normál Fermi gáz alapállapot ! $\perp$ az ideális gázokra

Ha $\perp$ akkor adiabatikus nem tudjuk az alapállapotot adiabatikusan átfejleszteni.

Bose rendszerek, Bose–Einstein kondenzáció

Induljunk magas T-ről!

$$\hat H = \underbrace{\sum_{ks} \epsilon_k \hat a^\dagger_{ks} \hat a_{ks}}_{H_0} + \underbrace{\frac{1}{2V} \sum_{\substack{kk'q \\ ss'}} a^\dagger_{k+q,s} a^\dagger_{k'-q,s'} a_{k's'} a_{ks} V(q)}_{H_1}$$

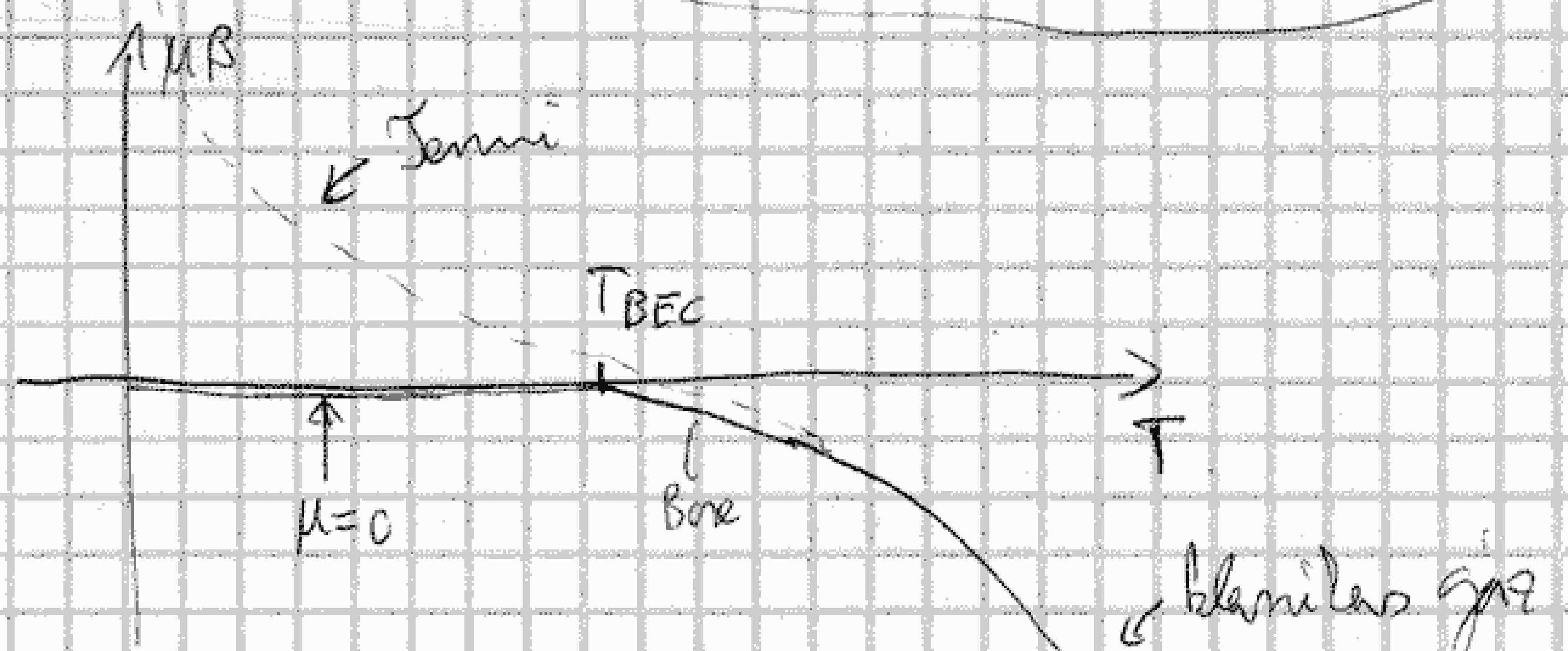
Nagykan. Hamiltoni

$$K = H - \mu N = K_0 + K_1$$
$$K_0 = H_0 - \mu N$$

$$G_0(k, i\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \hbar^{-1}(\epsilon_k - \mu)} \qquad \epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$G(k, i\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \hbar^{-1}(\epsilon_k - \mu) - \Sigma(k, \omega_n)}$$

$$\boxed{N(T, V, \mu) = V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta\hbar} \sum_n G(k, i\omega_n) e^{i\omega_n \eta}}$$



$$N = V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1}$$

$k>0$ -ás állapotokra

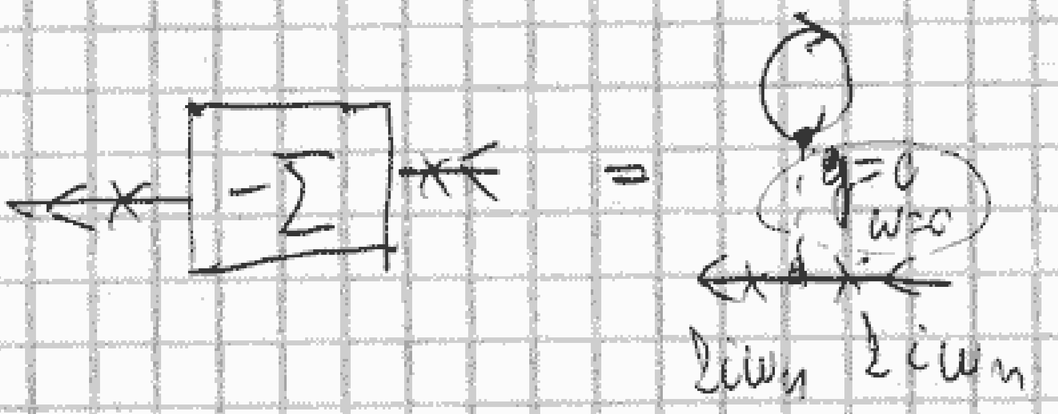
Ha $\mu > 0$ lenne $\epsilon_k - \mu = 0$ lehetne $\to$ div

$\mu = 0 \Rightarrow$ csak $k=0$ pontban div.

$$N = \underbrace{N_0}_{\text{alap-áll.}} + N' \qquad N' = V \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\beta(e_q-\mu)}-1}\Bigg|_{\mu=0}$$

— o —

Hartree közelítés



$$-\Sigma(k, i\omega_n) = (-\hbar^{-1}) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta\hbar} \sum_m -\mathcal{G}_0(q, i\omega_m)\, e^{i\omega_m \eta}\, v(q=0)$$

$$\omega_n = \frac{2\pi m}{\beta\hbar}$$

$$\frac{1}{e^{\beta(e_q-\mu)}-1} = n^{(0)}(q)$$

$$\hbar\Sigma_1 = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} v(0)\, n^0(q) = n\, v(0) \qquad n = \frac{N}{V}$$

$$\mathcal{G}^H(k, i\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \hbar^{-1}(e_k + n v(0) - \mu)}$$

BEC : $\mu = n v(0)$ nem ~~...~~ $\mu = 0$-val

$$\mathcal{G}^H(k, i\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \hbar^{-1}(e_k^H - \mu)} = \frac{1}{i\omega_n - \hbar^{-1}(e_k - \mu_0)}$$

$$e_k^H = e_k + n v(0) \qquad \mu_0 = \mu - n v(0)$$

Bose rend ha $\mu_0 = 0$

A sajátenergia ~ független ezzel

hozzá csatoljuk a saját energiához

$$\mu = \hbar\Sigma(0,0)$$

[illegible]ázata

$\mu = 0$

$\varepsilon_0 = 0$

$$N = V(2s+1)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu_0)}-1} = V(2s+1)\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{e^{\beta_c\varepsilon_k}-1} =$$

$$= \frac{V(2s+1)}{(2\pi)^3}\,4\pi \int \left(\frac{2m}{\beta_c\hbar^2}\right)^{3/2}\int_0^\infty dx\,\frac{x^2}{e^{x^2}-1} =$$

$$\beta_c\varepsilon_k = \frac{\beta_c\hbar^2 k^2}{2m} = x^2$$

$t = x^2$

$dt = 2x\,dx$

$x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt$

$$x = \sqrt{\frac{\beta_c\hbar^2}{2m}}\,k$$

$$= \frac{V(2s+1)}{(2\pi)^2}\left(\frac{2m}{\beta_c\hbar^2}\right)^{3/2}\underbrace{\int_0^\infty \frac{t^{1/2}\,dt}{e^t-1}}_{\Gamma(3/2)\,\zeta(3/2)}$$

$\Downarrow$

$$k_B T_{BEC} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{4\pi^2}{(2s+1)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}\right)^{2/3}\cdot\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} =$$

$$= \frac{\hbar^2}{(2s+1)^{2/3}}\,n^{2/3}\,\frac{3.31}{m}$$

$\Downarrow$

Hartree közelítésben a

kölcsönhatás nem módosítja a T_c-t!

Mi van T_c alatt?

$\underline{T<T_c}$

$N = N_0 + N'$

N': kondenzátumon kívül

$$N' = V(2S+1)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{e^{\beta e_k}-1} = N\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$$

$$N_0 = N - N' = N\left[1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\right]$$

De itt nem vettük figyelembe a kondenzátumon belüli atomok kölcsönhatását.

Kölcsönható Bose gáz $T=0$-án

0 hőmérsékleten ideális gázban minden atom az alapállapotban van

$N_0 \simeq N$ (elég gyenge kölcsönhatásnál)

$$H = \sum_k e_k a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2V}\sum_{k k' q} v(q)\, a_{k+q}^\dagger a_{k'-q}^\dagger a_{k'} a_k$$

$a_0 |BEC\rangle_N = \sqrt{N}\, |BEC\rangle_{N-1}$ $\quad |BEC\rangle = |N,0,0,0,\dots\rangle$ (ideális gáz)

$a_0^\dagger |BEC\rangle_N = \sqrt{N+1}\, |BEC\rangle_{N+1}$

$N-1 \simeq N \simeq N+1$ ha $n \to \infty$

Bogoljubov elmélet:

$a_0 = a_0^\dagger = \sqrt{N} \quad \longleftarrow N \longrightarrow \quad [a_0, a_0^\dagger]_- = 1$

valós

Fizikai kép: a Bose kondenzátum extra részecske tartály, amibe ki-be mehetnek részecskék

Hiba: $\frac{1}{N}$

$$\hat{H} = \sum_{k}^{\overset{k\neq 0}{\prime}} \varepsilon_k a_k^\dagger a_k + (\text{zéruskonst.}) + \frac{1}{2V} \sum_{k,k',q}' v(q) a_{k+q}^\dagger a_{k'-q}^\dagger a_{k'} a_k +$$

$$0 = N \cdot 0$$

$k \neq 0$
$k' \neq 0$
$k+q \neq 0$
$k'-q \neq 0$

$$n_0 := \frac{N_0}{V}$$

$$+ \overbrace{\frac{n_0^{1/2}}{V^{1/2}} \sum_{kq}' v(q) \left(a_{k+q}^\dagger a_q a_k + a_{k+q}^\dagger a_{-q}^\dagger a_k \right)}^{k=0\ \dots}$$

$(k+q \neq 0)$
$(k \neq 0)$
$(q \neq 0)$

$$+ \overbrace{\frac{n_0}{V} \sum_{q\neq 0}' v(q) a_q^\dagger a_q}^{\text{lettő} \sim \text{nám is} = 0} + \frac{1}{2} n_0 \sum_{q}' v(q) \left(a_q^\dagger a_{-q}^\dagger + a_q a_{-q} \right)$$

$$+ n_0 v(0) \overbrace{\sum_{k}'' a_k^\dagger a_k}^{n' \text{ lesz}} + \underbrace{\frac{V}{2} n_0^2 v(0)}_{}$$

$(q=0)$

$$\frac{V}{2} n_0^2 v(0) - V n' n_0 v(0)$$

Amiben nincs n_0, azokat elhagyjuk.

$\Downarrow$

Ami marad az kvadratikus

$$n = n_0 + n' \approx n_0 \qquad n' \ll n_0$$

$$n^2 = (n_0 + n')^2 \approx n_0^2 + 2 n_0 n'$$

$$H = \frac{V}{2} n^2 v(0) + \sum_{k}' (\varepsilon_k + n v(k)) a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} n \sum_{k}' v(k) (a_k a_{-k} + a_k^\dagger a_{-k}^\dagger)$$

Szeretnénk: $\quad H = \sum_k E(k) \alpha_k^\dagger \alpha_k + E_0$

$$\alpha_k |BEC\rangle = 0$$

Ebben az esetben célszerű:

$$\boxed{\alpha_k = u_k a_k - v_k a^+_{-k}}$$

$$\alpha_k^+ = u_k^* a_k^+ - v_k^* a_{-k} \quad \text{helyett:} \quad \boxed{\alpha_k^+ = u_k a_k^+ - v_k a_k}$$

feltevés: u_k, v_k valós ← időtükrözés

u_k és v_k csak $|k|$-tól függ

Kell: $[\alpha_k, \alpha_{k'}^+] = \delta_{k,k'}$

$$[\alpha_k, \alpha_{k'}^+] = u_k u_{k'} [a_k, a_{k'}^+] - v_k v_{k'} [a_{k'}, a_k^+] =$$

$$= (u_k^2 - v_k^2)\, \delta_{kk'}$$

Tehát

$$u_k^2 - v_k^2 = 1 \qquad \text{kell.}$$

inverz:

$$\boxed{\begin{aligned} a_k &= u_k \alpha_k + v_k \alpha^+_{-k} \\ a_k^+ &= u_k \alpha_k^+ + v_k \alpha_{-k} \end{aligned}}$$

$$H = U + H_{11} + H_{20}$$

$$U = \frac{V}{2} n^2 v(0) + \sum_k{}' \left[(\varepsilon_k + n v(0)) v_k^2 + n v(k) u_k v_k \right)$$

$$H_{11} = \sum_k \left\{ \left[\varepsilon_k + n v(k) \right] (u_k^2 + v_k^2) + 2n v(k) u_k v_k \right\} \alpha_k^+ \alpha_k$$

$$H_{20} = \sum_k \underbrace{\left[(e_k + n v(k)) u_k v_k + \frac{1}{2} n v(k) (u_k^2 + v_k^2) \right]}_{\text{legyen ez 0 úgy választjuk a paraméterezést}} (\alpha_k \alpha_{-k} + \alpha_k^+ \alpha_{-k}^+)$$

A két egyenletünk:

$$\begin{cases} u_k^2 - v_k^2 = 1 & ① \\ (e_k + n v(k)) u_k v_k + \frac{1}{2} n v(k) (u_k^2 + v_k^2) = 0 & ② \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} u_k &= \operatorname{ch} \chi_k \\ v_k &= \operatorname{sh} \chi_k \end{aligned}\right\} \gg ① \checkmark$$

09.29.

ezzel

$$2 u_k v_k = \operatorname{sh} 2\chi_k$$

$$u_k^2 + v_k^2 = \operatorname{ch} 2\chi_k$$

$$② \longrightarrow \operatorname{th} 2\chi_k = - \frac{n v(k)}{e_k + n v(k)}$$

$$\operatorname{sh} 2\chi_k = - \frac{n v(k)}{E_k}$$

$$\operatorname{ch} 2\chi_k = \frac{e_k + n v(k)}{E_k}$$

$$\operatorname{sh}^2 2\chi_k - \operatorname{ch}^2 2\chi_k = 1$$

$$\Downarrow$$

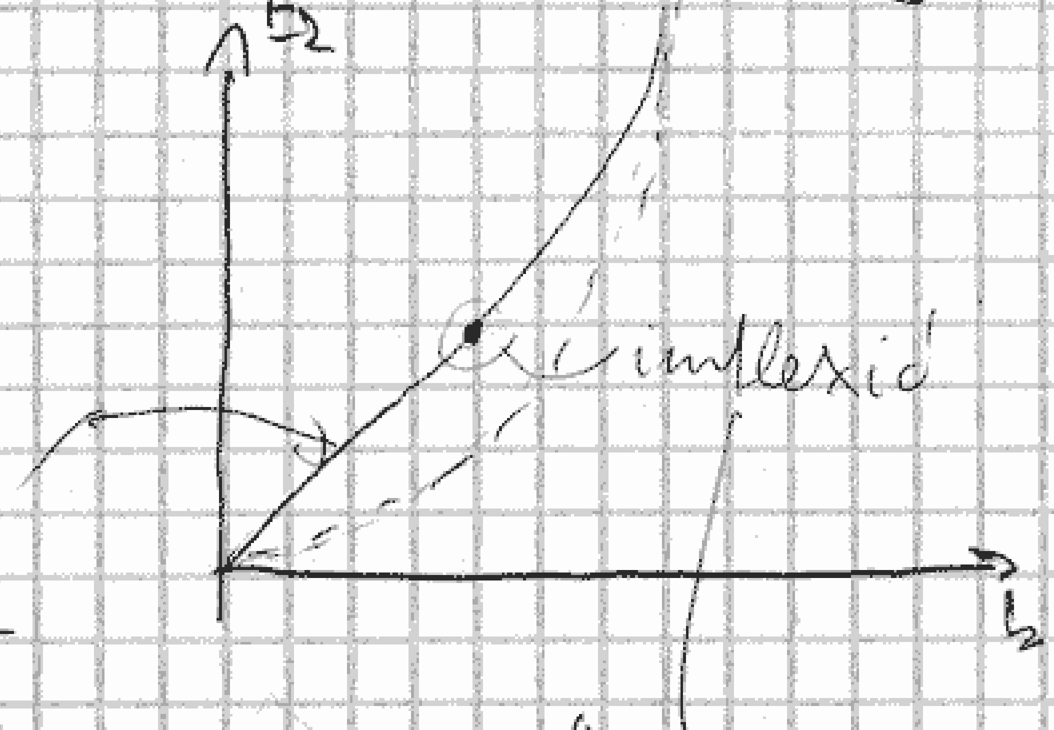
$$E_k = \sqrt{(e_k + n v(k))^2 - n^2 v^2(k)}$$

$$H = U + \sum_k E_k \alpha_k^+ \alpha_k$$

$$\alpha_k | BEC \rangle = 0$$

$$u_k^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{e_k + n v(k)}{E_k} + 1\right]$$

$$v_k^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{e_k + n v(k)}{E_k} - 1\right] \qquad e_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

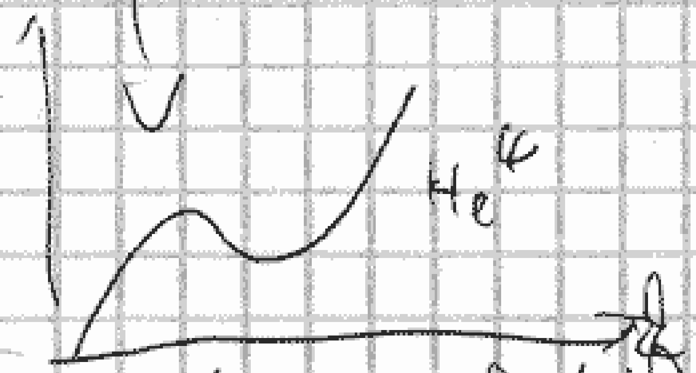


$k \gg 1$ lim

k kicsi $\quad v(k) \approx v(0)$

$$E_k = \sqrt{(e_k + n v(k))^2 - n^2 v^2(k)}$$

$$\approx \sqrt{2 n v(0)\, e_k}$$



ezt elvártuk megmagyarázni de a ritka gáz pert. approximációs nem tudja

Kondenzátumon kívüli atomok száma

$$N' = \sum_{k\neq 0}' \langle BEC | a_k^+ a_k | BEC \rangle =$$

$$= \sum_{k\neq 0}' \Big[v_k^2 + \langle BEC | \underbrace{u_k^2 \alpha_k^+ \alpha_k}_{=0} + \underbrace{v_k^2 \alpha_k^+ \alpha_k + \dots}_{0 \text{ járulék?}}) | BEC \rangle$$

$$= \sum_{k\neq 0}' v_k^2 = V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} v_k^2 = V \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk\, k^2 \frac{1}{2}\left[-1 + \frac{e_k + n v(0)}{E_k}\right]$$

$$\frac{e_k}{n v(0)} = z^2 \qquad z = k \xi_B \quad \text{átlagtérbeli konv. hossz.}$$

$$\xi_B = \frac{\hbar}{(2m\, n v(0))^{1/2}}$$

$$-\frac{V}{4\pi^2}\frac{1}{\lambda_B^3}\int_0^\infty dz\, z^2\left[-1+\frac{z^2+1}{(z^4+2z^2)^{1/2}}\right]=\frac{8V}{3\sqrt{\pi}}\overset{N}{n}\sqrt{n a^3}+\ldots$$

$v(0)=\frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$ ← hosszúság dimenziójú

$s\sim$ szórási hossz

$v(r)=\frac{4\pi\hbar^2 a}{m}\delta^3(r)$

un. kvázi Bornközelítés.

$$N'=\frac{8N}{3\sqrt{\pi}}\sqrt{na^3}$$

$a=0$ Id. rések $\Rightarrow$ $N'=0$

a-val nő a kondenzátumon kívüli részecskék száma

$$N_0=N-N'=N\left[1-\frac{8}{3\sqrt{\pi}}\sqrt{na^3}+\ldots\right]$$

kis paraméter.

<u>Kondenzált Bose rendszerek véges hőmérsékleten</u>

$$H=\sum_k e_k a_k^\dagger a_k+\frac{1}{2V}\sum_{\substack{k_1k_2k_3k_4\\ k_1+k_2=k_3+k_4}} v(k_1-k_3)\,a_{k_1}^\dagger a_{k_2}^\dagger a_{k_3}a_{k_4}$$

$v(k)=\frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$

$$\hat{K}=\hat{H}-\mu\hat{N}$$

$T<T_C$ $\langle a_0\rangle=\sqrt{N_0}\neq 0$ → olyan állapotokat számolunk amik önmaguk kül részecske-számú

állapotok

Milyen szimmetria sérül:

$$\left.\begin{aligned} a_k &\to a_k e^{i\theta} \\ a_k^+ &\to a_k^+ e^{-i\theta} \end{aligned}\right\} \text{ Globális } U(1) \text{ szimmetria.}$$

$$\langle a_0 \rangle = \sqrt{N_0}$$

$$\langle a_0 e^{i\theta} \rangle = e^{i\theta}\sqrt{N_0}$$

Goldstone: sérülő folyt. szimm.

$\Downarrow$

gap nélküli bozon gerj.

$$\boxed{\begin{aligned} b_k &:= a_k - \sqrt{N_0}\,\delta_{k,0} \\ a_k^+ &:= a_k^+ - \sqrt{N_0}\,\delta_{k,0} \end{aligned}}$$

← olyan kanonikus trafó, ami „eltünteti" a szimm. sértést.

$$\sum_k (\epsilon_k-\mu) a_k^+ a_k = \sum_k (\epsilon_k-\mu)(b_k^+ + \sqrt{N_0}\,\delta_{k0})(b_k+\sqrt{N_0}\,\delta_{k0}) = \sum_k(\epsilon_k-\mu_k)\left[b_k^+b_k + \sqrt{N_0}\,(b_k+b_k^+)\delta_{k0} + N_0\delta_{k0}\right] =$$

$$= \underbrace{\sum_k(\epsilon_k-\mu)\, b_k^+b_k}_{\hat K_0} \; \underbrace{-\mu\sqrt{N_0}\,(b_0+b_0^+)}_{K_1'} \; \underbrace{-\mu N_0}_{K_0'}$$

kölcsönhatási rész:

$$\frac{1}{2V}\sum_{\substack{k_1k_2k_3k_4\\ k_1+k_2=k_3+k_4}} a^+_{k_1}a^+_{k_2}a_{k_3}a_{k_4} = K_{I4}+K_{I3}+K_{I2}+K_{I1}+K_{I0}$$

4,3,2,1,0: hány db b operátor van benne.

$$K_{I4} = \frac{v(0)}{2V}\sum_{\substack{k_1k_2k_3k_4\\ k_1+k_2=k_3+k_4}} b^+_{k_1}b^+_{k_2}b_{k_3}b_{k_4}\, v(k_1-k_3)$$

$$K_{I3} = \frac{\sqrt{N_0}}{2V}\sum\left(b^+_{k_1}b^+_{k_2}b_{k_3}\delta_{k_40} + b^+_{k_1}b^+_{k_2}b_{k_4}\delta_{k_30} + b^+_{k_1}b_{k_3}b_{k_4}\delta_{k_20} + b^+_{k_2}b_{k_3}b_{k_4}\delta_{k_10}\right) v(k_1-k_2)$$

$$K_{I2} = \frac{N_0}{2V}\sum\left(b^+_{k_1}b^+_{k_2}\delta_{k_30}\delta_{k_40} + b^+_{k_1}b_{k_3}\delta_{k_20}\delta_{k_40} + b^+_{k_2}b_{k_3}\delta_{k_10}\delta_{k_40} + b^+_{k_2}b_{k_4}\delta_{k_10}\delta_{k_30} + b^+_{k_1}b_{k_4}\delta_{k_20}\delta_{k_30} + b_{k_3}b_{k_4}\delta_{k_10}\delta_{k_20}\right)\cdot v(k_1-k_3)$$

$$K_{I1} = \frac{N_0^{3/2}}{2V}\, v(0)\,(2b_0^+ + 2b_0)$$

$$K_{I0} = \frac{N_0^2}{2V}\, v(0)$$

$$\hat K = \hat K_0 + \hat K_1' + \hat K_0' + \hat K_{I4} \quad \hat K_{I3} + \hat K_{I2} + \hat K_{I1} + \hat K_{I0}$$

Green függvény

időfejlesztés

$$\mathcal{G}_{11}(k,\tau) = -\langle T_\tau [b_k(\tau), b_k^+(0)] \rangle$$ ← tavaly ez a Green volt

$$\hat{O}(\tau) = e^{K\frac{\tau}{\hbar}} \hat{O} e^{-K\frac{\tau}{\hbar}}$$

$$\langle \hat{O} \rangle = Sp(\rho_g \hat{O})$$

$$\rho_g = \frac{e^{-\beta K}}{Z_0}$$

$$\mathcal{G}_{12}(k,\tau) = -\langle T_\tau [b_k(\tau), b_{-k}(0)] \rangle$$

$$\mathcal{G}_{21}(k,\tau) = -\langle T_\tau [b_{-k}^+(\tau), b_k^+(0)] \rangle$$

$$\mathcal{G}_{22}(k,\tau) = -\langle T_\tau [b_{-k}^+(\tau) b_{-k}(0)] \rangle$$

izotrop rendszer a $\mathcal{G}$-k csak $|k|$ függők

időtükr. miatt a $\mathcal{G}$-k valósak is

$$\mathcal{G}_{21}(k,\tau) = \mathcal{G}_{12}(-k,-\tau)$$

$$\mathcal{G}_{11}(k,\tau) = \mathcal{G}_{22}(-k,-\tau)$$

$$\underline{\mathcal{G}}(k,\tau) = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{11} & \mathcal{G}_{12} \\ \mathcal{G}_{21} & \mathcal{G}_{22} \end{bmatrix}$$

A $\mathcal{G}$-k mind τ elt. ismét is periodikusak $\beta\hbar$-ban.

$$G_{\alpha\beta}(k, i\omega_n) = \int_0^{\beta\hbar} G_{\alpha\beta}(k,\tau)\, e^{i\omega_n \tau}\, d\tau$$

$$\omega_n = \frac{2n\pi}{\beta\hbar}$$

$$G_{\alpha\beta}(k,\tau) = \frac{1}{\beta\hbar}\sum_n G(k, i\omega_n)\, e^{-i\omega_n \tau}$$

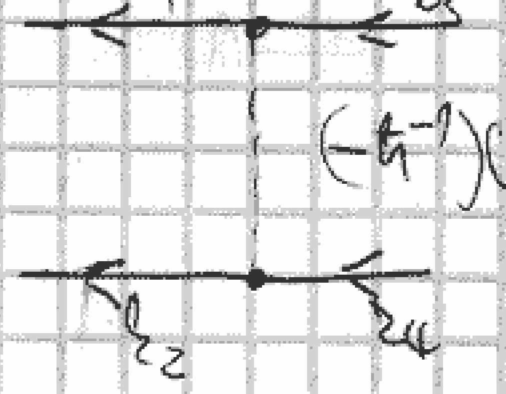
Szabad Green fv.: (K_0):

$$\boxed{\begin{aligned} G^0_{11}(k, i\omega_n) &= \frac{1}{i\omega_n - \hbar^{-1}(\varepsilon_k - \mu)} \\ G^{(0)}_{22}(k, i\omega_n) &= \frac{1}{-i\omega_n - \hbar^{-1}(\varepsilon_k - \mu)} \\ G^0_{12}(k, i\omega_n) &= G^0_{21}(k, i\omega_n) = 0 \end{aligned}}$$

K_1' és $K_{I\times}$ $\longrightarrow$ perturbáció.

