III. 28. SZ

$G(x, x', i\omega_n) = \int dx_2 \int dx_3\, G_0(x, x_2, i\omega_n)\, \Delta(x_2, x_3, i\omega_n)\, G(x_3, x', i\omega_n)$

bonyolult dolog.

SORTEST 1.

---

IIII. 11., SZ

gráfszabályok frekireprezentációban img. repben

hefrep. ban csak inhomogén rendszerben számolnak.

n-edrendben

1. Rajzoljunk le $\forall$ n-edrendű $\underbrace{\text{Feynman-diagramot}}_{\text{csatolt, összefüggő, topológiailag különböző}}$

2. $\forall$ részecskevonalhoz ezt rendeljük $\overset{\circ}{x_1} \xleftarrow{\omega_n} \overset{\circ}{x_2}$ (rögzített) $= -G_{(0)}(x_1, x_2, i\omega_n)$

3. $\forall$ kölcsönhatási vonalhoz meg ezt: $x_1 \downarrow i\omega_n\, x_2$ (önkényes az irány) $\left(-\frac{1}{\hbar}\right) v(x_1, x_2)$

4. Ahány ftl. frekvencia, ahány független hurok van a gráfban ($\forall$ hurok számít) $\underline{n}$ db hurok $\underline{n}$ db freki n-edrendben.

5. Az n db freki $\forall$1 ikére összegzünk: $\frac{1}{\beta\hbar}\sum_n$

6. $\forall$ fermionhurokra $(-1)$-es szorzót kapunk $(-1)^F$

7. Egy propagátort tartalmazó hurkok kapnak egy $e^{i\omega_n\eta}$ szorzót (egyidős hurkok kezelésére: $G_{(0)}(x, x', \tau=\eta) = \frac{1}{\beta\hbar}\sum_n G_{(0)}(x, x', i\omega_n)e^{i\omega_n\eta}$

8. $\forall$ belső pontra $\sum_s \int d^3 x$: 2n db $\sum$ és $\int$

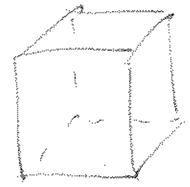
$\partial_t v = c^2 \partial_x z \quad \frac{\Delta v(x,t)}{\Delta t} = c^2 \frac{\Delta z(x,t)}{\Delta x}$

$\Delta v(x,t)\Delta x = c^2 \Delta z(x,t)\Delta t$

$v(t+1)\Delta x + z(t)\Delta t c^2 = v(t)\Delta x + c^2 z(x+1)\Delta t$

⑧ ④ $\forall$ belső pontra $\int$-mal: $\sum_s \int d^3r$ 2nfold $\int$ és $\sum$

Homogén rendszer:



L

$V = L^3$ $\quad \varphi_{k m_s}(\underline{r}, s) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\underline{k}\underline{r}} \chi_{m_s}(s)$, $\chi_{m_s}(s) = \delta_{m_s, s}$

szabad Green-fv.:

spinfüggetlen

$$G_{(0)}(\underline{r}_1 s_1, \underline{r}_2 s_2, i\omega_n) = \frac{1}{V}\sum_{k} \frac{\delta_{s_1 s_2} e^{i\underline{k}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)}}{i\omega - \frac{\varepsilon_k - \mu}{\hbar}} = \delta_{s_1 s_2} \frac{1}{V} \sum_{\underline{k}} G_{(0)}(\underline{k}, i\omega_n) e^{i\underline{k}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)}$$

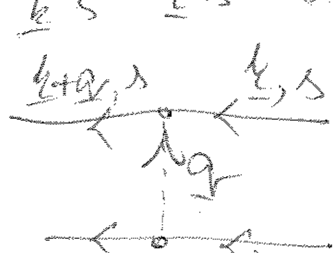
$$G_0(\underline{k}, i\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \frac{\varepsilon_k - \mu}{\hbar}}$$

$K = K_0 + K_1$

$$K_0 = \sum_{\underline{k}, s} (\varepsilon_k - \mu) a^+_{\underline{k} s} a_{\underline{k} s}$$

$$K_1 = \frac{1}{2V} \sum_{\substack{k k' q \\ s s'}} a^+_{\underline{k}+\underline{q}, s} a^+_{\underline{k}'-\underline{q}, s'} a_{\underline{k}' s'} a_{\underline{k} s} v(\underline{q})$$

