sqrt{2m}\sum_{n=0}^{n_{max}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon - \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c}}$$

pozitív legyen gyök alatt $\Rightarrow$ $\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c \le \varepsilon$



rögzített energián mi a B függés ?



$\frac{1}{B}$ - ben periodikus

állapotsűrűség

$$B_0 = \frac{\varepsilon m}{\hbar e}$$

spin $\to$ csak szabad elektronok esetén igaz, hogy kettes faktort ad

$\to$ de $B \neq 0$ esetén

$\sigma = \pm 1$

$$\varepsilon_\sigma(n, \varepsilon_z) = \frac{\hbar^2 \varepsilon_z^2}{2m} + \hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}|g_e|\,\mu_B B\sigma$$

$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$ → elektronok $|g_e| \approx 2$

$\frac{1}{2} |g_e| \mu_B B_\sigma = \frac{\hbar \omega_c \sigma}{2}$

a két spinállapot egymáshoz képest pont $\hbar\omega_c$ -vel tolódik el

! szabad elektronok esetén Zeeman - felhasadás = Landau - nívók felhasadása ha de a ciklotron tömeg és a Bohr - magnetonban lévő tömeg nem lesz ugyanaz ha nem szabad az elektron ⇒ két különböző felhasadás

a kvantálás x-y vetületben marad tér, de belevesszük k_z -t is ⇒ Landau - csö hány Landau - csö van betöltve ?

pl. $10^4 - 10^5$ db

$T = 0$ - nál (kémiai potenciál) $n = \int_0^{\mu(B)} g(\varepsilon)\, d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_F} g_0(\varepsilon)\, d\varepsilon$ 10.18.

$$g_0(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon}$$

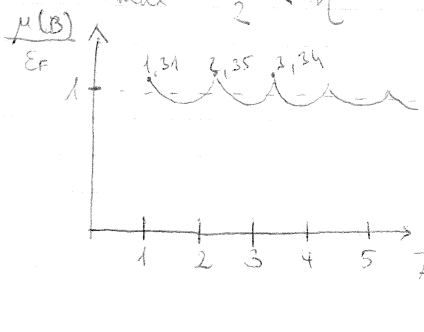
$$g(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{\hbar\omega_c}{2} \sum_{n=0}^{n_{max}} \left(\varepsilon - (n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega_c\right)^{-1/2}$$

$$\frac{\hbar\omega_c}{2} \int_0^{\mu(B)} \sum_{n=0}^{n_{max}} \left(\varepsilon - (n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega_c\right)^{-1/2} d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_F} \sqrt{\varepsilon}\, d\varepsilon$$

$\eta = \frac{\mu(B)}{\hbar\omega_c}$ $\eta_0 = \frac{\varepsilon_F}{\hbar\omega_c}$ új változók

$$\sum_{n=0}^{n_{max}} \left(\eta - (n+\tfrac{1}{2})\right)^{1/2} = \frac{2}{3}\eta_0^{3/2}$$

$n_{max} + \frac{1}{2} < \eta$



extrém → nagy mágneses tér esetén az oszcilláció elromlik

ha $B \sim 1\,T$

$\hbar\omega_c \sim 10^{-4}\,eV \sim 1\,K$

$\varepsilon_F \sim eV$

1) $T \ll 1\,K$

$\frac{\varepsilon_F}{\hbar\omega_c} \sim 10^4$ db Landau-nívó sűrűség → sok szint folyt.

alapállapoti energia becslése

$$E_0 = V \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon\, g(\varepsilon)\, d\varepsilon = \dots =$$

$$= N\varepsilon_F - \frac{V}{3\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^{3/2} \hbar\omega_c \sum_{n=0}^{n_{max}} \left(\varepsilon_F - (n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega_c\right)^{3/2}$$

Euler-Maclaurin formula

$$\sum_{n=0}^{n_0} f(n+\tfrac{1}{2}) = \int_0^{n_0+1} f(x)\,dx - \frac{1}{24}\left(f'(n_0+1) - f'(0)\right)$$

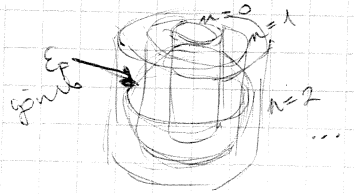
$$|f(n+1) - f(n)| \ll f(n)$$

$$E_0 = \left(1 - \frac{2}{5}\right) N\varepsilon_F - \frac{V}{24\pi^2}(eB)^2 \frac{\varepsilon_F}{m}$$

az oszcillációt figyelembe vételével és magasabb hatványai jöttével be

$$\chi = -\mu_0 \frac{e^2 k_F}{3m} \frac{1}{(2\pi)^2} \qquad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m} \text{ Bohr-magneton}$$

$$\boxed{\chi = -\frac{1}{2}\mu_0 \mu_B^2 g(\varepsilon_F)} \rightarrow \text{Landau diamágnesség}$$



3D:

$$\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\hbar\omega_c + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \le \varepsilon_F$$

ha növeljük a mágneses teret nőnek a csövek → egyre kevesebb lesz a Fermi-gömbön belül → ami végül 0 lesz a betöltöttsége

egy Landau pálya degenerációja nő és ε_z-ben is átrendeződnek

B növelésével periodikus viselkedés mérhető jelenségek

Bloch-állapotok, kvaziklasszikus közelítés

$B \parallel z$ (m_1^*, m_2^*, m_3^*) effektív tömeget

$$\omega_c = \frac{eB}{\sqrt{m_1^* m_2^*}} \qquad m_\parallel^* = m_3^*$$

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{2} + n\right)\hbar\omega_c + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_\parallel^*}$$

$$\varepsilon(n+1) - \varepsilon(n) = h\nu$$

$$\nu_c = T_c^{-1} = \frac{eB}{\hbar^2}\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon}\right)^{-1}$$ mágneses time mellőleges metszet

$$\varepsilon(n+1, k_z) - \varepsilon(n, k_z) = \frac{2\pi e B}{\hbar}\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon}\right)^{-1}$$

$$\frac{\partial A}{\partial \varepsilon} = \frac{A(n+1, k_z) - A(n, k_z)}{\varepsilon(n+1, k_z) - \varepsilon(n, k_z)}$$

$$A(n+1, k_z) - A(n, k_z) = \frac{2\pi e B}{\hbar}$$

$$A(n, k_z) = \frac{2\pi e B}{\hbar}(n + \gamma)$$ pl. szabad elektronra $= \frac{1}{2}$

↑ valami konstans

↕ metszet k térben

metszet x térben $F_n = 2\pi k_H^2 (n+\gamma)$

$\Phi = \Phi_0(n+\gamma)$ fluxus kvantált

feltételezzük, hogy a valódi eset nagyon hasonló a szabad elektronoshoz

általában működik, mert n nagy $\sim 10^4$ $\Rightarrow \gamma$ mindíg

(ma már lehet $n < 1$ mintát is csinálni, ott nem jó ez a kvaziklasszika)

(2D) kvantumoszcillációk

nívó degenerációja $N_p = \frac{L_x L_y}{\Phi_0} B$

$$B_0 = \frac{\Phi_0 N_p}{L_x L_y} \hookrightarrow N_p = N$$

B_0-nál csak $n = 0$ van betöltve (teljesen)

$N_e = (n+1) N_p$ $\qquad B_n = \frac{B_0}{n+1}$

↑ n-edik teljesen betöltve

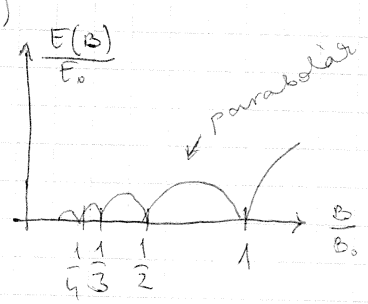
$n+1$-dik üres

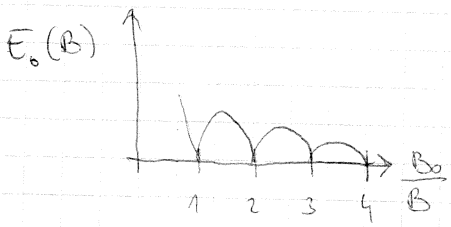
ha $B = B_n$ $\quad E(B_n) = E(0)$ → mintha nem lehet mágneses tér

$$E(B) = N_p \sum_{l=0}^{n-1} \hbar\omega_c \left(l + \frac{1}{2}\right) + (N - nN_p)\hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

↳ $B_0/(n+1) < B < B_0/n$

$$E(B) = \hbar\omega_c N \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(n+1)n\frac{B}{B_0}\right)$$





mágnesesség $-\frac{\partial E}{\partial B} = M$ → ugrásai vannak

(3D) k_z és $k_z + dk_z$ közötti állapotok száma?

$$\varepsilon_F'(k_z) = \varepsilon_F - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$$

$$n \leq \frac{\varepsilon_F'(k_z)}{\hbar\omega_c} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{\varepsilon_F'(k_z)}{\hbar\omega_c} - \frac{3}{2} < n_{max} < \frac{\varepsilon_F'(k_z)}{\hbar\omega_c} - \frac{1}{2}$$

$$\varepsilon_F'(k_z) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\hbar e}{m} B_n'(k_z)$$

$$\frac{1}{B_n'(k_z)} = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\hbar e}{m}}{\varepsilon_F'(k_z)}$$

$$A(k_z) = \pi k_z^2 = \frac{2\pi}{\hbar^2} m\left(\varepsilon_F - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}\right) = \frac{2\pi}{\hbar^2} m \varepsilon_F'(k_z)$$

$\frac{1}{B'}$-ben lesz periodikus viselkedés → különbség

$$\Delta\left(\frac{1}{B}\right) = \frac{\hbar e}{m\varepsilon_F'(k_z)} = \frac{2\pi e}{\hbar A(k_z)}$$

$$N(B, k_z)\,dk_z = N_p (n+1)\frac{L_z}{2\pi} dk_z = (n+1)\frac{V}{(2\pi)^2\hbar} dk_z = V g(k_z, B)\,dk_z = V g(B)\,dk_z$$

állapotsűrűség → $g(k_z, B)V$

a k_z magasságban

$$g(B) = (n+1)\frac{eB}{(2\pi)^2\hbar} = \frac{m}{(2\pi\hbar)^2}(n+1)\hbar\omega_c$$

$$E(B, k_z)\,dk_z = N_p \frac{L_z}{2\pi} dk_z \sum_{l=0}^{n} \hbar\omega_c\left(l + \frac{1}{2}\right) + N_p\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{L_z}{2\pi} dk_z \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$$

$$E(B, k_z)\,dk_z = V\,dk_z \left[\frac{(2\pi\hbar)^2}{2m} g^2(B) + g(B)\frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}\right]$$

(ha $B = B_n$ akkor $g(B_n) = g(0)$)

$\Delta\left(\frac{1}{B}\right) = \frac{2\pi e}{\hbar A(k_z)}$ → periodicitás

max $\int dk_z \, f\left(\frac{1}{A(k_z)}\right) \sim \int dA(k_z) \frac{1}{\left|\frac{\partial A(k_z)}{\partial k_z}\right|} f\left(\frac{1}{A(k_z)}\right)$

⇒ ha $\frac{\partial A(k_z)}{\partial k_z} \approx 0$ akkor adják a fő járulékot

↳ Fermi-felület szélső értékei

ezek a pontok adják az oszcillációkat a többi olyan, mint egy háttérzaj

$\Delta\left(\frac{1}{B}\right) = \frac{2\pi e}{\hbar A_{ext}}$

mágnesezettségbe is ezek számítanak

➡ deHaas - vanAlphen effektus

ellenállás változásai

➡ Subnikov - deHaas effektus

változtatva a mágneses tér irányát ezzel feltérképezhető a Fermi-felület

nagyon alacsony hőmérséklet kell

$\omega_c \gg \frac{1}{\tau}$ ↘ relaxációs idő

Optika

10.21.

$c \gg v_F$

$q \sim 0$ - t tudjuk nézni optikával

$\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$ $\quad \mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$

$\text{div}\,\vec{B} = 0$

$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

} Maxwell-egyenletek

ha $\rho = |\vec{j}| = 0$ akkor

$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ ⇒ $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega\left(t - \frac{\hat{q}\vec{r}}{c}\right)}$

$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{-i\omega\left(t - \frac{\hat{q}\vec{r}}{c}\right)}$

SZILÁRDTESTFIZIKA 10.21.

$\vec{E}_0 \perp \vec{B}_0 \perp \hat{q}$ → hullámterjedés iránya

$\vec{B}_0 = \frac{1}{c}\hat{q} \times \vec{E}_0$

anyagban → töltéshordozók, áramok

$\rho = \rho_{szabad} + \rho_{kötött}$

$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$

$\rho, \vec{j}$ ⇒ szabad töltéshordozók

$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ $\quad \mathrm{div}\,\vec{D} = \rho$ → egyenletek megváltoztak

lineáris közelítés kis intenzitású terekre általában megfelelő

$\frac{1}{\epsilon_0}\vec{P}(\vec{q},\omega) = \chi_{ee}(q,\omega)\vec{E}(q,\omega)$ $\quad \underline{\chi_e}$

↑ lehet tenzor is, de csak bonyolítja a dolgot → tfh. izotrópia

$\vec{M}(q,\omega) = \chi_m(q,\omega)\vec{H}(q,\omega)$ $\quad \underline{\chi_m}$

ellenek az anyagra jellemző egyenletek

$\vec{j} = \underline{\sigma}\vec{E}$ (itt is izotróp esetet lehet nézni)

azt mondjuk, hogy az anyag nem mágneses (magnetooptika nem most)

dielektromos fv-ek

$\vec{D} = \epsilon_0(1+\chi_{ee}(q,\omega))\vec{E}(q,\omega) = \epsilon_0\epsilon_r(q,\omega)\vec{E}(q,\omega)$

$\vec{B} = \mu_0(1+\chi_m(q,\omega))\vec{H}(q,\omega) = \mu_0\mu_r(q,\omega)\vec{H}(q,\omega)$

$\mu_r \approx 1$ általában

$\nabla^2\vec{E} = \frac{\epsilon_r(q,\omega)\,\mu_r(q,\omega)}{\epsilon_0\mu_0}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial\omega^2}$

$N = \sqrt{\epsilon_r\mu_r}$ $\qquad q^2 = \frac{\omega^2}{c^2}N^2$

$c \to \frac{c}{N}$ $\qquad \mu_r \approx 1$

$N = n + \kappa$ ← "csillapodás" (abszorpció)

törésmutató

$\vec{E} = \vec{E}_0 \, e^{-i\omega\left(t - \frac{n}{c}\hat{q}\vec{r}\right)} \, e^{-\frac{\omega\kappa}{c}\hat{q}\vec{r}}$

transzverzális továbbra is az em hullám

de csillapodik

abszorbciós együttható $\alpha = -\frac{1}{I}\frac{\partial I}{\partial r}$ → intenzitás (négyzetes)

$$\alpha = \frac{2\kappa\omega}{c} = \frac{4\pi\kappa}{\lambda} \qquad (\lambda \gg a)$$

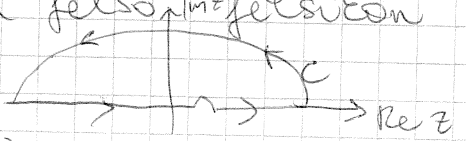
kauzalitás → retardált válaszfv-ek

$f(\omega) \to f(z)$ kiterjesztjük komplexbe

↓

analitikus a felső $\mathbb{C}^2$ félsíkon

ha $\lim_{z\to\infty} |f(z)| \leq \frac{1}{z}$



$$\oint_C \frac{f(z)}{z-\omega}\,dz = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega' f(\omega')}{\omega'-\omega} + \int \frac{dz\, f(z)}{z-\omega} = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega' f(\omega')}{\omega'-\omega} = i\pi f(\omega)$$

$-\pi i f(\omega)$

főértékintegrál

$\lim_{\omega\to\infty} \varepsilon_r(\omega) = 1$ $\qquad \varepsilon_r \to \varepsilon_r - 1$ lecseng

$\lim_{\omega\to\infty} \varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_r(\infty)$ $\qquad f(\omega) = f'(\omega) + i f''(\omega)$

ε_r helyett → $\varepsilon_r(\omega) - \varepsilon_r(\infty)$

$$f'(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{f''(\omega')}{\omega'-\omega}, \qquad f''(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{f'(\omega')}{\omega'-\omega} \quad \dots$$

Kramers – Kronig transzformációk

szabad töltéseket vannak $\varrho \neq 0$

$$\nabla^2\vec{E} = \frac{\varepsilon(\infty)}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial E}{\partial t} \qquad \vec{j} = \sigma\vec{E}$$

optikai vezetőképesség = transzverzális vezetőképesség

$\sigma_{opt}(q\to 0) = \sigma_{long}(q\to 0)$

(longitudinális $\vec{E} \;\; \dot{e} \rightarrow \;\; \vec{j}$

transzverzális $\uparrow \vec{E} \;\; \hat{q} \rightarrow \;\; \uparrow \vec{j}$)

(q, ω) diszperziós relációt keressük:

$$q^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\underbrace{\varepsilon_r(\omega) + i\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}}_{\varepsilon_r(q,\omega)}\right)$$

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_1(\omega) + i\varepsilon_2(\omega)$$

$$\varepsilon_1(\omega) = \varepsilon_r(\infty) - \frac{\mathrm{Im}\,\sigma(\omega)}{\varepsilon_0 \omega}$$

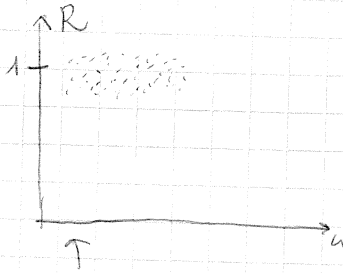
$$\varepsilon_2(\omega) = \frac{\mathrm{Re}\,\sigma(\omega)}{\varepsilon_0 \omega}$$

$q \to 0$ azt jelenti, hogy $\frac{\lambda}{a} \gg 1$

$$n^2 - \varkappa^2 = \varepsilon_r(\infty) - \frac{\mathrm{Im}\,\sigma(\omega)}{\varepsilon_0 \omega}$$

$$2n\varkappa = \frac{\mathrm{Re}\,\sigma(\omega)}{\varepsilon_0 \omega}$$

reflektivitás: $R = \frac{(1-n)^2 + \varkappa^2}{(1+n)^2 + \varkappa^2}$ → lehet mérni



alacsony frekvencián $R \approx 1$

10%-kal számolnak a pontok, mert attól függ milyen szélességgel fogtak meg a felületet

$$m\ddot{\vec{r}} = -e\vec{E}$$

$$\omega^2 m \vec{r} = e\vec{E}$$

$$\vec{j} = -n_e e \dot{\vec{r}}$$

↑ sűrűség

$$q^2 \vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E} - \frac{\omega^2}{c^2}\frac{n_e e}{\varepsilon_0}\vec{r}$$

$$\vec{r} = \frac{e}{\omega^2 m}\vec{E}$$

$$q^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{n_e e}{m\varepsilon_0}\frac{1}{\omega^2}\right) = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}\right)$$

$$\frac{n_e e}{m\varepsilon_0} = \omega^2_{\text{plazma}}$$

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}$$

ha $\omega \ll \omega_{pl}$ $\quad n \approx 0 \quad \kappa \neq 0$

$\omega \gg \omega_{pl}$ $\quad n \neq 0 \quad \kappa \approx 0$

injuk be a mozgásegyenletbe csillapítást

$$m\ddot{\vec{r}} = -e\vec{E} - \frac{1}{\tau} m\dot{\vec{r}}$$

$$q^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\underbrace{\left(1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}}\right)}_{\varepsilon_r(\omega)} \rightarrow \varepsilon_2(\omega) = \frac{Re\,\sigma}{\varepsilon_0 \omega}$$

$$\sigma_0 = \frac{n_e e^2}{m\varepsilon_0}\tau \quad \text{(longitudinális)}$$

injuk be τ-ban

$$\Rightarrow \tau$$

$$\varepsilon_1(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pl}^2 \tau^2}{1 + \omega^2\tau^2}$$

$$\varepsilon_2(\omega) = \frac{\omega_{pl}^2 \tau}{\omega(1 + \omega^2\tau^2)}$$

$\omega \ll \omega_{pl}$ $\quad n \approx \kappa \approx \sqrt{\frac{\omega_{pl}^2 \tau}{2\omega}} = \sqrt{\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0\omega}} \gg 1$

$$R = 1 - 2\left(\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma_0}\right)^{1/2}$$ Hagen - Rubens összefüggés

ha már tudjuk, hogy fém v. nem fém akkor már lehet kiindulni abból a közelítésből

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}$$

ha $\omega \ll \omega_{pl}$ $\quad n \approx 0 \quad \varkappa \neq 0$

$\omega \gg \omega_{pl}$ $\quad n \neq 0 \quad \varkappa \approx 0$

újabb be a mozgásegyenletbe csillapítást

$$m\ddot{\vec{r}} = -e\vec{E} - \frac{1}{\tau} m\dot{\vec{r}}$$

$$q^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \underbrace{\frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}}}_{\varepsilon_r(\omega)}\right) \rightarrow \varepsilon_2(\omega) = \frac{2\sigma}{\varepsilon_0 \omega}$$

$$\sigma_{\bullet} = \frac{n_e e^2}{m\varepsilon_0}\tau \quad \text{(longitudinális)}$$

újabb be τ-ban

$\Rightarrow \tau$

$$\varepsilon_1(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pl}^2 \tau^2}{1 + \omega^2\tau^2}$$

$$\varepsilon_2(\omega) = \frac{\omega_{pl}^2 \tau}{\omega(1+\omega^2\tau^2)}$$

$\omega \ll \omega_{pl}$ $\quad n \approx \varkappa \approx \sqrt{\frac{\omega_{pl}^2 \tau}{2\omega}} = \sqrt{\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0\omega}} \gg 1$

$$R = 1 - 2\left(\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma_0}\right)^{1/2}$$ Hagen - Rubens összefüggés

ha már tudjuk, hogy fém v. nem fém akkor már lehet kiindulni abból a fitteléseknél

11.04.

kötött elektronok

lokális oszcillátor kölcsönhat a fénnyel

$$m\ddot{\vec{r}} + m\omega_0^2\vec{r} = -e\vec{E} - \frac{1}{\tau} m\dot{\vec{r}}$$