Feynman diagrammok

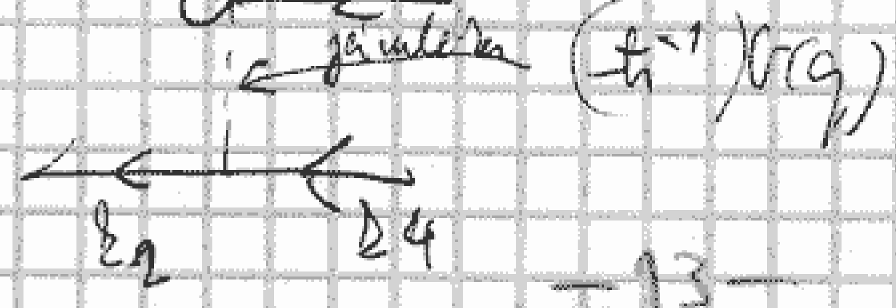
K_{I4}: az volt tavaly $\quad \frac{1}{2V}\sum' b^+_{k_1} b^+_{k_2} b_{k_3} b_{k_4}\, V(k_1-k_3)$



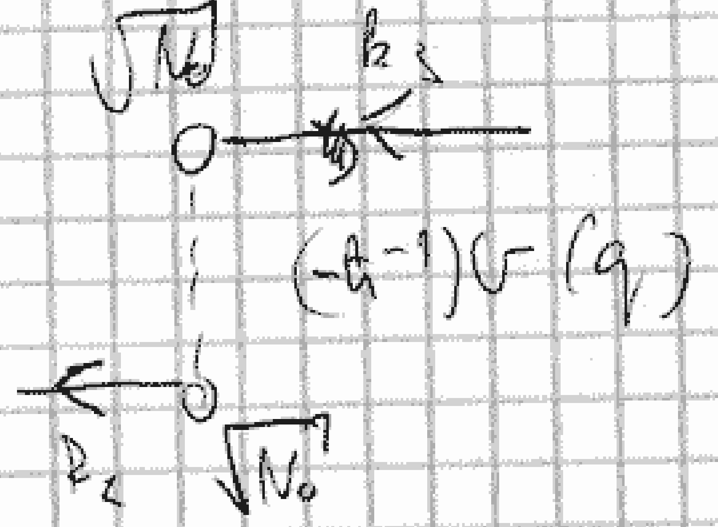
$$\frac{\sqrt{N_0}}{2V}\sum b^+_{k_2} b_{k_3} b_{k_4}\, \delta_{k_0}\, V(k_1-k_3)$$

↳ a 2. kimenő vonal lehet

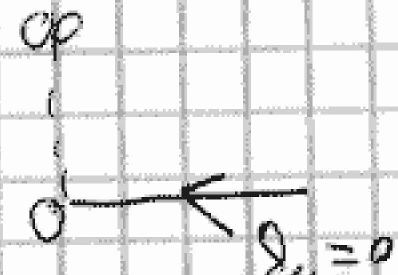
megmarad az imp. és a diszkrét hely



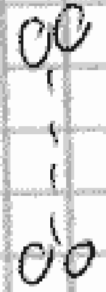
$$\frac{N_0}{2V}\sum b_{k_2}^{+}\, b_{k_3}\, \delta_{k_1 0}\, \delta_{k_2 1 0}\, v(k_1-k_3)$$



$$\frac{N_0^{3/2}}{2V}\, v(0)\, b_0$$



$$\frac{N_0^{2}}{2V}\, v(0)$$

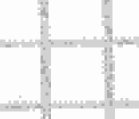


$$(-\mu)\, N_0^{1/2}\, b_0$$

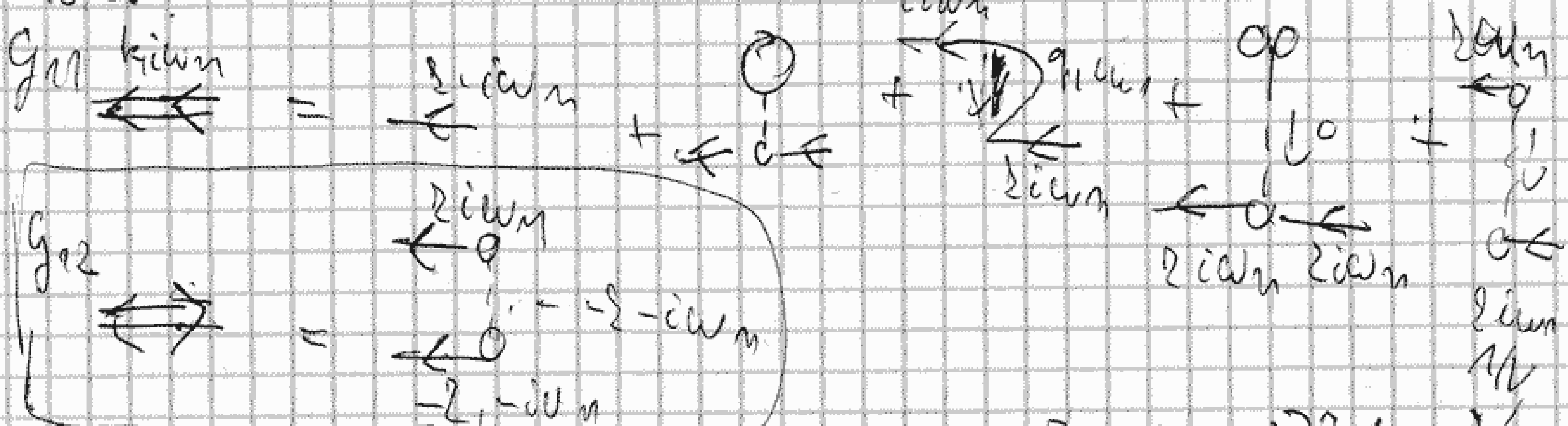
$(-\mu)$

$$(-\mu)\sqrt{N_0}\, b_0^{+}$$

K_0^1



10.06



$$-\mathcal{G}_{11}(k,i\omega_n) = -\mathcal{G}_0(k,i\omega_n) + (-\hbar^{-1})\, v(0)\left[-\mathcal{G}_0(k,i\omega_n)\right]^2 \frac{1}{\beta\hbar}\sum_m \frac{1}{V}\sum_q \left[-\mathcal{G}^{(0)}(q,i\omega_m)\right] e^{i\omega_m \eta}$$

$$+(-\hbar^{-1})\left[-\mathcal{G}_0(k,i\omega_n)\right]^2 \frac{1}{\beta\hbar}\sum_m \frac{1}{V}\sum_q v(q-k)\left[-\mathcal{G}_0(q,i\omega_m)\right] e^{i\omega_m \eta}$$

$$+(-\hbar^{-1})\left[-\mathcal{G}_0(k,i\omega_n)\right]^2 v(0)\frac{N_0}{V} + (\hbar^{-1})\left[\mathcal{G}_0(k,i\omega_n)\right]^2 \frac{N_0}{V} v(-k)$$

$$-\mathcal{G}_{12}(k,i\omega_n) = (-\hbar^{-1})\left[-\mathcal{G}_0(k,i\omega_n)\right]\left[-\mathcal{G}_0(-k,-i\omega_n)\right]\frac{N_0}{V} v(-k)$$

Az anomális Green fgv.-nek nincs 0. rendje

ha $N_0 = 0$ akkor eltűnik

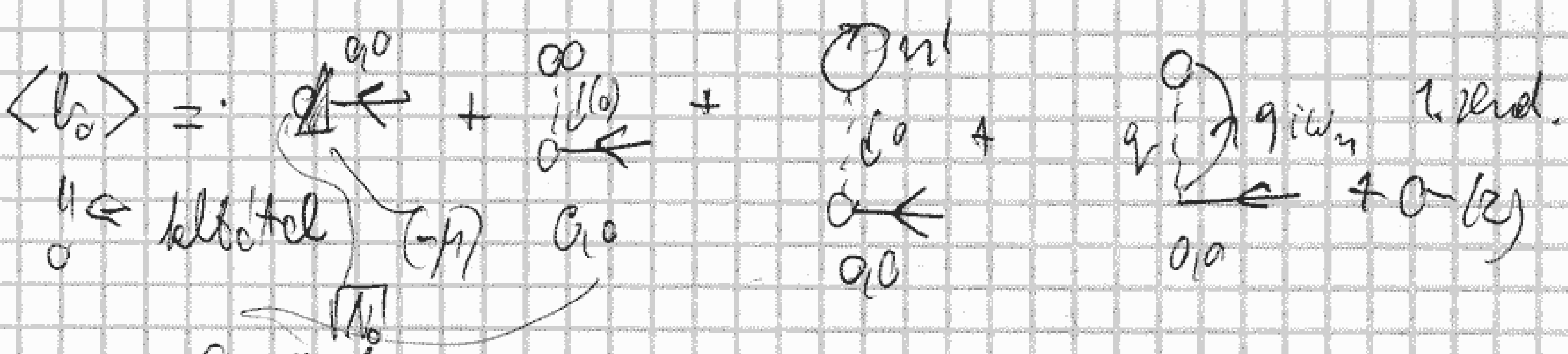
ha nincs kölcsönhatás, akkor is eltűnik.

$N_0 = ?$ Még nem határoztuk meg, csak mint paramétert használtuk

$$b_k = a_k - \sqrt{N_0}\,\delta_{k0}$$

„Önkonzisztencia": $\langle b_k \rangle = 0$

elég $\langle b_0 \rangle = 0$



$$0 = \left(-\mu^{-1}\right)\left(\sqrt{N_0}(-\mu) + N_0^{3/2} v(0) + \sqrt{N_0} \sum_{q'} \left(v(0) + v(q')\right) \cdot \underbrace{\frac{-1}{\beta\hbar} \sum_m \frac{-1}{V} \sum_{q'} G_0(q', i\omega_n)} \right)$$

$$n_{q'} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{q'}-\mu)}-1}$$

$$\mu = \frac{N_0}{V} v(0) + \frac{1}{V} \sum_{q'} \left[v(0) + v(q') \right] n'_{q'} + \ldots$$

Bogoljubov kémiai potenciál: $\mu^B = n_0 v(0)$ $\begin{pmatrix} T=0 \\ n' \text{ kicsi} \end{pmatrix}$

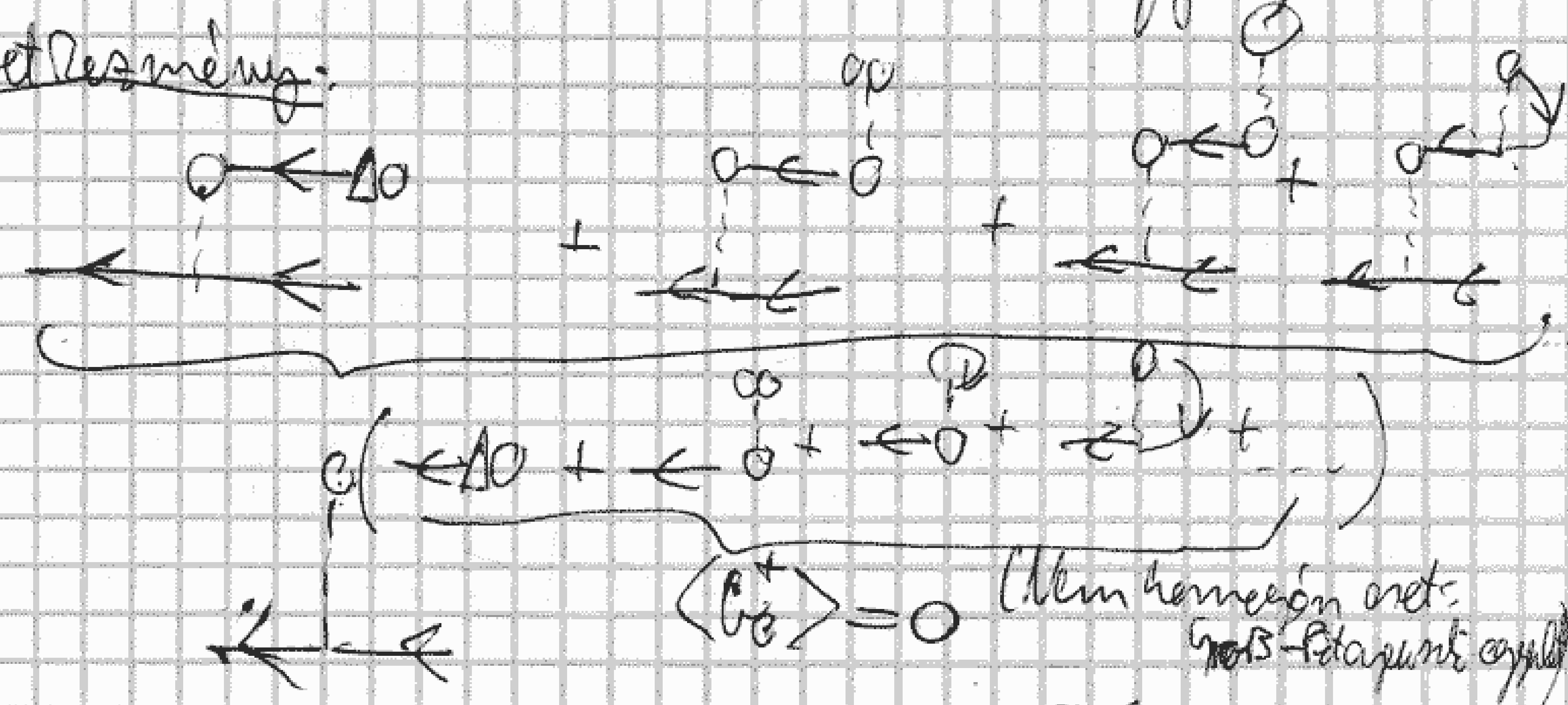
$n_0 = \frac{N_0}{V}$

Megjegyzés

(1) $\langle b_0 \rangle = 0$ $\quad \langle b_0^+ \rangle = 0$

Azonos olyan Feynman diagram összeg, amik 1 élnél kettévághatók 0-val egyenlő

Részletezmény:



$\langle b_0^+ \rangle = 0$ (Nem homogén erőt. / (nem B-Fázispont egyen.)

Sose kell 3 b-t tart. diagramokat számolni

② Ha $v(0)>0$ $\mu \geq 0$ $(\mu = \mu_0 v(0) + \dots)$

$$\mathcal{G}(k, i\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \hbar^{-1}(e_k - \mu)}$$

Ha $\mu < 0$ sehol nem divergál!

Ha $\mu > 0$ akkor igen.

$$n'_k = -\frac{1}{\beta\hbar}\sum_m \mathcal{G}_0(k, i\omega_m)\, e^{i\omega_m \eta} = \frac{1}{e^{\beta(e_k-\mu)}-1}$$

Ha $\mu > 0$ akkor a div. alatt $n'_k < 0$ ami ↯

Megoldási trükk:

$$K_0 = \sum_k (e_k - \mu)\, b_k^+ b_k$$

$$\downarrow$$

$$K_0 = K_0' + K_2'$$

$$K_0 = \underbrace{\sum_k (e_k - \mu_0)\, b_k^+ b_k}_{K_0'} + \underbrace{\sum_k (\mu_0 - \mu)\, b_k^+ b_k}_{K_2'}$$

K_0' ↓ legyen az alap[illegible]

K_2' ↓ ezt vegyük a perturbációba

A renormált szabad Green függvény.

$$G^{(0)}_{11}(k, i\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \hbar^{-1}\epsilon_k} \qquad G^{(0)}_{22} = \frac{1}{-i\omega_n - \hbar^{-1}\epsilon_k}$$

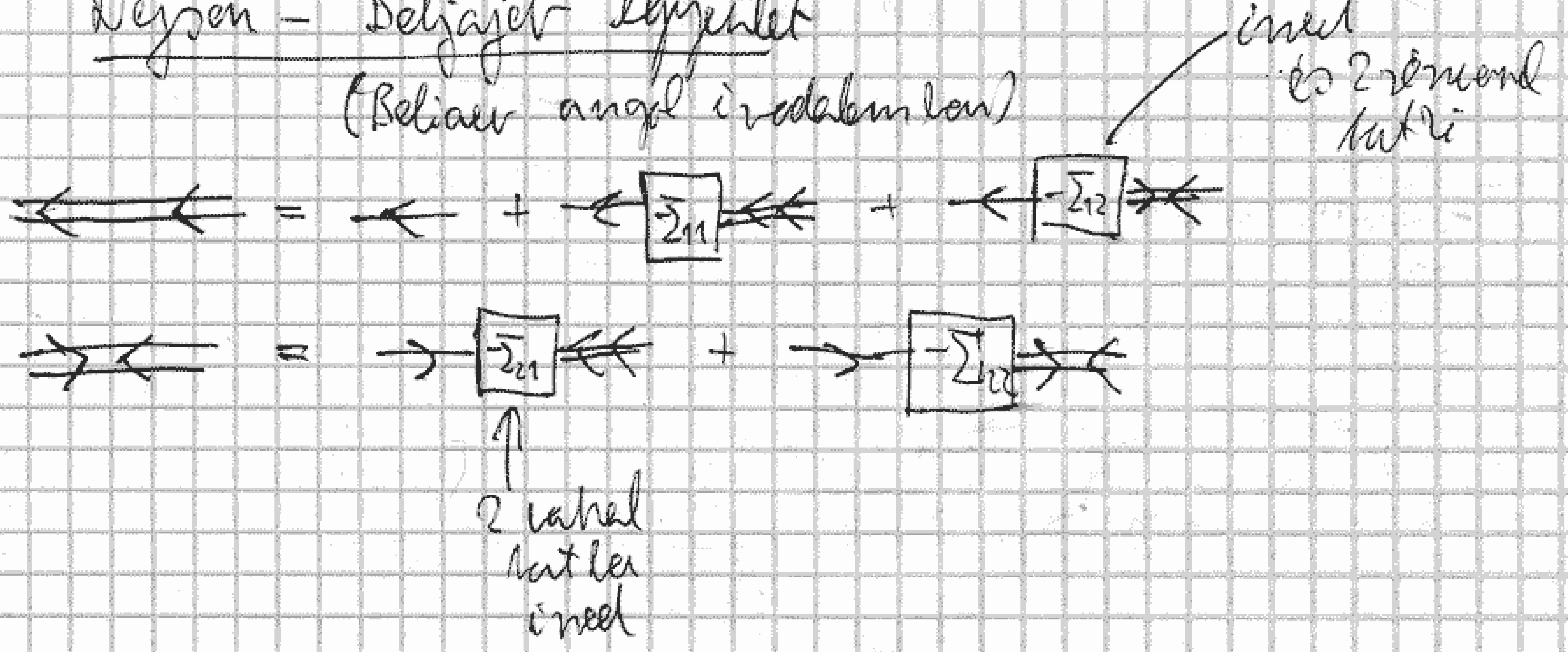
$$G^{(0)}_{12}(k, i\omega_n) = G^{(0)}_{21} = 0$$

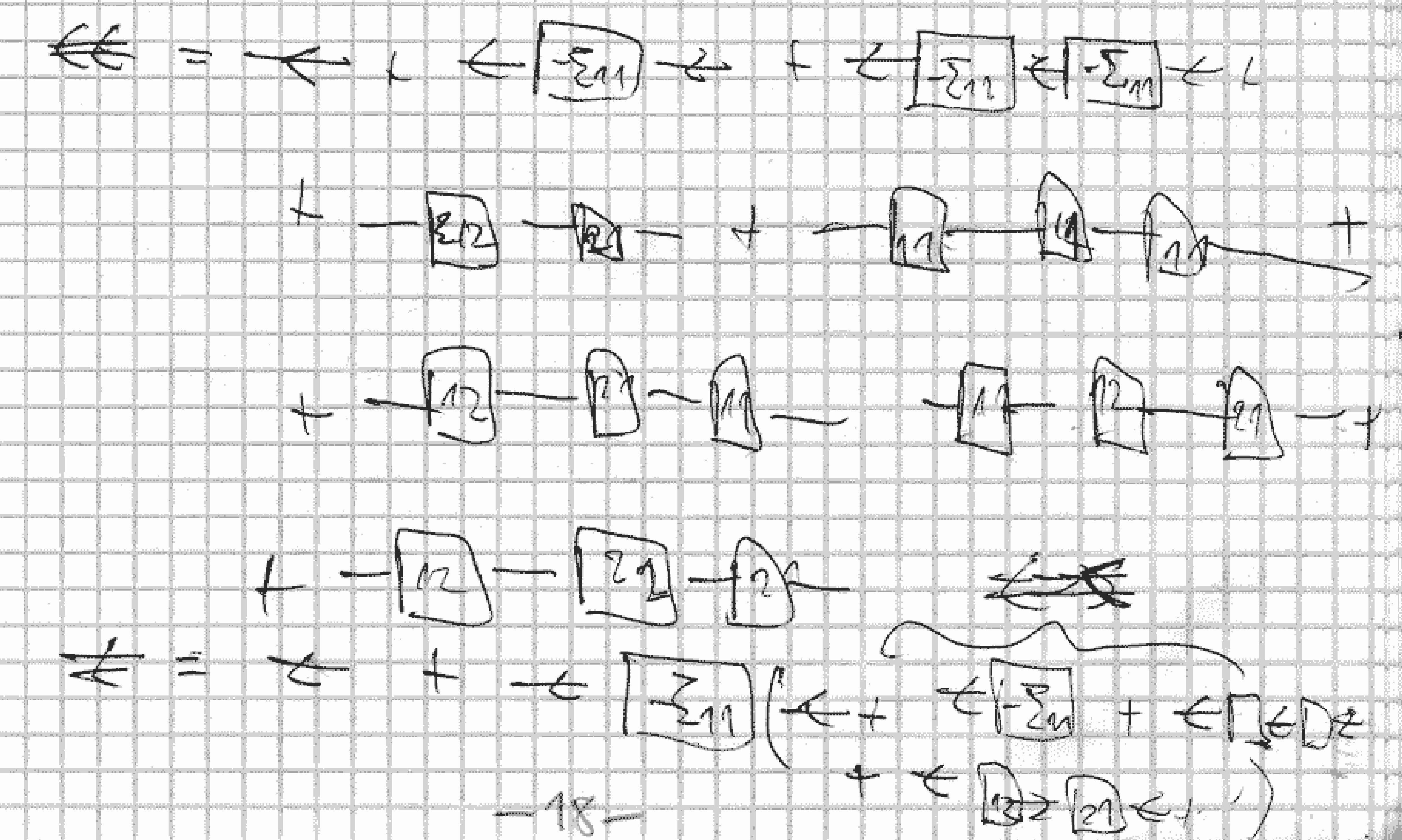
$$K_2' = \sum_{k} (-\mu) a_k^{+} a_k$$

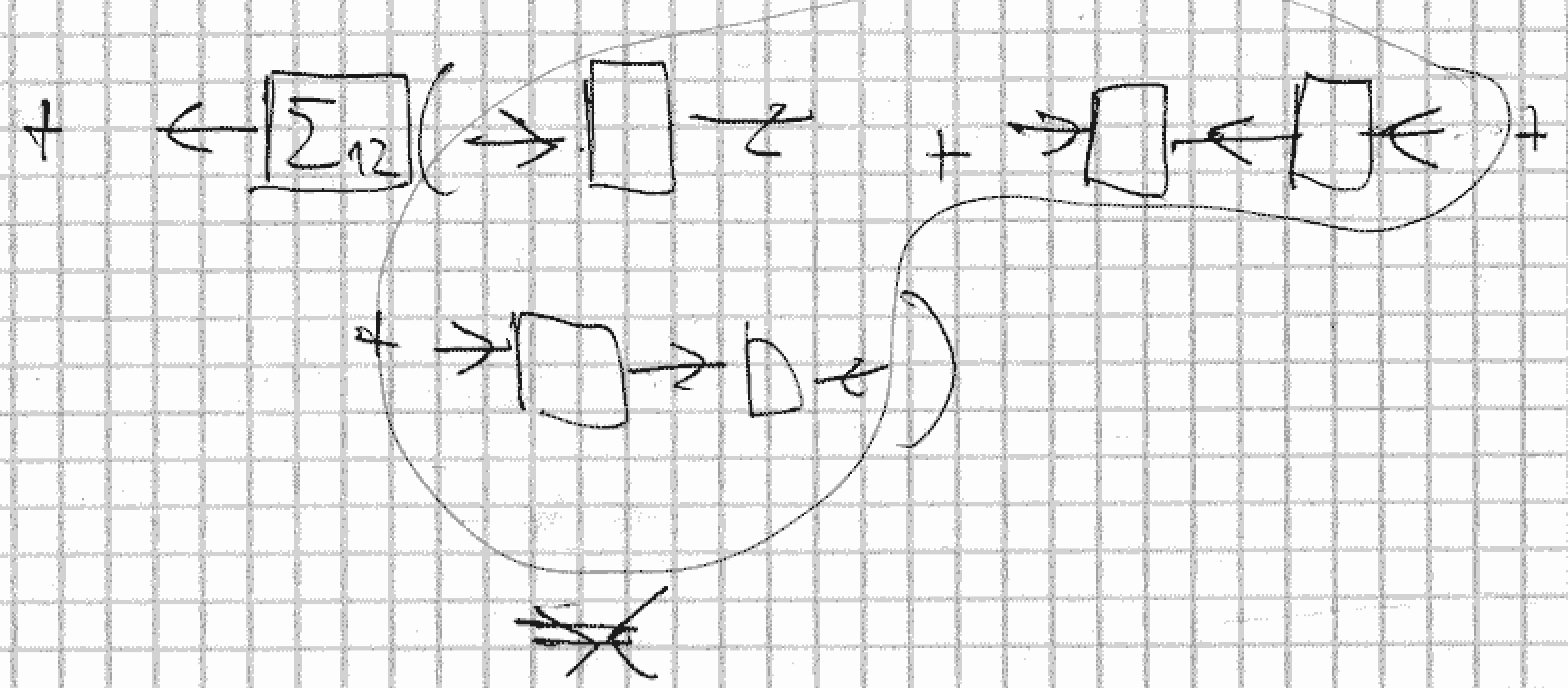
Dyson-egyenlet helyett:

<u>Dyson-Beljajev egyenlet</u>

(Beliaev angol irodalomban)







$$\boxed{\mathcal{G}_{\alpha\beta}(k, i\omega_n) = \mathcal{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(k, i\omega_n) + \mathcal{G}^{(0)}_{\alpha\gamma}(k, i\omega_n)\Sigma_{\gamma\delta}(k, i\omega_n) \cdot \mathcal{G}_{\delta\beta}(k, i\omega_n)}$$

Dyson–Beljaev egyenlet.

$$\mathcal{G}_{11}(k, i\omega_n) = \frac{i\omega_n + \hbar^{-1}e_2 + \Sigma_{22}(k, i\omega_n)}{D(k, i\omega_n)}$$

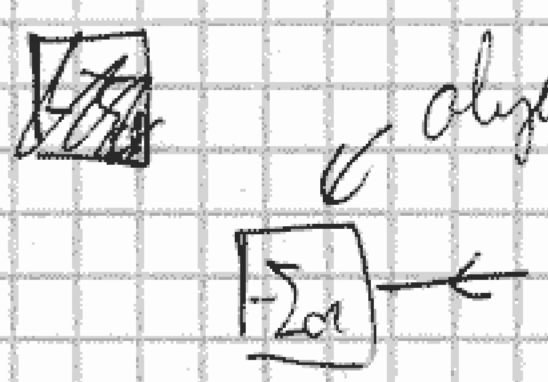
$$\mathcal{G}_{21}(k, i\omega_n) = \frac{-\Sigma_{21}(k, i\omega_n)}{D(k, i\omega_n)}$$

$$D(k, i\omega_n) = \left[i\omega_n - \hbar^{-1}e_2 - \Sigma_{11}(k, i\omega_n)\right]\left[i\omega_n + \hbar^{-1}e_2 + \Sigma_{22}(k, i\omega_n)\right] + \Sigma_{12}(k, i\omega_n)\Sigma_{21}(k, i\omega_n)$$

Bogoljubov közelítés

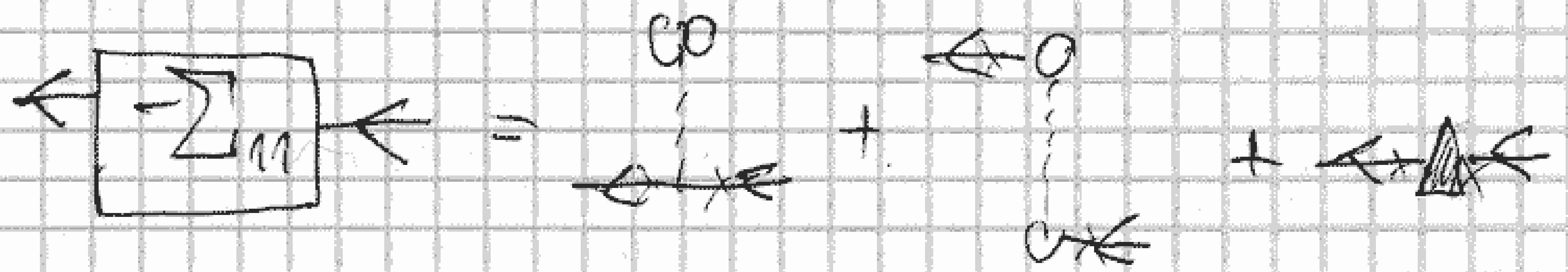
a)

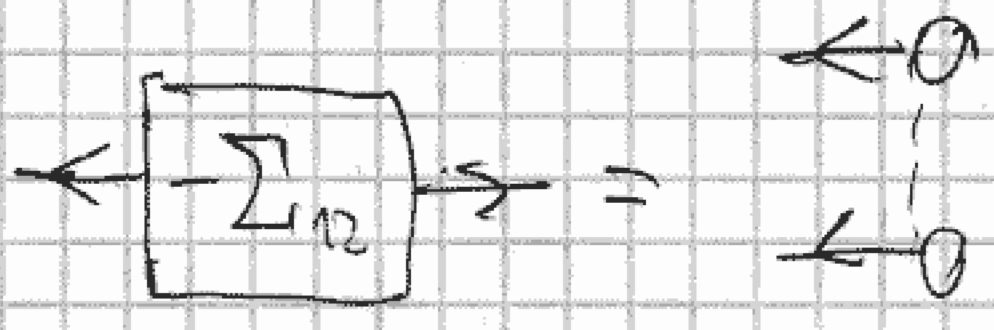
olyan ired. diagrammok amikbe ~~...~~ csak 1 vonal fut be



$$-\mu^B + v(0)\,n_0 = 0$$

$$\boxed{\mu^B = n_0 v(0)}$$





$$\Sigma^B_{11}(k, i\omega_n) = \hbar^{-1} n_0\, v(k)$$

$$\Sigma^B_{12}(k, i\omega_n) = \hbar^{-1} n_0\, v(k)$$

$$\Sigma_{22}(k, i\omega_n) = \Sigma_{11}(-k, -i\omega_n)$$

$$\Sigma_{21}(k, i\omega_n) = \Sigma_{12}(-k, i\omega_n)$$

$$D^B(k, i\omega_n) = \left[i\omega_n - \hbar^{-1}(\varepsilon_k + n_0 v(k))\right]\left[i\omega_n + \hbar^{-1}(\varepsilon_k + n_0 v(k))\right] +$$

$$+ \hbar^{-2} n_0^2 v(k)^2$$

$$G_{11}^B(k, i\omega_n) = \frac{i\omega_n + \hbar^{-1}(\varepsilon_k + n_0 v(k))}{D^B(k, i\omega_n)}$$

$$G_{21}^B(k, i\omega_n) = \frac{-\hbar^{-1} n_0 v(k)}{D^B(k, i\omega_n)}$$

B

10.13.

Bogoljubov közelítés

$$G_{11}^{B}(k, i\omega_n) = \frac{i\omega_n \hbar^{-1}[e_k + n_0 U(k)]}{D^{B}(k, i\omega_n)}$$

$$G_{12}^{B}(k, i\omega_n) = \frac{-\hbar^{-1} n_0 U(k)}{D^{B}(k, i\omega_n)}$$

$$D^{B}(k, i\omega_n) = [i\omega_n - \hbar^{-1}(e_k + n_0 U(k))][i\omega_n + \hbar^{-1}(e_k + n_0 U(k))] + \hbar^{-2} n_0^2 U^2(k)$$

$i\omega_n \to \omega + i\varepsilon$

Elemi gerjesztések: $G_{11}^{R}(k, \omega)$ pólusai

$$U(k) = \frac{4\pi\hbar^2 a}{2m}$$

$D^{B}(k, \omega) = 0$ $\qquad 0 = E_k^2 - \hbar^2(e_k + n_0 U(k))^2 + \hbar^{-2} n_0^2 U^2(k)$

$e_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ $\qquad E_k = \pm\sqrt{e_k(e_k + 2n_0 U(k))}$ $\qquad k \to 0 \quad E_k = \hbar c k$

$$D(k, i\omega_n) = (i\omega_n - \hbar^{-1} E_k)(i\omega_n - \hbar^{-1} E_k)$$

Parciális törtekre: $G_{11}^{B}(k, i\omega_n) = \frac{u_k^2}{i\omega_n - \hbar^{-1} E_k} + \frac{-v_k^2}{i\omega_n + \hbar^{-1} E_k}$

$$u_k^2 = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{e_k + n_0 U(k)}{E_k}\right] \qquad v_k^2 = \frac{1}{2}\left[-1 + \frac{e_k + n_0 U(k)}{E_k}\right]$$

$$G_{12}^{B}(k, i\omega_n) = -u_k v_k \left(\frac{1}{i\omega_n - \hbar^{-1} E_k} - \frac{1}{i\omega_n + \hbar^{-1} E_k}\right)$$

Boga. kiterjesztése véges T-re

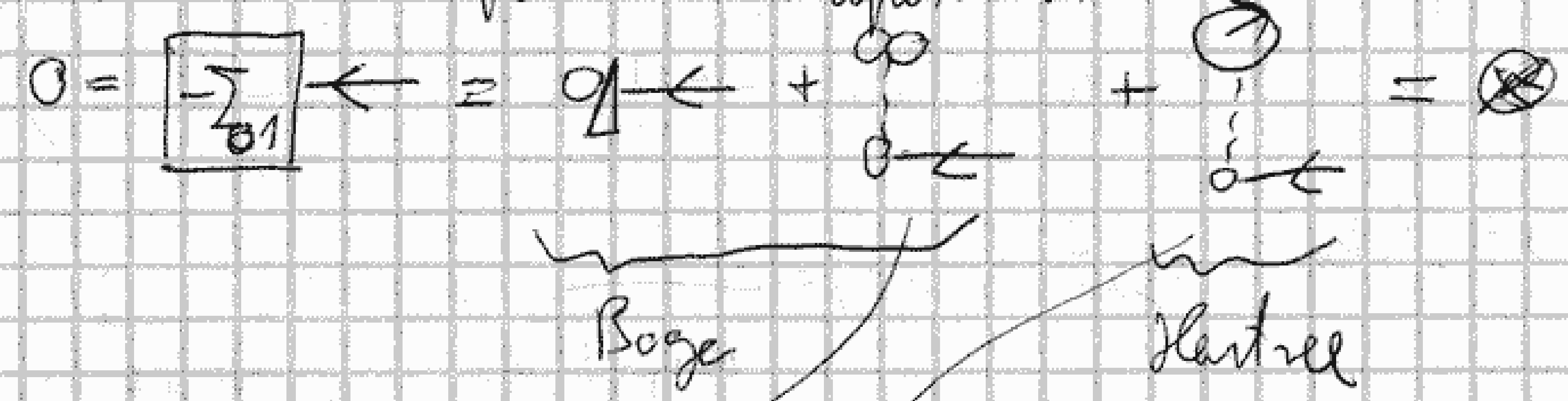
Végül hozzá a sajátenergiához a Hartree és Fock tagokat (problémák: Goldstone módus, részecskeszám)

Mi a legegyszerűbb közelítést mellett, amivel még nem adódik probléma: Bogoljubov – Hartree közelítés.

(Sajátenergiában csak a Hartree diagrammot vesszük)

(Nagyon sok komponensű ~ tag. esetén a vezető rendet adja.

a) Kondenzátum részecskeszám és a kémiai potenciál kapcsolata



Végeredmény:

$$\mu = \frac{N_0}{V} v(0) + \frac{N'}{V} v(0) \qquad \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_q}-1} \quad \text{Bose-szám}$$

$$N' = V\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\beta\hbar}\sum_n{}' e^{i\nu_n\eta}\frac{-1}{i\nu_n-\hbar^{-1}e_q}$$

Írjuk ki a diagrammok járulékát

$$\otimes = -\hbar^{-1}\sqrt{N_0}\left[(-\mu) + v(0)\,n_0 + v(0)\frac{1}{\beta\hbar}\sum_n{}'\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\left(-\mathcal{G}^0(q,\nu_n)\right)\right]\left(-G_0(0,0)\right)$$

$$\boxed{\mu = V(0)(n_0 + n') = V(0)\,n}$$

Különbség a Bogo-hoz: μ-nél itt n_0 helyett n-van.
$T=0$ - nál ugyanazt adja.

$$n' = \frac{N'}{V} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_q} - 1} = \frac{1}{(2\pi)^3 \lambda^3} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \underbrace{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}_{= F(\frac{3}{2}, 0)} \sim C T^{3/2}$$

Ahol: $F(s,\gamma) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt \frac{t^{s-1}}{e^{(t-1)\gamma} - 1} dt$

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$$

nélu ezt beleírták a λ-ba

$$\lambda^2 = \frac{\hbar^2}{2m k_B T}$$

$$F(s, 0) = \zeta(s)$$

„Modernebb jelölés" $F(s,\gamma) = \underbrace{Li_s}(e^{-\gamma})$

Polilogaritmus függvény, manapság gyakrabban használják.

Kritikus ~~részecskeszám~~ hőmérséklet.

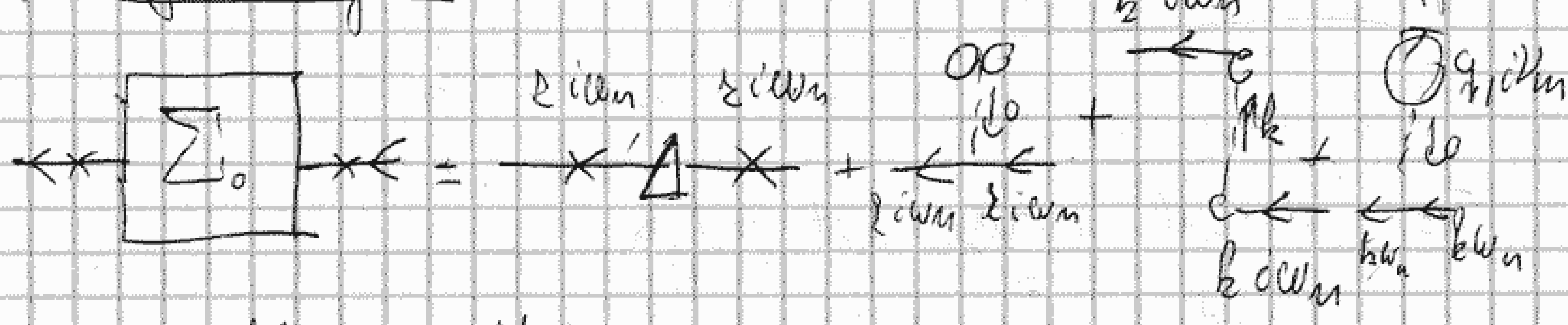
$$n = n'(T_c) \cancel{= n_c}$$

$$n' = n\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$$

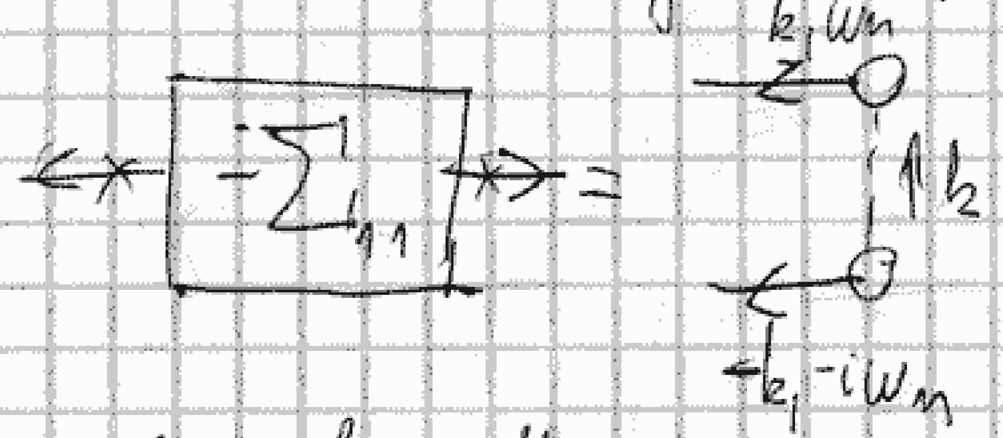
A kondenzátumban részecskeszám:

$$n_0 = n - n' = n\left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\right)$$

k) Sajátenergiák



anomális sajátenergia



Ez nem kap korrekciót a Bogolhoz képest.

az 1. rend miatt

$$\hbar\Sigma_{11}(k, i\omega_n) = (-\mu) + v(0)n_0 + v(k)n_0 + v(0)n'$$

$$\hbar\Sigma_{12}(k, i\omega_n) = v(k)n_0$$

μ letolva 0-át adnak együtt

$$\hbar\Sigma_{11} = v(k)n_0$$

$\Downarrow$

Ugyanazok formálisan mint a Bogol. köz.-ben

Meg a Green fgv-k is

DE n_0 most T függő: $n_0 = n\left(1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\right)$

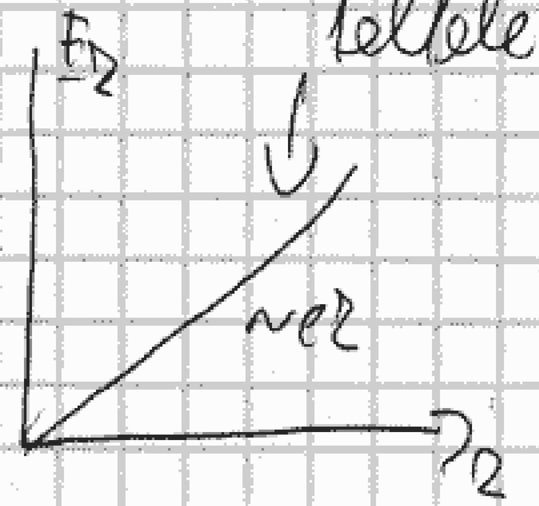
$$G_{11}^{BH}(k, i\omega_n) = \frac{u_k^2}{i\omega_n - \hbar^{-1}E_k} - \frac{v_k^2}{i\omega_n - \hbar^{-1}E_k}$$

$$G_{12}^{BH}(k, i\omega_n) = -u_k v_k\left(\frac{1}{i\omega_n - \hbar^{-1}E_k} - \frac{1}{i\omega_n + \hbar^{-1}E_k}\right)$$

$$E_k = \sqrt{\varepsilon_k(\varepsilon_k + 2n_0 v(k))}$$

$$u_k^2 = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\epsilon_k + n_0 V(k)}{E_k}\right] \qquad v_k^2 = \frac{1}{2}\left[-1 + \frac{\epsilon_k + n_0 V(k)}{E_k}\right]$$

felfelé „görbül" nagy k-ra parabola



$$c = \sqrt{\frac{n_0 V(0)}{m}}$$

$$n_0 \equiv n_0(T) = n\left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\right)$$

$T \to 0$ Bogoljubov -é ?

$T \to T_c \qquad c \to 0$

A kritikus hőmérsékletnél a Goldstone bozonok sebessége 0-hoz tart!

Kondenzátumon kívüli atomok száma

$$n' = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, n'(k) \qquad \text{ahol} \quad n'(k) = \frac{1}{\beta\hbar}\sum_m{}' e^{i\nu_m \eta}\, G_{11}(k, i\omega_m) =$$

$$= -\frac{1}{\beta\hbar}\sum_m{}' e^{i\nu_m \eta}\left[\frac{u_k^2}{i\nu_m - \hbar^{-1}E_k} - \frac{v_k^2}{i\nu_m - \hbar^{-1}E_k}\right] =$$

a „Bose" Green-ed

$$= \frac{u_k^2}{e^{\beta E_k} - 1} - \frac{v_k^2}{e^{-\beta E_k} - 1} = \frac{u_k^2 + e^{\beta E_k} v_k^2}{e^{\beta E_k} - 1} = v_k^2 + (u_k^2 + v_k^2)\frac{1}{e^{\beta E_k} - 1}$$

Persze n' integrálja bonyolult, csak határesetekben lehet analitikusan.

Láttuk már $T=0$: $\quad n'(k) = v_k^2 \qquad n'|_{T=0} = \frac{8 n_0}{3}\left(\frac{n_0 a^3}{\pi}\right)^{1/2}$

$$V(k) = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$$

$\underline{T = T_C}$ $\quad E_k = \varepsilon_k$

$v_k^2 = 0$ $\qquad n'(k) = n(k)$

$u_k^2 = 1$

$\underline{T \to 0 \text{ de } T \neq 0}$

$$n'\big|_T - n'\big|_{T=0} = \frac{1}{12}\frac{m}{c\hbar^3}(k_B T)^2$$

c itt a Bogol. hangsebesség

$$c^2 = \frac{n_0 U(0)}{m}$$

Érdekesség: kísérleti anomális Green függvény nélküli formalizmus

Bogoljubov közelítésben:

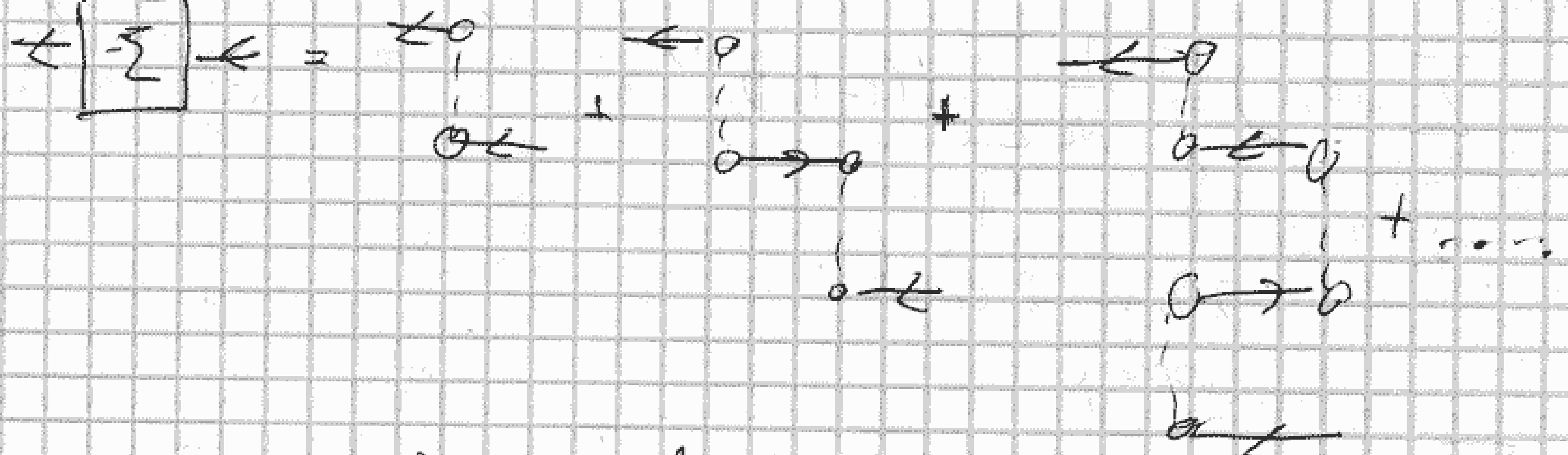
$$G_{11}^B(k, i\omega_n) = \frac{i\omega_n + \hbar^{-1}(\varepsilon_k + n_0 U(k))}{[i\omega_n - \hbar^{-1}(\varepsilon_k + n_0 U(k))][i\omega_n + \hbar^{-1}(\varepsilon_k + n_0 U(k))] + \hbar^{-2} n_0^2 U(k)^2} =$$

álítható-e ilyenre?

$$\frac{1}{i\omega_n - \hbar^{-1}\varepsilon_k - \Sigma^*(k, i\omega_n)}$$

(Ekkor tudnánk közvetlenül Dysonegyenletet írni) IGEN a válasz:

$$\Sigma_1^*(k, i\omega_n) = \frac{\hbar^{-1} n_0 U(k)}{1 - \frac{\hbar^{-1} n_0 U(k)}{-i\omega_n - \hbar^{-1}\varepsilon_k}}$$



→ ez szétesik 1 vonal elvételével

→ Ha így vesszük és nem vesszük el anomális vonalat, akkor nem esik szét.