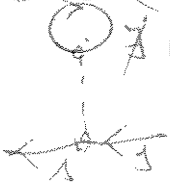
$$v(\underline{q}) = \int d^3r\, v(\underline{r}) e^{-i\underline{q}\underline{r}}$$




gráfszabályok:

1. ✓
2. $\xleftarrow{\underline{k}, i\omega_n}$ $\; -G(\underline{k}, i\omega_n)$
3. $\underline{q}, i\omega_n$ $\quad \frac{v(\underline{q})}{\hbar}$ $\quad v(q)$ ps $q$-ban.
4. $n$ db $\int$ frekv. és impulzus
5. konvergenciatényező $e^{i\omega_n \eta}$ ✓
6. $\forall$, csak vészecskeszámot tartalmazó hurokra $(\pm 1)(2s+1)$ $\nexists$ MT $\quad \exists$ MT

spin is megmarad $\exists$ MT

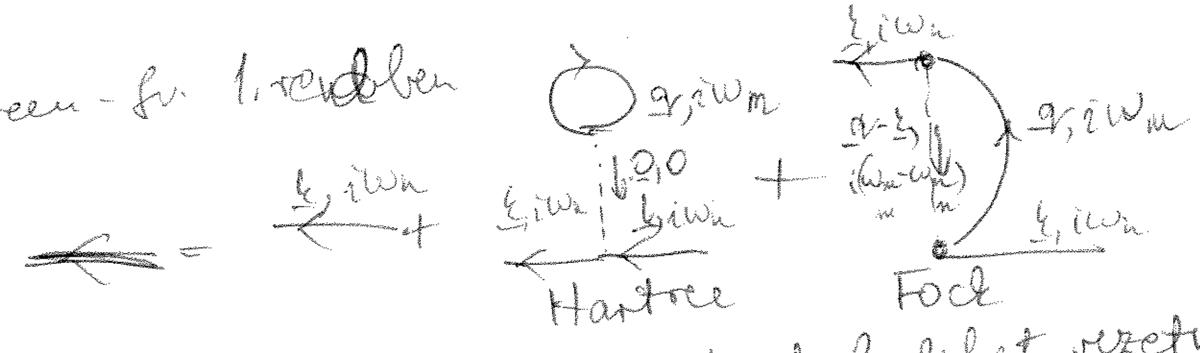
III. 11., SZ

SOKTEST 1.

7. $\forall$ frekire ~~kb~~ $\frac{1}{\beta\hbar}\sum_n$

8. $\forall$ hullámszámra $\frac{1}{V}\sum_{\underline{k}} \to \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$

Green-fv. 1. rendben




0. rend. H-t le lehet vezetni

1. rend

$$-G(\underline{k}, i\omega_n) = -G_0(\underline{k}, i\omega_n) + \frac{1}{\beta\hbar}\sum_m \frac{1}{V}\sum_{\underline{q}} \left\{ \left[G_0(\underline{k}, i\omega_n)\right]^2 \cdot \left(-\frac{1}{\hbar}\right) v(0) \left[-G_0(\underline{q}, i\omega_m)\right] e^{i\omega_m \eta} \right.$$

2 alsó $\omega_m$

$$\cdot(\pm 1)(2s+1) + \frac{1}{\beta\hbar}\sum_m \frac{1}{V}\sum_{\underline{k}} \left[-G_0(\underline{k}, i\omega_n)\right]^2 \left(-\frac{1}{\hbar}\right) v(\underline{q}-\underline{k}) - G_0(\underline{q}, i\omega_m) e^{i\omega_m \eta}$$

$$G(\underline{k}, i\omega_n) = G_0(\underline{k}, i\omega_n) \mp \left[G_0(\underline{k}, i\omega_n)\right]^2 \frac{1}{V\beta\hbar^2}\sum_{\underline{q}} \left[(\pm 1)(2s+1)v(0) + v(\underline{q}-\underline{k})\right] \cdot$$

$$\cdot \sum_m G_0(\underline{q}, i\omega_m) e^{i\omega_m \eta}$$

1 propagátorhurkos integrálok elvégzése.