τ csillapítás

$$m\left(-\omega^2 + \omega_0^2 - i\frac{\omega}{\tau}\right)\vec{r} = -e\vec{E}$$

$$\vec{r} = -\frac{e}{m}\frac{\vec{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\frac{\omega}{\tau}}$$

polarizálhatóság

$$\alpha(\omega) = -\frac{e\vec{r}}{\vec{E}}$$ ← dipólmom

V térfogatban N db oszcillátor → összeadjuk őket ⇒ polarizáció $\vec{P} = \frac{Ne^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\frac{\omega}{\tau}}$

$\frac{N}{V} = n$

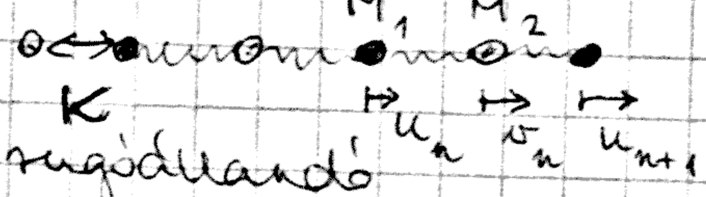
$$\varepsilon_r = 1 + \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\frac{\omega}{\tau}} \qquad \frac{ne^2}{m\varepsilon_0} = \omega_{pl}^2$$

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{\omega_{pl}^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\frac{\omega}{\tau}}$$

ha különböző típusú oszcillátorok az elektronok

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{e^2}{m\varepsilon_0}\sum_j \frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\frac{\omega_j}{\tau_j}}$$

lineáris lánc



$$M_1\ddot{u}_n = -K(2u_n - v_{n-1} - v_n) + eEe^{-i\omega t}$$

$$M_2\ddot{v}_n = -K(2v_n - u_n - u_{n+1}) + eEe^{-i\omega t}$$

$$M_1\ddot{u}_q = -2K(u_q - v_q) + eEe^{-i\omega t}$$

$$M_2\ddot{v}_q = -2K(v_q - u_q) - eEe^{-i\omega t}$$

$$\ddot{u}_q - \ddot{v}_q = \left(-K(u_q - v_q) + eEe^{-i\omega t}\right)\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right)$$

$$\omega_{T_0}^2 = K\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right)$$

$$(u_q - v_q)(\omega_{T_0}^2 - \omega^2) = \frac{eEe^{-i\omega t}}{K}\omega_{T_0}^2$$

polarizálhatóság:

$$e(u_q - v_q) = \frac{e^2}{K}\frac{\omega_{T_0}^2}{\omega_{T_0}^2 - \omega^2}$$

$$\varepsilon_r = a + b\frac{\omega_{T_0}^2}{\omega_{T_0}^2 - \omega^2}$$

$$\varepsilon_r(0) = a + b \qquad \varepsilon_r(\infty) = a$$

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_r(\infty) + \left(\varepsilon_r(0) - \varepsilon_r(\infty)\right)\frac{\omega_{T_0}^2}{\omega_{T_0}^2 - \omega^2}$$

$\varepsilon_r(0) - \varepsilon_r(\infty) > 0$ Kramers - Kronig összefüggés

levezethető

$$\varepsilon_r(0) - \varepsilon_r(\infty) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\omega' \frac{\varepsilon_r''(\omega')}{\omega'}$$

$$\omega\varepsilon_r''(\omega) \geq 0$$

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_r(\infty)\,\frac{\varepsilon_r(0)\frac{\omega_{T_0}^2}{\varepsilon_r(\infty)} - \omega^2}{\omega_{T_0}^2 - \omega^2}$$

$$\frac{\varepsilon_r(0)}{\varepsilon_r(\infty)}\,\omega_{T_0}^2 = \omega_{L0}^2 \quad \text{bevezetjük}$$

$$\frac{\varepsilon_r(\omega)}{\varepsilon_r(\infty)} = \frac{\omega_{L0}^2 - \omega^2}{\omega_{T_0}^2 - \omega^2}$$

Lyddane - Sachs - Teller reláció $\quad \frac{\omega_{L0}^2}{\omega_{T0}^2} = \frac{\varepsilon_r(0)}{\varepsilon_r(\infty)} > 1$

ω_{T_0} = transzverzális módus

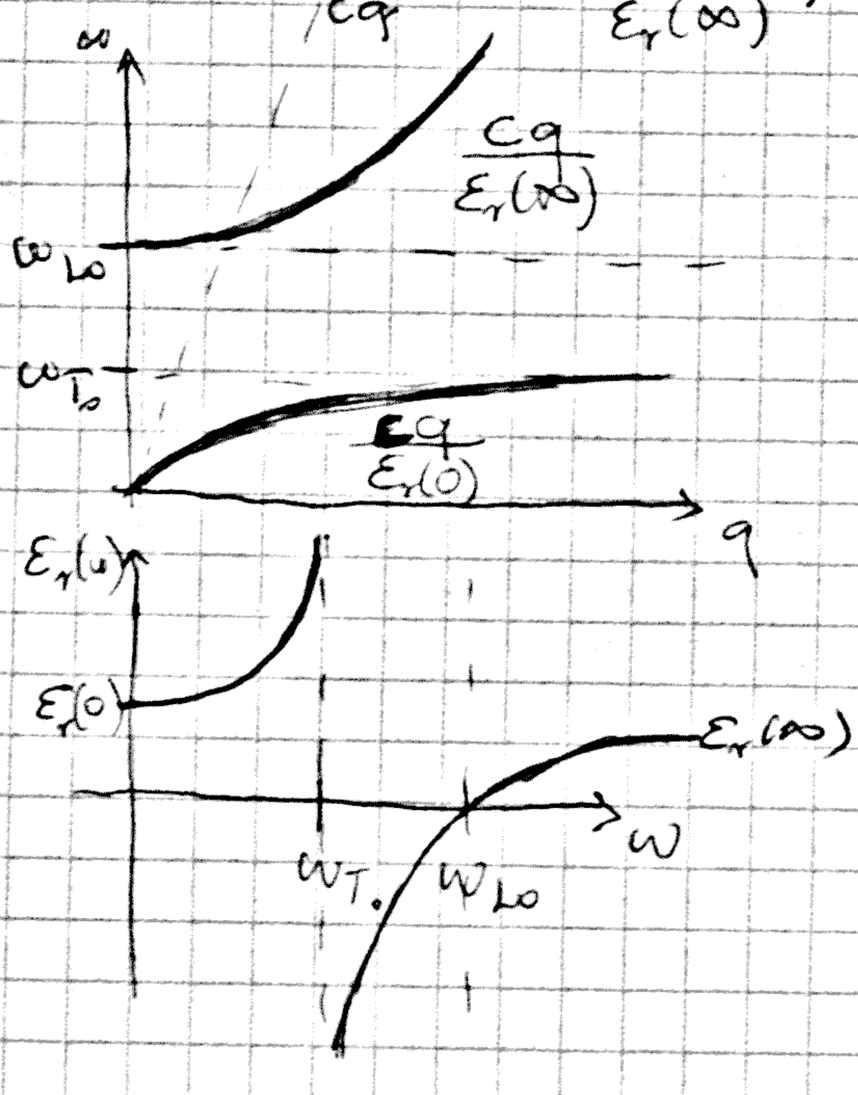
ω_{L0} = longitudinális módus $\quad (q \to 0)$ (hosszúhullámhosszú 10^{-2})

ezt az egyszerű modellt általánosítani kell

$$q^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon_r(\omega)$$

$$q^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon_r(\infty)\,\frac{\omega_{L0}^2 - \omega^2}{\omega_{T_0}^2 - \omega^2}\,.$$

$$\omega^2(q) = \frac{1}{2}\left(\omega_{L0}^2 + \frac{c^2q^2}{\varepsilon_r(\infty)}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{c^2q^2}{\varepsilon_r(\infty)} + \omega_{L0}^2\right)^2 - 4\frac{c^2q^2}{\varepsilon_r(\infty)}\,\omega_{T0}^2}$$



$q \approx 0$ - már terjedhető

mindig, de csak megoldás

után $q \to 0$ határesetet

reflektivitás

$R \approx 1$

ha beraknánk az oszcillátorokba csillapítást

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_r(\infty) + (\varepsilon_r(0) - \varepsilon_r(\omega))\frac{\omega_{T_0}^2}{\omega_{T_0}^2 - \omega^2 - i\delta} \qquad \left(\gamma = \frac{1}{\tau}\right)$$

$\max \mathrm{Re}\,\varepsilon_r(\omega) \rightarrow$ transzverzális gerjesztések / módusok definíciója

$\max \mathrm{Re}\,\frac{1}{\varepsilon_r(\omega)}$ → longitudinális gerjesztések

longitudinális és transzverzálisnál csak a főtengelyek irányában van értelme
de a definíciót lehetnet általánosítva
- a főtengelyek irányában tényleges megkülönböztethető a mozgás
- infravörös, alacsonyenergiás spektroszkópiával próbáljuk a rendszer alacsonyenergiás gerjesztéseit és állapotait meghatározni
- a tér amit alkalmazunk nem nagy

$$\mathcal{H}_{int} = -\int \vec{E}(\vec{r})\,\vec{P}(\vec{r})\,d\vec{r}$$

$$\left(\mathcal{H}_{int} = -\int \vec{B}(\vec{r})\,\vec{M}(\vec{r})\,d\vec{r} \quad \text{mágneses térnél}\right)$$

legyen a külső tér x irányú

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2} E_x \hat{x} \left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) e^{-|\delta| t}$$ ← bekapcsoljuk

perturbációszámítás, lineáris válasz

$t = -\infty$ -ben a rendszer alapállapotban van

$\Phi_0, \Phi_1, \ldots$ rendszer állapotai
$E_0, E_1, \ldots$ energiája
} tudjuk

bekapcsoljuk a külsőmezőt

$$\Psi(t) = c_0(t)\,\Phi_0(r)\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t} + \sum_{j\neq 0} c_j(t)\,\Phi_j(r)\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_j t}$$

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial c_j(t)}{\partial t} = \int \Phi_j^*(r)\,\mathcal{H}_{int}\,\Phi_0(r)\,d\vec{r}\;e^{\frac{i}{\hbar}(E_j - E_0)t}$$

dipól közelítés

$$\mathcal{H}_{int} = e\vec{E}(\vec{r},t)\vec{r}$$

(lineáris polarizáció)

$\hbar\omega_{j0} = E_j - E_0$

$$x_{j0} = \int d\vec{r}\,\Phi_j^*(\vec{r})\,x\,\Phi_0(\vec{r})$$

dipólátmenet

$$\langle x\rangle = -\frac{1}{2}\frac{eEx}{\hbar}\sum_j |x_{j0}|^2 \left\{\frac{2\omega_{j0}}{\omega_{j0}^2 + \omega^2 + i\delta\omega} e^{i\omega t} + \frac{2\omega_{j0}}{\omega_{j0}^2 - \omega^2 - i\omega\delta} e^{-i\omega t}\right\}$$

$$\vec{p} = e\langle \vec{r} \rangle$$

polarizálhatóság $\alpha(\omega) = \sum_j \frac{e^2 |x_{j0}|^2}{\varepsilon_0 \hbar} \frac{2\omega_{j0}}{\omega_{j0}^2 - \omega^2 - i\omega\delta}$

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{N}{V}\alpha(\omega) = 1 + \frac{N}{V} \sum_j \frac{e^2 |x_{j0}|^2}{\varepsilon_0 \hbar} \frac{2\omega_{j0}}{\omega_{j0}^2 - \omega^2 - i\omega\delta}$$

V térfogat
N részecske

bevezetik az optikusok: oszcillátorerősség:

$$f_j = \frac{2m}{\hbar^2} \hbar\omega_{j0} |x_{j0}|^2$$

$$\sum_j f_j = Z \rightarrow \text{atomok száma}$$

ezek az atomi állapotok nem végtelen életűek

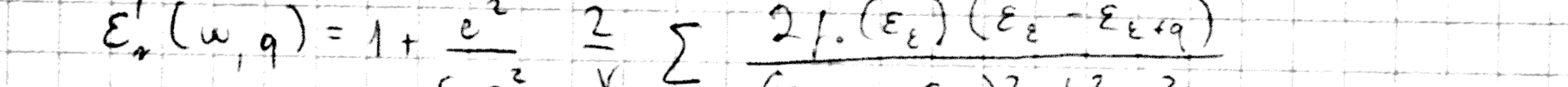
elektronok: $\delta \rightarrow \Gamma_j = \frac{1}{\tau_j}$ így vesszük figyelembe

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m} \sum_j f_j \frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_j}$$

szabad elektron gázban (fém) ugyanez a közelítés:



$\vec{\varepsilon}$ beeső elektronállapot
$\vec{\varepsilon} + \vec{q}$ üres -"-



végtelen sor

véletlen fázis közelítés (RPA)

sor felösszegzve =  $\Rightarrow \varepsilon_r(\omega) = 1 -$

megoldás

$$\varepsilon_r(\omega, q) = 1 - \frac{e^2}{\varepsilon_0 q^2} \frac{2}{V} \sum_{\vec{\varepsilon}} \frac{f_0(\varepsilon_\varepsilon) - f_0(\varepsilon_{\varepsilon+q})}{\hbar\omega + \varepsilon_\varepsilon - \varepsilon_{\varepsilon+q} + i\delta}$$

spin; Fermi eloszlás; betöltés; üresen; összegzés

1) $$\varepsilon_r''(\omega, q) = \pi \frac{e^2}{\varepsilon_0 q^2} \frac{2}{V} \sum_{\vec{\varepsilon}} \left(f_0(\varepsilon_\varepsilon) - f_0(\varepsilon_{\varepsilon+q}) \right) \delta\left(\hbar\omega - \varepsilon_\varepsilon - \varepsilon_{\varepsilon+q} \right)$$

$$\varepsilon_r'(\omega, q) = 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 q^2} \frac{2}{V} \sum_{\vec{\varepsilon}} \frac{2 f_0(\varepsilon_\varepsilon)(\varepsilon_\varepsilon - \varepsilon_{\varepsilon+q})}{(\varepsilon_{\varepsilon+q} - \varepsilon_\varepsilon)^2 - \hbar^2\omega^2}$$

Bloch-állapotok esetén

$|\langle n, \vec{\varepsilon} | e^{i\vec{q}\vec{r}} | n', \vec{\varepsilon} + \vec{q} \rangle|^2$ jön be még sávszámot

(n: sáv)

$$\lim_{\omega\to 0}\lim_{q\to 0}\varepsilon_r(q,\omega) \neq \lim_{q\to 0}\lim_{\omega\to 0}\varepsilon_r(q,\omega) \quad !$$

$$\lim_{\substack{q\to 0\\ \omega\neq 0}}\varepsilon_r(q,\omega) = 1-\frac{ne^2}{\varepsilon_0\omega^2}$$

$$\lim_{q\to 0}\varepsilon_r(q,\omega\neq 0) = 1+\frac{a}{q^2}\rho(\varepsilon_F)$$

$$a\rho(\varepsilon_F) = \varkappa_{TF}^2$$

Thomas-Fermi leárayétodás $\Leftarrow$ Thomas-Fermi hullámszám

(elmagyarázza a Bloch-ra is)

$q\to 0$ $(v_F \ll c)$

$$\varepsilon_r(q\to 0,\omega) = 1+\frac{e^2}{\varepsilon_0 m}\frac{1}{V}\sum_{\xi,n,n'}\frac{f_{nn'\xi}}{\omega_{nn'\xi}^2-\omega^2}$$

$$\omega_{nn'\xi} = \frac{1}{\hbar}(\varepsilon_{n'\xi}-\varepsilon_{n\xi})$$

$$f_{nn'\xi} = \frac{2m}{\hbar}\omega_{nn'\xi}\,f_0(\varepsilon_\xi)\cdot\lim_{q\to 0}\left(|\langle n,\vec{\xi}|e^{i\vec{q}\vec{r}}|n',\vec{\xi}+\vec{q}\rangle|^2\frac{1}{q^2}\right)$$

sáv-sáv átmenet

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{\pi e^2}{\varepsilon_0 m\omega}\sum_{nn'\xi} f_{nn'\xi}\,\delta(\omega-\omega_{nn'\xi})$$

mondjuk, hogy $f_{nn'\xi} \approx$ konstans (rögzített n,n')

$$\frac{1}{V}\sum_\xi \delta(\hbar\omega-\varepsilon_\xi) = \underset{\omega\text{ helyen}}{\text{egyrészecske állapotsűrűség}} = \rho(\omega)$$

$$\frac{1}{V}\sum_\xi \delta(\omega-\omega_{nn'\xi}) = \rho_{nn'}(\omega) \to n\,n' \text{ sáv egyesített állapot-sűrűsége}$$

$$\frac{1}{V}\sum_\xi \to \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{\xi}\ldots$$

$$\rho_{nn'}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{S(E)}\frac{dS}{|\nabla_\xi(\varepsilon_{n\xi}-\varepsilon_{n'\xi})|}$$

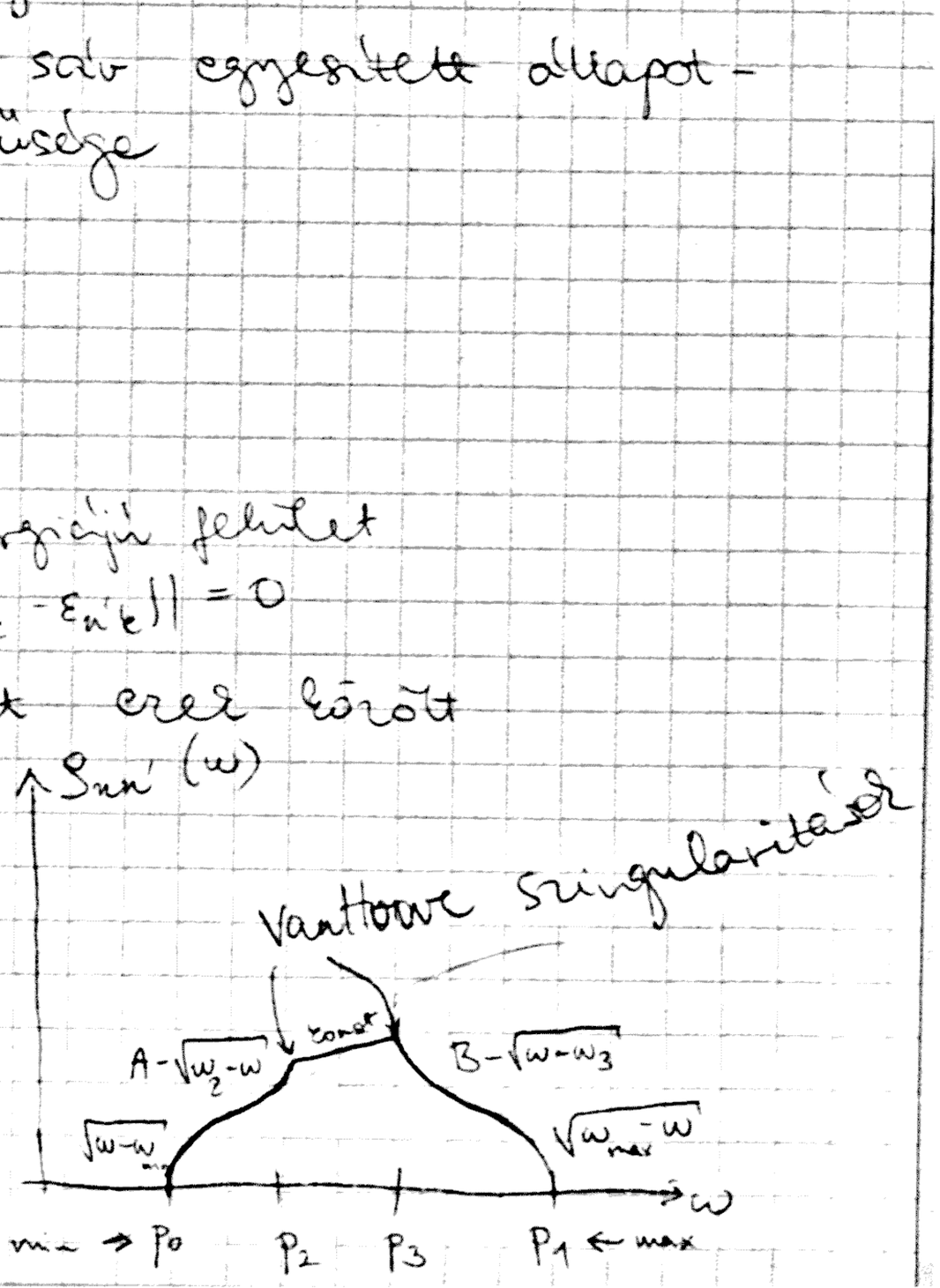
↑ konstans energiájú felület

jellegzetes pontok: $|\nabla_\xi(\varepsilon_{n\xi}-\varepsilon_{n'\xi})| = 0$

$\Rightarrow$ sorfejtve ξ szerint erre korlátt

- min
- max
- nyeregpont

ebből mérhetőek a sáv-szerkezet tulajdonságai



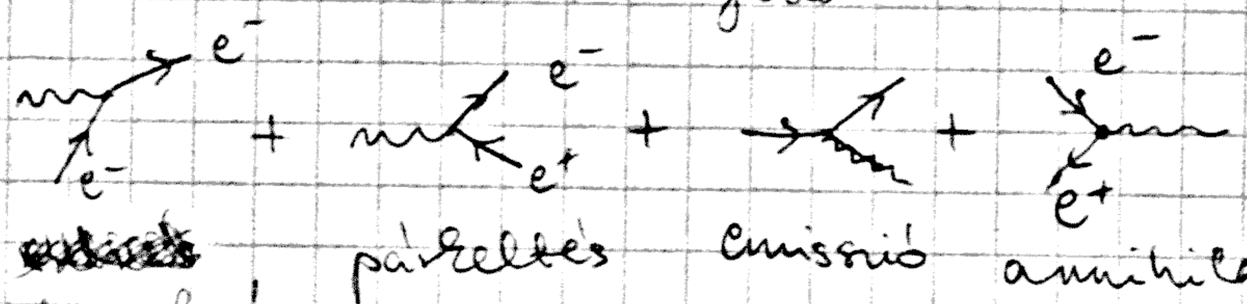
Kváziklasszikus közelítés:

$$\mathcal{H} = \sum_i \left[\frac{1}{2m_e} \left(\vec{p}_i + e\vec{A}(\vec{r}_i) \right) + U(\vec{r}_i) \right]$$

1) $\vec{A}$ -ban lineáris tagig megyünk el

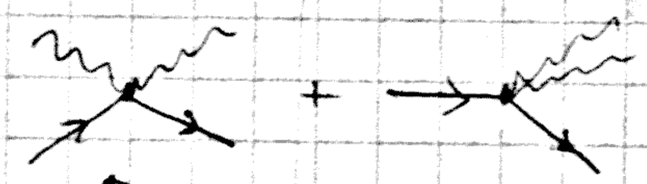
$$\mathcal{H}_{int} = -\sum_i \frac{ie\hbar}{m_e} \vec{A}(\vec{r}_i)\vec{\nabla}_i$$