Következetes perturbációban megmarad a Goldstone módus (Ha azon rendben ∀ gráfot figyelembe vesszük)

<u>Hugenholtz – Pines tétel</u>

$$\Sigma_{11}(0,0)-\Sigma_{12}=0$$

(A perturbációs számítás ∀ rendjében)

<u>Biz.</u>

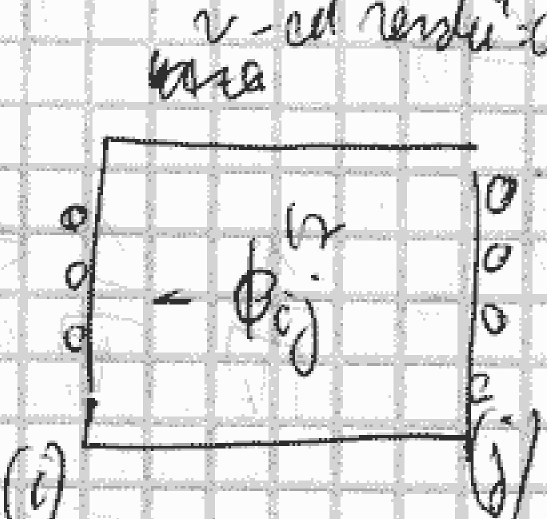
normális sajátenergiás diagramm (1 ki 1 be)

$$\leftarrow\boxed{-\Sigma_{11}}\leftarrow$$

anomális (2 ki)

$$\leftarrow\boxed{\Sigma_{12}}\rightarrow$$

ν-ed rendű diagram úgy, hogy nem csatlakozik külső vonalhoz, de i helyen kondenzátum



Kösse bejövő vonal helyén, j helyen kimenő vonal helyén

$$\Sigma_{11}^{\nu}(0,0)=\frac{1}{N_0}{\sum_{ij}}'\,\Phi_{ij}^{(\nu)}$$

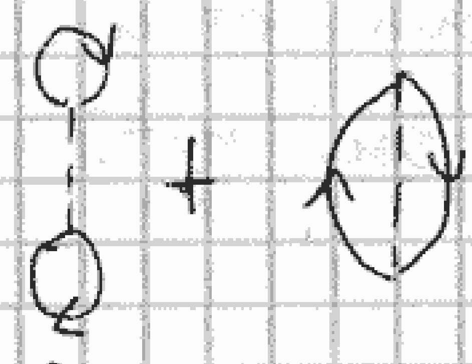
1 helyre vesz ki vonalat

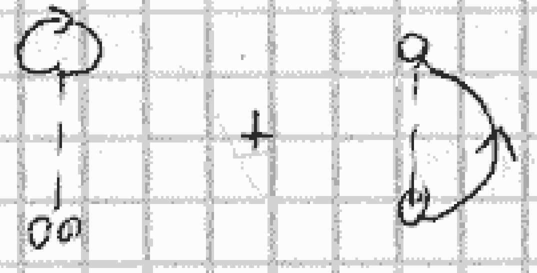
1 helyre vesz be vonalat

$$\Sigma_{12}^{r}(0,0) = \frac{1}{N_0}\sum_{ij} i(i-1)\,\phi_{ij}^{(2)}$$

2 kimenő vonal cseréje

$\boxed{\text{Próbáld a } \phi\text{-kre.}}$

$\phi^{(1)}_{0,0} =$ 

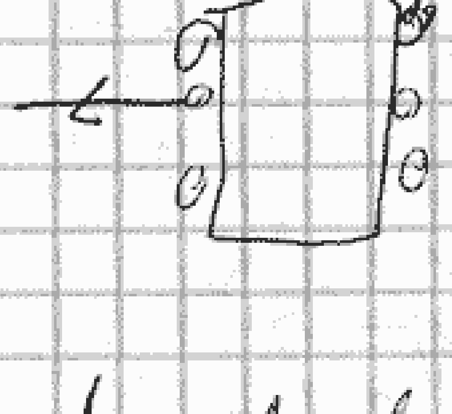
$\phi^{(1)}_{1,1} =$ 

$\phi^{(2)}_{ij} = 0$ ha $i \neq j$

Mivel a kimenő két induló vonal egy másik helyre bejövőként érkezik

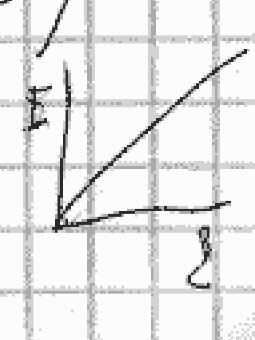
$$\Sigma_{11}^{(2)}(0,0) - \Sigma_{12}^{(2)}(0,0) = \frac{1}{N_0}\sum_{ij}{}' \left(ij - i(i-1)\right)\phi_{ij}^{(2)} =$$

$$= \frac{1}{N_0}\sum_i i\,\phi_{ii}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{N_0}}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{N_0}}\sum_i{}' i\,\phi_{ii}^{(2)}}_{} = \frac{1}{\sqrt{N_0}}\underbrace{\Sigma_{1c}(0,0)}_{0} = 0$$



(k_c operátorok várható értéke 0)

Van $k \to 0$ $\omega \to 0$ gerjesztés (gap nélküli), ha

$D(k, E_k) = 0$ gerjesztések mert $D(0,0) = 0$ 

$$D(0,0) = -\Sigma_{11}(0,0) \cdot \Sigma'_{22}(0,0) + \Sigma'_{12}(0,0)\,\Sigma_{21}(0,0) =$$

Szimmetria összefüggéssel:

$$\Sigma'_{11}(k, i\omega_n) = \Sigma'_{22}(-k, -i\omega_n)$$

$$\Sigma'_{12}(k, i\omega_n) = \Sigma_{22}(-k, -i\omega_n)$$

$$= -\Sigma_{11}^2(0,0) + \Sigma_{12}^2(0,0) =$$

$$= -\underbrace{\left[\Sigma_{11}(0,0) - \Sigma_{21}(0,0)\right]}_{\text{Hugenholtz-Pines szerint ez } 0.}\left[\Sigma_{11}(0,0) - \Sigma_{12}(0,0)\right]$$

~~A t-mátrix és a szórási amplitúdó kapcsolata~~ 10/27.

$$D(0,0) = -\Sigma_{11}(0,0) \cdot \Sigma_{22}(0,0) + \Sigma_{12}(0,0)\,\Sigma_{21}(0,0) =$$

[Szimmetria okokból:

$$\Sigma_{11}(\xi, i\omega_n) = \Sigma_{22}(-\xi, -i\omega_n)$$

$$\Sigma_{12}(\xi, i\omega_n) = \Sigma_{22}(-\xi, -i\omega_n)$$
]

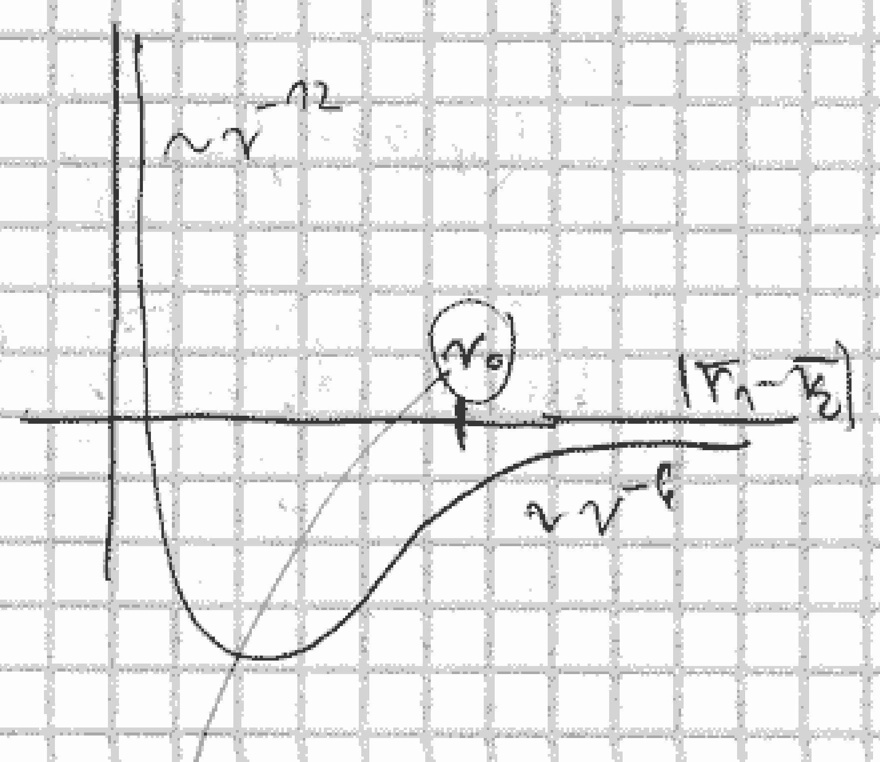
$$= -\Sigma_{11}^2(0,0) + \Sigma_{12}^2(0,0) =$$

$$= -\underbrace{\left[\Sigma_{11}(0,0) - \Sigma_{21}(0,0)\right]}_{\text{Goldstone szerint ez } 0.}\left[\Sigma_{11}(0,0) - \Sigma_{12}(0,0)\right]$$

Kétrészecske kölcsönhatás vákuumban

$$\hat H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + v(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$$

$$\hat H \Psi(\hat r_1, \hat r_2) = E \Psi(\hat r_1, \hat r_2)$$



$$\underline{R} = (\overline{r}_1 + \overline{r}_2)/2 \qquad r = \overline{r}_1 - \overline{r}_2$$

$$\underline{P} = (\overline{p}_1 + \overline{p}_2) \qquad p = \frac{\overline{p}_1 - \overline{p}_2}{2}$$

$$H = \frac{P^2}{4M} + \frac{p^2}{m} + v(r)$$

hatótávolság: kívül $V \equiv 0$

$$\Psi(R, r) = \Psi(r)\, e^{i\overline{K}\overline{R}}$$

$$\left[-\frac{\hbar^2 \Delta_r}{m} + \frac{\hbar^2 K^2}{4M} + v(r)\right]\Psi(r) = E\Psi(r)$$

$$(\Delta_r + k^2)\Psi(\underline{r}) = V(\underline{r})\Psi(\underline{r})$$

$$k^2 = \frac{m}{\hbar^2}E - \frac{K^2}{4}$$

$$V(\underline{r}) = \frac{m}{\hbar^2} v(\underline{r})$$

$$(\Delta_r + k^2)\, G_k^{(+)}(\underline{r} - \underline{r}') = -\delta^{(3)}(\underline{r} - \underline{r}')$$

kölcsönhatásmentes esetben

$$\Psi_k^{(+)}(r) = e^{ikr}$$

← ha nincs kölcsönhatás

kölcsönható esetben:

$$\Psi_k^{(+)}(\underline{r}) = e^{ikr} + \int d^3 r'\, G_k(\underline{r} - \underline{r}')\, \Psi_k^{(+)}(r') \quad (*)$$

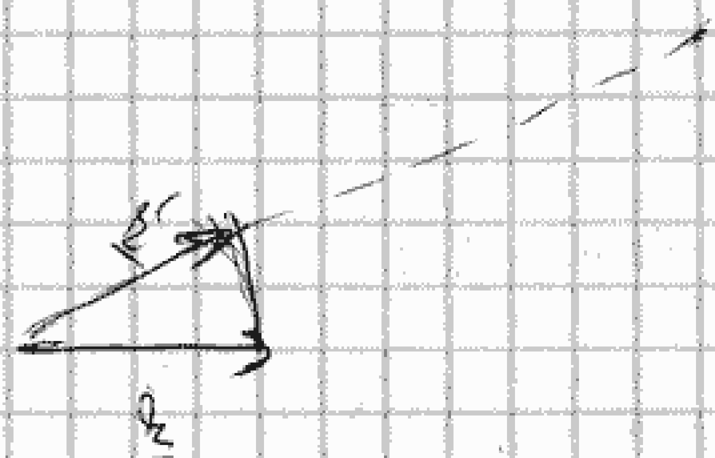
$$G_k^+(r - r') = \int \frac{d^3 q}{2\pi^3} \frac{e^{iq(r-r')}}{q^2 - k^2 - i\eta} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik(\underline{r} - \underline{r}')}}{|\overline{r} - \overline{r}'|}$$

Ha $r \gg r_0$ akkor V_0 rövid hat. táv. miatt. $r - r' \ll r$ az integrálban

$$|r - r'| = r\left|e_r - \frac{r'}{r}\right| = r - \frac{r r'}{r} + O\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

$$G_k^+(\underline{r} - \underline{r}') = \frac{1}{4\pi} e^{ikr}/r \cdot \exp(-ik\underline{r}\,\underline{r}'/r)$$

$\underline{k}' = \frac{k\,\underline{r}}{r}$



$|\underline{k}'| = |\underline{k}|$

tömegközép.

keltőre

$$\Psi^{+}_{k}(r) = e^{ikr} - \frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3r'\, e^{-ik'r'}\, V(r')\, \Psi^{+}_{k}(r')$$

szórási amplitúdó

$$\boxed{f^{+}(k|k') = -\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\, e^{-ik'r'}\, V(\underline{r}')\, \Psi^{(+)}_{k}(r')}$$

megjegyzések:

① → a szórási amplitúdó abszolútértéke a hatás keresztmetszet

→ ott ahol $V(r)$ divergál, a $\sim$ függvény eltűnik, viszont $f^{+}(k,k')$ véges marad minden $-$től

② A fenti esetben perturbatív kezelés nem lehetséges, mert nem viszi le Ψ-t 0-ba

$$V(q) = \int d^3r\, e^{-iqr}\, V(r)$$

$$\Psi_k(V) = \int d^3r\, e^{-iqr}\, \Psi^{(+)}_{k}(r)$$

⊗ Fourier trafó:

Green Fourier trafó

①
$$\Psi_k(q) = (2\pi)^3\, \delta^{(3)}(q-k) - \frac{1}{q^2-k^2-i\eta}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, V(p)\, \Psi_k(\underline{q}-\overline{p})$$

$$\tilde{A}^{(+)}(k,k') = -4\pi\, f^{(+)}(k,k') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, V(p)\, \Psi_k(k'-p) =$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, V(k'-p)\, \Psi_k(p)$$

$$\boxed{\tilde{f}^{+}(k,k') = V(k-k') + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{V(k'-p)\,\tilde{f}^{(+)}(k,p)}{k^2-p^2+i\varepsilon}}$$ Szórási amplitúdó egyenlete

megj.:
(1) a nem tömeghéjon levő értékeket is megkapjuk
(2) Erős taszító potenciállal kezdve iterálva $\forall$ rend divergens
(3) Born közelítés $\tilde{f}^{(+)}(k,k') = V(k-k')$
(4) Parciális ~-ok módszere

$$f(k,k') = -\frac{1}{4\pi}\tilde{f}(k,k') = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{k} \sin\delta_l\, P_l(\cos\vartheta)$$

$$\delta_0 = -k\cdot \underset{\sim}{a}$$

s hullámú szórási hossz.

általában: $\delta_l \sim |ka|^{2l+1}$

Ha $|k\cdot a| \ll 1$ akkor elég az s~-et nézni

$$f(k,k') = \cdot\, a\,(1+\mathcal{O}(|ka|))$$

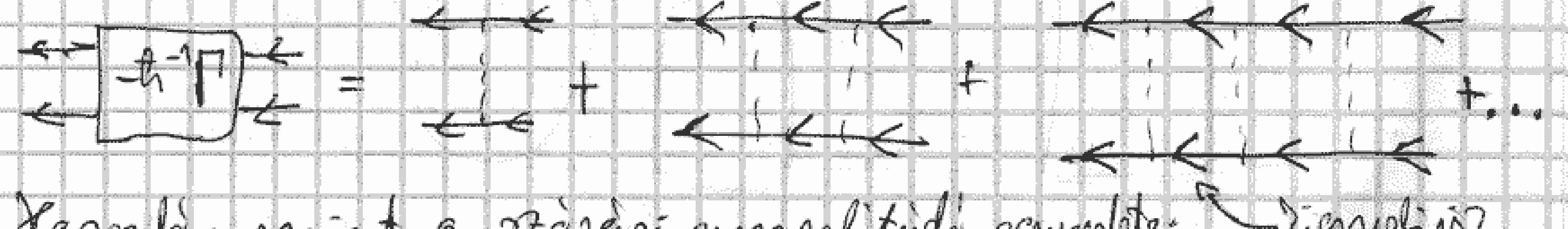
$$\tilde{f} = 4\pi a \qquad V(k) = 4\pi a$$

$$\Downarrow$$

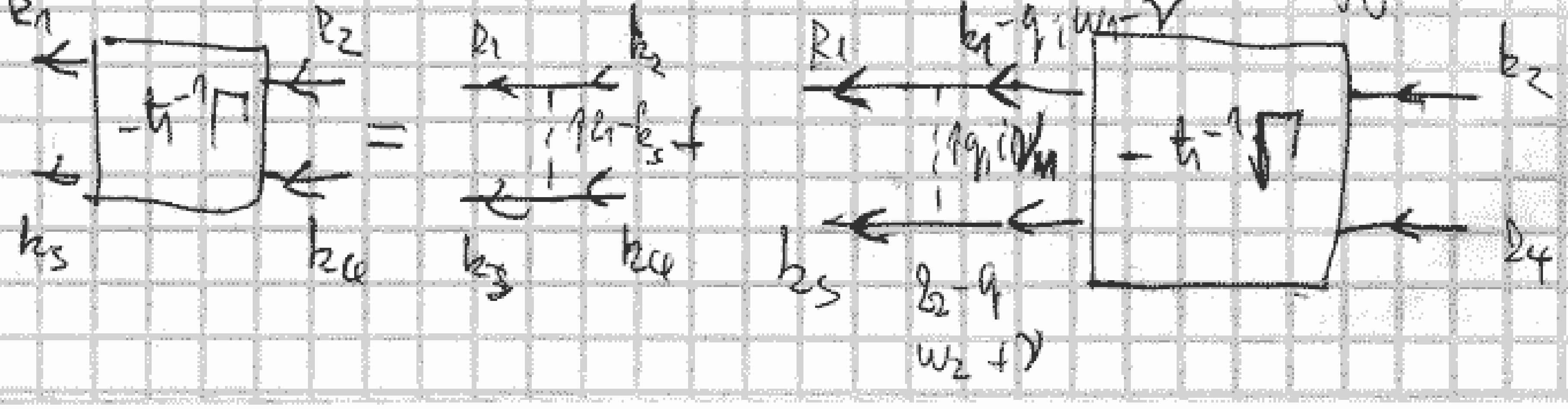
$$v(k) = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$$

<u>Kétrészecske szórás közegben</u>

sejtés: a divergencia elkerüléséhez a kölcsönhatásokat kell „ismételni"



Hasonló, mint a szórási amplitúdó egyenlete.



$k_i = (k_i\ \omega_{n_i})$

$q = (q,\ \nu_n)$

~~tisztán~~ 4-es v nem vertexek

$$\mathcal{G}_{(0)}(k_i) = \frac{1}{i\omega_{n_i} - \hbar^{-1}(\varepsilon_{k_i} - \mu)}$$

$$\Gamma(k_1 k_2 k_3 k_4) = -\underbrace{v(k_1 - k_3)}_{\substack{\text{ezesi}\\ \text{létra}}} - \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta\hbar^2} \sum_{\nu_n} v(q)\, \mathcal{G}_0(k_1 - q)\, \mathcal{G}_0(k_2 + q) \cdot \Gamma(k_1 - q, k_2 + q, k_3, k_4)$$

Állítás: Γ nem függ az átadott frekvenciától (HF)

Így az elvégezhető

$$\frac{1}{\beta\hbar^2} \sum_m \mathcal{G}_{(0)}(k_1 - q)\, \mathcal{G}_{(0)}(k_2 + q) = \frac{1}{\beta\hbar} \sum_m \frac{1}{i\omega_1 - i\nu_m - \hbar^{-1}(\varepsilon_{k_1 - q} - \mu)} \cdot$$

$$\frac{1}{i\omega_{n_2} - \nu - \hbar^{-1}(\varepsilon_{k_2 + q} - \mu)} =$$

$$= \frac{1}{\beta\hbar^2} \sum_m \frac{1}{i\omega_1 + i\omega_2 - \hbar^{-1}(\varepsilon_{k_1 - q} + \varepsilon_{k_2 + q} - 2\mu)} \left[\frac{1}{i\omega_1 - i\omega_m - \hbar^{-1}(\varepsilon_{k_1 - q} - \mu)} - \frac{1}{i\omega_2 - i\omega_m - \hbar^{-1}(\varepsilon_{k_2 + q} - \mu)} \right]$$

$$= -\frac{1}{\hbar} \frac{1 + n^0(k_1 - q) + n^0(k_2 + q)}{i\omega_{n_1} + i\omega_{n_2} - \hbar^{-1}(\varepsilon_{k_1 - q} + \varepsilon_{k_2 + q} - 2\mu)}$$

$$n^0(k) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} - 1} \qquad z < 2(\varepsilon_{k_2 + q} - \mu)$$

Tömegközépponti és relatív koordináták:

$K = k_1 + k_2 \quad (= k_3 + k_4)$

$\underline{k} = \dfrac{k_1 - k_2}{2}$

$\underline{k}' = \dfrac{k_3 - k_4}{2}$

$i\omega_N = i\omega_{n_1} + i\omega_{n_2} = i\omega_{n_3} + i\omega_{n_4}$

$\hbar\Sigma = i\hbar\omega_\nu - \frac{\hbar^2 K^2}{4m}$ TKP összevonva

$\Gamma(k_1, k_2, k_3, k_4) \longrightarrow \Gamma(k, k', K, z)$

$\downarrow$ belső kicsi z összevonás

$$\Gamma(k, k', K, z) = v(k-k') + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} v(q) \frac{F_{(+)}(K, k-q)}{z - 2(\varepsilon_{k+q} - \mu)} \Gamma(k-q, k', K, z)$$ (3)

At $F_{(+)}(K, k-q)$

$$F_{(+)}(K, k-q) = 1 + n^F\left(\tfrac{1}{2}K + k - q\right) + n^F\left(\tfrac{1}{2}K - k + q\right)$$

HF: ellenőrizni

10.27.

<u>At mátrix és a szórási amplitudó kapcsolata</u>

I. Kétrészecskés szórásnál $\psi_k(q)$-val analóg mennyiséget vezetünk be χ

$\psi_k(q)$ $$\Gamma(k, k', K, z) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} v(q) \chi(k-q, k', K, z)$$

(4)

$$\chi(k, k', K, z) = (2\pi)^3 \delta(k-k') + \frac{F_{(+)}(K, k)}{z - 2(\varepsilon_k - \mu)} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} v(q) \chi(k-q, k', K, z)$$

„A rezonanciával kizárt kéreséket kapcsolatot"

II $T=0$

$f_0(K, k) = 1$

$$\chi_0(k, k', K, z) = (2\pi)^3 \delta(k-k') + \frac{1}{z - 2(\varepsilon_k - \mu)} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} v(q) \chi_0(k-q, k', K, z)$$ (5)

$$\Gamma_0(k, k', K, z) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} v(q)\, \chi(k-q, k', K, z)$$

$$\boxed{\left[z - 2(\varepsilon_k - \mu)\right] \chi_0(k, k', K, z) - \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} v(q)\, \chi_0(k-q, k', K, z) = (2\pi)^3 \delta(k-k') \cdot \left(z - 2(\varepsilon_{k'} - \mu)\right)}$$

Lippmann-Schwinger döző grai (1.)-ből ⇒

$$(2\varepsilon_{k_1} - 2\varepsilon_k + i\eta)\, \psi_{k_1}(k) - \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} v(q)\, \psi_{k_1}(k-q) = \underbrace{(2\pi)^3 \left[2\varepsilon_{k_1} - 2\varepsilon_k + i\eta\right] \times \delta(k' - k')}$$

0 ha $k \neq k_1$

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \psi^*_{k_1}(k)$$

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(z - 2(\varepsilon_k - \mu)\right) \chi_0(k, k', K, z)\, \psi^*_{k_1}(k) - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \underbrace{\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} v(q)\, \chi_0(\overset{k''}{k-q}, k', K, z)}$$

$$\underbrace{\cdot\, \psi^*_{k_1}(k)} = \left[z - 2(\varepsilon_{k'} - \mu)\right] \psi^*_{k_1}(k')$$

$k'' = k - q$

δ hova tünt?

második tag k'' bevezetése után:

$d_q \to -q$ átlérés

2.tag. $$\int \frac{d^3k''}{(2\pi)^3} \chi_0(k'', k', K, z) \underbrace{\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} v(q)\, \psi^*_{k_1}(k''+q)}_{\left[2\varepsilon_{k_1} - 2\varepsilon_{k''} - i\eta\right] \psi^*_{k_1}(k'')}$$

k'' helyére ismét k-t írhatunk.