frekvenciaösszeg elvégzése

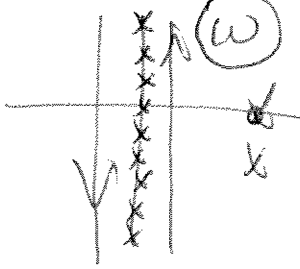
$\infty$ $\sum$ helyett körintegrál.

$$\sum_m G_0(\underline{q}, i\omega_m) e^{i\omega_m \eta} = \sum_m \frac{e^{i\omega_m \eta}}{i\omega_m - \frac{\varepsilon_{\underline{q}}-\mu}{\hbar}} =: \sum_m \frac{e^{i\omega_m \eta}}{i\omega_m - X}$$

$$\frac{\varepsilon_{\underline{q}}-\mu}{\hbar} =: X$$

$$\omega_n = \begin{cases} \dfrac{2\pi n}{\beta\hbar}, & \text{bozonra} \\ \dfrac{(2n+1)\pi}{\beta\hbar}, & \text{fermionra} \end{cases}$$

a) bozon




Cauchy-tételt használjuk: itt vannak ennek a fvnek pólusai, 1 a maradéka

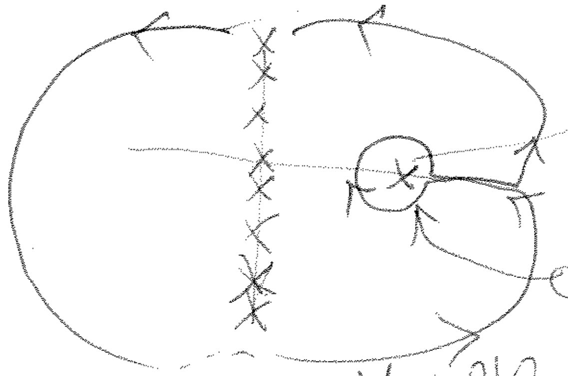
$z=x$-ben is van az $\int$-andusnak pólusa!!!

$$\sum_n \frac{e^{i\omega_n\eta}}{i\omega_n - x} = \frac{1}{2\pi i}\oint f(z)\,\frac{e^{z\eta}}{z-x} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} \frac{\beta\hbar}{e^{z\beta\hbar}-1}\,\frac{e^{z\eta}}{z-x} =$$

$$f(z) = \frac{\beta\hbar}{e^{\beta\hbar z}-1}$$

maradéka 1

a határokat, $\int$-ási utat $\infty$-be viszem ki




ki kell hagyni

2 görbére bomlik

= kritikus lépés: a belső kis kört összegezzük!!!

~~$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\beta\hbar}{e}$~~

eltűnik a járuléka a külső körnek, mert lecseng az integrandus a $\infty$-ben, de a belső megmarad!!!

$$= -\frac{\beta\hbar}{e^{\beta\hbar x}-1}\, e^{\eta x} \longrightarrow \frac{-\beta\hbar}{e^{\beta\hbar x}-1}$$

b) fermionok: $\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta\hbar}$

$$f(z) = \frac{-\beta\hbar}{e^{\beta\hbar z}+1}$$

HF elvégezni

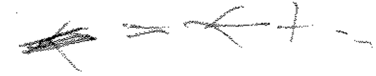
betöltési szám!!!

ezért $$\boxed{\sum_n G_0(q, i\omega_n)\, e^{i\omega_n\eta} = \frac{\mp\beta\hbar}{e^{\beta(\epsilon_q-\mu)}\mp 1}}$$

$$G(\underline{k}, i\omega_n) = G_0(\underline{k}, i\omega_n) \pm \frac{1}{\hbar} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left[ v(\underline{q}-\underline{k}) \pm (2s+1) v(0) \right] \frac{1}{e^{\beta(\xi_q - \mu)} \mp 1} \cdot \left[ G_0(\underline{k}, i\omega_n) \right]^2$$