$\vec{A}$ és $\vec{E}$ kifejthető $\uparrow$ fotom kelő + eltünteto operatorokkal



abszorbció párkeltés emisszió annihiláció ← infravörös spektroszkópia

A^2 -es tag, két fotonos folyamatok

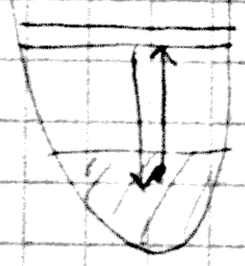


↑ Raman szórás

— pl mérheto és fontos információkkal szolgál

↳ Fermi - felület környéki viselkedés

Raman-spektroszkópia



a kétfele spektroszkópia komplementer méréci eszköz

Elektron - fonon kölcsönhatás:

$m_e \ll M_{ion}$

⇓

ionok mozgását elektronok azonnal követik

⇓

Szét tudjuk választani a rendszer szabadsági fokait: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ion} + \mathcal{H}_{el}$ ← elektron rendszer $+ \mathcal{H}_{el\text{-}ion}$

↑ rövid hatótávolságú erő fononok / rácsrezgések

tovább-lassú rács körüli

$\mathcal{H}_{el\text{-}ion} = V_{el\text{-}ion}(\{\vec{r}_i\}\{\vec{R}_\ell\}) = V_{el\text{-}ion}\left(\{\vec{r}_i\}\{\vec{R}_\ell^{\,0} + \vec{u}_\ell(\vec{R}_\ell^{\,0})\}\right)$

hőmérséklet messze az elvadásponttól → elegendően stabil rács

u_ℓ : egyensúlyi helyzettől való kitérés

kicsi → harmonikus közelítés

$$= V_{el\text{-}ion}\left(\{\vec{r}_i\},\{\vec{R}_\ell^{\,0}\}\right) + \sum_\ell \vec{u}_\ell(\vec{R}_\ell^{\,0}) \left.\frac{\partial V_{el\text{-}ion}(\{\vec{r}_i\}\{\vec{R}_\ell\})}{\partial \vec{R}_\ell}\right|_{u_\ell(R_\ell)=0}$$

↓ periodikus pot. →

nem a kölcsönhatás része

Tell valami közelítés adni, hogyan függ az elektron koordinátáitól → többtest erőt elhanyagolhatók általában ⇒ egyelektron energiák összege

$$V_{el\text{-}ion}(\{\vec{r}_i\}\{\vec{R}_\ell^{\,0}\}) = \sum_i V_{el\text{-}ion}(\vec{r}_i, \{\vec{R}_\ell^{\,0}\})$$

$$\mathcal{H}_{el\text{-}ion} = \sum_{\ell,i} \vec{u}_\ell(\vec{R}_\ell^{\,0}) \frac{\partial V_{el\text{-}ion}(\vec{r}_i, \{\vec{R}_\ell^{\,0}\})}{\partial \vec{R}_\ell^{\,0}}$$

$$\vec{u}(\vec{R}_\ell^{\,0}) = \sum_{\lambda,\vec{q}} \sqrt{\frac{\hbar}{2MN\omega_\lambda(\vec{q})}}\, \vec{e}_\lambda(\vec{q})\, e^{i\vec{q}\vec{R}_\ell^{\,0}} \left(a_{\vec{q}\lambda} + a^+_{-\vec{q}\lambda}\right)$$

↑ polarizáció ↑ hullámszám

$$\left[a_{\vec{q}\lambda}, a^+_{\vec{q}'\lambda'}\right] = \delta_{\vec{q}\vec{q}'}\delta_{\lambda\lambda'}$$

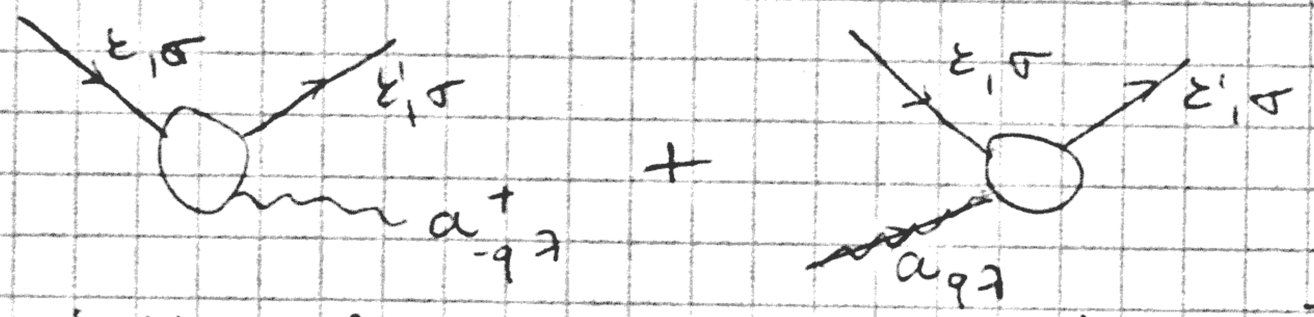
másodkvantált formalizmus

$$\sum_i f(\vec{r}_i) = \sum_{\xi,\xi',\sigma} \int d\vec{r}\, \Psi^+_{\xi'\sigma}(\vec{r}) f(\vec{r}) \Psi_{\xi\sigma}(\vec{r})\, c^+_{\xi'\sigma} c_{\xi\sigma}$$

↳ egyrészecskés operátor alakja ⇒

$$\mathcal{H}_{el\text{-}ion} = \sum_{q,\lambda}{}' \sum_{\xi,\xi',\sigma} D_{\lambda,\sigma}(\xi',\xi,q)\, c^+_{\xi'\sigma} c_{\xi\sigma} \left(a_{q\lambda} + a^+_{-q\lambda}\right)$$

↑ deriválttal és a tenzor faktorok

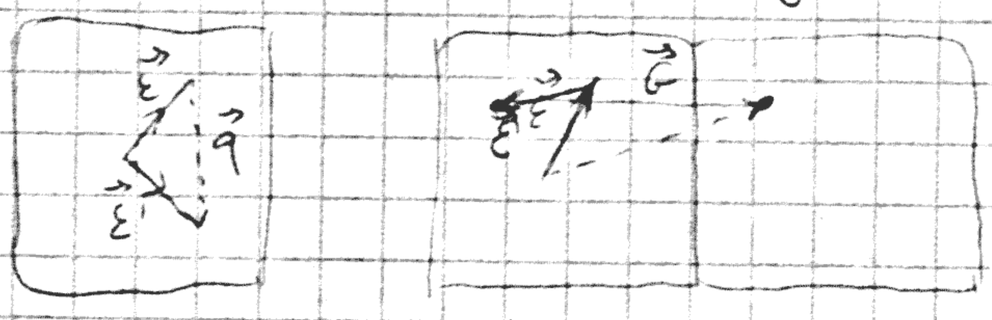


tvázisimpulzus megmaradás : $\vec{\varepsilon} + \vec{q} = \vec{\varepsilon}' + \vec{G}$ ← reciprokrács vektor

kölcsönhatás $|\vec{R}_\ell^\circ - \vec{r}_i|$ - tól függ, mindent (9) el lehet tolni rácsvektorral, amiből lesz egy fázisfaktor

$$e^{i(\vec{\varepsilon}-\vec{\varepsilon}')R_\ell^\circ} \underbrace{\int d\vec{r}\ \Psi^+_{\varepsilon'\sigma}(\vec{R}_\ell^\circ - \vec{r})\, \vec{e}_{q\lambda}\, \frac{\partial V_{ellion}(\vec{R}_\ell^\circ - \vec{r})}{\partial \vec{R}_\ell^\circ}\, \Psi_{\varepsilon\sigma}(\vec{R}_\ell^\circ - \vec{r})}_{\vec{R}_\ell^\circ \text{ - tól független}}$$

Bz.



visszatranszformáció

még mindig túl bonyolult

hosszúhullámú limesz → folytonos változó a diszkrét rácsvektorok helyett

$R_\ell^\circ \to r$

$$\sum_\ell e^{i(\vec{\varepsilon}'-\vec{\varepsilon}+\vec{q})\vec{R}_\ell^\circ} = N\,\delta_{\vec{\varepsilon}-\vec{\varepsilon}'+\vec{q}}$$

elektronokra ható erő rövid hatótávolságú és a töltéssűrűség változásától függ

⇒

Deformációs potenciál közelítés

$\frac{\delta V}{V}$ relatív térfogatváltozás $= \frac{\partial \vec{u}(\vec{r})}{\partial \vec{r}} \equiv \Delta(\vec{r})$

$U_{def} = C\,\Delta(\vec{r})$ $\quad H_{def} = C \int \Delta(\vec{r})\, n_e(\vec{r})\, d\vec{r}$

$$n_e(\vec{r}) = \sum_{\varepsilon\varepsilon'\sigma} e^{i(\vec{\varepsilon}-\vec{\varepsilon}')\vec{r}}\, u^*_{\varepsilon'\sigma}(\vec{r})\, u_{\varepsilon\sigma}(\vec{r})\, c^+_{\varepsilon'\sigma} c_{\varepsilon\sigma}$$

$$\Delta(\vec{r}) = i \sum_{q,\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2MN\omega_\lambda(q)}}\, \vec{e}_\lambda(\vec{q})\, e^{i\vec{q}\vec{r}}\, (a_{q\lambda} + a^+_{-q\lambda})\, \vec{q}$$

látható, hogy ebben a longitudinális fotonok adnak járulékot, mert a longitudinális mozgás során térfogatváltozást

⇒ 1. deformációs pot. közelítés ⇒ longitudinális fononokra jó

2. akusztikus fononokra $\omega_\lambda(q) = cq \Rightarrow \Delta(r) \sim \sqrt{q}$
$q \to 0$ eltűnik

Optikai fononokra:

eldeformálják a rácsot, feltöltik polarizáció

$$\vec{P} = F \sum_q \vec{e}(q)\left(b_q e^{i\vec{q}\vec{r}} + b_{-q}^{+} e^{-i\vec{q}\vec{r}}\right)$$

úgy írjuk le a longitudinális optikai fononokat

$$\vec{e}(q) = \frac{\vec{q}}{q}$$

szabad töltés nincs, $\operatorname{div}\vec{D} = 0 \Rightarrow \vec{q}\vec{D} = 0$

$$\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = 0$$

$$\vec{E} = -F \sum_q \frac{\vec{q}}{q} \frac{1}{\varepsilon_0}\left(b_q e^{i\vec{q}\vec{r}} + b_{-q}^{+} e^{i\vec{q}\vec{r}}\right)$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\Phi \qquad \Phi(\vec{r}) = -i\frac{F}{\varepsilon_0}\sum_q \frac{1}{q}\left(b_q e^{i\vec{q}\vec{r}} + b_{-q}^{+} e^{-i\vec{q}\vec{r}}\right)$$

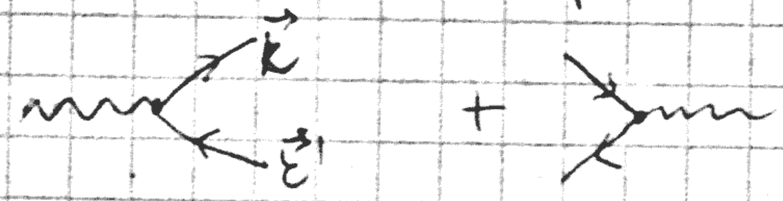
ellentétben az akusztikus fononokkal az optikai fononokról a $q \to 0$ is kimegy

$$\mathcal{H}_{el\text{-}ion} = -e\int d\vec{r}\,\Phi(\vec{r})\rho(\vec{r})$$

$$F^2 = \frac{\hbar\omega_{LO}\varepsilon_0}{2V}\left(\frac{1}{\varepsilon_r(\infty)} - \frac{1}{\varepsilon_r(0)}\right)$$ szigetelőre, félvezetőre

akusztikus fonon - elektron csatolás

$$q \sim \sqrt{q}\sqrt{\frac{m}{M}}$$

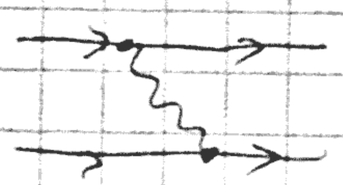


elsőrendű folyamatok
elektron - lyuk párkeltés, rekombináció



az elektront a fononok feloldoztatik → mérhető

fonon energia renormálódik



fermionok körüli boron cserélődés varró tölcsönhatás (első rendben mindig) ezzel magyarázzuk a szupravezetést

↳ átmeneti valószínűség

$$W_{\vec{\varepsilon}\vec{\varepsilon}'} = \frac{2\pi}{\hbar}\sum_q \left|\langle \vec{\varepsilon} - \vec{q}\,|q|\,\mathcal{H}_{el\text{-}ion}\,|\vec{\varepsilon}\rangle\right|^2 \delta(\varepsilon_\varepsilon - \varepsilon_{\varepsilon-q} - \hbar\omega_q)$$

$$\frac{1}{\tau_\varepsilon} = W = \frac{2\pi}{\hbar}\sum_q \left|\langle \vec{\varepsilon} - \vec{q}\,|q|\,\mathcal{H}_{el\text{-}ion}\,|\vec{\varepsilon}\rangle\right|^2 \delta(\varepsilon_\varepsilon - \varepsilon_{\varepsilon-q} - \hbar\omega_q) + \left|\langle \vec{\varepsilon}'\,|\,\mathcal{H}_{el\text{-}ion}\,|\varepsilon, |q\rangle\right|^2 \delta(\varepsilon_\varepsilon + \hbar\omega_q - \varepsilon_{\varepsilon+q})$$

$$\tilde{\varepsilon}_\ell = \varepsilon_\ell + \sum \frac{|\langle \vec{k}-\vec{q},\lambda | \mathcal{H}_{elfon} | \vec{\ell} \rangle|^2}{\varepsilon_\ell - \varepsilon_{\ell-q} - \hbar\omega_q} + \frac{|\langle \vec{\ell}+\vec{q} | \mathcal{H}_{elfon} | \vec{\ell}, 1_q \rangle|^2}{\varepsilon_\ell - \varepsilon_{\ell+q} + \hbar\omega_q}$$

$$\mathrm{Im}\, \tilde{\varepsilon}_\ell \left(\varepsilon_\ell \to \varepsilon_\ell + \delta\right) = -\pi \frac{1}{\tau_\ell}$$

$T \neq 0$ pontosabban $\ell \approx \varepsilon_F$ → betöltési számok figyelembe vétele → mindenhova Fermi-eloszlásfv.
Így a hőmérsékletfüggést is meg lehet kapni

$\varepsilon_F T \ll \hbar\omega_D$ $\quad \varepsilon_\ell \sim \varepsilon_F$ $\quad \omega_D \to$ fononok levágási frekvenciája

$\frac{1}{\tau} \sim T^3$

ha $\varepsilon_F T \sim \hbar\omega_D$, akkor $\frac{1}{\tau} \sim T$

elektronállapot energiája megváltozik, mert fononok vannak körülötte

$$|\ell\rangle^{(1)} = |\ell\rangle + \sum_{q,\lambda} \frac{\langle \ell - q,\lambda | q | \mathcal{H}_{elfon} | \ell \rangle}{\varepsilon_\ell - \varepsilon_{\ell-q} - \hbar\omega_q}$$

↑ elsőrendű perturbációszámítás

↑ nem változtat fononon

↑ ~~nem változtat fonon~~ keltett egy fononit

$$\Rightarrow {}^{(1)}\langle n_{fonon} \rangle = {}^{(1)}\langle \ell | \sum_{q,\lambda} a^+_{q\lambda} a_{q\lambda} | \ell \rangle^{(1)} =$$

$$= \sum_{\lambda} \sum_{q} \frac{|\langle \ell - q,\lambda, q | \mathcal{H}_{elfon} | \ell \rangle|^2}{(\varepsilon_\ell - \varepsilon_{\ell-q} - \hbar\omega_q)^2}$$

vezető rendben a fononok száma

deformációs pot. törzelítésben

$$|\langle \ell | \ell \rangle|^2 \approx \frac{C^2 \hbar N |q|}{2MC}$$

↑ átmeneti mátrixelem

↑ ion tömeg

↑ hangseb.

felvezetőnél $\varepsilon \approx 0$ $\quad \langle n_{fonon} \rangle = \frac{1}{\pi^2} \frac{m^* N C^2}{\hbar^3 C M} \ln \frac{q_{max}}{q_{min}}$

$\langle n_{fonon} \rangle \sim 10^{-2} - 10^{-3}$ akusztikus fononokra

egy elektront tevés akusztikus fonon vesz körül

optikai fononok esetén hogyan változik fel az elektront? 11.15.

$$\tilde{\varepsilon}_\ell = \varepsilon_\ell + \sum \frac{|\langle \ell - q,1_q | \mathcal{H}_{elfon} | \ell \rangle|^2}{\varepsilon_\ell - \varepsilon_{\ell-q} - \hbar\omega_q} + \frac{|\langle \ell + q | \mathcal{H}_{elfon} | \ell, 1_q \rangle|^2}{\varepsilon_\ell - \varepsilon_{\ell+q} + \hbar\omega_q}$$

$$\langle n_{fonon} \rangle = \sum_q {}^{(1)}\langle \ell | a^+_q a_q | \ell \rangle^{(1)}$$

optikai fonon → longitudinális az érdekes

energiája $\approx \hbar\omega_{LO}$

$$\langle n_{fonon}\rangle = \frac{e^2}{16\pi\varepsilon_0\hbar\omega_{LO}}\left(\frac{2m\omega_{LO}}{\hbar}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{\varepsilon_r(\infty)}-\frac{1}{\varepsilon_r(0)}\right)$$

szórásos jelölés $\langle n_{fonon}\rangle = \frac{1}{2}\alpha$ → megváltozik a diszperziós

$$\tilde{\varepsilon}_k = \varepsilon_k - \alpha\left(\hbar\omega_{LO} + \frac{\hbar^2k^2}{12m}\right)$$

perturbáció ↑ sávtömeg első rendjében

$\varepsilon_k = \frac{\hbar^2k^2}{2m}$ → ↳ olyan mintha a tömeg megváltozna: $\frac{m^*}{1-\frac{\alpha}{6}} = m$ $\quad m^* \approx m\left(1+\frac{\alpha}{6}\right)$ a felöltöztetett tömeg a perturbáció első rendjében

elektron + fononfelhő = polaron

polaron tömege m^* , mérete ?

energiabizonytalansága az elektronnak $\Delta\varepsilon \sim \hbar\omega_{LO}$

$$\frac{\hbar^2(\Delta k)^2}{2m} = \hbar\omega_{LO} \qquad (\Delta x)(\Delta p) \approx 1$$

(bizonytalanság)

csupasz elektron helybizonytalansága = polaron mérete $r_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_{LO}}}$

ennek akkor van értelme ha $r_0 >> a$ → nagy polaron

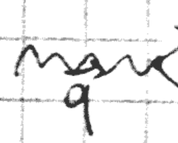
félvezetőben, kristályokban α nagyságrendje 1-3 (effektív tömeg mérhető) $\quad r_0 \sim (10-100)a$

r_0 ha összemérhető a -val $(\alpha > 3)$ ⇒ kis polaron

fononokkal való kölcsönhatás az elektronállapotok véges élettartamához vezet, és meg tud növekedni az effektív tömeg

na de mi történik a fononokkal a kölcsönhatáskor?

jelen $\hbar\omega_q \ll \varepsilon_F$



Fermi tengerben elektron - lyuk állapot

$$|k+q, k\rangle = c^+_{k+q} c_k |FS\rangle$$

$$\hbar\tilde{\omega}_q = \hbar\omega_q + \sum_k \frac{|\langle k, k+q | \mathcal{H}_{elph} | 1_q \rangle|^2}{\hbar\omega_q - (\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k)}$$

$\varepsilon_{k+q} > \varepsilon_F$, $\varepsilon_k < \varepsilon_F$

$(1 - n_F(\varepsilon_{k+q}))(n_F(\varepsilon_k))$

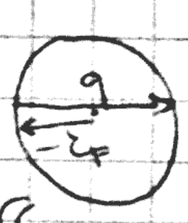
ε_{k+q} üres, ε_k betöltött

kerdetbe

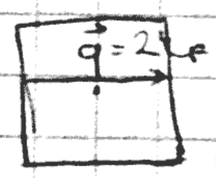
$|\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k| \gg \hbar\omega_q$

$$\hbar\tilde{\omega}_q = \hbar\omega_q + g^2 \sum_k \frac{n_F(\varepsilon_k)[1 - n_F(\varepsilon_k - q)]}{\hbar\omega_q - (\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k)}$$

$\varepsilon_{k+q} \cong \varepsilon_k$ $q \neq 0$

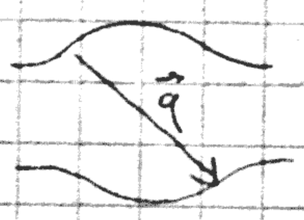


$q \approx 2k_F$

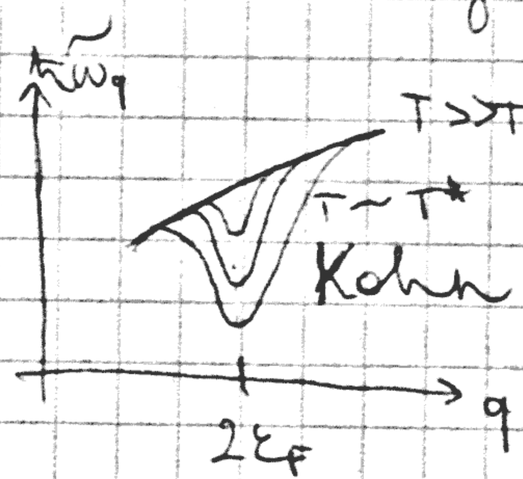


⇔ 1 pontba → 0 a nevező ⇔ negyes tart.-ban

ha a Fermi - felületnek vannak közel párhuzamos részei → nesting



nagy tartományban kicsi a nevező



$$(\hbar\tilde{\omega})^2 = (\hbar\omega_q)^2 - \hbar\omega_q g^2 \sum_k \frac{n_F(\varepsilon_k)[1 - n_F(\varepsilon_{k+q})]}{\hbar\tilde{\omega}_q - (\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k)}$$

ez a pontosabb kifejezés

mi van ha a megoldás $\hbar\tilde{\omega}_q \to 0$ ($q \cong 2k_F$ -nél)?