összevonni:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[z - 2(\varepsilon_{k_1} - \mu) + i\eta\right] \chi_0(k, k', K, z)\, \psi^*_{k_1}(k) = \left[z - 2(\varepsilon_{k'} - \mu)\right] \psi^*_{k_1}(k')$$

kivihető, mert nem k függő, majd kiesik

$$\boxed{\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \chi_0(\underline{k}, \underline{k}', \underline{K}, z)\, \psi^*_{k_1}(k) = (z - 2e_{k'} + 2\mu)\, \frac{\psi^*_{k_1}(k')}{z - 2e_{k_1} + 2\mu}}$$

$i\eta$ elhagyható mert
$z - 2e_k$ van képzetes
része

Használjuk ki: χ^*-ok teljes ONB -t alkotnak

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\, \psi_q(k_1)\, \psi^*_q(k_2) = (2\pi)^3 \delta(k_1 - k_2)$$

$$\int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \psi_{k_1}(k'')$$

$$\boxed{\chi_0(k'', k', K, z) = (z - 2e_k + 2e_{k'} + 2\eta) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \frac{\psi^*_{k_1}(k')\, \psi_{k_1}(k'')}{z - 2e_{k_1} + 2\mu}}$$

$$\psi^*_{k_1}(k') = (2\pi)^3 \delta(\underline{k}' - \underline{k}_1) + \frac{\tilde{t}^*(k, k')}{2e_{k_1} - 2e_{k'} - i\eta}$$

$$\chi_0(\underline{k}'', \underline{k}', K, z) = \psi_{k'}(k'') + \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{2e_k - 2e_{k'} - i\eta} + \frac{1}{z - 2e_{k_1} + 2\mu} \right] \psi_{k_1}(k'') \cdot$$

$$\cdot\, \tilde{t}^*(k_1, k')$$

$$\int \frac{d^3k''}{(2\pi)^3} V(k - k'')$$

$$\boxed{\Gamma_0(k, k', K, z) = \tilde{t}(k, k') + \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{2e_q - 2e_{k'} - i\eta} + \frac{1}{z - 2e_q + 2\mu} \right] \cdot \tilde{t}(k, q) \cdot \tilde{t}^*(k', q)}$$

Ha tudjuk a szórási amplitudót vákuumban, akkor ki tudjuk Γ_0-t számítani közegben

$T>0$

④ át-rendezés: mindkét oldalból: $-\frac{\Pi(k,k',K,z)}{z-2\varepsilon_k+2\mu}$

$$\chi(k,k',K,z) - \frac{1}{z-2\varepsilon_k+2\mu}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}v(q)\,\chi(k-q,k',K,z) =$$

$$=(2\pi)^3\delta(k-k') + \frac{F_{(+)}(K,k)-1}{z-2(\varepsilon_k-\mu)}\Pi(k,k',K,z)$$

$$\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\left[(2\pi)^3\delta(k-q) - \frac{v(k-q)}{z-2\varepsilon_k+2\mu}\right]\chi(q,k',K,z) = \text{—''—}$$

Hozzáveve χ_0

$$\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\chi_0(k'',k,K,z)$$

$$\left[\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[(2\pi)^3\delta(k-q) - \frac{v(k-q)}{z-2\varepsilon_k+2\mu}\right]\chi_0(k,k',K,z) = (2\pi)^3\delta(k'-q'')\right.$$

$$\chi(k'',k',K,z) = \chi_0(k'',k',K,z) + \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\chi_0(k'',k,K,z)\frac{F_+(K,k)-1}{z-2(\varepsilon_k-\mu)}\Pi(k,k',K,z)$$

$$\int\frac{d^3k''}{(2\pi)^3}v(k-k')$$

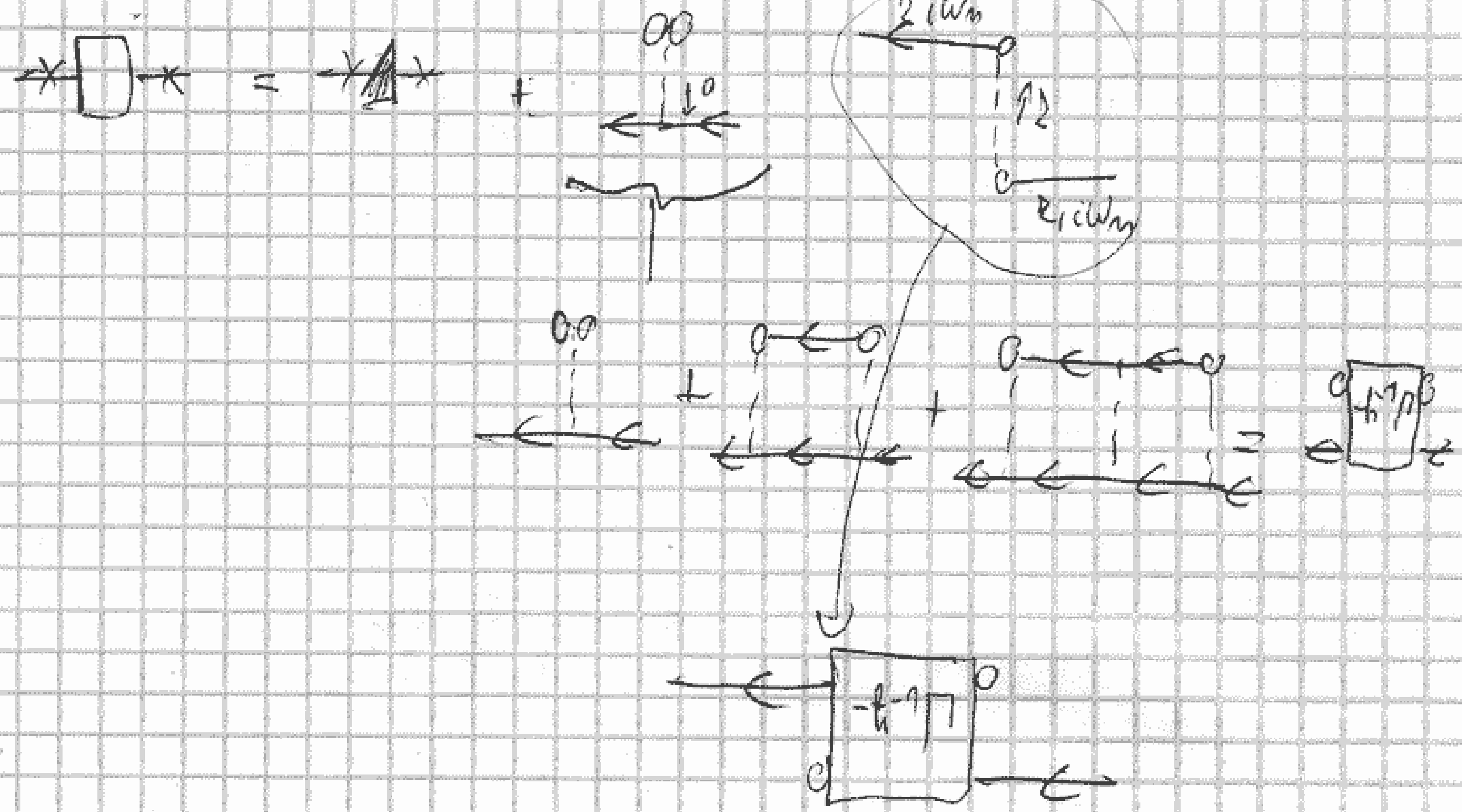
$$\Gamma(k,k',K,z) = \Gamma_0(k,k',K,z) + \int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\Gamma_0(k,q,K,z)\frac{F_+(K,q)-1}{z-2(\varepsilon_q-\mu)}\cdot\Gamma(q,k',K,z)$$

$T<0$ Γ_0-ból lehet $T>0$ Γ-t számítani

Tanulság: alacsony energiás részénél

$$\tilde{v}(k,k') \underset{|ka|\ll 1}{\approx} \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}\left[1+\mathcal{O}(ka)\right] \Rightarrow \Gamma_0(k,k',K,z) \approx \Gamma_0(0,0,0,0)$$

$$\Gamma(k,k',K,z) \approx \Gamma(0,0,0,0) = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$$



A hol eddig $v(k)$ volt oda most írjuk $\Gamma(0,0,0,0) = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$

Sőt akár az ilyen $v(k)$ - helyére T mátrix,

így a Hamiltoniba is lehet $v(\mathbf{x}) = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}\,\delta(\mathbf{x})$

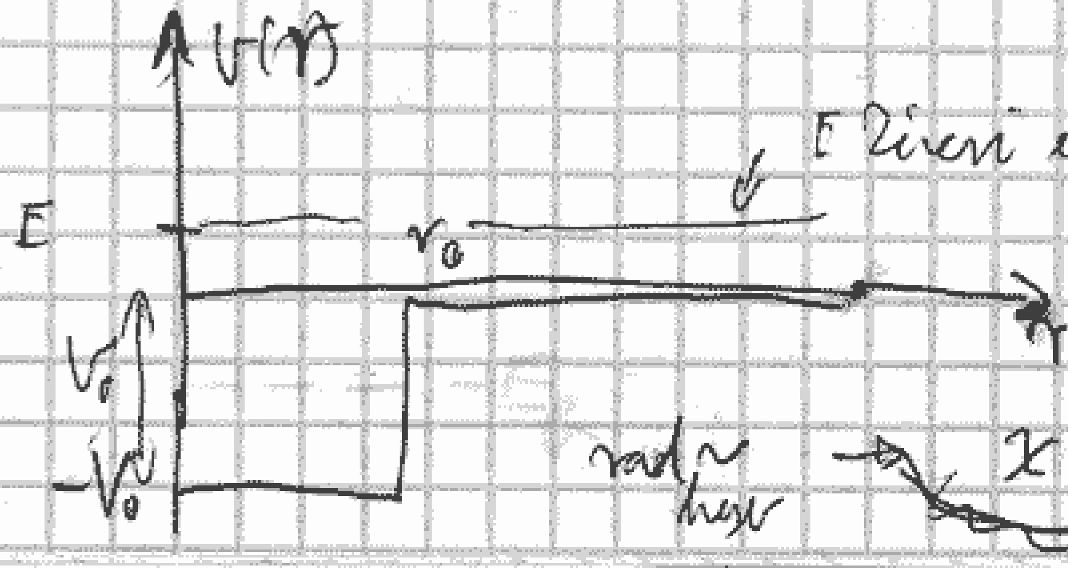
A szórási hossz jelentéséről : Alakrezonancia

Kétféle:

$a>0$ taszító

$a<0$ vonzó

Ez a kép valójában árnyaltabb : nézzük az alak rezonancia esetet.



$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\chi(r)}{dr^2} + V(r)\chi(r) = E\chi(r)$$

radiális → $\chi(r) = rR(r)$

a) Kötött állapot

$E<0$

$r<r_0$

$\chi(r) = \sin(qr) \longrightarrow \frac{\chi'(r)}{\chi(r)} = q\,\mathrm{ctg}(qr)$

$r>r_0$: $\chi(r)\, e^{-\varkappa r}$

$\left.\frac{\chi'(r)}{\chi(r)}\right| = -\varkappa$

illesztés feltétele: $\boxed{-\varkappa = q\,\mathrm{ctg}(q r_0)}$

Ha ∃ megoldás akkor van kötött állapot

⇕

$q\,\mathrm{ctg}(q r_0) < 0$

$E_k = -E$

$\hbar q = \sqrt{2m(V_0 - E)}$

$\hbar\varkappa = \sqrt{2m|E|}$

Akkor jelenik meg a kötött áll. ha

$q^*\,\mathrm{ctg}(q^* r_0) = 0$

$E_B = 0$

$\mathrm{ctg}\, q^* r_0 = 0$

$q^* r_0 = \pi/2$

$q^{*2} r_0^2 = \frac{\pi^2}{4}$

itt jelenik meg a kötött állapot

↓

$\frac{2mV_0^*}{\hbar^2} r_0^2 = \frac{\pi^2}{4}$

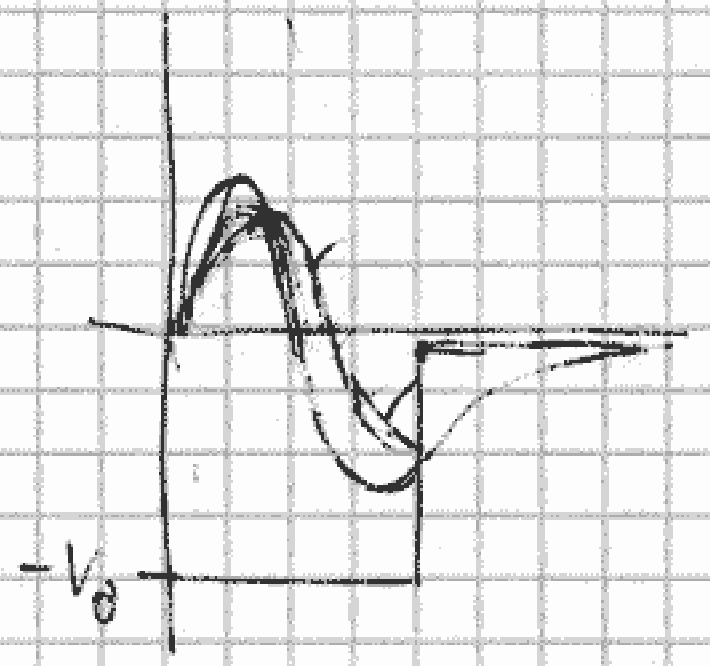
$\boxed{V_0^* = \frac{\pi^2}{2m}\frac{\hbar^2}{r_0^2}}$

Ha

$V_0 < V_0^*$: nincs kötött állapot

$V_0 \geq V_0^*$: van kötött állapot.

11.09.



$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\chi}{dr^2} + V(r)\chi(r) = E\chi(r)$$

$$\chi(r) = rR(r)$$

$(1 - -) R Y$

a) kötött állapot. $E<0$

I) $\chi(r) = \sin(qr)$

$\hbar q = \sqrt{2m(V_0+E)}$

II) $\chi(r) = e^{-\varkappa r}$

$\hbar\varkappa = \sqrt{2m|E|}$

$$\left.\frac{\chi'(r)}{\chi(r)}\right|_{r_0} = q\,\mathrm{ctg}(qr_0)$$

$$\frac{\chi'(r)}{\chi(r)} = -\varkappa$$

$$q\,\mathrm{ctg}(qr_0) = -\varkappa$$

Mikor jelenik meg ennek a kötött állapot?

$E=0$

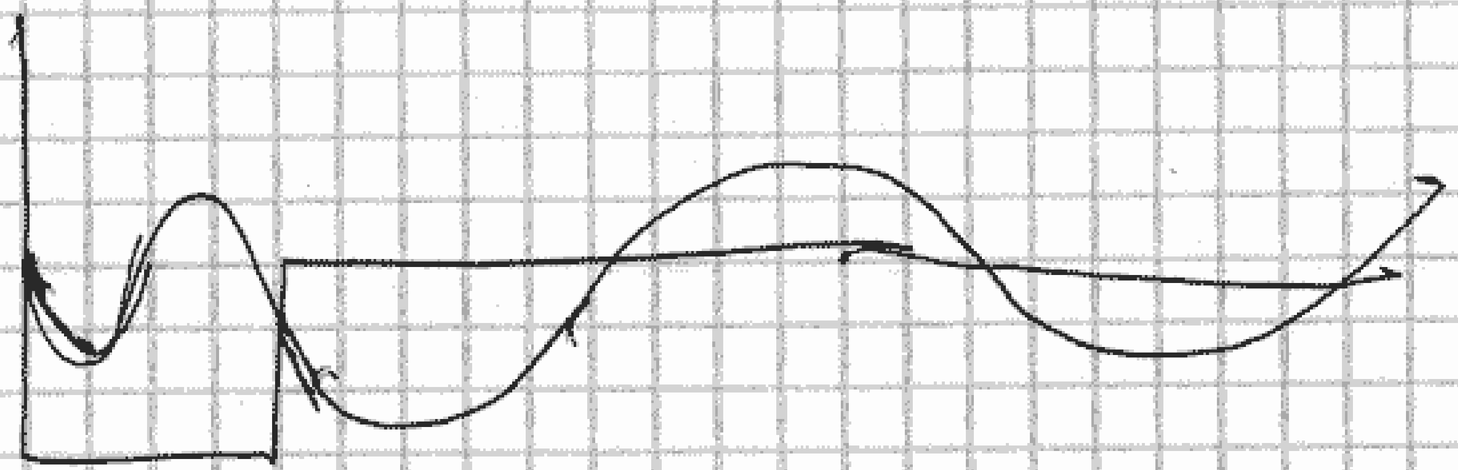
$\varkappa=0$

$$q\cdot\mathrm{ctg}(qr_0)=0$$

$$qr_0 = \pi/2 \Rightarrow q^2 = \frac{\pi^2}{4r_0^2} = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$$

$$\boxed{V_{0\,min} = \frac{\hbar^2\pi^2}{8mr_0^2}}$$

$E>0$ szórási állapotok



I) $\chi(r) = \sin(q_r r)$

$\hbar q_r = \sqrt{2m(V_0+E)}$

II) $\chi(r) = \sin(k(r-a))$

$ka = \delta_0$

$k = \sqrt{2mE}$

$$\frac{\chi'(r)}{\chi(r)} = k\,\frac{\cos(k(r-a))}{\sin(k(r-a))}$$

$E \simeq 0 \quad \rightarrow k \simeq 0 \qquad ka \ll 1$

$kr_0 \ll 1$ feltevések

$$\frac{\chi'(r)}{\chi(r)} = \frac{1}{r_0 - a} \simeq -\frac{1}{a}$$

nézzük meg mivan, ha $r_0 \ll a$

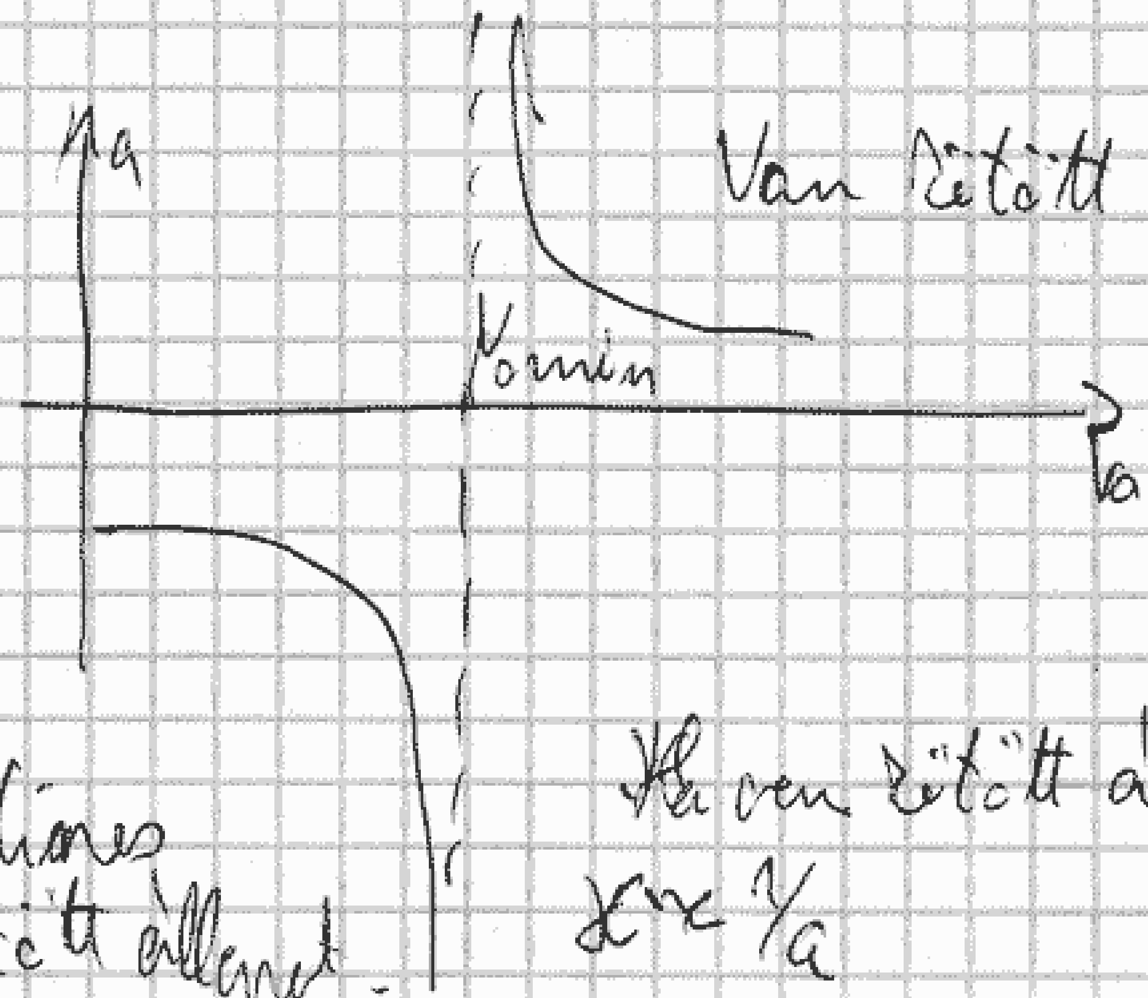
$$\frac{1}{a} = -q_0 \operatorname{ctg}(r_0 q_0)$$

$$\hbar q_0 = \sqrt{2mV_0}$$

$\operatorname{ctg}(q_0 r_0) < 0 \quad \rightarrow a > 0 \qquad (V_0 > V_0 \min)$

$\operatorname{ctg}(q_0 r_0) > 0 \quad \rightarrow a < 0$

ha $V_0 = V_0 \min \qquad \operatorname{ctg} q_0 r_0 = 0 \Rightarrow a = \infty$



Van kötött állapot

Nincs kötött állapot

Ha van kötött állapot

$\varkappa \approx 1/a$

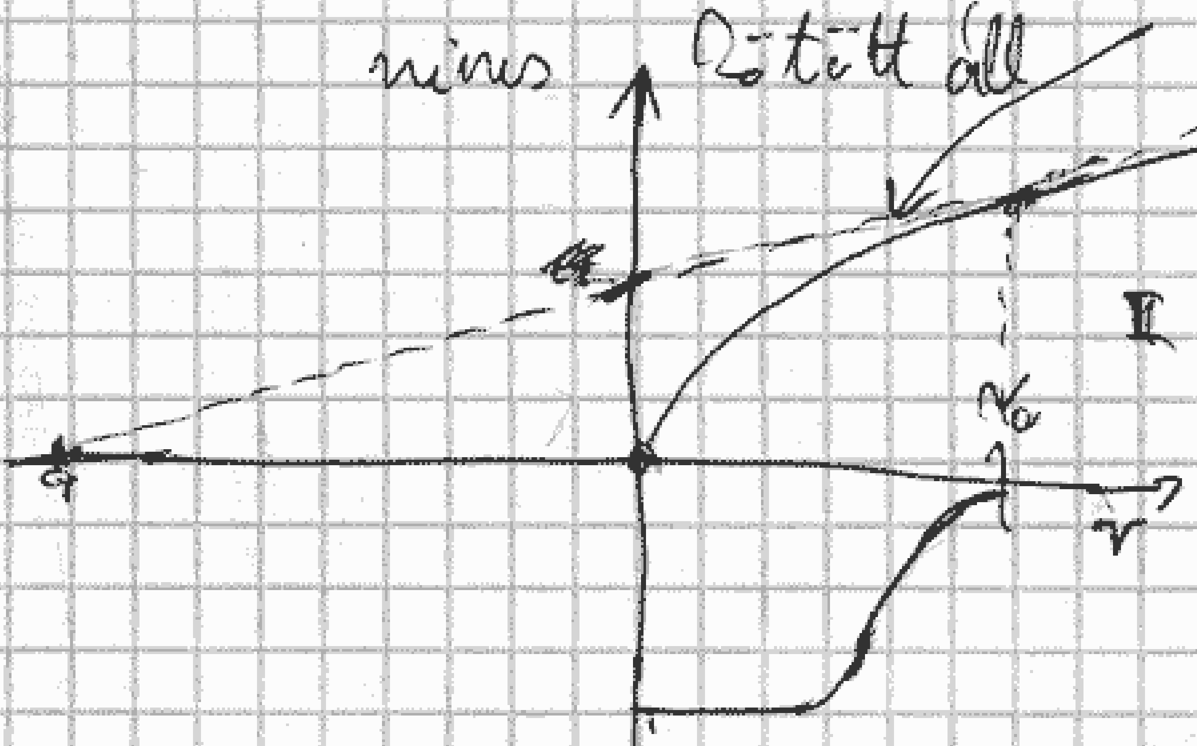
$$\frac{1}{a^2} = \frac{2mE_B}{\hbar^2}$$

$$E_B = \frac{\hbar^2}{2ma^2}$$

Vonzó potenciál

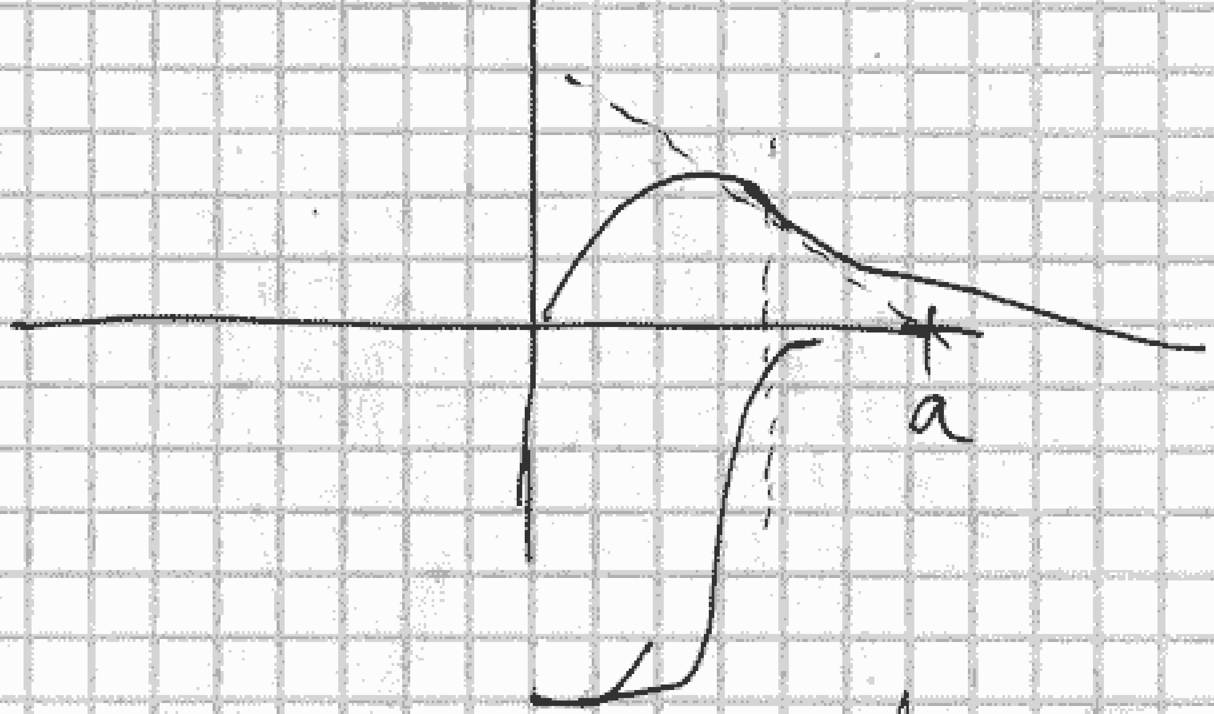
nincs kötött áll

~ legy érintője a-ban



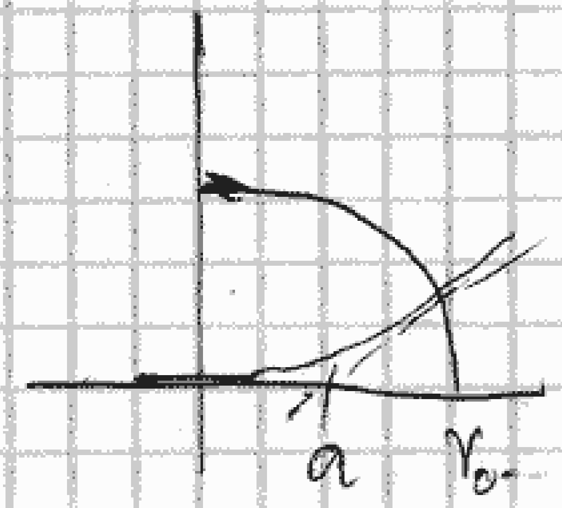
~ legy

van kötött



$V_0 = V_0 min$

Taszító potenciál : a szórási hossz csak pozitív lehet.



— o. —

Atomok Feshbach rez.