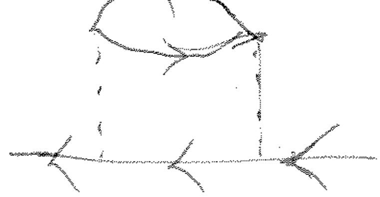
---

<u>Dyson-egyenlet</u>: sok tag bonyolítja a dolgunkat

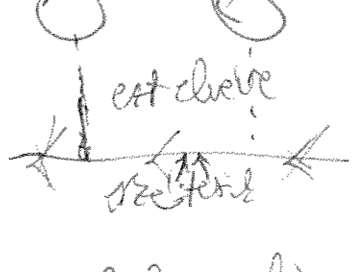


doboz: 1 vonal fut be, 1 fut ki) összes olyan 1 be- és 1 kimenő vonalhoz csatlakozó csatolt diagram járuléka, ami nem esik szét 1 db ~~vonal kis~~ részecskevonal elvágásával.


vagy



de ez már szétesik:



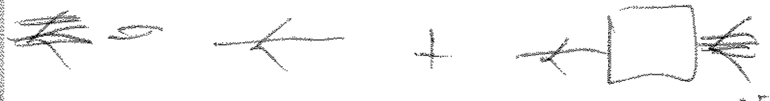

doboz: 1 részecske-irreducibilis diagram


$\hookrightarrow -\Sigma(\underline{k}, i\omega_n)$

ezért:

pontosan 1 helyről vehetek ki vonalat, hogy két részre essenek


ezzel átszámjeleztük a perturbációs sort.
ez egy mértani sor



eredeti sor.

Dyson-egy. képpel

$$-G(\underline{k}, i\omega_n) = -G_0(\;) + (-G_0)\cdot\left[-\Sigma(\underline{k}, i\omega_n)\right]\cdot -G(\underline{k}, i\omega_n)$$

$$G_0^{-1}(\underline{k}, i\omega_n) = i\omega_n - \frac{\varepsilon_k-\mu}{\hbar}$$

$$G = G_0 + G_0 \Sigma G$$

$$G(\underline{k}, i\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \frac{\varepsilon_k-\mu}{\hbar} - \Sigma(\underline{k}, i\omega_n)}$$

$\varepsilon_k - \cancel{\mu}$ mellett jelenik meg a sajátenergia:
fölöltözik a részecske!

---

III. 18, SZ

homogén rendszerre

$$N(T,V,\mu) = \mp(2s+1)\frac{V}{(2\pi)^3\beta\hbar}\int d^3\underline{k}\sum_n G(\underline{k}, i\omega_n)e^{i\omega_n\eta}$$

$$E(T,V,\mu) = \mp(2s+1)\frac{V}{(2\pi)^3\beta\hbar}\int d^3\underline{k}\sum_n \frac{1}{2}(i\hbar\omega_n + \varepsilon_k + \mu)G(\underline{k}, i\omega_n)e^{i\omega_n\eta}$$

deriválás

nagykan. pot.

$$\Omega(T,V,\mu) = \Omega_0(T,V,\mu) \mp \frac{V}{(2\pi)^3\beta\hbar}\int_0^1\frac{d\lambda}{\lambda}\int d^3\underline{k}\sum_n\frac{1}{2}(i\hbar\omega_n - \varepsilon_k + \mu)\cdot G_{(\lambda)}(\underline{k}, i\omega_n)e^{i\omega_n\eta}$$

szabad, statfiz

(22 o.)

$$G(\underline{k}, i\omega_n) = \left[i\omega_n - \frac{1}{\hbar}\left(\varepsilon_k - \mu + \hbar\Sigma(\underline{k}, i\omega_n)\right)\right]^{-1}$$

egyszerűsítni kezdjük

$$N(T,V,\mu) = \mp(2s+1)\frac{V}{(2\pi)^3\beta\hbar}\int d^3\underline{k}\sum_n\frac{e^{i\omega_n\eta}}{i\omega_n - \frac{1}{\hbar}\varepsilon_k - \mu + \hbar\Sigma(\underline{k}, i\omega_n)}$$

$$E(T,V,\mu) = \mp(2s+1)\frac{V}{(2\pi)^3\beta\hbar}\int d^3\underline{k}\sum_n\frac{\hbar e^{i\omega_n\eta}}{2}\frac{i\omega_n + \frac{1}{\hbar}(\varepsilon_k+\mu) - \cancel{\Sigma(\underline{k}, i\omega_n)} + \frac{2}{\hbar}\varepsilon_k + \Sigma(\underline{k}, i\omega_n)}{i\omega_n - \frac{1}{\hbar}\left[\varepsilon_k - \mu + \hbar\Sigma(\underline{k}, i\omega_n)\right]}$$

$$+ \cancel{\ldots}$$

$$= \mp(2s+1)\frac{V}{(2\pi)^3\beta\hbar}\int d^3k \sum_n \left[\frac{\hbar}{2} + \frac{\varepsilon_k + \frac{\hbar}{2}\Sigma(k, i\omega_n)}{i\omega_n - \frac{1}{\hbar}\varepsilon_k - \mu + \hbar\Sigma(k, i\omega_n)}\right] e^{i\omega_n \eta} =$$