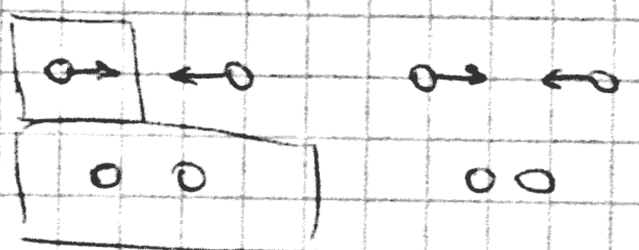
állandó rácstorzulás (végtelen polarizálhatóságú fonon)

1Dimenzióstent a megoldás

$$k_B T_c = 1{,}28 \varepsilon_F e^{-\frac{\hbar\omega_{q=2k_F}}{g^2 g(\varepsilon_F)}}$$

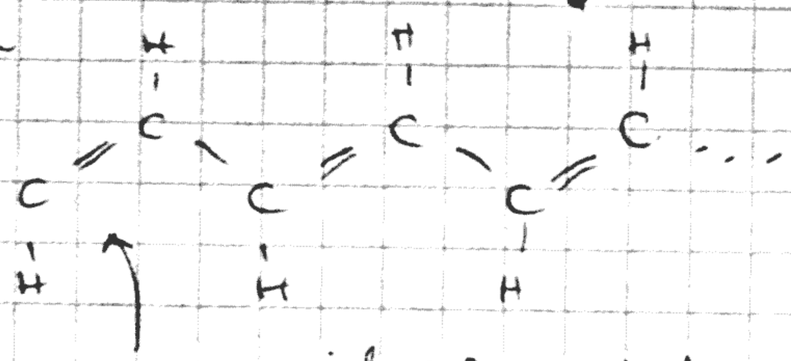
$(\hbar\tilde{\omega}_{q=2k_F} = 0)$

elemi cella a



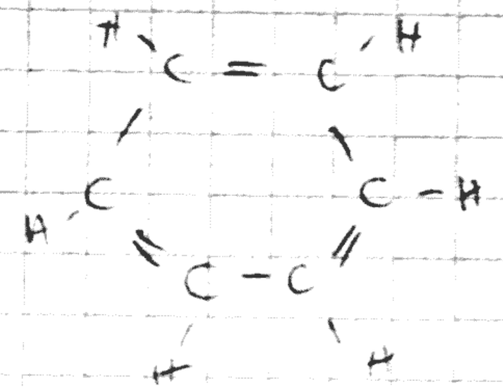
Eltorzítás lett → Peierls átalakulás

polyacetilén



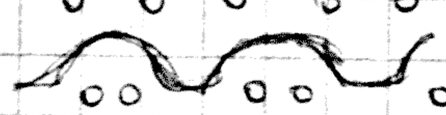
ez rövidebb mint az egyes kötés

benzol



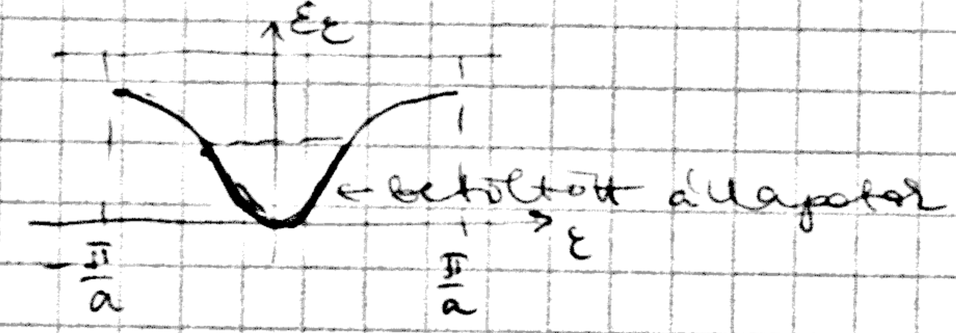
vagy  de 

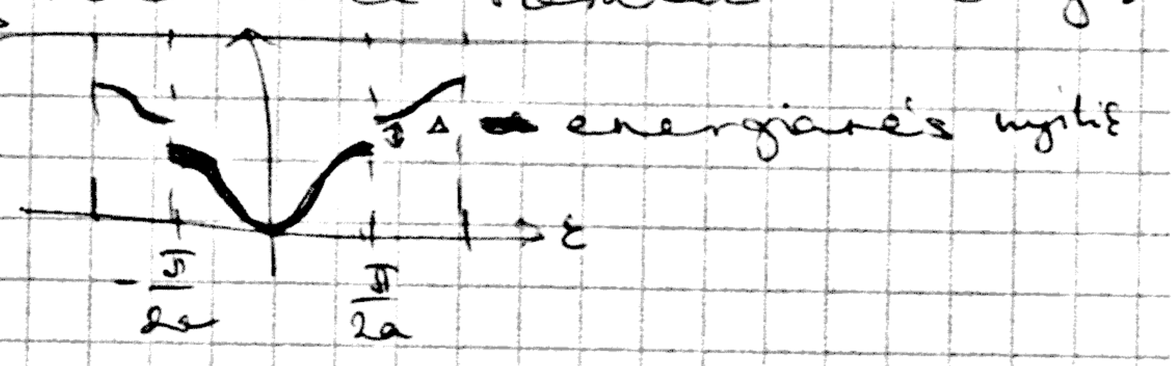
bennehúl a C-C távolságok ugyanazok tehát tudnak delokalizálódni az elektronok a poliacetilén "végtelen" hosszú így nem tudnak delokalizálódni az elektronpályák.
Peierls torzulás csak néhány %-os a rácstávolságok csak kicsit különböznek



a töltéssűrűségben kialakul egy hullám, aminek a hullámhossza a Peierls torzulás távolsága
Ezért egydimenziós anyagokon (neha 2D) meg lehet figyelni

1D-s anyag elektron-fonon kölcsönhatás következtében instabil a torzulással szemben mindig:

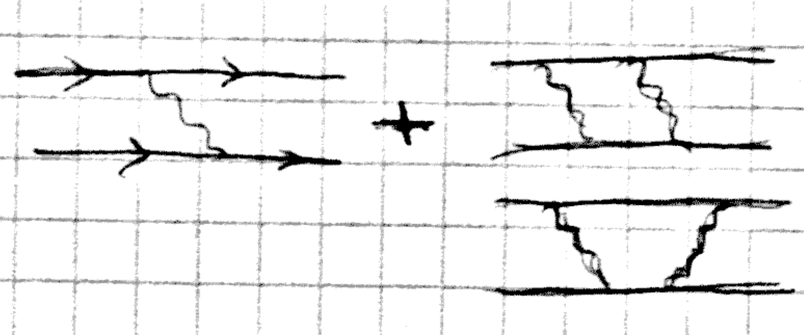




kinetikus energia > rácstorzulásból származó energia

poliacetilénnél pl. H helyére nagyobb elektronegativitású oldallánc → szénláncban lyukak lesznek az elektronállapotokban → szabad töltéshordozók lesznek → jobb vezető, mint a réz

Elektronok közötti fononkicserélődés:



egy időpillanatban egy fonon fononüzletre - elektronok közötti fononkicserélődés

$$\mathcal{H} = \sum \varepsilon_\xi c_\xi^+ c_\xi + \sum \hbar\omega_q a_q^+ a_q + i \sum D_q c_{\xi+q}^+ c_\xi (a_q + a_{-q}^+)$$

Frohlich

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \lambda \mathcal{H}_1$ $\quad \tilde{\mathcal{H}} = e^S \mathcal{H} e^{-S}$ kanonikus trafó úgy, hogy $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{O}(\lambda^2) + \mathcal{O}(\lambda^3) + \dots$

$\lambda \mathcal{H}_1 + [S, \mathcal{H}_0] = 0$ → úgy transzformáljuk ki $\mathcal{H}_1$-nek mátrixeleme $\neq 0$ ha fononok száma a két állapotban eggyel különbözik ⇒ S is ilyen

$$\langle (n+1)_q | S | n_q \rangle = i D_q \sum_\varepsilon c^+_{\varepsilon - q} c_\varepsilon \frac{1}{\varepsilon_\varepsilon - \varepsilon_{\varepsilon-q} - \hbar\omega_q}$$

$$\langle n_q | S | (n+1)_q \rangle = i D_q \sum_{\varepsilon'} c^+_{\varepsilon'+q} c_{\varepsilon'} \frac{1}{\varepsilon_{\varepsilon'} - \varepsilon_{\varepsilon'+q} + \hbar\omega_q}$$

$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{eff}$ $(\mathcal{O}(T^2))$

$$\mathcal{H}_{eff} = \sum_q D_q^2 \sum_{\varepsilon\varepsilon'} c^+_{\varepsilon+q} c_{\varepsilon'} c^+_{\varepsilon-q} c_\varepsilon \frac{\hbar\omega_q}{(\varepsilon_\varepsilon - \varepsilon_{\varepsilon-q})^2 - \hbar^2\omega_q^2}$$

ha $|\varepsilon_\varepsilon - \varepsilon_{\varepsilon-q}| < \hbar\omega_q$

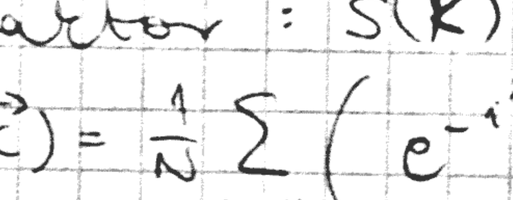
↳ vonzó csatolás elektronok között !!!!!!!!

$|\varepsilon_\varepsilon| \gg \hbar\omega_q$

$\sum_\varepsilon c^+_{\varepsilon-q} c_\varepsilon = \rho_q$ ← elektronsűrűség Fourier-transzformáltja

mit mérünk szóráskísérletekben?

neutronszórás



$\Delta\vec{k} = \vec{k} - \vec{k}'$

$\Delta E = E_k - E_{k'}$

anyag gerjesztéseit tudjuk mérni

röntgen-szórásnál kicsi az impulzusátadás a rácsrács sűrűségével hat erősen, tehát a folyamatot sűrűség-sűrűség korrelációs fv. írja le

sűrűségoperátor $\sum_i \delta(\vec{r} - \vec{R}_i) \xrightarrow{FT} \sum_i e^{-i\vec{k}\vec{R}_i}$

struktúra faktor: $S(\vec{k})$ $\vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon}' \to \vec{k}$

$$S(\vec{k}) = \frac{1}{N} \sum_{m,n} \left(e^{-i\vec{k}\vec{l}_m} e^{i\vec{k}\vec{l}_n} \right)$$

$\vec{R}_m \to \vec{R}_m + \vec{u}(m,t)$

dinamikus struktúra faktor definíciója:

$$S(\vec{k},\omega) = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t} \sum_{m,n} \left\langle e^{-i\vec{k}(\vec{R}_m + \vec{u}(m,t))} e^{i\vec{k}(\vec{R}_n + u(n,0))} \right\rangle$$

$$S(\vec{k},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t} \sum_{m,n} e^{-i\vec{k}(\vec{R}_m - \vec{R}_n)} \left\langle e^{-i\vec{k}\vec{u}(m,t)} e^{i\vec{k}\vec{u}(n,0)} \right\rangle$$

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]}$$

$$C = \sum_q \left(\gamma_q a_q + \gamma_q^* a_{-q}^+ \right)$$

$$\langle e^{iC} \rangle = e^{-\frac{1}{2}\langle C^2 \rangle}$$

$$\langle e^{iA} e^{iB} \rangle = e^{-\frac{1}{2}\langle A^2 \rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle B^2 \rangle} e^{-\langle AB \rangle}$$

$$A = -i\vec{K}\vec{u}(m,t) \qquad B = i\vec{K}\vec{u}(n,0)$$

$$e^{-\frac{1}{2}\langle (\vec{K}\vec{u}(m,t))^2 \rangle} = e^{-W}$$

$$S(\vec{K},\omega) = e^{-2W} \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t} \sum_{m,n} e^{-i\vec{K}(\vec{R}_m - \vec{R}_n)} \left(1 + \dots\right)$$

↑ független lesz időtől és helytől

↑ sorba fejtettük az $e^{\langle AB \rangle} = 1 +$

$$\sum_n e^{-i\vec{K}(\vec{R}_n - \vec{R}_m)} = \delta_{\vec{K},\vec{G}}$$

$\vec{K}$ átadott impulzus - reciprokrács vektor

Bragg - csúcsok

$$W = \frac{1}{2}\langle (\vec{K}\vec{u}(m,t))^2 \rangle = \sum_q \frac{\hbar}{MN\omega_\lambda(q)} \left(\vec{K}\vec{e}_m\right)^2 \left(n_\lambda(q) + \frac{1}{2}\right)$$

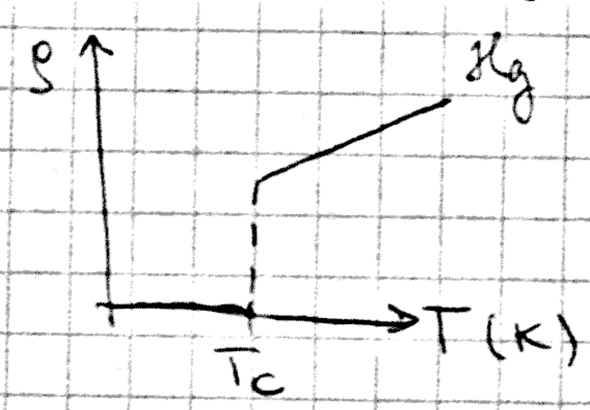
↑ polarizációja az $\omega_\lambda(q)$

↑ Debye-Waller faktor

(csökken ▲ fononnal az intenzitás)

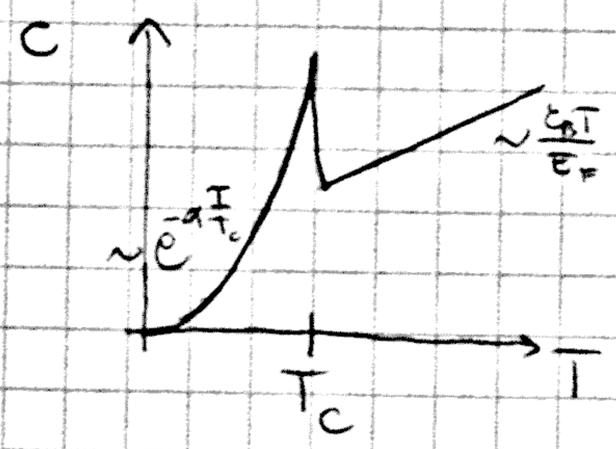
11.18.

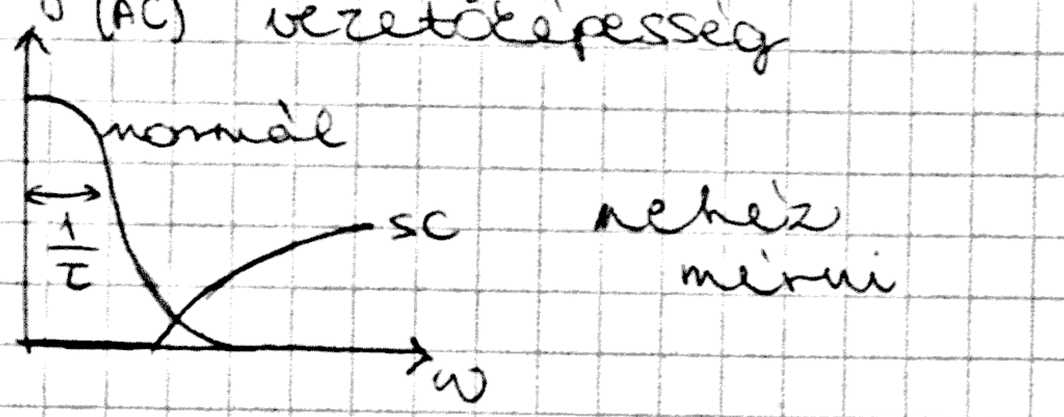
Szupravezetés fenomenologikus elmélete:



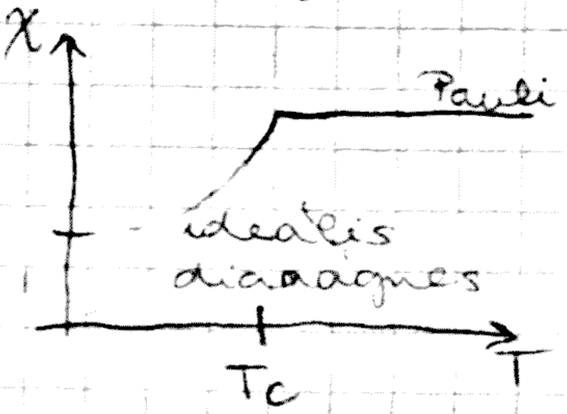
permanens áram folyik

$\rho(T < T_c) \approx 0$





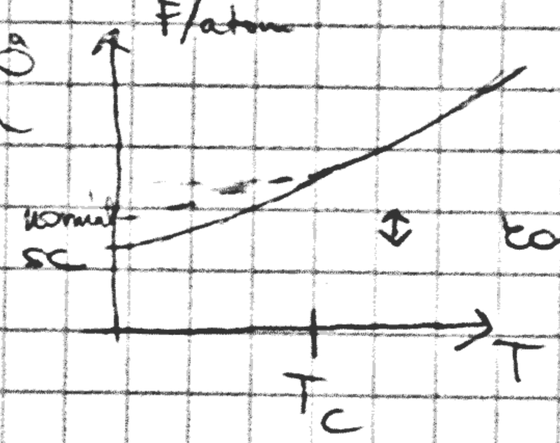
mágneses tulajdonságot mutatják jól, hogy szupravezetővé vált az anyag szuszceptibilitásméréshez bármilyen minta jó nekünk



elég ha a minta egy részre válik szupravezetővé így is látjuk a törést

tiszta anyagnál -1- be vagy a szuszceptibilitás → ideális diamágnes

egy atomra eső szabad energia

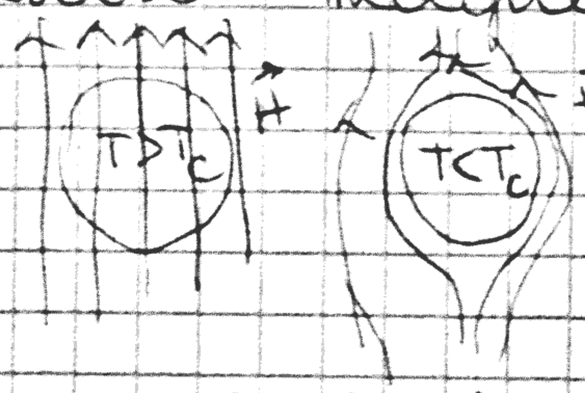


↕ kondenzációs energia

$\sim \frac{(k_B T_c)^2}{E_F} \ll 1$

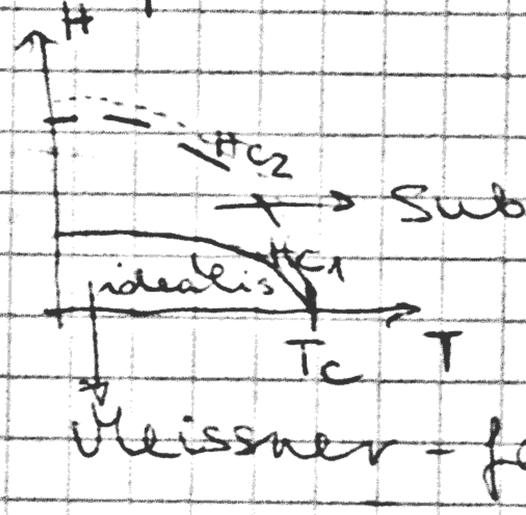
az elektronok csak kis részre vesz részt a szupravezetésben

mintát mágneses térbe helyezzük ($\mu_r \approx 1$)



T_c alatt kiszorítja a mágneses teret

ha növeljük a mágneses teret megszűnik a szupravezetés



anyagfüggő, hogy van-e H_{c_2}

→ Schubnikov fázis → részben behatol a mágneses tér

pici effektus energia szempontjából

$T_c \sim e^{-\frac{1}{g}}$ (nem perturbatív elmélet)

London-elmélet: (London testvérek 20-as évek)

$$\vec{j}_s = -e^* n_s^* \vec{v}_s \quad , \quad m^* \frac{d\vec{v}_s}{dt} = -e^* \vec{E}$$

$$\frac{d\vec{j}_s}{dt} = \frac{n_s^* e^{*2}}{m^*} \vec{E} \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{B} + \frac{m^*}{n_s^* e^{*2}} \operatorname{rot} \vec{j}_s\right) = 0$$

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{j}_s = -\frac{n_s^* e^{*2}}{m^*} \vec{B}} \quad \text{London I.}$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad , \quad \vec{j}_s = -\frac{n_s^* e^{*2}}{m^*} \vec{A}$$

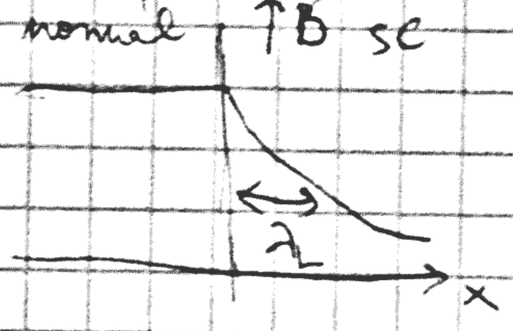
$\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\ell$ mértékinvarianciát sérti

$$\lambda_L^2 = \frac{m^*}{n_s^* e^{*2} \mu_0}$$

$$\vec{B} = -\mu_0 \lambda_L^2 \, \mathrm{rot}\, \vec{j}_s$$

$$\frac{1}{\mu_0} \mathrm{rot}\, \vec{B} = \vec{j}_s \rightarrow$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, \vec{B} = -\frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B}$$

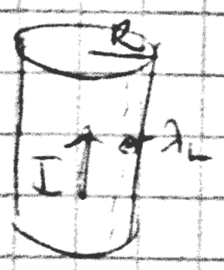


itt a megoldás: $B = \begin{cases} B_0 & x < 0 \\ B_0 e^{-\frac{x}{\lambda_L}} & x > 0 \end{cases}$