^{40}K → 19 proton
→ 21 neutron → fermion

$10^{20} \frac{1}{m^3} \sim n$ μm méretek

$T_F \approx 10^{-8} K$

e^- spin $1/2$

magspin: 4 $\frac{9}{2}$ v. $\frac{7}{2}$

^6Li

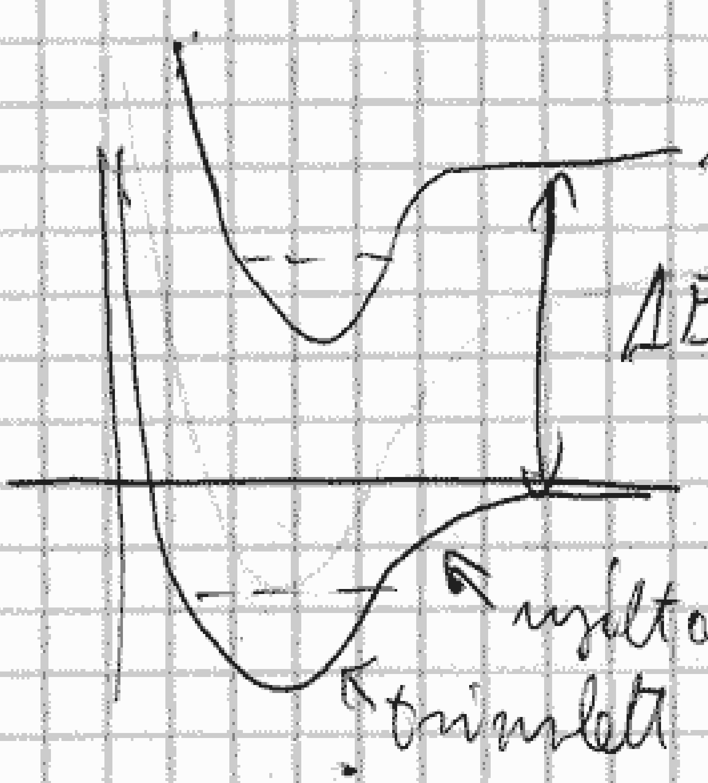
3 proton
3 neutron → fermion

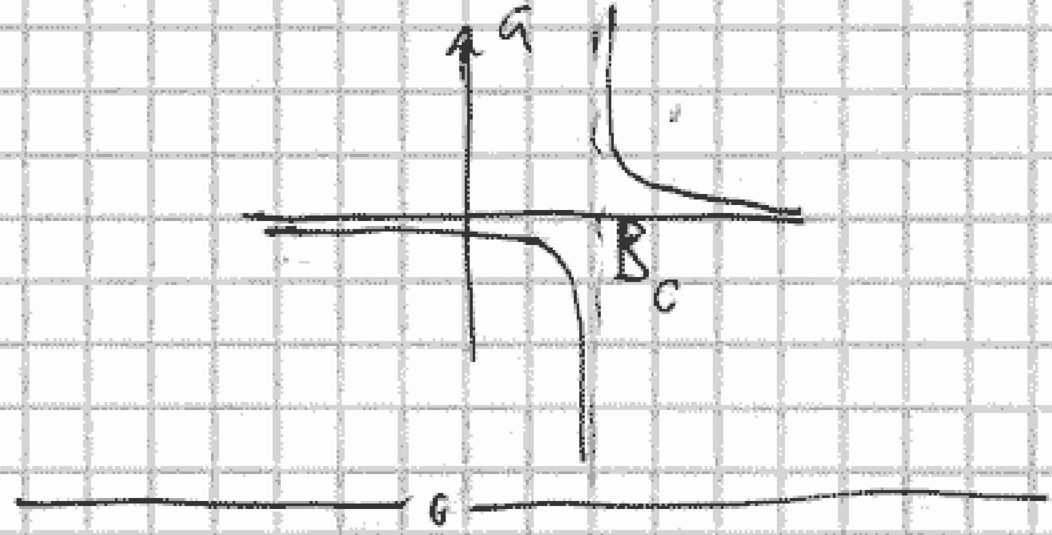
e^- spin $1/2$

magspin 1 $\frac{1}{2}$ v. $3/2$

Két $1/2$-es spinű részecske

Két menet - 2 csatorna: össz spin 1 v. 0





$e_0^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$

$v_{eff} = \frac{4\pi e_0^2}{q^2 \varepsilon_e}$ ← ionok leárnyékolása

effektív dielektromos függvény a zselé modellből

ε_e dielektromos fgv (SP 3. jegyzet 1.??? kérdések része!!)

$\varepsilon_e(0,\omega_p) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$

$\omega_p^2 = \frac{4\pi n e_0^2}{m}$

Plazma frekvencia

$\varepsilon_e(q,0) = 1 + \frac{k_{TF}^2}{q^2}$

$k_{TF}^2 = \frac{4}{\pi}\frac{1}{k_F a_0} k_F^2$ $\quad a_0 = \frac{\hbar^2}{m e_0^2}$

$k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$

Ha $\omega \ll k v_F$

$v_F = \frac{\hbar k_F}{m_e}$

$\varepsilon_e(q,0)$ lehető!!

$\omega \gg k v_i$

(e) (e) tipikus ionsebesség

$\Downarrow$

$\varepsilon_{ion} = 1 - \frac{\Omega_p^2}{\omega^2}$

$\Omega_p^2 = \frac{4\pi n_i (Ze_0)^2}{M}$

ionok plazma frekije

$n_i = \frac{n_0}{Z}$

$\Omega_p^2 = \left(Z\frac{m}{M}\right)\omega_p^2$

Mozgó ionokkal:

$v_{eff} = \frac{4\pi e_0^2}{k^2 \varepsilon}$

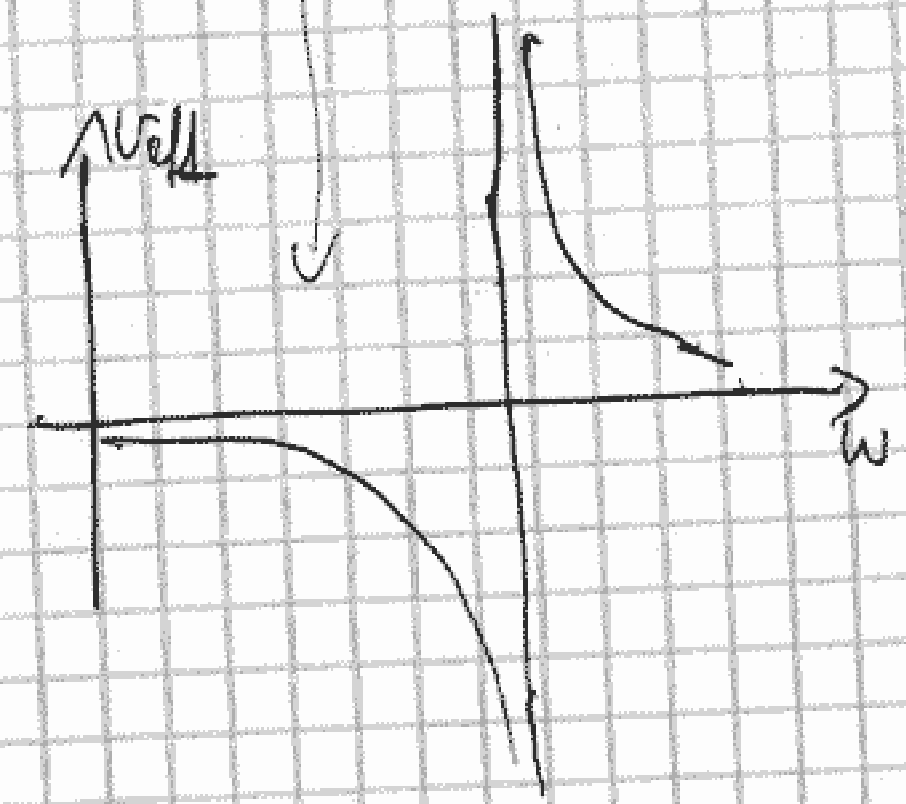
$\varepsilon = 1 + \frac{k_{TF}^2}{q^2} - \frac{\Omega_p^2}{\omega^2}$

Ez teszi meg bizonyos tartományokban hogy v_F negatív is lehet!

$$\varepsilon = \varepsilon_e(q,0)\left[1-\frac{\omega^2(q)}{\omega^2}\right] \Rightarrow \omega^2(q) = \frac{\Omega_p^2}{\varepsilon_e(q,0)} = \frac{Zm\omega_p^2}{M}\frac{k^2}{k^2+k_{TF}^2}$$

$k \ll k_{TF}$

$$\omega = ck \qquad c^2 = \frac{Zm}{M}\frac{\omega_p^2}{k_{TF}^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{Zm}{M}\right)v_F^2$$



Debye-frekv., stb. def.

hány atomtörzs / m^3

$$k_D^3 = 6\pi^2 n$$

$$\omega_D = c k_D$$

$$\Theta_D = \frac{\hbar\omega_D}{k_B}$$

Cooper-féle „egyszerű" (nem) leírás

1 pár kiszívése az alapállapotból ⟺ instabil

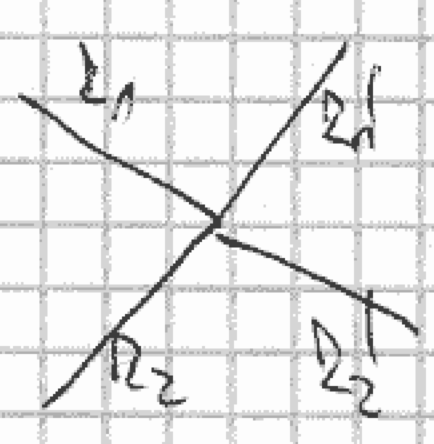
$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_1+\Delta_2) + \hat{P}\,U(\bar{r}_1-\bar{r}_2)$$

Λ

0

Projekciós operátor: nem melletegyük ki

e^- nem k_F-alá



Tkp. és relatív koordináták

$\vec{K} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$ $\qquad\qquad$ $k = k_1 - k_2$

$k' = \underline{k_1'} - \underline{k_2'}$ $\qquad\qquad$ $K' = k_1' + k_2'$

K megmaradó mennyiség. $\bar{K} = \bar{K}'$

A legmélyebb kötött állapot: $K = 0$

$\uparrow$

most ezt tekintjük?

$$v(r) = \sum_{\bar{q}} v(\bar{q})\, e^{i\bar{q}\bar{r}}$$

$$\Psi = e^{i\bar{K}\frac{\bar{r}_1+\bar{r}_2}{2}}\,\varphi(\bar{r}_1-\bar{r}_2)\,\chi(s_1, s_2)$$

$$\chi(s_1, s_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\alpha(s_1)\beta(s_2) - \alpha(s_2)\beta(s_1)\right]$$

$$\varphi(r) = -\varphi(r)$$

$$\varphi(r_1 - r_2) = \sum_{\substack{k \\ k > k_F}} c(k)\, e^{ik(r_1 - r_2)}$$

$\varphi(r) = \varphi(-r) \Rightarrow c(k) = c(-k)$ $\qquad\qquad$ $c(k) = 0 \quad k < k_F$

Schrödinger egyenlet a φ-re:

$$-\frac{\hbar^2\Delta}{m}\varphi(r) + PV(r)\varphi(r) = \overbrace{(2E_F - \Delta)}^{E}\varphi(r)$$

$$V(r)\,\varphi(r) = \sum_{\substack{k',q \\ |q+k'|>k_F}} c(k')\, v(q)\, e^{i(q+k')r} =$$

$$= \sum_{\substack{k',k \\ k,k'>k_F}} c(k')\, v(k-k')\, e^{ikr}$$

$$\hat H \varphi(r) = \sum_{k'}{}' \frac{\hbar^2 k'^2}{m} c(k')\, e^{ik'r} + \sum_{k',k''}{}' c(k'')\, v(k''-k')\, e^{ik''r} =$$

$$= (-\Delta + 2E_F) \sum_{k'}{}' c(k')\, e^{ik'r}$$

11.17. $$\frac{\hbar^2 k^2}{m} c(k) + \sum_{k'}{}' v(k-k')\, c(k') = (-\Delta + 2E_F)\, c(k)$$

csere

$v(k,k')$

ha $\Delta>0$ jön ki akkor $2E_F$-hez képest a pár energiája csökken.

$$v(k,k') = \begin{cases} -\dfrac{v}{V}, & \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m} < E_F + \hbar\omega_D \text{ és } \dfrac{\hbar^2 k'^2}{2m} < E_F + \hbar\omega_D \\ \end{cases}$$

Ez egy nem kizárólagosan $k-k'$ függvény.

$$A = -\frac{v}{V} \sum_{k'}{}' c(k') \qquad \sum_{k'}{}' c(k') = \sum_{k'} c(k')$$

$$\frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \le \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} \le E_F + \hbar\omega_D$$

$$C(k) = \frac{-A}{\frac{\hbar^2 k^2}{m} + \Delta - 2E_F}$$ Ez OK. de A-ban is van C-k.

A definíciójába visszaírva

$$A = -\frac{v}{V} \sum_{k}{}' \frac{-A}{\frac{\hbar^2 k^2}{m} + \Delta - 2E_F}$$

$$1 = \frac{v}{V} \sum_{k}{}' \frac{1}{\Delta + \frac{\hbar^2 k^2}{m} - 2E_F}$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \qquad k = \frac{1}{\hbar} (2mE)^{1/2}$$

$$\frac{1}{V} \sum_k \rightarrow \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \longrightarrow \int \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} \rightarrow \int \nu(E) dE$$

C(k)-ban csak k^2-van

$$\nu(E) = \frac{4\pi k^2}{(2\pi)^3} \left(\frac{dk}{dE}\right) = \frac{m^{3/2} E^{1/2}}{\sqrt{2}\, \pi^2 \hbar^3}$$

$$\nu(E_a) \cong \nu(E_F)$$

integrál műk. tartományra

$$\frac{1}{V} \sum_k{}' \rightarrow \int_{E_F}^{E_F + \hbar\omega_D} \nu(E) dE \underset{\varepsilon = E - E_F}{\overset{\hbar\omega_D \ll E_F}{\approx}} \nu(E_F) \int_0^{\hbar\omega_D} d\varepsilon$$

$$\nu(E_F) = \frac{m^{3/2} E_F^{1/2}}{\sqrt{2}\, \pi^2 \hbar^3} = \frac{m p_F}{2\pi^2 \hbar^3} \qquad \frac{p_F^2}{2m} = E_F$$

$$1 = v\, \nu(E_F) \int_0^{\hbar\omega_D} d\varepsilon \frac{1}{\Delta + 2\varepsilon} = v\, \nu(E_F) \left[\frac{\ln \Delta + 2\varepsilon}{2}\right]_0^{\hbar\omega_D} =$$

$$= \frac{1}{2} v\, \nu(E_F) \ln\left(\frac{\Delta + 2\hbar\omega_D}{\Delta}\right)$$

$$e^{\frac{2}{v\,\nu(E_F)}} = \frac{\Delta + 2\hbar\omega_D}{\Delta} = 1 + \frac{2\hbar\omega_D}{\Delta}$$

$\nu(E_F)\,v \ll 1$ Gyenge csatolás,

$$e^{\frac{2}{\nu(E_F)v}} \cong \frac{2\hbar\omega_D}{\Delta} \Rightarrow \Delta \cong 2\hbar\omega\, e^{-\frac{2}{\nu(E_F)\,v}}$$

$v > 0$ mert a kh. bk.-ban $-v$-t írtunk.

nagy

Δ exp. kicsi de

pozitív.

Akármilyen kicsi vonzó v-hez egy kötött állapot fog tartozni,

Ez volt az egy-pár. Mi történhet több párnál.

$$\varphi(1,2) = \varphi(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)\,\chi(s_1 s_2) \qquad (R_{TKP} = 0)$$

„Makroszkópikusan sok pár lesz a $k=0$ módusban"

$$A\left\{\varphi(1,2)\ \varphi(3,4)\right\}$$

N = páros

$$\varphi(1,2,\dots N) = A\left\{\varphi(1,2)\,\varphi(3,4)\dots\varphi(N-1,N)\right\}$$

$$\varphi(\bar{r}_i - \bar{r}_j) = \sum_{\bar{k}_i} C(k_i)\, e^{i\bar{k}_i(\bar{r}_i - \bar{r}_j)} \qquad C(\bar{k}) = C(-\bar{k})$$

antiszim.

$$\varphi(1 \dots N) = \sum_{k_1 \dots k_{N-1}} c(k_1)\, c(k_3) \dots c(k_{N-1})$$

$(1,3)$ (N_1-1, N)

az nimm.

$\varphi(r_1 r_2) = \varphi(r_1, r_2)\, \alpha(s_1)\, \alpha(s_2)$ is jó, mert úgyis antiszimmetrizálunk.

$$\varphi(1, \dots, N) = \sum_{k_1 \dots k_N} c(k_1) \dots c(k_{N-1}) \cdot SD$$

Salter Det

$$S(D) = \hat{A} \left\{ e^{ik_1 r_1} \alpha(s_1)\, e^{-i\vec{k}_1 \vec{r}_2} \beta(s_2) \dots e^{ik_{N-1} r_{N-1}} \alpha(s_{N-1}) \cdot e^{-ik_{N-1} r_N} \beta(s_N) \right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$a^+_{k_1\uparrow}\, a^+_{-k_1\downarrow} \dots a^+_{-k_{N-1}\uparrow}\, a^+_{-k_{N-1}\downarrow} |0\rangle$$

több már erdekes:

$$|\varphi_N\rangle = \sum_{k_1} \sum_{k_2} \dots \sum_{k_{N-1}} c(k_1) \dots c(k_{N-1})\, a^+_{k_1\uparrow} a^+_{k_1\downarrow} \dots a^+_{k_{N-1}} a^+_{k_{N-1}\downarrow} |0\rangle$$

$$\prod_k \left(u_k + v_k\, a^+_{k\uparrow} a^+_{-k\downarrow} \right) |0\rangle$$

úgy állítjuk be hogy N legyen $\langle \sum a_k^+ a_k \rangle$

$u(|k|)$ $v(|k|)$

$$|BCS\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \gamma_N |\varphi_N\rangle$$

Variációs elmélet

k_F alatt $v_k = 1$ $u_k = 1$

$-k\uparrow$ $k\uparrow$ $k\downarrow$ $k\downarrow$

ilyenkor betöltjük az összes állapotot

ε_F alatt

$\Downarrow$

benne van a nem kh. alapáll.

→ feltehető $u_k\ v_k$ valós és csak $|\vec{k}|$-től

függ ha nincs mágneses tér

→ Szabad gáz-ra

$$\left.\begin{array}{l} v_k = 1 \\ u_k = 0 \end{array}\right\} k \le k_F$$

$$\left.\begin{array}{l} v_k = 0 \\ u_k = 1 \end{array}\right\} \text{ha } k > k_F$$

→ $\langle BCS | BCS \rangle = 1$ ha $u_k^2 + v_k^2 = 1$ k-ra

$$\prod_{k} \left(u_k + v_k\, a_{k\uparrow}^{+}\, a_{-k\downarrow}^{+} \right) |0\rangle$$

tetsz. a sorrend

$\langle BCS | = \prod_k \langle 0 | (u_k + v_k\, a_{-k\downarrow}\, a_{k\uparrow})$

$(u_k + v_k a_{-k\downarrow} a_{k\uparrow})(u_k + v_k\, a_{k\uparrow}^{+}\, a_{-k\downarrow}^{+}) =$ $a_{-k\downarrow}(1 - a_{k\uparrow}^{+} a_{k\uparrow}) a_{-k\downarrow}^{+}$

$= u_k^2 + u_k v_k\, (a_{-k\downarrow}\, a_{k\uparrow} + a_{k\uparrow}^{+}\, a_{-k\downarrow}^{+}) + v_k^2\, a_{-k\downarrow}\, a_{k\uparrow}\, a_{k\uparrow}^{+}\, a_{-k\downarrow}^{+}$

$$\langle BCS|BCS\rangle = \prod_{\substack{k',k'' \\ k',k''\neq k}} \langle 0| \left(u_{k'} + v_{k'}\, a_{-k'\downarrow}\, a_{k'\uparrow}\right) \left[u_k^2 + v_k^2 + (\text{többi})\right] \cdot$$

$$\cdot \left(u_{k''} + v_{k''}\, a^+_{k''\uparrow}\, a^+_{-k''\downarrow}\; a^+_{k''_N}\right) |0\rangle$$

vákuum felé
lehet c. jobbra
vive 0-t ad

$$\prod \left(u_k^2 + v_k^2\right) = 1$$

ha tagonként 1 akkor ☺

— e —

Bogoljubov Valatin trafó

$$\alpha^+_{k\uparrow} = u_k\, a^+_{k\uparrow} - v_k\, a_{-k\downarrow}$$

$$\alpha^+_{k'\downarrow} = u_{k'}\, a^+_{k'\downarrow} + v^*_{k'}\, a_{-k'\uparrow}$$

$$\alpha_{k\uparrow} = u_k\, a_{k\uparrow} - v_k\, a^+_{-k\downarrow}$$

$$\alpha_{k'\downarrow} = u_{k'}\, a_{k'\downarrow} + v_{k'}\, a^+_{-k'\uparrow}$$

$\{\ \}$	$\alpha_{k'\uparrow}$	$\alpha_{k'\downarrow}$	$\alpha^+_{k'\uparrow}$	$\alpha^+_{k'\downarrow}$
$\alpha_{k\uparrow}$	0	0	$\delta_{kk'}$	0
$\alpha_{k\downarrow}$	0	0	0	$\delta_{kk'}$
$\alpha^+_{k\uparrow}$	$\delta_{kk'}$	0	0	0
$\alpha^+_{k\downarrow}$	0	$\delta_{kk'}$	0	0

$$= a_{-k\downarrow}\, a^+_{-k\downarrow} + a^+_{k\uparrow}\, a_{-k\downarrow}\, a_{k\uparrow}\, a^+_{-k\downarrow}$$

$$\sim 1 - a^+_{-k\downarrow}\, a_{-k\downarrow} + a^+_{k\uparrow}\, a_{-k\downarrow}\, a_{k\uparrow}\, a_{-k\downarrow}$$

$$\{\alpha^+_{k\uparrow}, \alpha^+_{k\downarrow}\} = \{u_k a^+_{k\uparrow} - v_k a_{-k\downarrow}, u_{k'} a^+_{k'\downarrow} + v_{k'} a_{-k'\uparrow}\} =$$

$$= -v_k u_{k'} \delta_{k,k'} + u_k v_{k'} \delta_{k,-k'} = \delta_{-kk'} \underbrace{(-u_k v_k + u_k v_k)}_{0}$$

$$\{\alpha_{k\uparrow}, \alpha^+_{k'\uparrow}\} = \{u_k a_{k\uparrow} - v_k a^+_{-k\downarrow}, u_{k'} a^+_{k'\uparrow} - v_{k'} a_{-k'\downarrow}\} =$$

$$= u_k u_{k'} \delta_{kk'} + v_k v_{k'} \delta_{kk'} = \delta_{kk'}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_{k\uparrow} |BCS\rangle &= 0 \\ \alpha_{k\downarrow} |BCS\rangle &= 0 \end{aligned}} \longrightarrow$$ a BCS ~ bgr

a kvázirészecske vákuum.

kűrőz

$$\prod_{k' \neq k} (u_{k'} + v_{k'} a^+_{k'\uparrow} a^+_{-k'\downarrow}) \overbrace{(u_k a_{k\uparrow} - v_k a^+_{k\downarrow})}^{\alpha_{k\uparrow}} \cdot$$

$$\cdot (u_k + v_k a^+_{k\uparrow} a^+_{-k\downarrow}) |0\rangle$$

$$(-u_k v_k a^+_{-k\downarrow} + u_k v_k \underbrace{a_{k\uparrow} a^+_{k\uparrow}}_{(1 - a^+_{k\uparrow} a_{k\uparrow})} a^+_{-k\downarrow}) |0\rangle$$

$$(1 - a^+_{k\uparrow} a_{k\uparrow}) a^+_{-k\downarrow} |0\rangle$$

$$-u_k v_k a^+_{-k\downarrow} + u_k v_k a^+_{-k\downarrow} |0\rangle = 0$$

Kvázirészecske Ivzltek

$$\alpha^+_{k_N \sigma_N} \cdots \alpha^+_{k_1 \sigma_1} |BCS\rangle$$

Inverz trafó

$$\alpha^{+}_{k\uparrow} = u_k a^{+}_{k\uparrow} - v_k a_{-k\downarrow} \qquad \qquad a^{+}_{k\uparrow} = u_k \alpha^{+}_{k\uparrow} + v_k \alpha_{-k\downarrow}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\alpha_{-k\downarrow} = v_k a^{+}_{k\uparrow} + u_k a_{-k\downarrow} \qquad \qquad a_{-k\downarrow} = u_k \alpha_{-k\downarrow} - v_k \alpha^{+}_{k\uparrow}$$

ortogonalis mátrix $\longrightarrow$ könnyű az inverz

$$a_{k\uparrow} = u_k \alpha_{k\uparrow} + v_k \alpha^{+}_{-k\downarrow}$$

$$a^{+}_{-k\downarrow} = u_k \alpha^{+}_{-k\downarrow} - v_k \alpha_{k\uparrow}$$

$$\langle BCS | a^{+}_{k\uparrow} a^{+}_{-k\downarrow} | BCS \rangle = \langle (u_k \cancel{\alpha^{+}_{k\uparrow}} + v_k \alpha_{-k\downarrow})(u_k \alpha^{+}_{-k\downarrow} - v_k \cancel{\alpha_{k\uparrow}}) \rangle_{BCS}$$

$$= u_k v_k \langle 1 - \cancel{\alpha^{+}_{-k\downarrow} \alpha_{-k\downarrow}} \rangle_{BCS} = u_k v_k$$

$$\langle BCS | \underbrace{a^{+}_{k\uparrow} a_{k\uparrow}}_{n_{k\uparrow}} | BCS \rangle = \langle (u_k \alpha^{+}_{k\uparrow} + v_k \alpha_{-k\downarrow})(u_k \alpha_{k\uparrow} + v_k \alpha^{+}_{-k\downarrow}) \rangle_{BCS}$$

$$= v_k^2 \overset{\text{ugyanígy}}{=} \langle BCS | a^{+}_{k\downarrow} a_{k\downarrow} | BCS \rangle$$

$$\langle BCS | \hat{N} | BCS \rangle = \sum_k \langle BCS | a^{+}_{k\uparrow} a_{k\uparrow} + a^{+}_{k\downarrow} a_{k\downarrow} | BCS \rangle =$$

$$= 2 \sum_k v_k^2$$

$$\hat{N}^2 = 4 \sum_k n_{k\uparrow} \sum_{k'} n_{k'\uparrow}$$

Azért érdekes mert ellenőrizni akarjuk, hogy TDL-ben kicsi-e a fluct.