HF: $\sum_n e^{i\omega_n \eta} = 0$ kontúr $\int$-lal vezethető le.

$$= \mp(2s+1)\frac{V}{(2\pi)^3\beta\hbar}\int d^3k \sum_n \left[\underbrace{\varepsilon_k}_{\text{teljes mozg. } E} + \underbrace{\frac{\hbar}{2}\Sigma(k, i\omega_n)}_{\text{kh-i tag}}\right] G(k, i\omega_n) e^{i\omega_n \eta}$$

levezetés a jegyzetben.

$$\Omega(T,V,\mu) = \Omega_0(T,V,\mu) \mp (2s+1)\frac{V}{(2\pi)^3\beta\hbar}\int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda}\int d^3k \sum_n \frac{\hbar}{2}\Sigma^{(\lambda)}(k, i\omega_n) G^{(\lambda)}(k, i\omega_n) \cdot e^{i\omega_n \eta}$$

Elektrongáz

$e^- - e^-$ kh., iontörzsekkel való kh-t elhanyagoljuk.

homogén pozitív háttér: Zselémodell

homogén háttér: $+Ne$

$N$ db $e^-$, $Ne$ töltés, ellent. homogén háttér

$$H = \underbrace{\sum_{l=1}^{N} \frac{p_l^2}{2m}}_{\text{teljes 1 r.}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{\substack{k,l \\ k\neq l}} v(r_k - r_l)}_{\text{t. 2 r}} - n\underbrace{\sum_{k=1}^{N}\int d^3r\, v(r - r_k)}_{\text{t. 1 r.-op}} + \underbrace{\frac{n^2}{2}\int d^3r\, d^3r'\, v(r - r')}_{\text{háttér önkölcsönhatása (konst.)}}$$

$v = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{e_0^2}{r}$, $n = \frac{N}{V}$

$V = L^3$, síkhullámbázis ~~t~~ töltés miatt kiesik a $\infty$ tag.

$$T = \sum_{k,s} \varepsilon_k a^+_{k,s} a_{k,s}$$

$$\hat{\psi} = \sum_{k,s} a_{k,s} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{V}} \chi_s(s)$$

$V_\alpha(r) = \frac{e_0^2}{r} e^{-\alpha r}$ $\qquad V_0(r) = \frac{e_0^2}{r}$

$$v_\alpha(q) = \int d^3r \, \frac{e_0^2}{r} e^{-\alpha r} e^{-iqr} = \frac{4\pi e_0^2}{q^2+\alpha^2}$$

$$H_\alpha = \sum_{k,s} \varepsilon_k a^+_{ks} a_{ks} + \frac{1}{2V} \sum_{k k' q s s'} v_\alpha(q)\, a^+_{k+q,s}\, a^+_{k'-q,s'}\, a_{k's'}\, a_{ks} -$$

$$- n\, v_\alpha(0) \underbrace{\sum_{ks} a^+_{ks} a_{ks}}_{N = nV} + \frac{n^2 V}{2} v_\alpha(0)$$

háttér

$\frac{n^2 V}{2} V_\alpha(0)$

$e^- - e^-$ kh.

$$\frac{1}{2V} \sum_{kk'q} v_\alpha(q)\, a^+_{k+q,s}\, a^+_{k'-q,s'}\, a_{k's'}\, a_{ks} = \sum_{\substack{k,k',q \\ q \neq 0}} \frac{1}{2V} v_\alpha(q)\, a^+_{k+q,s}\, a^+_{k'-q,s'} \ldots$$

$$+ \frac{1}{2V} \sum_{k,k'} v_\alpha(0)\, \underbrace{a^+_{ks}\, a^+_{k's'}\, a_{k's'}\, a_{ks}}$$

$(\underbrace{a^+_{ks} a_{ks}}_{N} \underbrace{a^+_{k's'} a_{k's'}}_{N} - a^+_{ks} a_{k's'} \delta_{kk'}\delta_{ss'})$ felcsere - kom.