λ_L: London-féle behatolási mélység

$30\,\mathrm{nm} < \lambda_L < 2000\,\mathrm{nm}$

$j_s \neq 0 \quad \lambda_L > x > 0 \rightarrow$ felületben folyik az áram



$$I = 2\pi R \lambda_L^2 j_s$$

$$\vec{j}_s = \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \vec{B}$$

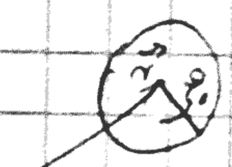
$$I = 2\pi R \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

$$I < 2\pi R \frac{B_c}{\mu_0}$$ maximális áram

$\vec{j}_s \sim \vec{A}$ lokális, London, másodfajú (II) szupravezető

$$\vec{j}_s = \frac{3}{4\pi\mu_0} \frac{1}{\xi_0 \lambda_L^2} \int d\vec{r}' \frac{\vec{R}\left[\vec{R}\vec{A}(\vec{r}')\right]}{R^4} e^{-\frac{R}{\xi_0}}$$

$\vec{R} = |\vec{r} - \vec{r}'|$



Pippard, nemlokális, elsőfajú szupravezető

$\Delta E \approx k_B T_c$ Fermi-felület környékén

ΔE: energiabizonytalanság

$$\Delta p = \frac{k_B T}{\Delta E}$$

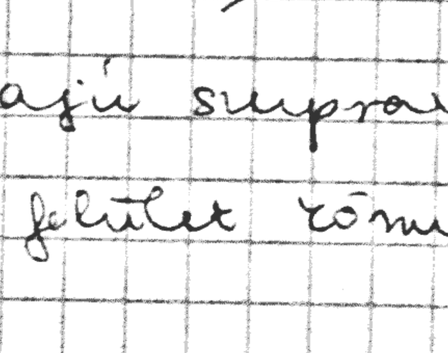
$$\Delta x > \frac{\hbar}{\Delta p} \approx \frac{\hbar v_F}{k_B T_c}$$ ξ_0 nagyságrendileg Δx

$1,2\,\mathrm{nm} < \xi_0 < 2000\,\mathrm{nm}$ anyagtól függően

λ_L és ξ_0 nagyságrendje alapján I v. II fajú

Fluxuskvantálás:

gyűrű alakú minta



$$\oint \vec{p}\, d\vec{\ell} = n\hbar \quad \text{(Bohr)}$$

$$\vec{p} = m^* \vec{v}_s - e^* \vec{A}$$

$$\oint_C e^* \vec{A}\, d\vec{\ell} = n\hbar \rightarrow e^* \int_F d\vec{S}\, \underbrace{\mathrm{rot}\, \vec{A}}_{\vec{B}} = n\hbar$$

$$e^* \underbrace{\int_P d\vec{S}\,\vec{B}}_{\Phi} = nh$$

$$\Phi = n\frac{h}{e^*} = n\Phi_0$$

fluxus ↑ egész szám ← $2e$ ↳ elemi fluxus

rossz feltevések vannak az elméletben, de jók a következtetések

termodinamika:

T, V rögzített $F = E - TS$ Helmholtz } szabad energia

T, p rögzített $G = E - TS + pV$ Gibbs

$\delta V = 0$ (elhanyagolható)

mágneses tér: $\delta\mathcal{E} = Td\mathcal{S} + \mu_0 \vec{H}\delta\vec{M}$

↑ belső energia térfogat egységre

$\delta\mathcal{E} = Td\mathcal{S} + \mu\vec{H}\delta\vec{M} + \mu_0\vec{H}\delta\vec{H} = Td\mathcal{S} + \vec{H}\delta\vec{B}$

$\delta f(T,B) = -\mathcal{S}dT + \vec{H}\delta\vec{B}$

$\vec{H}$-t fixen: $\delta g(T,H) = -\mathcal{S}dT - \vec{B}d\vec{H}$

$$\mathcal{S} = -\left.\frac{\delta g(T,H)}{\delta T}\right|_H \quad , \quad \vec{B} = \left.\frac{\delta g(T,H)}{\delta H}\right|_T$$

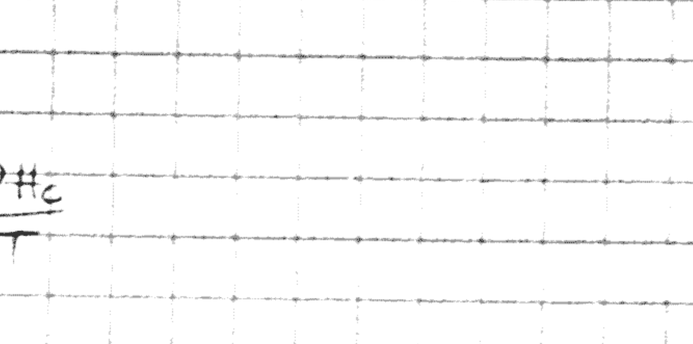
$$g(T,H) = g(T,0) - \int_0^H dH'\, B(H')$$

normál állapot: $\mu_n \approx 1 \quad B = \mu_0 H$

$$g_n(T,H) = g_n(T,0) - \frac{\mu_0 H^2}{2}$$

szupravezető állapot: $B = 0$

$$g_s(T,H) = g_s(T,0)$$



definíció: szupravezető és normál állapotra $g_s(T,0) - g_n(T,0) = -\frac{1}{2}\mu_0 H_c^2$

termodinamikai kritikus tér → elválaszt normál tőle H_{c_1} és H_{c_2}-höz

$$g_s(T,H) = g_n(T,H) + \frac{1}{2}\mu_0\left(H_c^2 - H_c^2\right)$$

$$s_s - s_n = \mu_0 H_c \frac{dH_c}{dT}$$

latens hő $q = T(s_n - s_s) = -T\mu_0 H_c \frac{dH_c}{dT}$

$q=0$ ha $T=0$ vagy $H_c=0$, $T=T_c$

elsőrendű a kivétel $T=0$ v. T_c esetén

fázisátmenet

tiszta fémre: $H_c(T) = H_c(0)\left(1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right)$

Landau - Ginzburg - Bogoljubov - deGennes

$T<T_c$ esetén létezik $\neq 0$ rendparaméter

$T>T_c$ rendparaméter $=0$

$F[\Psi] \sim F[|\Psi|^2]$ (Ψ rendp.)

$F[\Psi] = F_0 + \alpha(T)|\Psi|^2 + \frac{\beta(T)}{2}|\Psi|^4 + *$

$\beta(T)>0$ stabilitás

$\alpha(T)$ $\begin{cases} >0 & T>T_c \\ <0 & T<T_c \end{cases}$

$|\nabla\Psi|^2$ ↓ minimális ⇒ pl. domenfalak

Ginzburg-Landau elméletben bele tell ebbe venni a mágneses teret, ami csatolódik a rendparaméterhez, amit nem tudunk mi

$* + \frac{1}{2}\frac{1}{m^*}\left|\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + e^*\vec{A}\right)\Psi\right|^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$ G-L szabad energia

Ψ, Ψ^* ⇒ két paraméteres $\Psi = |\Psi|e^{i\varphi}$

lehet variációszámítással minimalizálni ⇒ 2 egyenlet

$$\frac{1}{2m^*}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + e^*\vec{A}\right)^2\Psi + \alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi = 0$$

$$\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\vec{B} = \vec{j} = -\frac{e^*}{2m^*}\Psi^*\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + e^*\vec{A}\right)\Psi + \text{c.c.}$$

határfeltétel $\hat{n}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + e^*\vec{A}\right)\Psi = i\lambda\Psi$ ⇒ nem folyik ki áram

↑ felület normálisa

$\alpha(T) = a(T-T_c)$ a legegyszerűbb fenomenológia

$$f_s = f_n + \alpha(T)|\Psi|^2 + \frac{\beta(T)}{2}|\Psi|^4 + \frac{1}{2m^*}\left|\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + e^*\vec{A}\right)\Psi\right|^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$$ 11.22.

legegyszerűbb alak $\alpha(T) = a(T-T_c)$

$\alpha(T) = \begin{cases} <0 & T<T_c \\ >0 & T>T_c \end{cases}$

$\beta(T) > 0$

ez a szabad energia nem sorfejtés

az ilyen típusú közelítés nem jó közvetlenül a fázis-átalakulási pontban, mert a fluktuációk egyre nőnek

ha $\left|\frac{T-T_c}{T_c}\right| < \delta$ akkor a fluktuációk dominálnak

szupravezetés esetén $\frac{|T-T_c|}{T_c} \sim 10^{-8}$ a kritikus tartomány → nem lehet mérni

tehát ez a Landau elmélet, mint átlagtérelmélet éb. mindenhol működik (nincs "kritikus tartomány")

ez a szabadenergia nagyon jó közelítés a teljes hőmérséklettartományra, $T = 0$-ra is

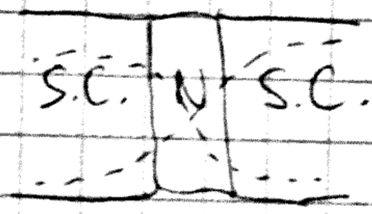
szórásos variációszámítással minimalizáljuk a Landau funkcionált ⇒ a rendparaméterre 2 egyenlet:

$$\begin{cases} \frac{1}{2m^*}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + e^*\vec{A}\right)^2\Psi + \alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi = 0 & \text{← nem hfg.!} \quad \text{rendparam.} \\ \vec{J} = -\frac{e^*}{2m^*}\Psi^*\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + e^*\vec{A}\right)\Psi + \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\hat{n}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + e^*\vec{A}\right)\Psi = \begin{cases} 0 \\ i\lambda\Psi \end{cases} \quad \text{a határfeltétel}$$



szupravezető - normál átmenet:



proximity effektus ⇒ normálban is van szupravezetés

alagúteffektus mérhető

ha a megoldás: $\Psi(\vec{r})$, $\vec{A}(\vec{r})$

mindenhol csak $\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + e^*\vec{A}\right)$

$$\begin{cases} \Psi'(\vec{r}) = \Psi(\vec{r})\, e^{i\Phi(\vec{r})} \\ \vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) - \frac{\Phi_0}{2\pi}\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \end{cases}$$

← tetszőleges pr.

az alapállapot végtelenül

↳ nagyon a megoldás ! degenerált

$\Psi(r) = |\Psi(r)| e^{i\phi(\vec{r})}$ $\quad \vec{j} = -\frac{e^{*2}}{m^*}|\Psi|^2\left(\vec{A} + \frac{\hbar}{e^*}\vec{\nabla}\phi\right)$

$\tau \frac{\Phi_0}{2\pi}$

$e^* = 2e$

$m^* = 2m_e$

$|\Psi|^2 = n_s$ → supravezetésben részt vevő elektronok sűrűsége

$B = 0$ esetben

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\nabla^2\Psi + \alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi = 0$$

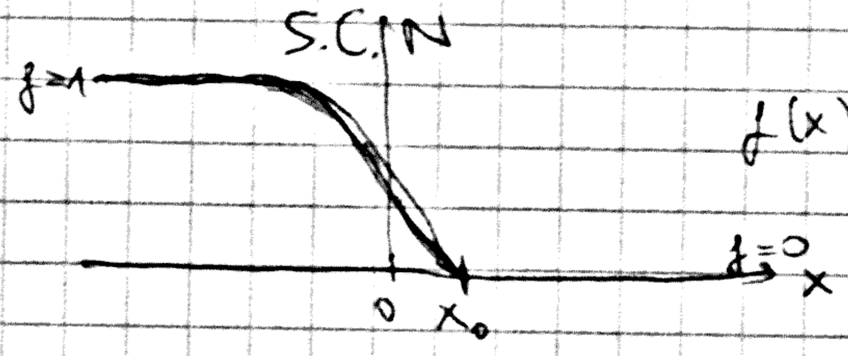
homogén megoldás: $|\Psi_0|^2 = -\frac{\alpha}{\beta} > 0$

$\Psi = \Psi_0 f$ $\quad -\frac{\hbar^2}{2m^*}\nabla^2 f + af - \alpha|f|^2 f = 0$

$$\xi^2(T) = \frac{-\hbar^2}{2m^*\alpha(T)} = \frac{\hbar^2}{2m^* a(T_c - T)}$$

$$\xi^2(T)\nabla^2 f + f - |f|^2 f = 0$$

ξ hosszjellegű mennyiség → milyen hosszskálán tud a rendparaméter változni



$$f(x) = -\text{th}\frac{x_0 - x}{\sqrt{2}\xi(T)}$$ $\quad \xi(T)$ korrelációs hossz

$\xi(T) \gg$ atomi távolság → cella végtelenné válik az átalakulásnál

$\xi(T) \sim (T_c - T)^{-1/2}$

Meissner - effektus

$$\vec{j} = -\frac{e^{*2}}{m^*}|\Psi_0|^2\vec{A}(\vec{r})$$

↑ egyensúlyival korelációt

$$\lambda_L^2(T) = \frac{m^*}{\mu_0 e^{*2}|\Psi_0|^2} = \frac{m^*\beta}{\mu_0 e^{*2} a(T_c - T)}$$

α, β paraméterek helyett ξ, λ_L

$\lambda_L \sim (T_c - T)^{-1/2}$

$\frac{\lambda_L^2}{\xi^2} = \frac{2m^{*2}\beta}{\mu_0 e^{*2}\hbar^2}$ egyenes hőmérsékletfüggő mérése során

$\kappa_{G\text{-}L} = \frac{\lambda_L}{\xi}$ → Ginzburg - Landau param.

a rendparameter változását ξ korrelációs hossz, a mágneses tér változását a λ_L behatolási mélység határozza meg, de az egyetlen érdekes paraméter κ_{G-L}

$\Phi = \int_{\neq} \vec{B} d\vec{F} = \oint_{L} \vec{A} d\Gamma$ ha c olyan, hogy $\vec{j} \approx 0$

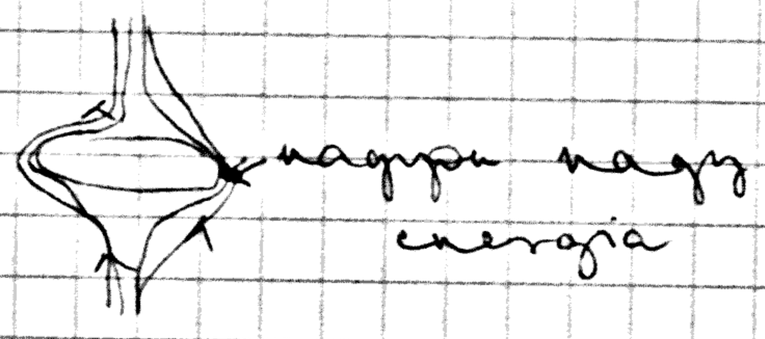
↑ fluxus $\Phi = n \frac{h}{2e} = n\Phi_0$ fluxuskvantálás

$\Phi_0 = 2{,}067 \cdot 10^{-7}$ Gauss cm^2

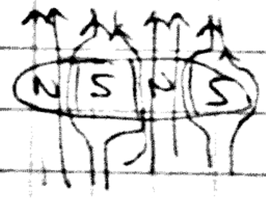
(a minta méretskálájának sokkal nagyobbnak kell lenni, mint a korrelációs hossz ξ)

$\vec{B}$ ↑ $E_{mágneses} \sim \frac{B^2}{2\mu_0}$





→ kedvezőbb, ha valamennyi fluxus átmegy a mintán



$\Phi = f \cdot x = n\Phi$

Ha a falenergia > 0, akkor a fal területét minimalizálni kell, ha falenergia < 0, akkor maximalizálni

> 0 esetén nagy makroszkópikus tartományok

< 0 esetén nagyon sok nagyon vékony cső

nagysága mennyi a falenergia?

$g = f - \vec{H}\vec{B}$ $\quad g_s(T,H) = f_n(T,0) + \alpha(T)|\Psi|^2 + \frac{\beta(T)}{2}|\Psi|^4 +$

$+ \frac{1}{2m^*}\left|\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + e^*\vec{A}\right)\Psi\right|^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} - \vec{H}\vec{B}$

$f_s(T,0) = f_n(T,0) - \frac{1}{2}\mu_0 H_c^2$

felületi energia számítsége

végtelen fal $\quad \sigma_{ns} = \int_{-\infty}^{\infty} (g_s - g_n) dx = *$

$H = H_c$ - t vesszük!

$$* = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\alpha(T)|\Psi|^2 + \frac{\beta(T)}{2}|\Psi|^4 + \frac{1}{2m^*}\left|\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + e^*\vec{A}\right)\Psi\right|^2 + \frac{1}{2\mu_0}(B-\mu_0 H_c)^2 \right]$$

↑ ↑
mind 2. egy iránnyba ⊥ x

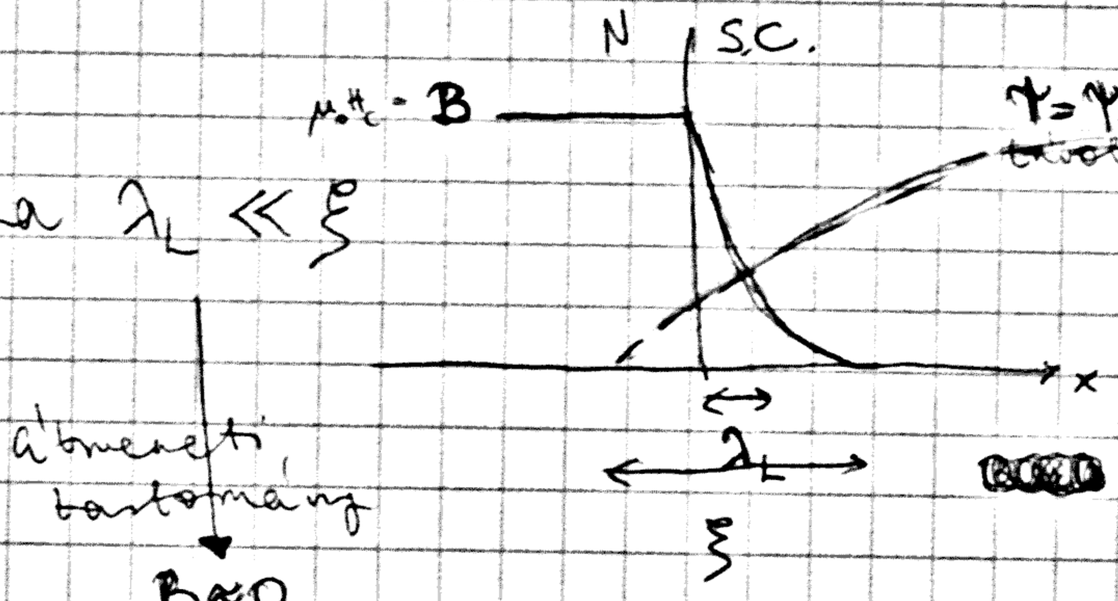
I. Ginzburg - Landau egyenletet

kényszerrel Ψ^*-gal balról és integráljuk:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\alpha(T)|\Psi|^2 + \beta(T)|\Psi|^4 + \frac{1}{2m^*}\left|\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + e^*\vec{A}\right)\Psi\right|^2\right) dx = 0$$

$$\sigma_{ns} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[-\frac{\beta(T)}{2}|\Psi|^4 + \frac{(B-\mu_0 H_c)^2}{2\mu_0} \right]$$

(Ψ, B a G-L egyenletek megoldásai erre a határfeltételre)



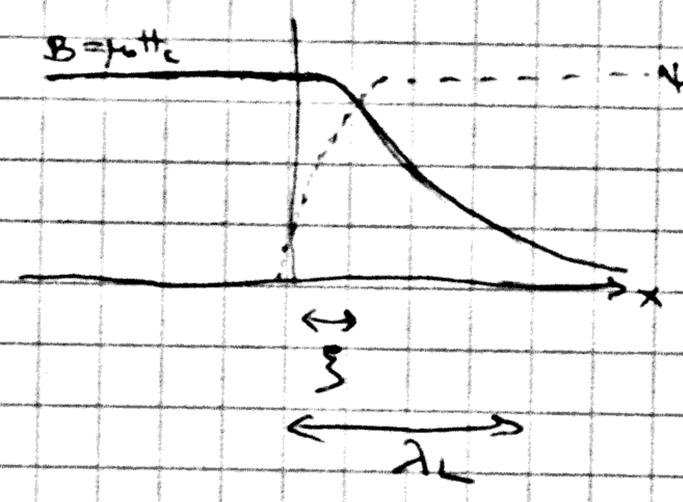
ha $\lambda_L \ll \xi$

átmeneti tartomány

$B \approx 0$

és $|\Psi| \ll |\Psi_0|$, ez $x \lesssim \xi \Rightarrow \sigma_{ns} \approx \frac{\mu_0 H_c^2}{2}\xi > 0$

ha $\lambda_L \gg \xi$



$B \approx \mu_0 H_c$ ha $x \lesssim \lambda_L$

$$\sigma_{ns} \approx -\frac{1}{2}\lambda\mu_0 H_c^2$$

$\kappa = \frac{\lambda_L}{\xi}$ $\gg 1$ felületi energia < 0 **I.** fajú

$\ll 1$ > 0 **I.** fajú szupravezető

$\sigma_{ns} = 0$ $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}$

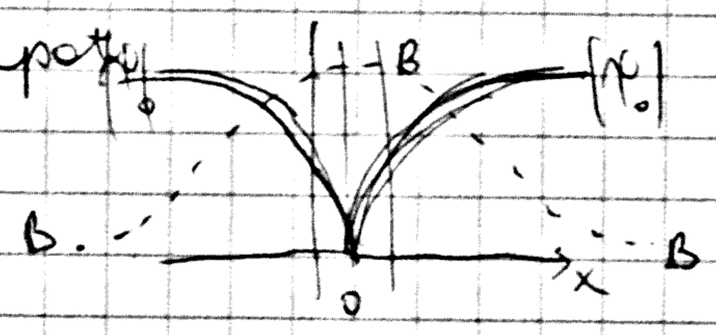
I. fajúban ugyanaz, mint a doménnél → nagy makroszkópikus tartományok

II. fajúban csövekben hatol be a mágneses tér ↳ vortexet → ξ sugarú cső, ahol $H \neq 0$

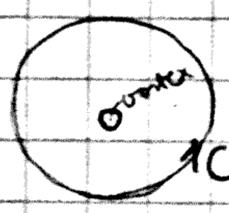
vortex belseje normál állapot

↓

hengerszimmetrikus valami



$$\vec{A} + \mu_0 \lambda_L^2 \vec{j} = -\frac{1}{2\pi}\Phi_0 \vec{\nabla}\Phi$$



$$\oint_C \left(\vec{A} + \mu_0 \lambda_L^2 \vec{j}\right) d\vec{l} = n\Phi_0$$

vortex csak $n\Phi_0$ fluxust tartalmazhat (ki fog jönni $n=1$)

$$\oint_C (\vec{A} + \lambda_L^2 \operatorname{rot}\vec{B})\, d\vec{l} = n\Phi_0$$

$$\oint_C (\vec{A} + \lambda_L^2 \operatorname{rotrot}\vec{A})\, d\vec{l} = n\Phi_0$$

$$\int_F (\underbrace{\operatorname{rot}\vec{A}}_{\vec{B}} + \lambda_L^2 \operatorname{rotrot}\vec{B})\, d\vec{F} = n\Phi_0$$

↑ ξ-től elég messze tetszőleges felület

$$\vec{B} + \lambda_L^2 \operatorname{rotrot}\vec{B} = n\Phi_0 \hat{B}\, \delta^{(2)}(\vec{r})$$

hengerkoordinátarendszerben $\vec{B} \parallel z$ (x,y) a sík

$$B_z + \lambda_L^2 \nabla^2 B_z = \Phi_0 \hat{z}\, \delta^{(2)}(\vec{r})$$

$$B_z(\vec{r}) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda_L^2} K_0\left(\frac{r}{\lambda_L}\right) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda_L^2} \begin{cases} \left(\frac{\pi\lambda_L}{2r}\right)^{1/2} e^{-\frac{r}{\lambda_L}} & r \to \infty \quad (r \gg \lambda_L) \\ \ln\frac{\lambda_L}{r} + 0{,}18 & \xi \ll r \ll \lambda_L \end{cases}$$

↑ módosított Bessel-fv.

olyan alakú, mint a dislokáció energiája

11.25.