$k \neq k'$ $\quad \langle BCS | n_{k\uparrow} n_{k'\uparrow} | BCS \rangle = v_k^2 v_{k'}^2$

$k' = k$ $\quad \langle BCS | n_{k\uparrow} n_{k\uparrow} | BCS \rangle =$

$$= \langle BCS | (u_k \alpha^{+}_{k\uparrow} + v_k \alpha_{-k\downarrow})(u_k \alpha_{k\uparrow} + v_k \alpha^{+}_{-k\downarrow})(u_k \alpha^{+}_{k\uparrow} + v_k \alpha_{-k\downarrow})(u_k \alpha_{k\uparrow} + v_k \alpha^{+}_{-k\downarrow}) | BCS \rangle$$

$$= v_k^2 \langle \alpha_{-k\downarrow}(u_k \alpha_{k\uparrow} + v_k \alpha^+_{-k\downarrow})(u_k\alpha^+_{k\uparrow} + v_k \alpha_{-k\downarrow})\alpha^+_{-k\downarrow}\rangle_{BCS} =$$

$$= v_k^2 (u_k^2 + v_k^2)$$

$$\frac{\langle BCS|N^2|BCS\rangle - \langle BCS|N|BCS\rangle\langle BCS|N|BCS\rangle}{\langle BCS|N|BCS\rangle^2} =$$

$k \neq k'$ [illegible]

$$= \frac{4\left(\sum_{\substack{k k' \\ k\neq k'}} + \sum_{\substack{k k' \\ k=k'}}\right)\langle n_{k\uparrow} n_{k'\uparrow}\rangle - 2\langle\sum_k n_{k\uparrow}\rangle 2\langle \sum_{k'} n_{k'\uparrow}\rangle}{4\langle\sum_k n_{k\uparrow}\rangle^2} =$$

$$= \frac{4\sum_k\sum_{\substack{k' \\ k\neq k'}} \left(v_k^2 v_{k'}^2 + \sum_k v_k^2(u_k^2+v_k^2)\right) - 4\left(\sum_{\substack{kk' \\ k\neq k'}} + \sum_{\substack{k k' \\ k=k'}}\right) v_k^2 v_{k'}^2}{4\langle\sum_k n_{k\uparrow}\rangle^2} =$$

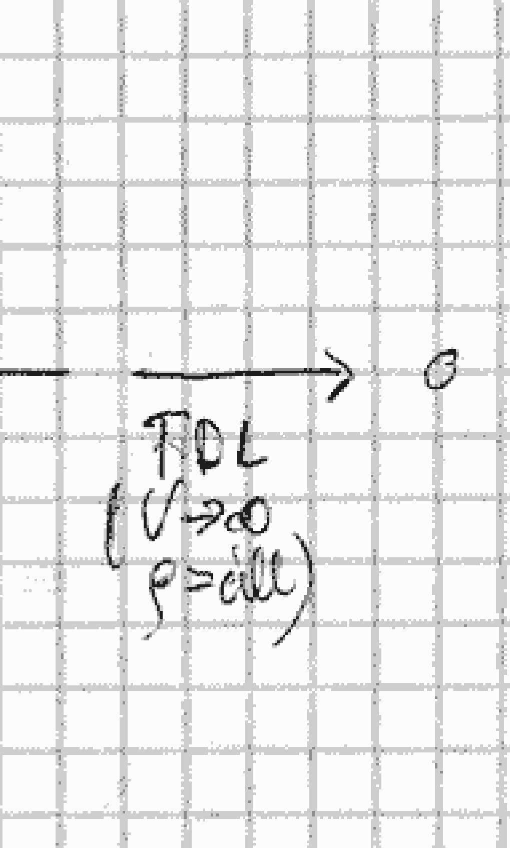
$$= \frac{4\sum_k u_k^2 v_k^2}{4\left(\sum_k v_k^2\right)^2} = \frac{1}{V}\frac{\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} u_k^2 v_k^2}{\left(\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3} v_k^2\right)^2} \xrightarrow[\text{TDL}]{} 0$$

(TDL: $V\to\infty$, $\rho = $ áll.)

$$\sum_k = V\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

kicsi a fluktuáció

$$|BCS\rangle = \sum_N \gamma_N |\Psi_N\rangle$$



—c—

$|BCS\rangle$ → nem N sajátáll.

→ szimmetriasértő, hiszen $[\hat H, \hat N] = 0$

→ TDL-ben $|BCS\rangle$ használható, mert $\hat N$ fluktuációja kicsi.

Green függvényes technika szupravezetésre

$$\hat{K} = \sum_{p\sigma} \varepsilon_p a^+_{p\sigma} a_{p\sigma} + \frac{1}{2V} \sum_{\substack{q,p,p' \\ \sigma\sigma'}} V(q)\, a^+_{p+q,\sigma} a^+_{p'-q,\sigma'} a_{p'\sigma'} a_{p\sigma}$$

$\sigma = \uparrow, \downarrow$

$$K = H - \mu N \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_p = \underbrace{\frac{\hbar^2 p^2}{2m}}_{e_p} - \mu$$

$$O(\tau) = e^{\frac{\hat{K}\tau}{\hbar}} \hat{O}(0) e^{-\frac{\hat{K}\tau}{\hbar}}$$

$K(\tau) = K(0)$

Heisenberg mozgásegyenletek:

$$\hbar \frac{\partial}{\partial t} O(\tau) = [\hat{K}, O(\tau)]$$

$$\hbar \frac{\partial}{\partial t} a_{p\sigma}(\tau) = [\hat{K}, a_{p\sigma}(\tau)]$$

szabály ehhez $[O_1 O_2, O_3] = O_1 \{O_2, O_3\} - \{O_3, O_1\} O_2$

$V(q)$ q-ban páros

$$\hbar \frac{\partial}{\partial t} a_{p\sigma}(\tau) = -\varepsilon_p a_{p\sigma} - \frac{1}{V} \sum_{p',q,\sigma'} V(q)\, a^+_{p'-q,\sigma'} a_{p'\sigma'} a_{p-q,\sigma}$$

$$G(p, \tau - \tau') = -\langle T_\tau\, a_{p\sigma}(\tau)\, a^+_{p\sigma}(\tau') \rangle$$

$\uparrow \quad \uparrow$

$\downarrow \quad \downarrow$

$\uparrow \quad \downarrow$ ← G-t is minden esetben ezekre definiálni

külső B tér mellett

$\uparrow\uparrow = \downarrow\downarrow$

és $\downarrow\uparrow = \downarrow\uparrow = 0$

$$G_{\sigma\sigma'}(p, \tau - \tau') = -\langle T_\tau\, a_{p\sigma}(\tau)\, a^+_{p\sigma'}(\tau') \rangle = \delta_{\sigma\sigma'} \langle T_\tau a_{p\sigma}(\tau) a^+_{p\sigma} \rangle$$

$$\hbar\frac{\partial}{\partial\tau}G(p,\tau-\tau') = -\hbar\frac{\partial}{\partial\tau}\Big[\theta(\tau-\tau')\langle a_{p\sigma}(\tau)\,a^{+}_{p\sigma}(\tau')$$

$$-\theta(\tau'-\tau)\,a^{+}_{p\sigma}(\tau')\,a_{p\sigma}(\tau)\rangle\Big] =$$

$$\langle\ \ \rangle = \sum_i \langle \Omega_i | \tfrac{1}{Z}e^{-\beta K}\ldots | \Omega_i\rangle$$

κιτάζι νέπεσσε Jσεζ-τέν.

$$= -\hbar\,\delta(\tau-\tau')\ \langle\underbrace{\{a_{p\sigma}a^{+}_{p\sigma}(\tau')\}}_{=1}\rangle + \langle T_\tau\Big[\hbar\frac{\partial}{\partial\tau}a_{p\sigma}(\tau)\Big]\cdot a^{+}_{p\sigma}(\tau')\rangle$$

$$= -\hbar\,\delta(\tau-\tau') - \varepsilon_p\,G(p,\tau-\tau') - \frac{1}{V}\sum_{p'q\sigma'}v(q)\langle T_\tau\ldots\rangle$$

$$\hbar\,\delta(\tau-\tau') = -\Big(\hbar\frac{\partial}{\partial\tau}+\varepsilon_p\Big)G(p,\tau-\tau') + \frac{1}{V}\sum_{p'q\sigma'}v(q)\langle T_\tau\,a^{+}_{p'-q\,\sigma'}(\tau)\,a_{p'\sigma'}(\tau)\,a_{p-q\,\sigma}(\tau)\,a^{+}_{p\sigma}(\tau')\rangle = \otimes$$

(Η Σύπρθλε a greeinbyr

Heither - Για δι τασσζαι γόκινες)

$$\langle T_\tau\, a^+_{p-q\,\sigma'}(\tau)\, a_{p\sigma'}(\tau)\; a_{p-q\,\sigma}(\tau)\, a^+_{p\sigma}(\tau')\rangle$$

$$\overset{\text{Wick}}{=} \langle a_{p\sigma'}(\tau)\, a_{p-q\,\sigma}(\tau)\rangle \langle T_\tau\, a^+_{p-q\,\sigma'}(\tau)\, a^+_{p\sigma}(\tau')\rangle$$

itt csak a felírt párosítás van benne, a szokásos Hartree-Fock tagokat elhagytuk

$$= \delta_{p',p-q}\,\delta_{\sigma',\sigma}\,\langle a_{-p+q,\sigma}(\tau)\; a_{p-q,\sigma}(\tau)\rangle \langle T_\tau\, a^+_{-p\sigma}(\tau)\, a^+_{p\sigma}(\tau')\rangle$$

ellentétes impulzusú

új fajta Green fgv.

Vettek ide (-1)-et még.

$$\Gamma^+_{\bar{\mathcal{F}}}(k,\tau-\tau') = \langle T_\tau\, a^+_{k\uparrow}(\tau)\, a^+_{-k\downarrow}(\tau')\rangle$$

$$\mathcal{F}(k,\tau-\tau') = \langle T_\tau\, a_{-k\downarrow}(\tau)\, a_{k\uparrow}(\tau')\rangle$$

$$= -\delta_{-p',p-q}\,\delta_{\sigma',-\sigma}\,\mathcal{F}(p-q,0)\,\mathcal{F}^+(p,\tau-\tau')$$

$$\circledast = -\left(\hbar\frac{\partial}{\partial\tau}+\varepsilon_p\right) G(p,\tau-\tau') - \frac{1}{V}\sum_q v(q)\,\mathcal{F}(p-q,0)\,\mathcal{F}^+(p,\tau-\tau')$$

+ elhagyott tagok

A régi tagokat bele lehet venni egy HF-al

effektív tömeget potenciálba venni.

Vettek

$$+\uparrow\; -\downarrow \;\longleftarrow\; +\uparrow\; -\downarrow$$

$$\varepsilon_p \longrightarrow \varepsilon_p^* = \frac{p^2}{2m^*} - \mu^*$$

$*$: kicsit ... értelemben.

$\mathcal{F}$ mozgásegyenlete

$$\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{F}^+(p, \tau-\tau') = \hbar \frac{\partial}{\partial \tau}\Big[\Theta(\tau-\tau')\langle a^+_{p\uparrow}(\tau) a^+_{-p\downarrow}(\tau')\rangle$$

$$-\Theta(\tau'-\tau)\langle a^+_{-p\downarrow}(\tau') a^+_{p\uparrow}(\tau)\rangle\Big]$$

$$= \delta(\tau-\tau')\langle \underbrace{\{a^+_{p\uparrow}(\tau) a^+_{-p\downarrow}(\tau)\}}_{0}\rangle +$$

$$+\langle T_\tau \Big[\hbar\frac{\partial}{\partial \tau} a^+_{p\uparrow}(\tau)\Big] a^+_{-p\downarrow}(\tau')\rangle$$

$$\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} a^+_{p\sigma} = [K, a^+_{p\sigma}(\tau)]$$

$$0 = \left(-\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} \cancel{\mathcal{F}^+(p, \tau-\tau')} + \xi_p\right) \mathcal{F}^+(p, \tau-\tau')$$

(H nem változtatja a T_τ-t)

$$+\frac{1}{V}\sum_{p', q, \sigma'} v(q) \langle T_\tau a^+_{p-q\uparrow}(\tau) \overbrace{a^+_{p'+q,\sigma'}(\tau) a_{p'\sigma'}(\tau)}^{\theta}$$

$$a^+_{-p\downarrow}(\tau')\rangle$$

$$F^+(p-q, \ldots)$$

$$\delta_{\sigma'\downarrow}\, \delta_{-p,-p'} \langle \widehat{a^+_{p-q\uparrow}(\tau) a^+_{-p+q\downarrow}}(\tau')\rangle$$

$$\langle T_\tau a_{p\downarrow}(\tau) a^+_{-p\downarrow}(\tau')\rangle$$

$$-G(p, \tau-\tau') \longrightarrow$$

$$0 = \left(-\hbar\frac{\partial}{\partial\tau} + \varepsilon_p\right) F^+(p, \tau-\tau') - \frac{1}{V}\sum v(q)\, \mathcal{F}(p-q, 0)\, \mathcal{G}(p, \tau-\tau')$$

$$\Delta^+(p) = -\frac{1}{V}\sum_q v(q)\, \mathcal{F}^+(p, \tau=0) = \Delta^*(p)$$

(igazi $\quad \Delta(p) = -\frac{1}{V}\sum_q v(q)\, \mathcal{F}(p-q, \tau=0)$

$B = H = 0$ $\quad \Delta^* = \Delta^+ = \Delta \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} -\left(\hbar\frac{\partial}{\partial\tau} + \varepsilon_p\right) G(p, \tau-\tau') + \Delta(p)\, \mathcal{F}^+(p, \tau-\tau') = \hbar\delta(\tau-\tau') \\ -\left(\hbar\frac{\partial}{\partial\tau} - \varepsilon_p\right) \mathcal{F}^+(p, \tau-\tau') + \Delta(p)\, G(p, \tau-\tau') = 0 \end{cases}$$

$\Delta(p) = -\frac{1}{V}\sum_q v(q)\, \mathcal{F}(p-q, \tau=0)$ 12.07

τ-ban $\beta\hbar$-al periodikus a Green fgv.

Felírjuk Matsubara képlettel.

$$G(p, \tau) = \frac{1}{\beta\hbar}\sum_{\omega_n} e^{i\omega_n\tau}\, G(p, i\omega_n)$$

Meg lehet mutatni $\mathcal{F}$ is periodikus

$$\mathcal{F}(p, \tau) = \frac{1}{\beta\hbar}\sum_{\omega_n} e^{-i\omega_n\tau}\, \mathcal{F}(p, i\omega_n)$$

$$\mathcal{F}^+(p, \tau) = \frac{1}{\beta\hbar}\sum_{\omega_n} e^{i\omega_n\tau}\, \tilde{\mathcal{F}}^+(p, i\omega_n)$$

$$\begin{cases} -\left(i\hbar\omega_n + \varepsilon_p\right) G(p, i\omega_n) + \Delta(p)\, \mathcal{F}^+(p, i\omega_n) = \hbar \\ \Delta(p)\, G(p, i\omega_n) + \left(i\hbar\omega_n + \varepsilon_p\right) \mathcal{F}^+(p, i\omega_n) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$\mathcal{G}(p, i\omega_n) = \frac{\begin{vmatrix} \hbar & \Delta_p \\ 0 & i\hbar\omega_n + \mathcal{E}_p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i\hbar\omega_n - \mathcal{E}_p & \Delta(p) \\ \Delta(p) & i\hbar\omega_n + \mathcal{E}_p \end{vmatrix}} =$$

$$= - \frac{\hbar\,(i\hbar\omega_n + \mathcal{E}_p)}{(\hbar\omega_n)^2 + \mathcal{E}_p^2 + \Delta_p^2}$$

$$\tilde{\mathcal{F}}(p, i\omega_n) = \frac{\hbar\,\Delta(p)}{(\hbar\omega_n)^2 + \mathcal{E}_p^2 + \Delta^2(p)}$$

De a Δ is függ az $\tilde{\mathcal{F}}$-től

Free: $\Delta = 0$ (normal állapot) $(T \geq T_c)$

⊛ = a normál Green függv. mozg. egyz.

$$\mathcal{G}(p, i\omega_n) = \frac{\hbar}{i\hbar\omega_n - \mathcal{E}_p} = \frac{1}{i\omega_n - \underbrace{\mathcal{E}_p/\hbar}_{(\epsilon_p - \mu)/\hbar}}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\hbar^2 p^2}{2m}$$

$$\boxed{\mathcal{F} = \mathcal{F}^{+} = 0}$$

$\mathcal{F}^{\Delta_p \neq 0}$ $T \leq T_c$

$$\tilde{\mathcal{F}}(p, \tau = 0) = \frac{1}{\beta\hbar} \sum_n \frac{\hbar\,\Delta(p)}{(\hbar\omega_n)^2 + E_p^2}$$

$$E_p = \sqrt{\mathcal{E}_p^2 + \Delta^2(p)}$$

$$\omega_n = \frac{\pi(2n+1)}{\beta\hbar}$$

$$\sum_n \frac{e^{i\omega_n \eta}}{i\omega_n - \hbar^{-1}E} = \frac{\beta\hbar}{e^{\beta E}+1}$$ ezt tudjuk

Hogy normálni lehessen parciális törtekre kell bontani.

$$\mathcal{F}(p,\tau=0) = -\Delta(p)k_BT\sum_n \frac{e^{i\omega_n\eta}}{(i\hbar\omega_n)^2 - E_p^2} = -\frac{\Delta(p)k_BT}{2E_p}\sum_n e^{i\omega_n\eta}\left(\frac{1}{i\hbar\omega_n - E_p} - \frac{1}{i\hbar\omega_n + E_p}\right)$$

$$= -\frac{\Delta(p)}{2E_p}\frac{k_BT}{\hbar}\sum_n\left(\frac{e^{i\omega_n\eta}}{i\omega_n - E_p/\hbar} - \frac{e^{i\omega_n\eta}}{i\omega_n + E_p/\hbar}\right) =$$

$$= -\frac{\Delta(p)}{2E_p}\left(\frac{1}{e^{\beta E_p}+1} - \frac{1}{e^{-\beta E_p}+1}\right) =$$

$$\frac{e^{\beta E_p}}{1+e^{\beta E_p}}$$

$$= -\frac{\Delta(p)}{2E_p}\frac{1-e^{\beta E_p}}{1+e^{\beta E_p}} = \frac{\Delta(p)}{2E_p}\frac{e^{\beta E_p}-1}{e^{\beta E_p}+1} = \frac{\Delta(p)}{2E_p}\frac{e^{\frac{\beta E_p}{2}}-e^{-\frac{\beta E_p}{2}}}{e^{\frac{\beta E_p}{2}}+e^{\frac{\beta E_p}{2}}}$$

$$= \frac{\Delta(p)}{2E_p}\, th\left(\frac{\beta E_p}{2}\right)$$

$$\mathcal{F}(p,\tau=0) = \frac{\Delta(p)}{2E_p}\, th\left(\frac{\beta E_p}{2}\right)$$

$$\Delta(p) = -\frac{1}{V}\sum_{p'} v(p-p')\,\mathcal{F}(p',\tau=0)$$ $\quad \varepsilon_p = e_p - \mu$

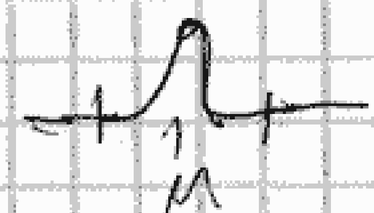
Anal. megoldás kapható szeparálható potenciálra

$$v(p-p') \to v(p,p') = \begin{cases} -g \text{ ha } & \text{ha } |\varepsilon_p| < \hbar\omega_D \text{ és } |\varepsilon_{p'}| < \hbar\omega_D \\ 0 & \text{egyébként.}\end{cases}$$

Δ(p) - ról feltevés

$$\Delta(p) = \begin{cases} \Delta = \Delta(p_F), & \text{ha } |\varepsilon_p| \leq \hbar\omega_D \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

És $\mu \gg \hbar\omega_D \gg \Delta$ energiaskálák nagyon szétválnak.

Tipikusan ilyenkor vannak olyan integrálok  amelyeknél a határt elvinnék ∞-be

(*)-be betéve a 2 közelítést és Δ-val egyszerűsítve

$$\Delta = -\frac{1}{V}\, \underbrace{V \int_{|\varepsilon_p| < \hbar\omega_D} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3}}_{\sum'_{p'}} (-g) \frac{\Delta}{2E_p} \operatorname{th}\left(\frac{\beta E_p}{2}\right)$$

$$1 = g \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} d\varepsilon\, \underbrace{\nu(\varepsilon + E_F)}_{\text{állapotsűrűség}\ \approx\ \nu(E_F)} \frac{1}{\underbrace{2\sqrt{\varepsilon_p^2 + \Delta^2(p)}}_{E_p}} \operatorname{th}\left(\frac{\beta\sqrt{\varepsilon^2+\Delta^2}}{2}\right)$$

$E_F = \mu$

ε változó

$$1 = g\nu_F \int_0^{\hbar\omega_D} d\varepsilon \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+\Delta^2}} \operatorname{th}\left(\frac{\beta\sqrt{\varepsilon^2+\Delta^2}}{2}\right)$$

(Ha $V(q)$ nem cseng le elég gyorsan: gap egyenlet divergál. UV divergencia)

T_C kereszés: adott β-hoz van-e Δ?

T_c: még van megoldás és $\Delta = 0$

$$1 = g\nu_F \int_0^{\hbar\omega_D} d\varepsilon \, \frac{1}{\varepsilon} \, th\left(\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)$$

Új változó: $\cancel{x} = \frac{\beta\varepsilon}{2}$

felső határ: $Q = \frac{\hbar\omega_D}{2k_B T_C} \sim$ (zéró hőmérséklet Gap exponenciálisan zérólesz hozzá-nál)

$$\int_0^Q \frac{1}{x} th x \, dx = \left[\ln x \, th x\right]_0^Q - \int_0^Q dx \ln x \frac{1}{ch^2 x} =$$

$Q \gg 1$ (lecsökken zérus-től) $Q \gg 1$

$$\cong \ln Q - \underbrace{\int_0^\infty dx \ln x \frac{1}{ch^2 x}}$$

$\int_0^\infty dx \ln x \frac{1}{ch^2 x} = -\ln \frac{4\gamma}{\pi}$

$\ln \gamma = C = 0{,}577$ Euler konstans.

$$1 = g\nu_F \int_0^{\hbar\omega_D/2k_BT_C} dx \, \frac{1}{x} th x = g\nu_F \ln\left(\frac{\hbar\omega_D}{2k_BT_C} \cdot \frac{4\gamma}{\pi}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$k_BT_c = e^{-\frac{1}{g\nu_F}} \cdot \hbar\omega_D \frac{2\gamma}{\pi} = \frac{2\gamma}{\pi} \hbar\omega_D \, e^{-\frac{1}{g\nu_F}}$$

kicsi (gyenge kölcsönh.)

ez is kicsi.

(gyenge kh: $g\nu_F \ll 1$ (való. zérus a termikus))

$T=0$ $\qquad \Delta_0 = \Delta(T=0)$

↑ abszolút Gap

$$1 = g\,\nu_F \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2+\Delta^2}} = g\,\nu_F \left[\ln\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2+\Delta^2}\right)\right]_0^{\hbar\omega_D} \cong$$

felt. majd később $\hbar\omega_D \gg \Delta_0$

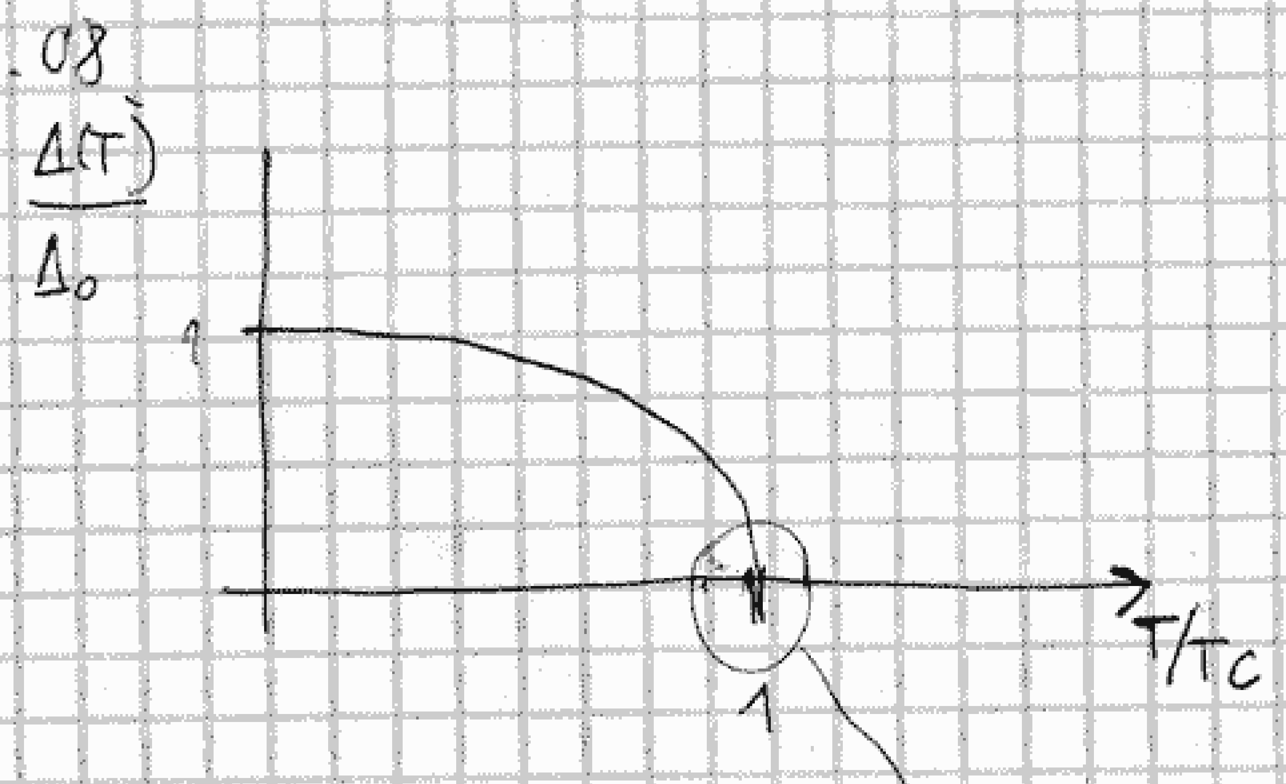
$$\cong g\,\nu_F \ln\left(\frac{2\hbar\omega_D}{\Delta_0}\right)$$

$$\Delta_0 = \Delta(T=0) = 2\hbar\omega_D\, e^{-\frac{1}{g\nu_F}}$$

$$\frac{\Delta_0}{k_B T_C} = \frac{2\gamma}{\pi\, 2} = \frac{\gamma}{\pi} = 1{,}76$$ ← anyag független