$N$

$\frac{n^2 V}{2} v_\alpha(0) \ldots - \frac{n}{2} v_\alpha(0)$ elhagyjuk, mert a másik tagnál kisebb tart $\infty$-hez!

kiejti ezt a divergens tagot | nem extenzív tag

HF $v_0(0) = \frac{3}{2} e_0^2 \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} V^{2/3}$

végül $\alpha \to 0$

$$H_0 = \sum_{k,s} \varepsilon_k a^+_{ks} a_{ks} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k,k',q \\ q \neq 0}} v_0(q)\, a^+_{k+q,s}\, a^+_{k'-q,s'}\, a_{k's'}\, a_{ks}$$

1441. 10. 8. 15?? SOKTEST 1.

tanulság: 1. $q=0$ limesnél a kl.-ból

minden Hartree-diagram

2. perturbációs. paraméter $e_0^2$

Termodinamikai mennyiségek számolása

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{V}{\beta} \int \frac{d\lambda}{\lambda} \int d^3k \sum_n \Sigma^{(\lambda)}(k, \omega_n) G_{(\lambda)}(k, i\omega_n) e^{i\omega_n}$$

fermionok, spin $= \frac{1}{2}$

$G_0(k, i\omega_n) + G_0(k, i\omega_n) \cdot \Sigma^{(\lambda)}(k, i\omega_n) G_0(k, i\omega_n) + \dots$

$e_0^2$-es rend: $\Sigma$-ban elég venni nyitott $G_0$

$\Sigma^{(1)} = \Sigma^{(1)}_{HF}$ $O(e_0^2)$ $O(e_0^4)$

$\Omega = \Omega_0 + \Omega_{HF} + \Omega_{kor}$ korreláció

magasabb rendben divergens gráfok

kis és nagy ordó $\lim O(x) = x$

de $\lim_{x \to 0} \frac{O(x)}{x} =$ áll., véges

$\lim o(x) = 0$ kisordó

$\lim \frac{o(x)}{x} = 0$ $\lim \frac{o(x)}{x} = 0$

$\Omega_{kor} \sim o(e_0^4)$

$O(e_0^4) < o(e_0^2) \lessgtr O(e_0^2)$

47

nagykan: $\mu \xrightarrow[\text{áll.}]{} N$ invertálni kell

$$N(TV\mu) = -\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\Big|_{TV} \to N(\mu) \to \mu(N)$$

perturbációs sor

$$\mu = \mu_0 + \mu_1 + \mu_2$$

$\mathcal{O}(\varepsilon_0^2)$

ideális gáz

$$N = -\frac{\partial\Omega_0}{\partial\mu}\Big|_{TV\mu_0}$$

ismert

$$N = -\frac{\partial\Omega_0}{\partial\mu} - \frac{\partial\Omega_{HF}}{\partial\mu} - \frac{\partial\Omega_{corr}}{\partial\mu}\ \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$\mathcal{O}(\varepsilon_0)$ $\mathcal{O}(\varepsilon_0^2)$

N Taylor sorba fejtése

$$N(\mu) = N(\mu_0) + \frac{\partial N}{\partial\mu}\Big|(\mu_1+\mu_2) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}(\mu_1+\mu_2)^2 + \dots$$

$$N = -\frac{\partial\Omega_0}{\partial\mu} - \frac{\partial^2\Omega_0}{\partial\mu^2}\Big|\mu_1 - \frac{\partial^2\Omega_0}{\partial\mu^2}\mu_2 + \text{ezeket is Taylor-sorba fejtjük}$$

$N$ $\mathcal{O}(\varepsilon_0^2)$ közép tag ~~$\mathcal{O}(\varepsilon_0^2)$~~

elhanyagolható

$$-\frac{\partial\Omega_{HF}}{\partial\mu}\Big|_{\mu=\mu_0}$$

$$\Rightarrow \mu_1 = -\frac{\frac{\partial\Omega_{HF}}{\partial\mu}\Big|_{\mu_0}}{\frac{\partial^2\Omega_0}{\partial\mu^2}\Big|_{\mu_0}} \Rightarrow \text{magasabb járulékok}$$

III. 18., SZ

SOKTEST 1.