$\kappa = \frac{\lambda_L}{\xi} \sim \sqrt{\beta}$ Ginzburg-Landau paraméter

$\kappa \gg 1$ -vel fogunt foglalkozni

$\xi < r < \lambda_L$ az érdekes tartomány

$\lambda_L, \xi \sim (T_{c_0} - T)^{-1/2}$

minden méret nagyobb, mint az atomi távolság

szupravezetés érzéketlen a pontszerű nem-mágneses szennyezésekre (rácshibákra)

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{-\Phi_0}{2\pi\lambda_L^3 \mu_0} K_1\left(\frac{r}{\lambda_L}\right) \sim \begin{cases} \frac{1}{r} & \xi < r < \lambda_L \\ e^{-\frac{r}{\lambda_L}} & r \gg \lambda_L \end{cases}$$

szuperáram v. lecárnyékoló áram

vortex energia: (egyszerűsített hossza)

$$\oint \vec{p}\, d\vec{l} = nh = m^* \oint \vec{v}_s\, d\vec{l} = m^* v_s 2\pi r$$

$$v_s = \frac{nh}{m^* 2\pi r} = \frac{nh}{m^* r}$$

$$E_{kin} = n_s^* \int_{\xi}^{\lambda_L} \frac{m^* v_s^2}{2} 2\pi r\, dr = \frac{\pi n_s^* h^2}{m^*} \ln \frac{\lambda_L}{\xi} = \underline{\underline{\frac{\Phi_0^2}{4\pi \mu_0 \lambda_L^2} \ln \chi}}$$

$\Phi_0 \to n\Phi_0$ $E_{vortex} \sim (n\Phi_0)^2$

$\Downarrow$

egy vortex csak 1 fluxuskvantumot hordoz, mert így kisebb az energia

vortexek közötti kölcsönhatási energia is megbecsülhető

$$\hbar L = n_s^* \int_{\xi}^{\lambda_L} r\, v_s\, m^*\, 2\pi r\, dr \Rightarrow n_s^* \pi \hbar \lambda_L^2$$

$$n_s^* = |\Psi|^2 \approx |\Psi_0|^2 = -\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a(T_c - T)}{\beta}$$

$$\mu = \frac{e^*}{2m^*} \hbar L = \frac{\Phi_0}{4\mu_0}$$

mágneses momentum

kölcsönhatási energia: $E_{12} = \frac{\Phi_0^2}{8\pi \lambda_L^2} \left(\ln \frac{\lambda_L}{|r_1 - r_2|} + 0{,}12 \right)$

→ taszító kölcsönhatás

a vortexek taszítják egymást $(\xi < r < \lambda_L)$

legalacsonyabb energia ⇒ háromszögrács (Abrikosov)

Kísérletileg meg lehet figyelni

(magashőmérsékletű szupravezetőkben nem ilyen egyszerű a helyzet → anizotróp, van hogy amorf üvegszerű állapotban a vortexek CuO-ból tartalmaznak → rétegekben szerez)

H_{c1} és H_{c2} – jelentése

↳ megszűnik a szupravezetés

↳ első vortex megjelenik

Gibbs-féle szabadenergia $\sim \vec{B}\vec{H}$

energiasűrűség 1 vortexnél = E_{vortex}

$$-\int \vec{B}\vec{H}\, dV = -LH\int B\, dF = -LH\Phi$$

$$H = \frac{E_{vortex}}{\Phi_0} = H_{c_1} - \frac{\Phi_0}{\lambda_L^2 \pi 4\mu_0} \ln \chi$$

ha olyan sor a vortex, hogy majdnem normál állapot → Ψ kicsi ⇒ hanyagolt el a Landau-egyenlet

$$\frac{1}{2m^*}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + e^*\vec{A}\right)^2\Psi = -\alpha\Psi - \beta|\Psi|^2\Psi$$

↳ ennek a megoldása a Landau-egyenlet megoldásához hasonló a rendparaméter energia $-\alpha = a(T_c - T)$

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c^* \quad \rightarrow \text{minimuma } n = 1$$

$$\hbar\omega_c^* = \hbar\frac{2e^*B}{m^*}$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\hbar\omega_c^* \leq -\alpha$ ekkor van megoldás

⇒ maximum a H_{c_2}-nél

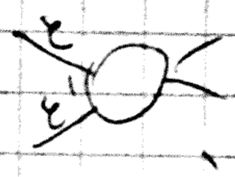
$$H_{c_2} = \frac{\hbar}{2e\mu_0\xi^2} = \frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0\xi^2}$$ kísérlettel összhangban

$$\left.\begin{aligned} H_c &= \frac{\Phi_0}{2\sqrt{2}\pi\mu_0\lambda_L\xi} \\ H_{c_1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\chi}H_c\ln\chi \\ H_{c_2} &= \sqrt{2}\chi H_c \end{aligned}\right\} \quad \chi > \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow H_{c_1} < H_c < H_{c_2}$$

H_{c_1} és H_{c_2} mérésével χ, H_c kiszámolható

<u>Szupravezetés mikroszkópikus elmélet</u> (Bari félék)

elektron - elektron fonon kicserélődés miatt effektív vonzó kölcsönhatás, ha ε_ξ és $\varepsilon_{\xi'}$ közel a Fermi-felülethez



ellentétes spinű elektronok Cooper-párt alkothatnak (↓↑) (általában singlett az alapállapot)

Cooper-pár bozon!

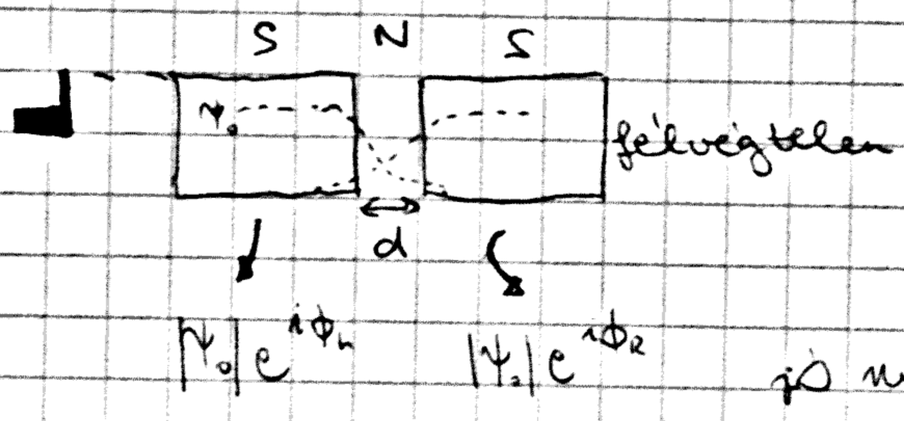
↳ mérete $\approx 10^3 - 10^4 \times$ elektronok közötti átlagos táv.

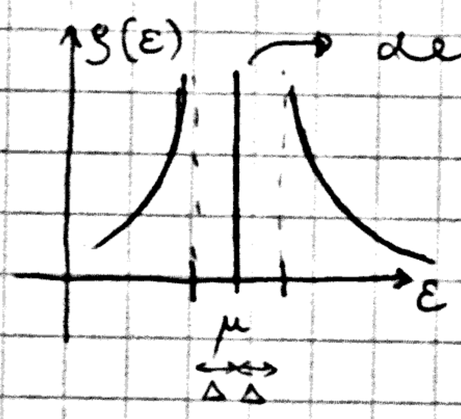
⇒ nincs értelme azt mondani, hogy kondenzálódnak a párok, mivel egy helyen $10^3 - 10^{16}$ pár van egyszerre

Cooper-párok összessége egy merev hullámfv. lesz, amit nem nagyon lehet deformálni, tehát a fluktuációk elhanyagolhatók

rendparaméter ~ Cooper-pár hullámfv. (kétrészecske állapot korrelációs fv.)

Josephson alagút effektus:





$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t) = \mu\Psi(t)$$

most csatoljuk a két szupravezetőt, de gyengén

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\Psi_L}{\partial t} = \mu_L\Psi_L + T\Psi_R$$

(Feynman)

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\Psi_R}{\partial t} = \mu_R\Psi_R + T\Psi_L$$

Josephson

$$\frac{\partial|\Psi_L|}{\partial t}e^{i\phi_L} + |\Psi_L|e^{i\phi_L}\frac{\partial\phi_L}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}\mu_L|\Psi_L|e^{i\phi_L} - \frac{i}{\hbar}T|\Psi_R|e^{i\phi_R}$$

$$\frac{\partial|\Psi_R|}{\partial t}e^{i\phi_R} + \dots$$

valós és képzetes részek:

$$\frac{\partial|\Psi_L|}{\partial t} = \frac{1}{\hbar}T|\Psi_R|\sin(\phi_R - \phi_L)$$

$$\frac{\partial|\Psi_R|}{\partial t} = -\frac{1}{\hbar}T|\Psi_L|\sin(\phi_R - \phi_L)$$

$|\Psi|^2 = n_s$ supravezető elektron sűrűség

bal oldalon úgy változhat időben a sűrűség, hogy a jobb oldalról jön vagy megy és fordítva.

$$\frac{\partial \Phi_L}{\partial t} = -\frac{1}{\hbar}\mu_L - \frac{1}{\hbar} T \frac{|\Psi_R|}{|\Psi_L|}\cos(\Phi_R - \Phi_L)$$

$$\frac{\partial \Phi_R}{\partial t} = -\frac{1}{\hbar}\mu_R - \frac{1}{\hbar} T \frac{|\Psi_L|}{|\Psi_R|}\cos(\Phi_R - \Phi_L)$$

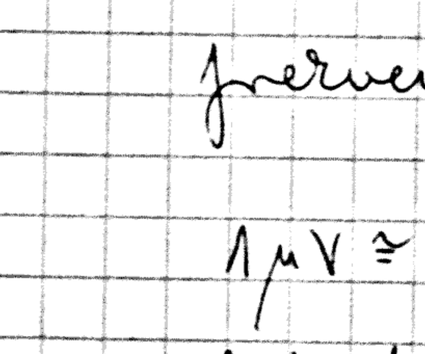
$$\rightarrow \vec{j} = -e^* \frac{\partial |\Psi_L|^2}{\partial t} = \frac{2e^*}{\hbar} T |\Psi_R||\Psi_L| \sin(\Phi_R - \Phi_L)$$

↳ áram, ha van fáziskülönbség

ha $|\Psi_R| = |\Psi_L|$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi_L - \Phi_R) = -\frac{1}{\hbar}(\mu_L - \mu_R)$$

mindkét szupravezető legyen elég nagy és a csatolás legyen kicsi $\Rightarrow$ kevés megy át



kapcsoljunk rájuk feszültséget, így a termikai potenciál különbséget el lehet tolni

$$\mu_R - \mu_L = -e^* V = -2eV$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi_R - \Phi_L) = 2\frac{eV}{\hbar} \qquad \Phi_R - \Phi_L = 2\frac{eV}{\hbar} t$$

$$I_J = I_0 \sin(\delta\Phi + 2\frac{eV}{\hbar} t)$$

↳ oszcilláló áram egyenfeszültség hatására

frekvencia: $\omega = \frac{2eV}{\hbar} = 2\pi \frac{V}{\Phi_0}$

$1\mu V \cong 483{,}6$ MHz $\Rightarrow$ nagyon pontos feszültséget lehet mérni (feszültség definíciója)

ez független attól, hogy milyen szupravezető anyag

↳ kapcsoljunk rá váltófeszültséget

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi_R - \Phi_L) = \frac{2e}{\hbar} V_0 + \frac{2e}{\hbar} V_\omega \cos(\omega t)$$

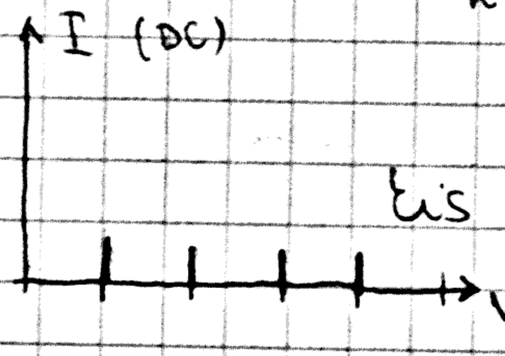
$$\Phi_R - \Phi_L = \frac{2e}{\hbar} V_0 t + \delta\Phi_0 + \frac{2e}{\hbar}\frac{V_\omega}{\omega}\sin(\omega t)$$

$$I_s = I_0 \sin\left(\frac{2e}{\hbar} V_0 t + \delta\phi_0 + \frac{2e}{\hbar}\frac{V_\omega}{\omega}\sin\omega t\right)$$

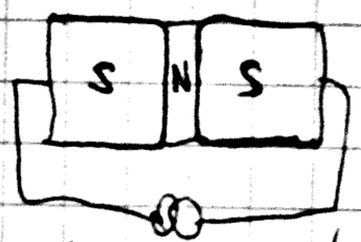
sorbafejtjük Bessel-fv-ek szerint ...

$$I_s = I_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_n\left(\frac{2eV_\omega}{\hbar\omega}\right) \sin\left(\delta\phi_0 + \left(\frac{2eV_0}{\hbar} - n\omega\right)t\right)$$

ha $n\omega = \frac{2eV_0}{\hbar}$ → egyenáram



kis csúcsok az egyenáramú komponens

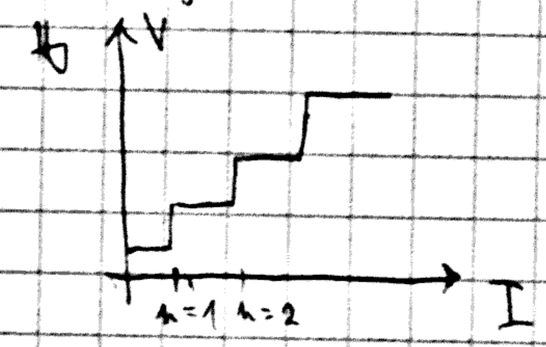


vegyük fázselemként a N (normál) rész ellenállását

áramgenerátorral
I=áll
és V-t mérjük

$$I = I_0 \sin(\phi_e - \phi_L) + \frac{V}{R}$$

↑ ellenállás

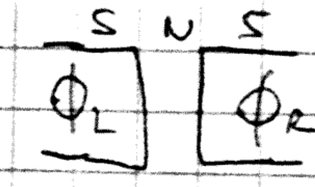


Shapiro lépcső

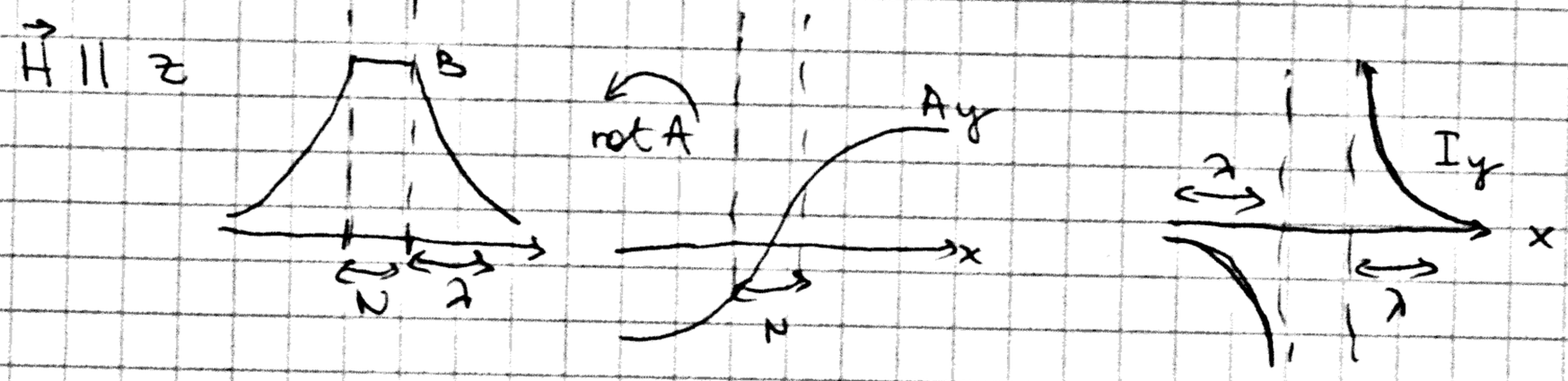
a kvantummechanikai fázis életét makroszkopikus testek esetén is → tűt jó bizonyítéknak, hogy van kvantummechanikai makroszkopikusan

11.29.

Mössbauer-effektus



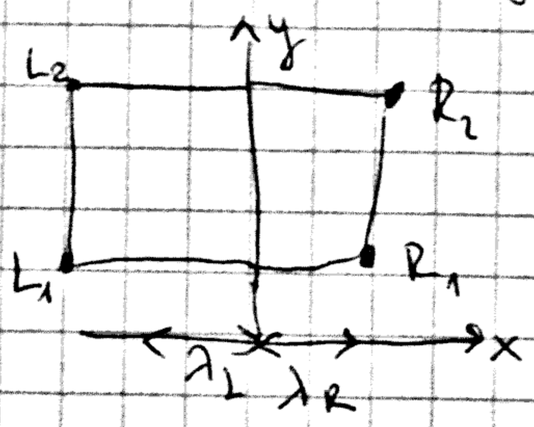
$$I = I_0 \sin(\phi_L - \phi_R)$$



$$j = -\frac{e^* \hbar}{m^*}|\psi|^2\left(\vec{\nabla}\phi + \frac{e^*}{m}\vec{A}\right)$$

$j = 0$, ha $|x| \gg \lambda$ ⇒ $\vec{\nabla}\phi = -\frac{e^*}{\hbar}\vec{A}$

fáziskülönbséget szeretnénk nézni



→ pontokban

$$\Phi(L_2) - \Phi(L_1) = \frac{e^*}{\hbar} \int_{L_1}^{L_2} \vec{A} d\vec{l}$$

$$\Phi(R_2) - \Phi(R_1) = -\frac{e^*}{\hbar} \int_{R_1}^{R_2} \vec{A} d\vec{l}$$

$$\Delta\Phi(L_2 - R_2) - \Delta\Phi(L_1 - R_1) = \Phi(L_2) - \Phi(R_2) - \Phi(L_1) + \Phi(R_1) =$$

$$= \frac{e^*}{\hbar} \left(\int_{L_1}^{L_2} \vec{A} d\vec{l} - \int_{R_1}^{R_2} \vec{A} d\vec{l} \right) = *$$

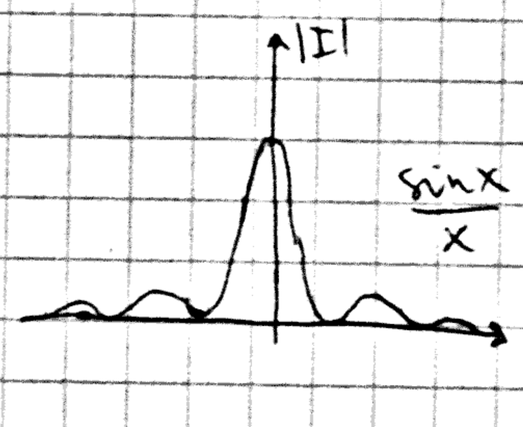
$\vec{A} \parallel y \Rightarrow A_x = 0 \Rightarrow \int_{L_1}^{R_1} \vec{A} d\vec{l} = 0$, mert $d\vec{l} \perp \vec{A}$

$$* = -\frac{e^*}{\hbar} \int_0 \vec{A} d\vec{l} = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \rightsquigarrow \text{bezárt fluxus}$$

$$\Phi \cong \underbrace{B(d + \lambda_L + \lambda_R)}_{\text{bezárt terület}} y = \Phi(y)$$

$$\int_0^{L_y} I \, dy = \int_0^{L_y} I_0 \sin\left(\Delta\Phi_0 + 2\pi \frac{\Phi(y)}{\Phi_0}\right) = I_0 L_y \sin(\Delta\Phi_0) \frac{\sin\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right)}{\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}}$$

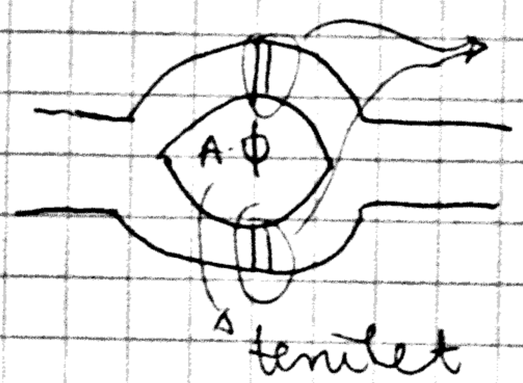
↓ minta vastagsága



$\frac{\sin x}{x}$ alakú Fraunhofer-ábra

B nem mérhető ebből, mert λ_L, λ_R hibája túl nagy d-hez képest

SQUID



kicsi területek → elhanyagolható

m.o.: $I_y = I_0 \left(\sin(\Delta\Phi(L_1 - R_1)) + \sin(\Delta\Phi(L_2 - R_2)) \right)$

$$I = \int dy \, I_y = 2 I_0 \sin(\Delta\Phi_0) \cos\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)$$