12.08

$\Delta_0 \overset{\text{def}}{=} \Delta(T=0)$



$$\Delta(T) \cong 3{,}06\, k_B T_C \left(1-\frac{T}{T_C}\right)^{1/2} \quad (\beta = 1/2)$$

ma kiszámoljuk

↑

$|T_C - T| \ll T_C$

$$E_p = \sqrt{\Delta^2 + \xi_p^2} \qquad \xi_p = \frac{\hbar^2 p^2}{2m} - \mu$$

$$\mathcal{G}(p, i\omega_n) = -\frac{\hbar\,(i\hbar\omega_n + \xi_p)}{(\hbar\omega_n)^2 + E_p^2} =$$

$$= \hbar \left(\frac{u_p^2}{i\hbar\omega_n - E_p} + \frac{v_p^2}{i\hbar\omega_n + E_p} \right) \quad \circledast$$

$$E_p = \sqrt{\Delta^2 + E_p^2}$$

$$u_p^2 (i\hbar\omega_n + E_p) + v_p^2 (i\hbar\omega_n - E_p) = i\hbar\omega_n + E_p$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} u_p^2 + v_p^2 = 1 \\ u_p^2 - v_p^2 = \dfrac{\xi_p}{E_p} \end{cases}$$

$$u_p = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\xi_p}{E_p}\right)}$$

$$v_p = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\xi_p}{E_p}\right)}$$

$$2 u_p v_p = \sqrt{1 - \frac{\xi_p^2}{E_p^2}} = \frac{\Delta}{E_p}$$

Anomális Green fgv:

$$// \; F(p, i\omega_n) = \frac{\hbar\Delta}{(\hbar\omega_n)^2 + E_p^2} \; //$$

$$F(p, i\omega_n) = F^+(p, i\omega_n) \overset{\text{Ugyanaz-e?}}{=} -\hbar u_p v_p \left\{ \frac{1}{i\hbar\omega_n - E_p} - \frac{1}{i\hbar\omega_n + E_p} \right\}$$

✓

Mi a sűrűség? $\qquad G = -\langle T_\tau\, a_{p\sigma}(\tau)\, a^\dagger_{p\sigma}(\tau') \rangle$

kell majd:

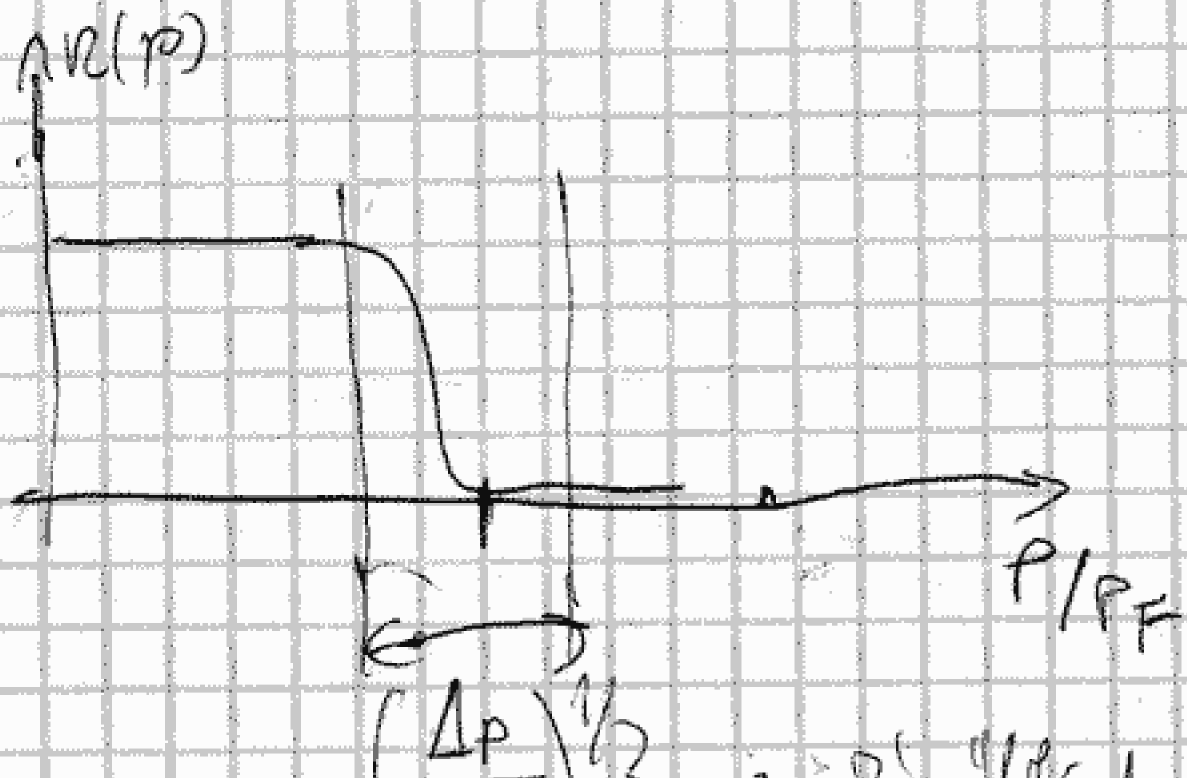
$$\frac{1}{\beta\hbar}\sum_n \frac{e^{i\eta\omega_n}}{i\omega_n - \hbar^{-1}E} = \frac{1}{e^{\beta E}+1}$$

$$n_\sigma(p) = G(p, \tau = 0-\eta) = \frac{1}{\beta\hbar}\sum_n G(p, i\omega_n)\, e^{i\omega_n \eta}$$

$$= u_p^2 \frac{1}{e^{\beta E_p}+1} + v_p^2 \underbrace{\frac{1}{e^{-\beta E_p}+1}}_{\frac{e^{\beta E_p}}{e^{\beta E_p}+1} = 1 - \frac{1}{e^{\beta E_p}+1}} =$$

$$= \boxed{v_p^2 + (u_p^2 - v_p^2)\frac{1}{e^{\beta E_p}+1} = n_\sigma(p)}$$

Spec $T = 0$



$\left(\frac{\Delta_p}{e_p}\right)^{1/2}$ ← részletek fogjuk látni

$e_p = \frac{\hbar^2 p^2}{2m}$

$\Delta_0 \sim 10^{-3} - 10^{-4}\ eV$ $\qquad e_F = \frac{\hbar^2 p_F^2}{2m} = 2-10\ eV$

$$N = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{spin}}}{2} \sum_k{}' v_k^2$$

$$v_k^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_k^2}}\right)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{szupra}}}{N_s} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{normál}}}{N_n} = V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\cancel{1} - \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2}} - \cancel{1} + \frac{\varepsilon_k}{|\varepsilon_k|}\right) =$$

$$\varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu$$

$$= V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\frac{\varepsilon_k}{|\varepsilon_k|} - \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2}}\right) = V \int_{-\mu_n}^{\infty} d\varepsilon\, \nu(\varepsilon) \left(\frac{\varepsilon}{|\varepsilon|} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2}}\right) =$$

$\simeq -\infty$

Az energia skálák

μ-vel eltolva az integrálás határokat

$$= V\, \nu(\varepsilon_F) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \left(\frac{\varepsilon}{|\varepsilon|} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2}}\right)}_{\varepsilon\text{-ban páratlan}} = 0$$

$$\boxed{N_s - N_n = 0}$$ $\leftarrow$ T_c-n átmenve nincs részecskeszám változással.

$T = 0$ $\quad \mu_s = E_F = \dfrac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$

— " — mert ezt magyarázzák a lenti közelítés

$$\left(k^2 - k_F^2\right)^2 = (k - k_F)^2 \underbrace{(k + k_F)^2}_{\simeq 4k_F^2} \simeq 4k_F^2 (k - k_F)^2$$

vastagpárat.

$$\Delta^2 = \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}\right)^2$$

$$(\delta k)^2 = (k - k_F)^2 = \frac{\Delta^2 4m^2}{4 k_F^2 \hbar^4} \Rightarrow \delta k = \frac{\Delta m}{\hbar^2 k_F} = \frac{\Delta}{\hbar v_F}$$

$$v_F = \frac{\hbar k_F}{m}$$

Térbeli mérete a Cooper páraknak

$$\sim \frac{1}{\delta k} = \frac{\hbar v_F}{\Delta} = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \frac{1}{\Delta} \frac{2}{k_F} = \frac{\varepsilon_F}{\Delta} \cdot \frac{2}{k_F}$$

$\sim 10^{-4}$ cm

$= 10^{-6}$ m

$=$ 1000 nm

4 nagyságrenddel nagyobb az átlagos $e^- - e^-$ távolsággal.

Cooper párok száma

$$\frac{N_c}{N} = \frac{\Delta}{E_F}$$

kerülő amit nem számolunk végig

— o —

<u>Δ hőmérséklet függése T_c körül</u>

→ mű 2. HW-D vastag gömbhéjra

$$1\ \Delta = \frac{g}{\beta \cancel{V}} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \sum_n \frac{\cancel{\Delta}}{(\hbar\omega_n)^2 + \varepsilon_q^2 + \Delta^2} =$$

$$\omega_n = (2n+1)\frac{\pi}{\hbar\beta}$$

$\pi k_B T_c$

$3\pi k_B T_c$

$$1 = \frac{g}{\beta}$$

Δ T_c körül kisebb mint minden más.

Δ pedig $\to 0$

$$= \frac{g}{\beta}\int' \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\sum_n{}' \frac{1}{(\hbar\omega_n)^2+\xi_q^2}\left(1-\frac{\Delta^2}{(\hbar\omega_n)^2+\xi_q^2}\right) + O\left(\frac{\Delta^4}{k_BT_c}\right)$$

T_c számolásakor $\Delta=0$ volt

$$1=\frac{1}{\hbar\beta}\, g\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\sum_n{}' \frac{\hbar}{(\hbar\omega_n)^2+\xi_q^2} = g\nu_F \ln\left(\frac{\hbar\omega_D}{k_BT_c}\frac{2\gamma}{\pi}\right)$$

Ezért az első tag

$$\frac{g}{\beta}\int' \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\sum_n{}' \frac{1}{(\hbar\omega_n)^2+\xi_q^2} = g\nu_F \ln\left[\frac{\hbar\omega_D}{k_BT}\frac{2\gamma}{\pi}\right] =$$

$$= g\nu_F \ln\left[\underbrace{\frac{\hbar\omega_D}{k_BT_c}\frac{2\gamma}{\pi}}\cdot\frac{T_c}{T}\right] = 1 + g\nu_F \ln\frac{T_c}{T}$$

A második tag kezelése: ($\beta\approx\beta_c$-vel)

$$\cancel{\frac{g}{\beta}}\; -g\left(\frac{\Delta}{k_BT_c}\right)^2 \int' \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\sum_n{}' \frac{(k_BT_c)^3}{\left((\hbar\omega_n^c)^2+\xi_q^2\right)^2} =$$

$$= -g\left(\frac{\Delta}{k_BT_c}\right)^2 (k_BT_c)^3\, \nu_F\, 2\sum_n{}' \int_0^{\hbar\omega_D} d\xi \frac{1}{\left((\hbar\omega_n^c)^2+\xi^2\right)^2} = \#$$

$$\int_0^{\hbar\omega_D} d\xi \frac{1}{\left((\hbar\omega_n)^2+\xi^2\right)^2} = \left[\frac{\frac{\hbar\omega_n^c\,\xi}{(\hbar\omega_n^c)^2+\xi^2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{\xi}{\hbar\omega_n^c}\right)}{2(\hbar\omega_n^c)^3}\right]_0^{\hbar\omega_D} =$$

$$? = \frac{\hbar\omega_D}{\hbar\omega_n^c} \qquad \frac{\hbar\omega_D}{(2n+1)\pi k_BT_c}$$

— durván szoba hőmérséklet

sok sok n-re $\hbar\omega_D \gg \hbar\omega_n^c$

nagy n-re megfordul

$$= \frac{\pi}{2} \frac{\mathrm{sgn}(\hbar\omega_n^c)}{2(\hbar\omega_n^c)^3} = \frac{\pi}{4} \frac{1}{|\hbar\omega_n^c|^3}$$

$$\#\# = -\frac{\pi}{2} g \nu_F \left(\frac{\Delta}{k_B T_c}\right)^2 \cancel{(k_B T_c)^3} \underbrace{\sum_n \frac{\cancel{\beta_c^3}}{((2n+1)^3 \pi^3)}}_{2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3 \pi^3}} =$$

$$= -\frac{1}{\pi^2} g \nu_F \left(\frac{\Delta}{k_B T_c}\right)^2 \frac{7}{8} \zeta(3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)^3} = \frac{7}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{7}{8}\zeta(3)$$

T_c közeli gap egyenlet.

$$0 = \cancel{1} - \cancel{1} - g\nu_F \ln\left(\frac{T}{T_c}\right) - \frac{1}{\pi^2} g \nu_F \left(\frac{\Delta}{k_B T_c}\right)^2 \frac{7}{8} \zeta(3)$$

$$\frac{7}{8} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} \cancel{g\nu_F} \left(\frac{\Delta(T)}{k_B T_c}\right)^2 = -\cancel{g\nu_F} \ln\left(\frac{T_c + \delta T}{T_c}\right)$$

$T = T_c + \delta T$

$$\underbrace{\ln\left(1 + \frac{\delta T}{T_c}\right)}_{\approx \frac{\delta T}{T_c} = \frac{T - T_c}{T_c}}$$

$$\frac{7}{8} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} \left(\frac{\Delta(T)}{k_B T_c}\right)^2 = \frac{T_c - T}{T_c}$$

$$\Delta(T) \underset{T \to T_C}{\cong} k_B T_C \underbrace{\left(\frac{8\pi^2}{7\zeta(3)}\right)^{1/2}}_{3,0632} \left(1-\frac{T}{T_C}\right)^{1/2}$$

Gyenge csatolási: T_C kiesi a sok-sok tényleg sok n-re jó.

12.15.

Stabil-e a szupravezető állapot

$\Delta = 0$ mindig megoldás

$$H_1 = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k k' q \\ \sigma \sigma'}} v(q)\, a^+_{k+q}\, a^+_{k'-q, \sigma'}\, a_{k' \sigma'}\, a_{k\sigma}$$

Kell: $\langle H_1 \rangle$ $\int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \langle \lambda H_1 \rangle_\lambda$

A többi (HF tagok) m-be μ-be

$k' = -k$ $\quad \sigma' = -\sigma$

csak a becserélt rész va

$$\sum_{k'} \langle a_{k'\uparrow} a_{k\downarrow} \rangle$$

az $1/2$ elment $\downarrow\uparrow$ és $\uparrow\downarrow$ miatt

$$\langle H_1 \rangle = -\frac{g}{V} \sum_k{}' \langle a^+_{k\uparrow} a^+_{-k\downarrow} \rangle \sum_{k'}{}' \langle a_{k'\uparrow} a_{-k'\downarrow} \rangle = -\frac{V}{g} \Delta^2(g)$$

$$\Delta(q) = -\frac{1}{V} \sum_q{}' v(q) \langle a_{-(p-q)\downarrow}\, a_{(p-q)\uparrow} \rangle$$

A Delta részös közelítés:

$$\Delta = -\frac{g}{V} \sum_p{}' \langle a_{-p\downarrow}\, a_{p\uparrow} \rangle$$

$$\Omega_S - \Omega_N = \int_0^1 d\lambda \frac{1}{\lambda} \langle \lambda H_1 \rangle_\lambda = \otimes$$

$d\lambda = \frac{1}{g} dg'$ $\quad \lambda g = g'$ új változó („kató csatolási állandó”)

$$\frac{1}{\lambda}\langle\lambda|H_1|\lambda\rangle_\lambda = \frac{g}{g'}(-1)\frac{V}{g'}\Delta(g')$$

$$\otimes = \int_0^g \frac{dg'}{g}\,\frac{g}{g'}(-1)\,\frac{V}{g'}\Delta^2(g') = -V\int_0^g dg'\,\frac{1}{g'^2}\,\Delta^2(g') =$$

$g' \longrightarrow \Delta$

$\Delta \longrightarrow g'$ integrálható Δ szerint

$$= -V\int_0^\Delta d\Delta' \left(\frac{dg'}{d\Delta'}\right)\frac{\Delta'^2}{g'^2} = \int_0^\Delta d\Delta'\,(\Delta')^2\,\frac{d\,1/g'}{d\Delta'}$$

Gap egyenlet: $\Delta = \frac{g}{V}\sum'\frac{1}{\beta}\sum_n \frac{\Delta}{(\hbar\omega_n)^2+E_q^2}$

$$E_q^2 = \Delta^2 + \xi_q^2$$

$$\xi_q = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} - \mu$$

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{V}\sum'\frac{1}{\beta}\sum_n \frac{1}{(\hbar\omega_n)^2+E_q^2}$$

$$\frac{d\,1/g}{d\Delta} = -\frac{1}{\beta}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\sum_n \frac{2\Delta}{\left((\hbar\omega_n)^2+E_q^2\right)^2}$$

$$\frac{\Omega_S-\Omega_N}{V} = -\frac{2}{\beta}\int_0^\Delta d\Delta'\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\sum_n \frac{\Delta'^3}{\left((\hbar\omega_n)^2+E_q^2\right)^2} \overset{?}{=} T \approx T_c$$

$\Downarrow$

A szupravezető állapot stabilabb mint a normál,

$$= -\frac{\Delta^4(T)}{2\beta}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\sum_n\frac{1}{\left((\hbar\omega_n)^2+E_q^2\right)^2} =$$

T_c körül a Δ a nevezőben (E_q^2-ben) $\hbar\omega_n = 2\pi T_c$ mellett elhanyagolható

hasonló mint múltkor

áll. sűrűség a Fermi felületen

$$\sim 2\nu_F\frac{\pi}{4}\sum_n\frac{1}{(\hbar\omega_n)^3} = \nu_F\frac{\beta^3}{\pi^3}\frac{7}{8}\zeta(3)$$

$$= -\frac{7}{16}\frac{\zeta(3)}{\pi^2}\beta^2\nu_F\Delta^4(T) =$$

$$\Delta(T) = (\ldots)\left(1-\frac{T}{T_c}\right)^{1/2}$$

$$\boxed{\frac{\Omega_S-\Omega_N}{V} \underset{\substack{T\approx T_c\\ T\lesssim T_c}}{\cong} -\frac{4}{7}\frac{\pi^2}{\zeta(3)}(k_BT_c)^2\nu_F\left(1-\frac{T}{T_c}\right)^2}$$

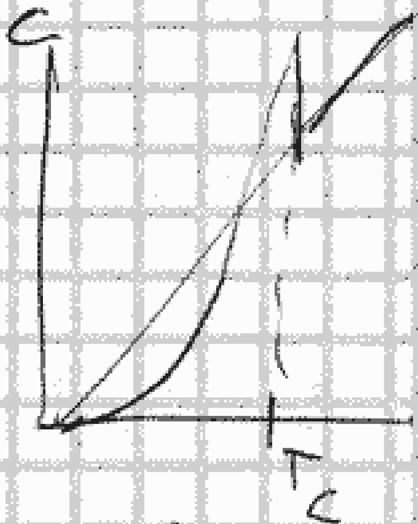
Ω_S stabilabb!!

$$C = -T\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_{V,N}$$

egyéb extenzív — intenzív tagok

$$d\Omega = -SdT - p\,dV - Nd\mu + \sum_i \Lambda_i\,d\lambda_i$$

$$dF = -SdT - p\,dV + \mu dN + \sum_i \Lambda_i\,d\lambda_i$$



Mivel $N_S = N_{normál}$ μ azonos

$$\Omega_S - \Omega_N = F_S - F_N$$

$$C_S(T_c) - C_N(T_c) = -T_c\frac{\partial^2}{\partial T^2}\left(-\frac{4}{7}\frac{\pi^2}{\zeta(3)}V(k_BT_c)^2\left(1-\frac{2T}{T_c}+\frac{T^2}{T_c^2}\right)\nu_F\right)_{T=T_c} =$$

$$= \frac{8}{7}V\frac{\pi^2}{\zeta(3)}k_B^2T_c\,\nu_F$$

$$C_N(T_c) = V\frac{2\pi^2}{3}\nu_F\,k_B^2T$$

$$\frac{C_S(T_c)-C_N(T_c)}{C_N(T_c)} = \frac{12}{7}\frac{1}{\zeta(3)} = 1{,}42613$$

(B)

$$\frac{\Delta_0}{k_B T_c} = \pi e^{-\gamma} = 1{,}76 \qquad (BCS)$$

	T_c	$\frac{\hbar\omega_D}{k_B}$ (kT)	$\frac{\Delta_0}{k_B T_c}$	$\frac{C_s - C_n}{C_n}\Big\|_{T_c}$
Cd	0,56	164	1,6	1,32 - 1,40
Al	1,2	375	1,3 - 2,1	1,45
Sn	3,75	195	1,6	1,6
Pb	7,22	96	2,2	2,71

Közelítő termodinamika $T \ll T_c$ esetén

$$\frac{C_s}{V} = 2\nu_F \Delta(T=0)\, k_B \sqrt{2\pi} \left(\frac{\Delta(T=0)}{k_B T}\right)^{3/2} e^{-\Delta_0/k_B T}$$

$T \ll T_c$ (a rés változása)

$$\Delta(T) - \Delta(0) = -\left[2\pi \Delta(0) k_B T\right]^{1/2} e^{-\Delta_0/k_B T}$$

<u>Elemi gerjesztések spektruma</u>

$$G(\vec{p}, \tau - \tau') = -\langle T_\tau\, a_{p\sigma}(\tau)\, a^\dagger_{p\sigma}(\tau') \rangle$$

$$F(\vec{p}, \tau - \tau') = \langle T_\tau\, a_{-p\downarrow}(\tau)\, a_{p\uparrow}(\tau') \rangle$$

Sokszor van itt egy (−)

$$F^+(\vec{p}, \tau - \tau') = \langle T_\tau\, a^\dagger_{p\uparrow}(\tau)\, a^\dagger_{-p\downarrow}(\tau') \rangle$$

$$G(p, i\omega_n) = \hbar\left(\frac{u_p^2}{i\hbar\omega_n - E_p} + \frac{v_p^2}{i\hbar\omega_n + E_p}\right)$$

$$F(p, i\omega_n) = F^+(p, i\omega_n) = -\hbar u_p v_p \left(\frac{1}{i\hbar\omega_n - E_p} - \frac{1}{i\hbar\omega_n + E_p}\right)$$

Új Green függvény.

$$\mathcal{G}(p,\tau) = -\langle T_\tau\, \alpha_{2\uparrow}(\tau)\, \alpha^+_{2\uparrow}(0)\rangle = -\langle T_\tau (u_2 a_{2\uparrow}(\tau) - v_2 a^+_{-2\downarrow}(\tau))$$

$$(u_2 a^+_{2\uparrow}(0) - v_2\, a_{-2\downarrow}(0))\rangle = -u_2^2 \langle T_\tau\, a_{2\uparrow}(\tau) a^+_{2\uparrow}(0)\rangle$$

$$+ u_2 v_2 \langle T_\tau\, a^+_{-2\downarrow}(\tau)\, a^+_{2\uparrow}(0)\rangle + u_2 v_2 \langle T_\tau\, a_{2\uparrow}(\tau)\, a_{-2\downarrow}(0)\rangle$$

$$-v_2^2 \langle T_\tau\, a^+_{-2\downarrow}(\tau)\, a_{-2\downarrow}(0)\rangle =$$

$$= u_2^2 G(k,\tau) - u_2 v_2\, F^+(k,-\tau) + u_2 v_2\, F(k,-\tau) - v_2^2 \underbrace{G(-k,-\tau)}_{G(k,-\tau)}$$

$$\mathcal{G}(p,i\omega_n) = u_2^2\, G(k,i\omega_n) - v_2^2\, G(k,-i\omega_n) - 2u_2 v_2 F(k,i\omega_n)$$

$$\mathcal{G}(k,i\omega_n) = \frac{\hbar}{i\omega_n - E_2}\left(u_2^4 + 2u_2^2 v_2^2 + v_2^4\right) + \frac{\hbar}{i\hbar\omega_n - E_2}\cdot 0 =$$

$$(u_2^2+v_2^2)^2 = 1$$

$$= \frac{1}{i\omega_n - E_2/\hbar}$$

valós állapotok

[illegible]

$$i\omega_n \to \omega + i\delta$$

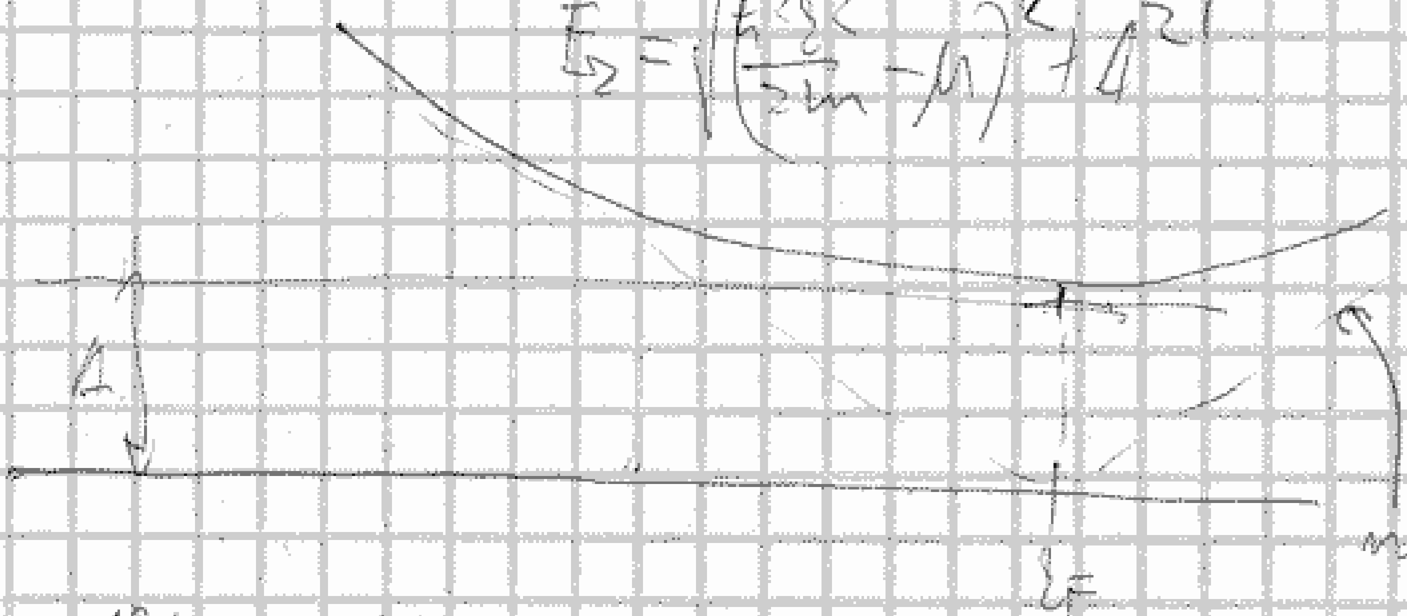
$$\mathcal{G}(k,\omega) = \frac{1}{\omega - \hbar E_2 + i\delta}$$

$$\hbar\omega(k) = E_2 \qquad \text{a pólusa}$$

$$E_2 = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu\right)^2 + \Delta^2}$$

$T=0$

$$\mu(T=0) = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$$



Δ

k_F

normál rendszer spektruma

$\Delta = 0$

normál állapot:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left((k^2 + k_F^2)\right)$$