Szabadenergia

ERT is sorbafejtjük.

$$F(T,V,N) = \big(\Omega(T,V,\mu)+\mu N\big)_{\mu=\mu(T,V,N)}$$

$$F = \underset{O(1)}{\Omega_0(\mu_0)} + \underbrace{\frac{\partial \Omega_0}{\partial \mu}\Big|_{\mu_0}(\mu_1+\mu_2)}_{O(e_0^2)} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial \mu^2}\underset{O(e_0^4)}{(\mu_1+\mu_2)^2} + \underset{O(e_0^2)}{\Omega_{HF}(\mu_0)} + \frac{\partial \Omega_{HF}}{\partial \mu}(\mu_1+\mu_2) +$$

$$+ \underset{O(e_0^2)}{\Omega_{corr}(\mu_0)} + \underset{O(e_0^4)}{\frac{\partial \Omega_{corr}}{\partial \mu}(\mu_1+\mu_2)} + \underset{O(1)}{\mu_0 N} + \underbrace{\mu_1 N + \mu_2 N}_{O(e_0^2),\ O(e_0^2)} =$$

$O(e_0^2)$ pontosságig

$\mu = \mu_0(T,V,N)$ fv.

$$F(T,V,N) = \Omega_0(T,V,\mu_0) + \mu N + \Omega_{HF}(T,V,\mu) + \Omega_{corr}(T,V,\mu) + \ldots$$

$$\Omega^{(1)}_{corr}(T,V,\mu)$$

$$\text{tf.: } \Omega_{corr} = \underset{O(e_0^2)}{\Omega^{(1)}_{corr}} + \underset{O(e_0^4)}{\Omega^{(2)}_{corr}}$$

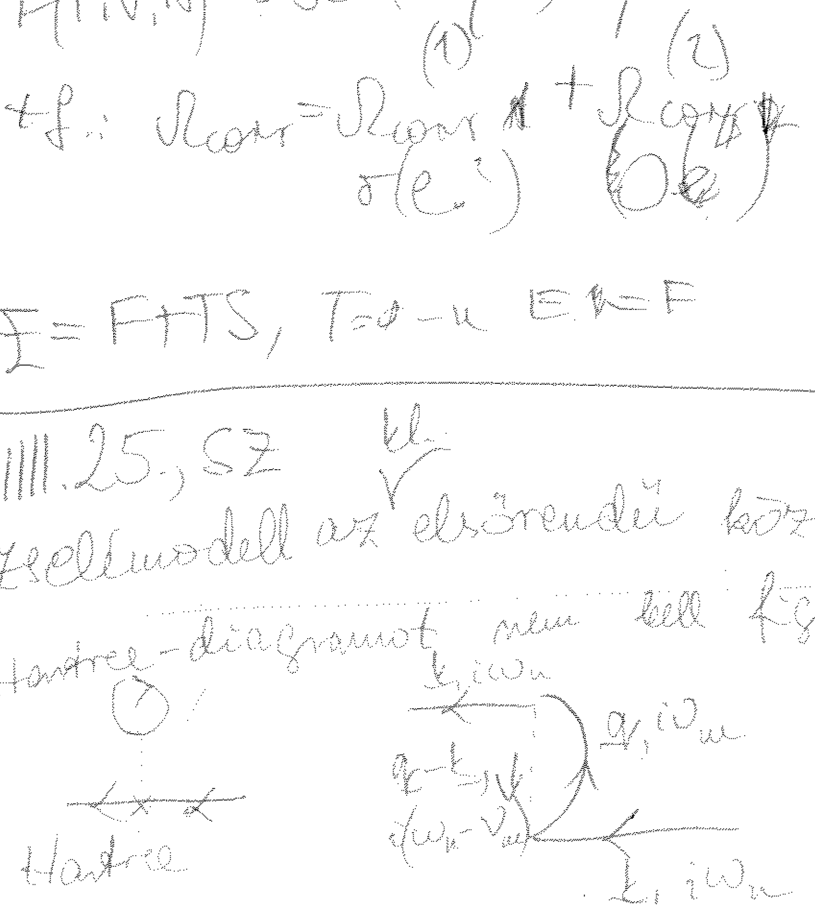
$E = F + TS$, $T=0$-n $E = F$

---

III. 25., SZ

Elektrongáz-modell az elsőrendű közelítésben: Hartree-Fock-közelítés.