$\Phi \propto B \cdot A$

ezzel szépen lehet kis teret használni

pl. 100 m-ről a sub verése alatta tér is mérhető

nagy terek esetén nem cos(), mert a

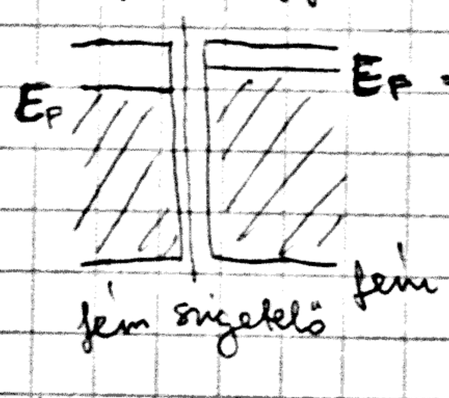
kis területet fluxusa is bejön

Josephson - effektus: fázistáltolódás hatására

áram indul → kvantummechanikai fázis

makroszkópikusan is érzékelhető

Alagúteffektus



↳ elektromos teret kapcsolunk rá

átmenet valószínűsége: $\Gamma = |T|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dE\, \rho_L(E)\, \rho_R(E+eV) \cdot$ (állapotsűrűség)

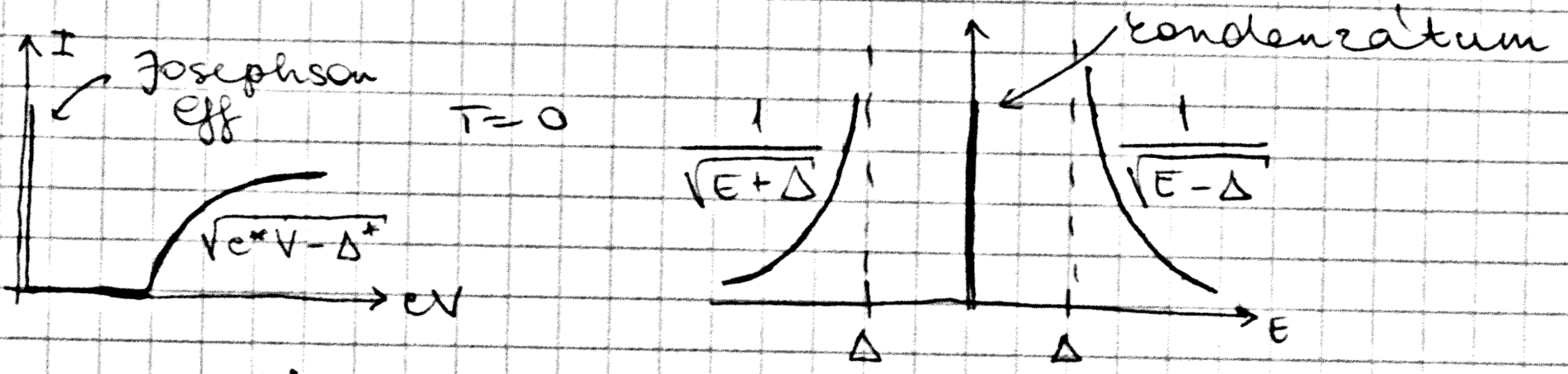
$$\cdot \Big(\underbrace{u_F(E)\big(1-u_F(E+eV)\big)}_{\text{átugorhat}} - \underbrace{u_F(E+eV)\big(1-u_F(E)\big)}_{\text{nem megy vissza}} \Big)$$

$$I = |T|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dE\, \rho_L(E)\, \rho_R(E+eV)\big(u_F(E) - u_F(E+eV)\big)$$

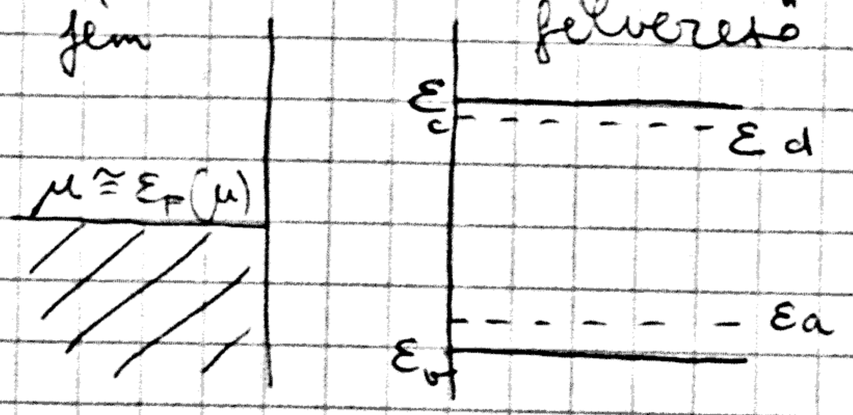
$$I \sim |T|^2 \rho_L(\varepsilon_F)\, \rho_R(\varepsilon_F)\, eV \quad \leftarrow \text{Ohm-tó}$$

konduktancia

$$\frac{1}{e}\left.\frac{dI}{dV}\right|_{V=0} = |T|^2 \int dE\, \rho_L(E)\left(-\frac{\partial u_F(E)}{\partial E}\right)\rho_R(E)$$



Fém - félvezető határréteg:

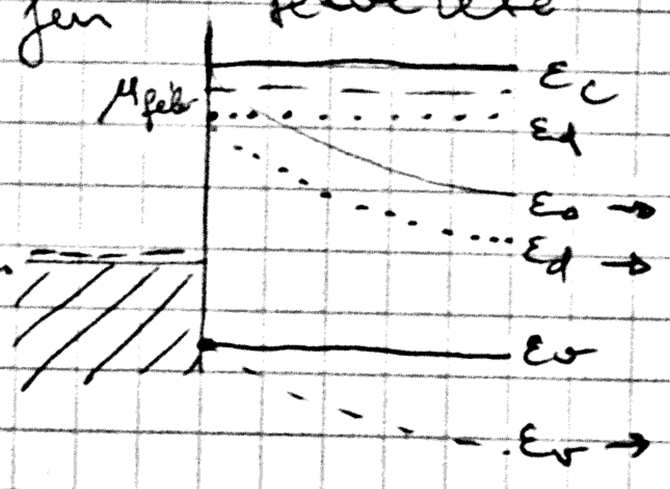


vagyis ezt az esetet:
n típusú félvezető,
nincs donornivó

$$\varepsilon_d < \mu < \varepsilon_c$$

kilépési munka
↳ két kilépési munka különbözik

$\Phi_{fém} > \Phi_{félvezető}$



csatlakozásnál a kémiai potenciálnak folytonosnak kell lenni, az új kialakult szintet

Boltzmann - statisztika a kialakult pot. hatására

$$u(x) = N_c(T) \exp\left\{-\frac{\varepsilon_c - \mu - eV(x)}{\varepsilon_B T}\right\}$$

ionizált donornivó

$$u_d^+(x) = \frac{u_d}{1 + 2\exp\left\{\frac{\mu - \varepsilon_c + eV(x)}{\varepsilon_B T}\right\}}$$

kiürítési tartomány:

$$\varrho(x) = -e\left[u_c(x) - u_d^+(x) - p(x)\right]$$

↳ valenciasáv ionjai $\neq 0$

$u_d^+(x) = u_d^+$ és $p(x) \approx 0$

Poisson egyenlet

$$\nabla^2 V(x) = -\frac{1}{\varepsilon}\varrho(x) = -\frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0}(-e)\left[u_c(x) - u_d\right]$$

határfeltételek

$$u_c(\infty) = u_d$$

$$u(x) = u(\infty)\exp\left\{\frac{e(V(x) - V(\infty))}{\varepsilon_B T}\right\}$$

V_0 kontakt potenciál
kilépési munkák különbsége

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = \frac{e}{\varepsilon} n_d \left[\exp\left\{ \frac{e(V(x)-V_0)}{k_B T} \right\} - 1 \right]$$

dimenziótlanítunk

$$\tilde{V}(x) = \frac{e(V(x)-V_0)}{k_B T} \Rightarrow \frac{d^2\tilde{V}}{dx^2} = \frac{e^2 n_d}{k_B T \varepsilon} \left(e^{\tilde{V}(x)} - 1 \right)$$

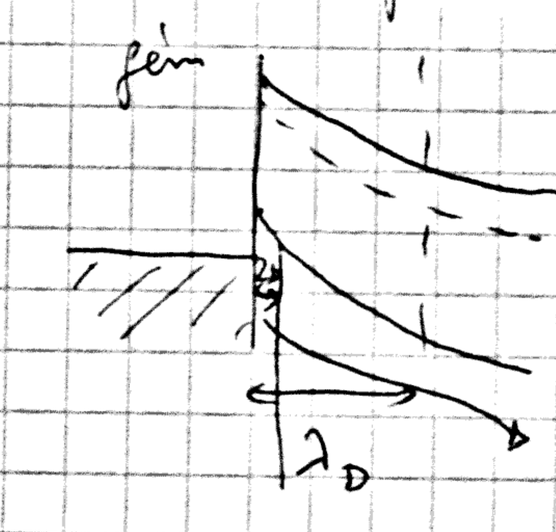
$\frac{e^2 n_d}{k_B T \varepsilon} = 1/\lambda_D^2$ Debye hossz

$\lambda_D \sim 10^{-6}$ cm

ha $\tilde{V}(x)$ kicsi

$$\frac{d^2\tilde{V}}{dx^2} = \frac{1}{\lambda_D^2} \tilde{V}(x)$$

↳ határfeltételekkel $V(x) = V_0 \left(1 - e^{-\frac{x}{\lambda_D}}\right)$



pozitív, mert a töltések átmentek a fémbe → kiürülési tart.

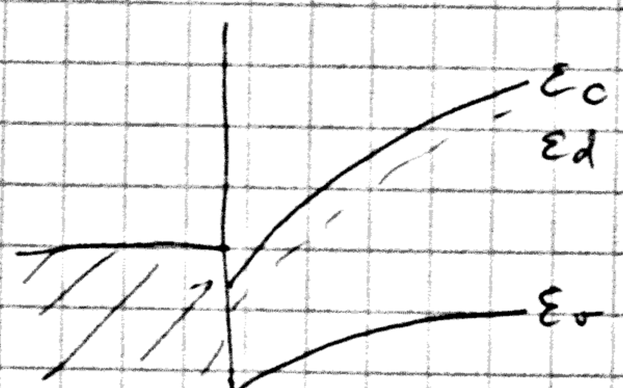
nincs töltésátrendeződés

kilépési munka különbséget töltésátrendeződés pótolta

Ha rákapcsolunk feret:

2Dimenziós rendszerben szabadon mozgó töltések

Ha $\Phi_{fém} < \Phi_{félvezető}$



nagyanerek a lerevetések

Ha szigetelőt raknak a két réteg közé:

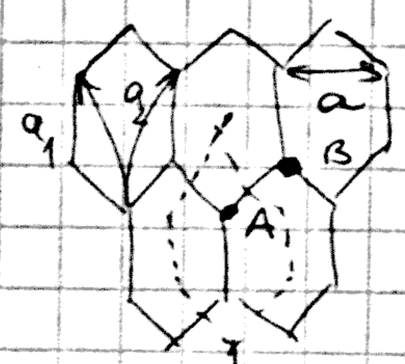
MOS = metal oxid semiconductor

potenciálugrás a szigetelőben lesz
ez jobban terelhető, nem függ annyira az
illesztéstől

12.02.

Sávszerkezet számolás

2D



bázisvektorok

$\vec{a}_1 = \frac{a}{2}(-1, \sqrt{3})$

$\vec{a}_2 = \frac{a}{2}(1, \sqrt{3})$

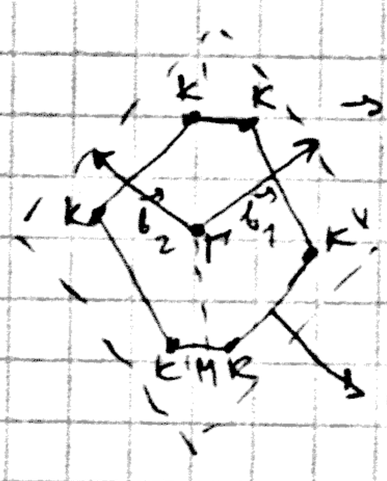
$R_{AB} = \frac{a}{\sqrt{3}}(\pm 1, \sqrt{3})$

Reciprokrácsvektorok

$\vec{a}_i \vec{b}_j = 2\pi \delta_{ij}$ → papírból tíjel

$\vec{b}_1 = \frac{2\pi (\vec{a}_2 \times \vec{z})}{\vec{a}(\vec{a}_2 \times \vec{z})}$ $\quad \vec{b}_2 = \frac{2\pi (\vec{z} \times \vec{a}_1)}{\vec{a}_2 (\vec{z} \times \vec{a}_1)}$

$\vec{b}_{1,2} = \frac{b}{2}(\pm\sqrt{3}, 1) \quad b = \frac{4\pi}{\sqrt{3}a}$



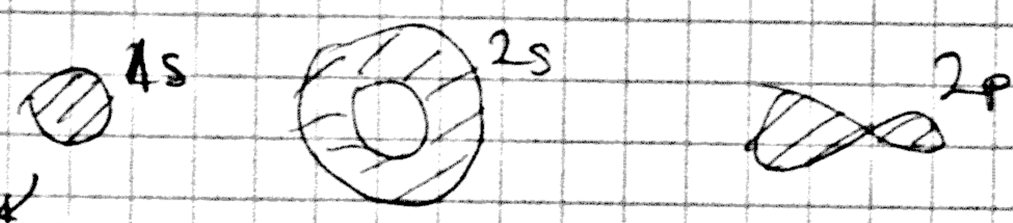
→ reciprokrácsi elemi cellája

K' pontor ekvivalenser
K pontor ekvivalenser
} ment

reciprokrácsvektorral egymásba vihetők

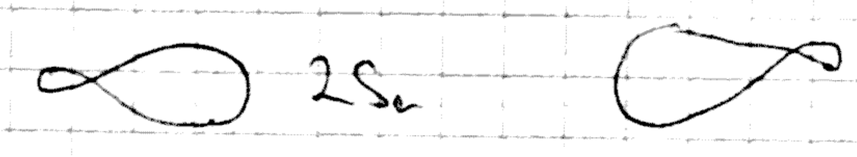
$\vec{K} = \frac{b}{\sqrt{3}}(-1, 0) \quad \vec{K}' = \frac{b}{\sqrt{3}}(1, 0)$

^{12}C elektronkonfigurációja $(1s)^2(2s)^2(2p)^2$



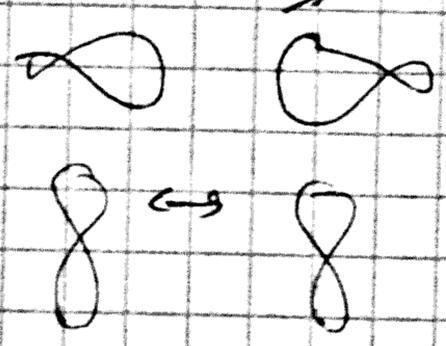
nagyon mélyen van — ezek hibridizálódnak

Hibridpályák $(2s + 2p)$



SZILÁRDTESTFIZIKA 12.02

benzolban



σ pályák (mélyebben)

síkban a kötés sp_2

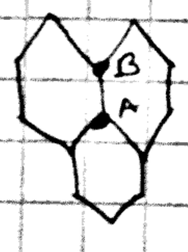
gyengekötés → π pályák

gyémántnál: sp_3 hibridizáció

⇒ máshol miért nincs?

C-nél gömbszimmetrikus (1s) potenciálból érezner a 2s, 2p pályát, ellenben a többinél nem ⇒ szilícium alapú élet nincs, mert nincs hibridizáció

Ezek lineárkombinációjából építjük fel a hullámfv-t



A, B is síkon, csak más pontja a rácsnak

$$\Psi_A = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{R,\alpha} e^{i\vec{q}\vec{R}_\alpha} \varphi_\alpha(\vec{r}-\vec{R}_\alpha) \rightsquigarrow \text{Bloch-sorok}$$

p_z pályák

$$H_{\alpha\varepsilon}(q) = \langle \Psi_\varepsilon | H | \Psi_\varepsilon \rangle = \int d^3r \, \Psi_\varepsilon^* \hat{\mathcal{H}} \Psi_\varepsilon(r)$$

↑ Edcsönhatás

$\alpha: \{A, B\}$

$\beta: \{A, B\}$

$$H_{\alpha\beta}(q) = \frac{1}{N} \sum_{R_\alpha R_\beta} e^{i\vec{q}(\vec{R}_\alpha - \vec{R}_\beta)} \langle \varphi_\beta(\vec{r}-\vec{R}_\beta) | \hat{H} | \varphi_\alpha(\vec{r}-\vec{R}_\alpha) \rangle$$

$S_{\alpha\varepsilon} = \langle \Psi_\varepsilon | \Psi_\varepsilon \rangle$ átfedési integrál

$\det|H - \varepsilon S| = 0$ → túl bonyolult

Tfh. a kölcsönhatás mátrixelemei a távolsággal gyorsan lecseng ⇒ első szomszéd közelítés (másod-, harmad szomszéd Eb. ugyanolyan messze)

Első szomszéd közelítés ≡ A és B között van kölcsönhatás

$$H_{AB}(q) = t_0\left[e^{i\vec{q}\vec{R}_1} + e^{i\vec{q}\vec{R}_2} + e^{i\vec{q}\vec{R}_3}\right] =: t_0 f(q)$$ (struktúra faktor)

↓ első szomszédot tövötti átfedési integrál

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{2p} & t_0 f(q) \\ t_0 f^*(q) & \varepsilon_{2p} \end{vmatrix} - \varepsilon(q)\underline{\underline{S}} = 0$$

↳ legyen $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \Rightarrow$ ø átfedés

$$\varepsilon_{NN}(q) = \frac{\varepsilon_{2p} \pm t_0 |f(a)|}{1 \pm S_{AB}|f(a)|}$$

↓ nearest neighbour

↳ $0 \Rightarrow \underline{\underline{S}}$ offdiagonális elem, de

$$H_{NN} = \varepsilon_{2p}\sum c^+_{j\alpha} c_{j\alpha} + t_0 \sum c^+_{j\alpha} c_{i\alpha}$$ (másodrevantált alak)

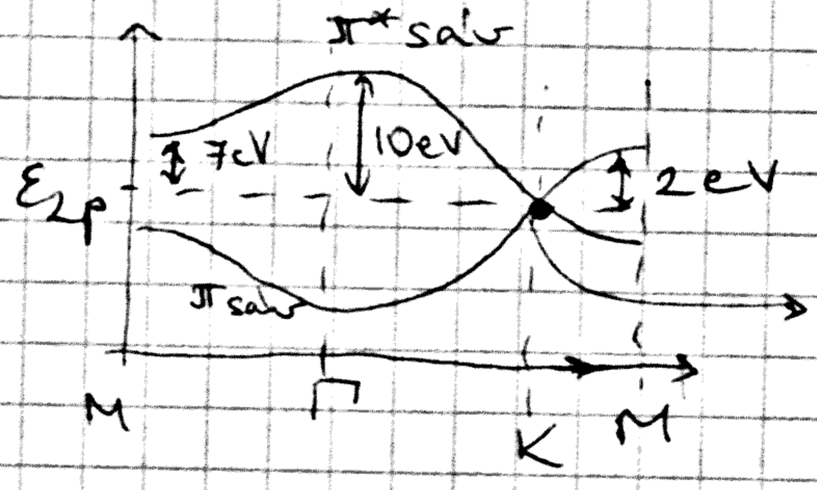
↓ mint a spin → izospin

$\alpha = \{A, B\}$

$$f(q) = e^{i\vec{\xi}\vec{R}_{AB}}\left(1 + e^{i\vec{q}\vec{a}_1} + e^{i\vec{q}\vec{a}_2}\right)$$

↑ $\vec{R}_{AB} = \vec{R}_1$

$t_0 = -2{,}7\,eV$



ehhez fittelik a méréseket (grafén elektronjai eddig vannak bebülve)

$\vec{q} = \vec{K} + \vec{k}$ ↳ kicsi

↓

K körül sorbafejtjük

$\vec{K}\vec{a} = 2\pi$

$$f(\xi) \cong \frac{\sqrt{3}}{2}(\xi_x - i\xi_y) + O(\xi^2)$$

$$\mathcal{H}_\xi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}t_0(\xi_x - i\xi_y) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}t_0(\xi_x + i\xi_y) & 0 \end{pmatrix} = \hbar v_F\left(\hat{\sigma}_x\xi_x + \hat{\sigma}_y\xi_y\right) = \hbar V_F \vec{\sigma}\vec{\xi} \quad (*)$$

($\frac{\sqrt{3}}{2}t_0 a \simeq \frac{c}{300}$)

Ez emlékeztet a Dirac-egyenletre

$H = \beta mc^2 + c\vec{\alpha}\vec{p}$ $\beta, \vec{\alpha}$ mátrixok

Pauli elv → $\vec{\alpha}, \beta$-at tövetnie kell a Clifford-algebrát

$N \times N$-esek $N = 2, 4 \ldots$

2 dimenzió: $H^{2D} = c\vec{\sigma}\vec{p} + mc^2\sigma^z$ ← Pauli mátrixok

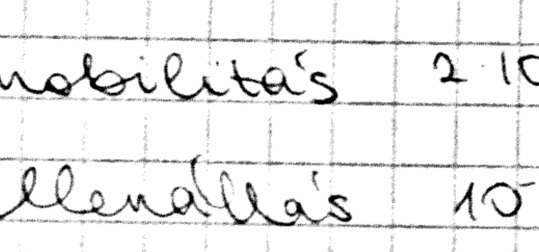
3. dimenzió: $H^{4D} \Rightarrow \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2\times2} & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{2\times2} \end{pmatrix}$ $\hat{\alpha}_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$

megoldások: 4 dimenziós spinorok $(\underbrace{\psi_1, \psi_2}_{\varepsilon>0}, \underbrace{\chi_1, \chi_2}_{\varepsilon<0})$

ψ_i, χ_i, $i = 1,2$ spin

(*) tömeg nélküli 2D • Dirac egyenlet

$H_\xi' = H_\xi[\sigma \to \sigma^*]$ ← diszperzió.



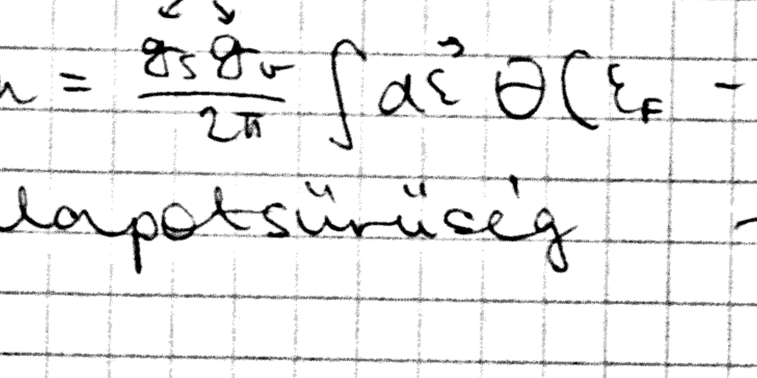
→ betöltve

K és K' nem tevereditt

2 db 2×2-es mátrix

+2× spin = 8×8 mátrix

A térelméletiek minden hülyeséget megpróbáltak ráírni a grafénre



ezzel el lehet tolni a potenciált ⇒ meddig legyen betöltve

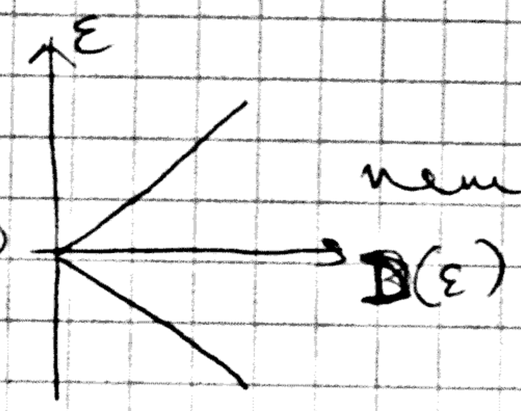
legyen $n = 10^{12}\ cm^{-2}$ elektron a grafénben } jó vezető

mobilitás $2 \cdot 10^5\ cm^2 V^{-1} s^{-1}$

ellenállás $10^{-6}\ \Omega cm$

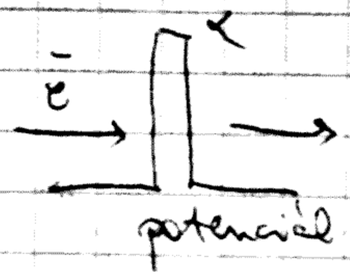
$$n = \frac{g_s g_v}{2\pi} \int d\vec{\xi}^2\, \Theta(\varepsilon_F - |\vec{\xi}|) = \frac{\varepsilon_F^2}{\pi}$$

állapotsűrűség $D(\varepsilon) = \frac{2|\varepsilon|}{\pi v_F^2 \hbar^2}$



nem konst.

Klein paradoxon



nem csökken le, mert a tömeggel arányosan lenne, de ∅ a tömeg ha ⊥ jön

1 Landau pályákat nézzük szabad elektronokra

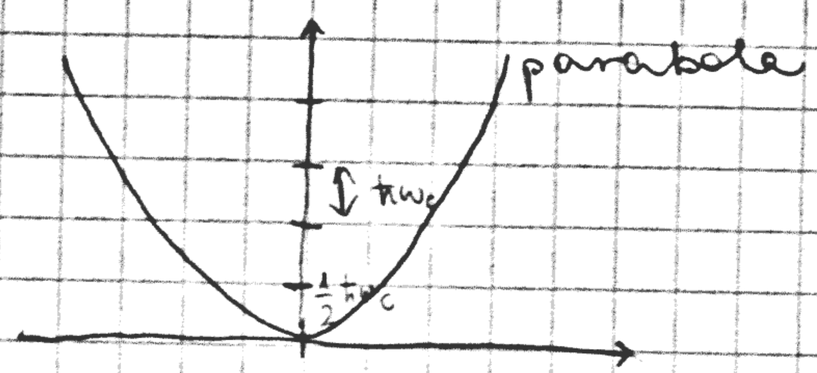
2D rendszert nézzük

$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m}$ szabad rendszer

$\pi = p_x + i p_y \rightarrow \mathcal{H} = \frac{\pi\pi^* + \pi^*\pi}{4m}$

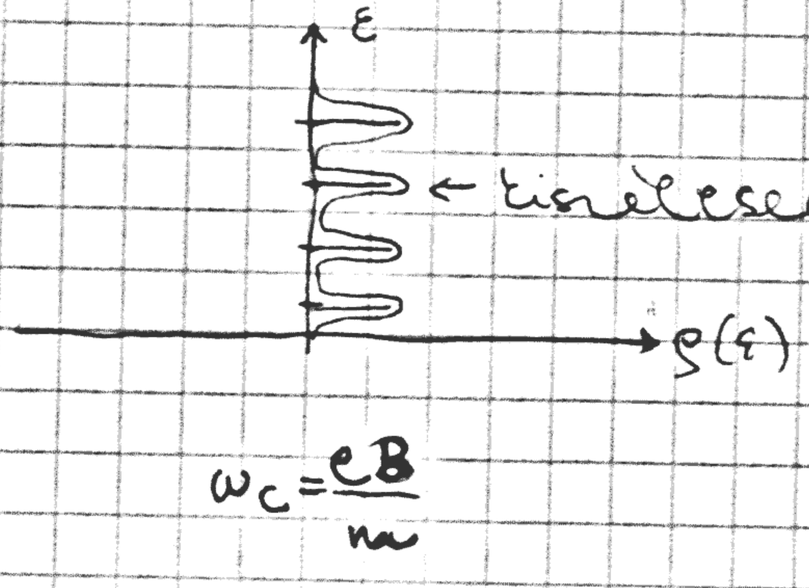
$\rightarrow \varepsilon = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c$ kvantált állapotok

$\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla} - e\vec{A}$



$\pi^* \varphi_i = \varphi_{i+1}$

$\pi \varphi_i = \varphi_{i-1}$



← tisztán csak a Dirac-delta

ha nem teljesen 2D vagy ha szennyezett

$\omega_c = \frac{eB}{m}$

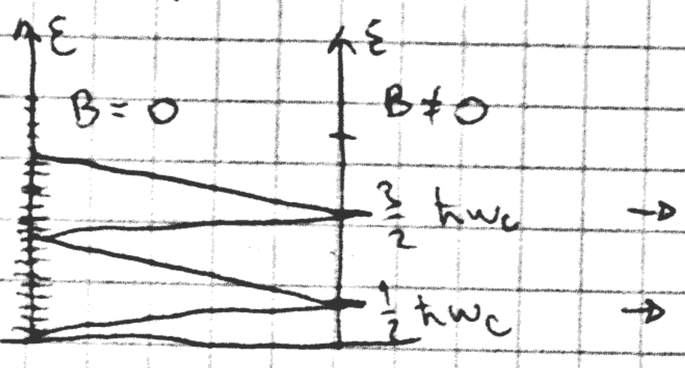
$B \sim 1\,T$ esetén $\hbar\omega_c \sim 10^{-4}\,eV$ ⇒ nagyon sűrűn

magas hőmérsékleten kontinuumnak tekinthető

$10^{-4}\,eV \sim 1\,K$ már magas hőm.

mérni tiszta, vékony anyagon, alacsony hőmérsékleten lehet

Landau cip mácit interpretációja



→ nagy degenerációjú állapot

sűrűn kvantálva

$N_p = \frac{eB}{2\pi\hbar} L_x L_y$

$\Delta\varepsilon \sim \frac{1}{L}$

$\Delta\varepsilon \sim \frac{1}{V}$

teljesen betöltött sáv / sáv nem vezet.

mágneses tér jelenlétében a vezetés:

$$\sigma_{\alpha\beta}(B) = \sigma_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{1+(\omega_c\tau)^2} & -\frac{\omega_c\tau}{1+(\omega_c\tau)^2} \\ \frac{\omega_c\tau}{1+(\omega_c\tau)^2} & \frac{1}{1+(\omega_c\tau)^2} \end{pmatrix} \Big\} \rho^{-1}$$

$$\sigma_0 = \frac{ne^2}{m}\tau \quad \text{[Drude-féle]}$$

$$\rho_{\alpha\beta}(B) = \rho_0 \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c\tau \\ \omega_c\tau & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_0 & -\frac{B}{ne} \\ \frac{B}{ne} & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Hall-ell.}$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

$$n_e = \frac{eB}{2\pi\hbar}\nu = \frac{e}{\hbar}B\nu$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\rho_{xx}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2} \qquad \sigma_{xy} = -\frac{\rho_{xy}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2}$$

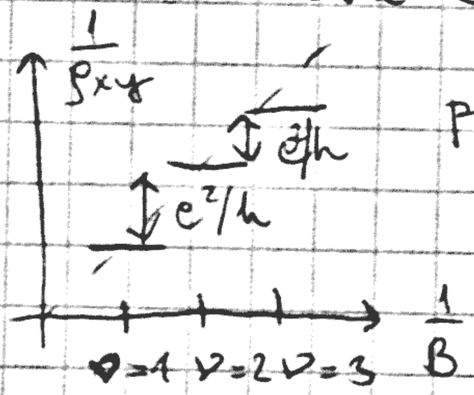
ha teljesen betöltött sáv: $\rho_{xx} = 0$, $\sigma_{xx} = 0$

$(\rho_{xy} \neq 0)$

$$\sigma_{xy} = -\frac{1}{\rho_{xy}} = -\frac{ne}{B} = -\nu\frac{e^2}{\hbar}$$

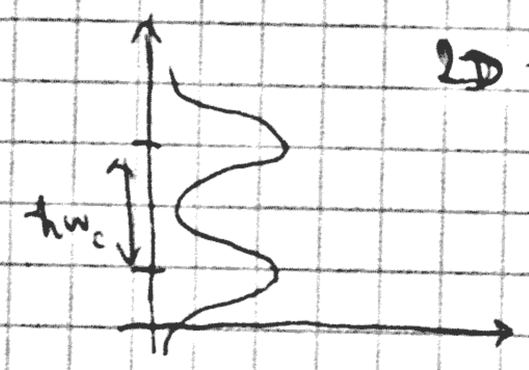
$\frac{e^2}{\hbar} = \frac{1}{R_K}$ $\quad R_K \cong 25{,}8\ k\Omega$ (ellenállás mértékének definíciója)

↳ von Klitzing

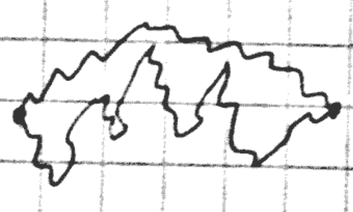


plátók az egyenes helyett

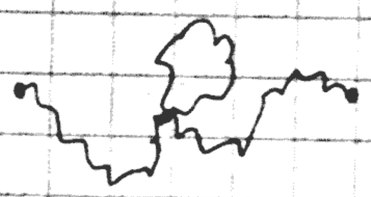
⇒ kvantált Hall-effektus



2D-ben (a vezetés mindig bolyongási probléma



egyik pontból a másikba a lehetséges pályákra összegezni



az ilyen hurkos pálya kivétel

⇒ 2 pálya interferál

adott pontba visszatérés valószínűsége 2D-ben

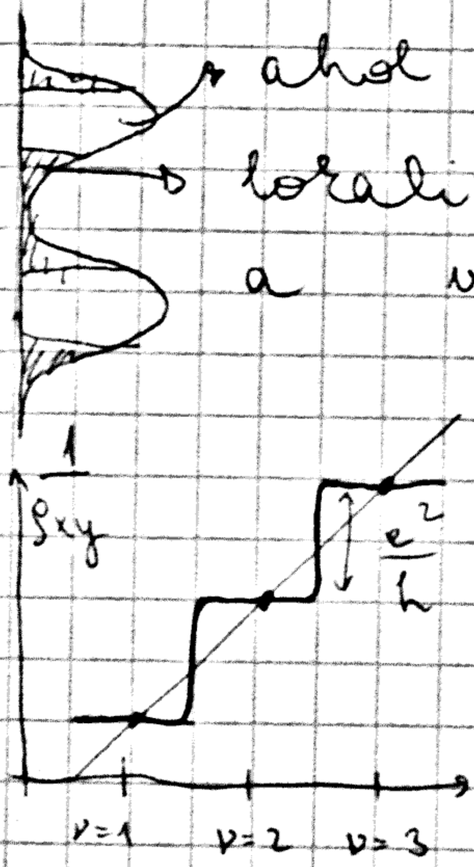
véges (2D a határeset)

az elektronok lokalizált állapotba kerülnek,

gyenge lokalizáció → sérülnek rá egy kvantált

a lokalizációs hossz ✱ ≫ bolyongási lépéset

✱ ≪ minta mérete



ν egész számoknál $\rho \to 0$

$\sigma \to 0$

Egyszerre mérhető

grafén → 2D-snek tekinthető

(a legellenőrizhetőbben)

$$H_K = \hbar v_F (\sigma_x k_x - \sigma_y k_y) \Rightarrow$$

$$H_K^2 = H_{p\text{-Pauli}} = v_F^2 \left((-i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A})^2 - e\hbar\sigma_z B \right)$$

↑

Zeeman tag

(belső)

$H_p \downarrow$

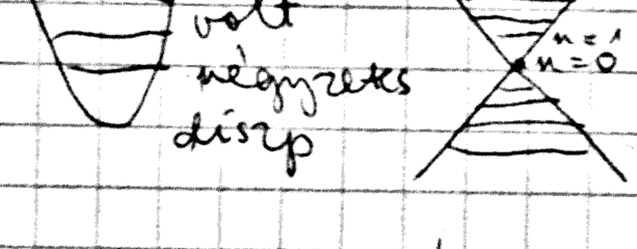
$$E_n = 2e\hbar v_F^2 B\left(n + \tfrac{1}{2}\right)$$

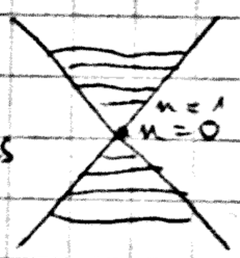
$H_K \downarrow$

$$\pm\sqrt{E_n} = \pm v_F \sqrt{2e\hbar B}\sqrt{(n}$$

$$\nu = \pm 2, \pm 6, \pm 10$$

$$\sigma_{xy} = \pm(4n+2)\frac{e^2}{h}$$





most lineáris diszp.

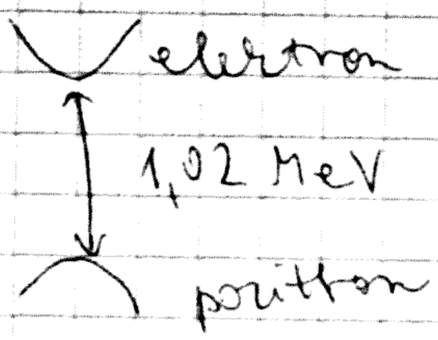
$\sqrt{n}$-nel mennek a szintek

↓

nincs alapállapot

elektron- és lyukállapotok

normál 3D



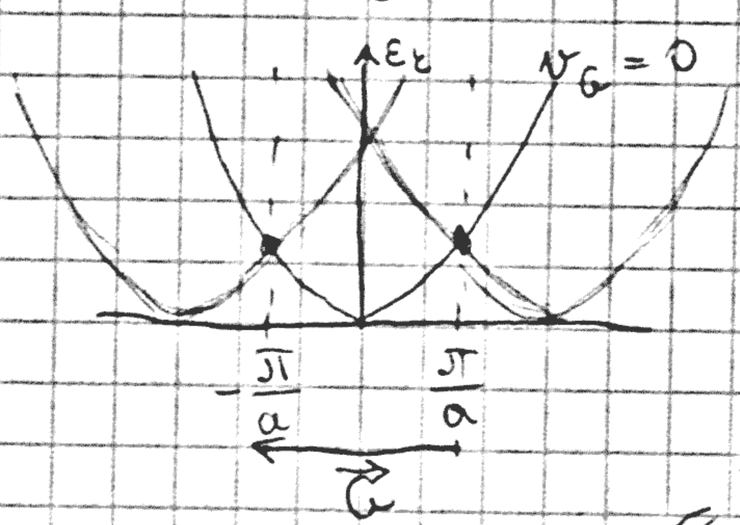
2 Kváziklasszikus közelítés érvényessége ???

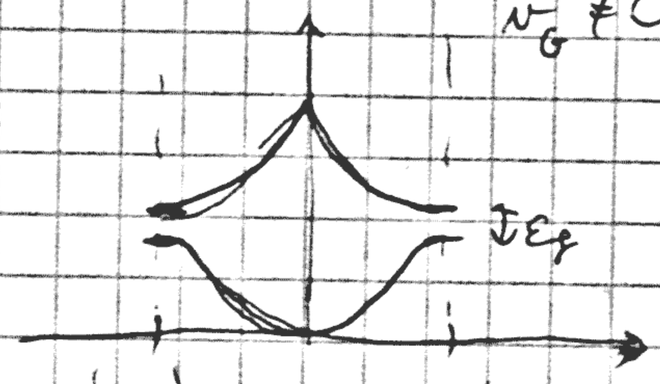
$$\Phi(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k}} g(\vec{k}) \exp\left\{ i \left(\vec{k}'\vec{r} - \frac{\varepsilon(\vec{k})t}{\hbar} \right) \right\}$$

hullámcsomag

$\vec{k}'$ $\vec{k}$ körüli Δk környezet $\quad \Delta k \ll \frac{1}{a}$

$\Delta r \sim \frac{1}{\Delta k} \qquad L \gg \Delta r \gg a$





BZ határán probléma

Bloch

Bloch - hullámokból állítjuk elő

$$\Phi_{nk}(\vec{r},t) = \sum_{k'} u_{nk'}(r)\, g(k') \exp\left\{ i \left(\vec{k}'\vec{r} - \frac{\varepsilon(\vec{k}')t}{\hbar} \right) \right\}$$

közelítés: csak egy sávot nézek egyszerre

nincs sáv. - sáv átmenet

$\hbar\omega < e_g$ (gap)

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\mathcal{H}_0 + e\vec{E}\vec{r} \right) \Psi$$

$$\Psi_{nk}(\vec{r},t) = e^{i\vec{k}\vec{r}}\, u_{nk}(\vec{r})\, e^{-i\varepsilon_k t/\hbar}$$

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \Psi_{nk}}{\partial t} = -\frac{\hbar}{i}\left.\frac{\partial \Psi_{nk}}{\partial t}\right|_k - \frac{\hbar}{i}\left.\frac{\partial \Psi_{nk}}{\partial t}\right|_t \frac{\partial \vec{k}}{\partial t} = \varepsilon_k \Psi_{nk} + \frac{1}{i} e^{i\vec{k}\vec{r}} \cdot$$

$$\cdot e\vec{E}\left(i\vec{r} + \frac{\partial}{\partial \vec{k}} \right) u_{nk}\, e^{-i\frac{\varepsilon_{nk}t}{\hbar}} =$$

$$= \left(\varepsilon_k + e\vec{E}\vec{r} + \underbrace{\frac{1}{i} e\vec{E}\frac{\partial \ln u_{nk}}{\partial \vec{k}}}_{\text{új tag}} \right) \Psi_{nk}(\vec{r},t)$$

$\Rightarrow$ ennek kell kicsinek lenni

$\frac{\partial \varepsilon_{nk}}{\partial k}\Delta k \sim \varepsilon_g$ kell a BZ határán (a sáv indexes)

$$\frac{\partial \ln u_{nk}}{\partial k} = \frac{1}{u_{nk}}\frac{\partial u_{nk}}{\partial k} \approx \frac{1}{\Delta k} \sim \frac{1}{\varepsilon_g}\frac{\hbar^2 k}{m^*}$$ ilyen

nagyságrendűnek kell lennie

$e^{E\frac{1}{\varepsilon_g}\frac{\hbar^2 t}{m^*}} \ll \varepsilon_g$ tell esemint a becsle's semint

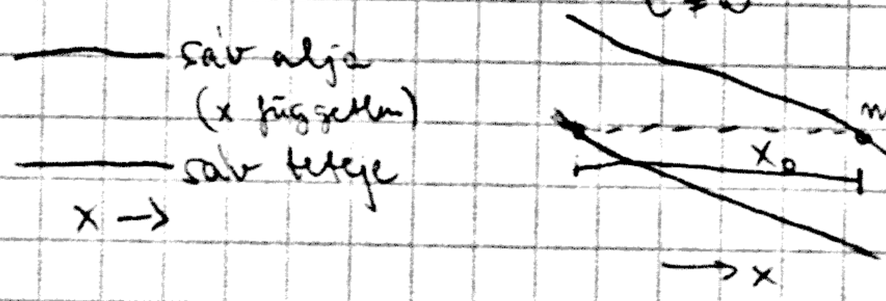
$t \sim \frac{1}{a}\frac{\hbar^2 t^2}{2m^*} \sim \varepsilon_F \quad \left[eEa \ll \frac{\varepsilon_g^2}{\varepsilon_F}\right]$

ha ugyanezt mágneses térrel is megcsinálhatjuk

$\left[\hbar\omega_c \ll \frac{\varepsilon_g^2}{\varepsilon_F}\right]$ jönne ki

ez E-re és B-re korlát, hogy ne legyen sáv-sáv átmenet

$E=0$ $\qquad$ $\varepsilon \neq 0 \quad (eEx)$



át tud alagutazni elvi energiaszintes állapotba

↓

véges valószínűség $\sim e^{-\text{távolság}}$

eEx_0 az ugrás

ha ez ε_g nagyságrendű akkor tud átugrani

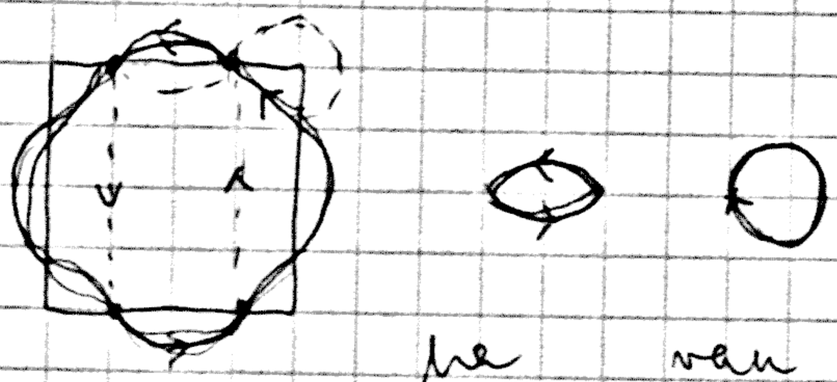
$p \sim \exp\left\{-C\frac{\varepsilon_g^2}{eEa\varepsilon_F}\right\}$

ugyanaz a feltétel jön ki ebből a Zener alagutazásból

$B \sim 1\,T \Rightarrow \hbar\omega_c \sim 10^{-4}\,eV$

$\varepsilon_g \sim 10^{-2}\,eV$

} van sáv-sáv átmenet



mintha ilyen pályák lennének

de van sáv-sáv átmenet, ehhez nem az ekvivalens pontba, hanem másik sávba ugrik → hangsúlyozza a minden

esetet túlnyomó részében a kváziklasszikus közelítés jól működik

Kivételek:

- nagy test
- nagyon kis gap