Hartree-diagramot nem kell figyelembe venni.




$v(q) \longrightarrow \lambda v(q)$ sajátenergia kell: $\Sigma^{(1)}_F =$

$$\Sigma^{(\lambda)}_F = -\frac{\lambda}{\hbar}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\underbrace{\left[\frac{1}{\beta\hbar}\sum_n G_0(q, i\nu_n)\, e^{i\nu_n\eta}\right]}_{n^{(0)}(q)\ \text{betöltési szám}} v(q-k)$$

Kivel fogl.? Kikkel kapcs.? Kit. a kut. cs. tagjai? Milyen téma adott? Hová lehet menni válé?

$$\Sigma^{(\lambda)}_F = -\frac{\lambda}{\hbar}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, v(q-k)\, n^{(0)}(q)$$

$$\Omega_{HF} = V\hbar\int\frac{d\lambda}{\lambda}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\Sigma^{(\lambda)}_F(k)\, n^{(0)}(k) = -V\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\, v(q-k)\, n^{(0)}(q)\, n^{(0)}(k)$$

1. rendben egyszerűsítünk $\lambda$-val.

numerikusan megoldható

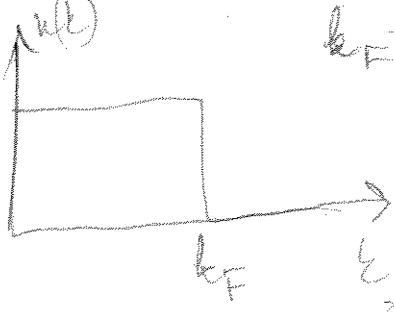
2 HATÁRESET

$T=0$: $a_0 = \frac{\hbar^2}{me_0^2}$ Bohr-sugár $\quad\Big|\quad r_0 = \left(\frac{3}{4\pi n}\right)^{1/3}$ átlagos e⁻–e⁻ táv

Fermi-hullámszám:

$$k_F = \left(3\pi^2 n\right)^{1/3}$$

$r_s = \frac{r_0}{a_0}$ dimenziótlan távolság



$$r_s = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{1/3}\frac{1}{k_F a_0} \approx \frac{1{,}9192}{k_F a_0}$$

perturbáció: $e_0^2$ hatványaival megy, $r_s$-sel megy a sor

(fémekre $r_s \sim 1-10$)

energia: atomi egységekben.

$$1\,\text{ryd} = \frac{\hbar^2}{2ma_0^2} = \frac{e_0^2}{2a_0} \approx 13{,}6\ \text{eV}$$

Szabad gáz kémiai potenciálja: $\mu_0 = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = (k_F a_0)^2\frac{\hbar^2}{2ma_0^2} =$

$$= \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3}\frac{1}{r_s^2}\ [\text{ryd}]$$

termodin. potenciálja

vö. 9. nagykan.

$$\Omega_0(0, V, \mu_0) = -\frac{2}{15}V\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\mu_0^{5/2} = -\frac{2}{5}N(k_F a_0)^2\,[\text{ryd}] = -\frac{2}{5}N(k_F a_0)^2\left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3}\frac{1}{r_s^2}$$

alapállapoti E

$$\frac{E_K}{N} = \frac{\Omega_0 + \mu_0 N}{N} = \frac{3}{5}\left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} \frac{1}{r_s^2} \; [ryd]$$

Miért függ $e_0^2$-től? Mert rydbergben mérjük az energiát!

Fock-tag kiértékelve

$$\hbar \Sigma_F(k) = -\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} v(q-k)\, n^{(0)}(q) = -\frac{4\pi e_0^2}{(2\pi)^3} \int d^3q \frac{n^{(0)}(q)}{q^2+k^2-2kq\cos(\theta)} =$$

$$= -\frac{e_0^2}{2\pi k} \int_0^\infty dq\, q \ln\left[\left(\frac{q+k}{q-k}\right)^2\right] n^{(0)}(q) = -\frac{e_0^2 k}{2\pi} \int_0^{k_F/k} dy\, y \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^2 =$$

$y = \frac{q}{k}$ $\quad dq = k\, dy$

0 hőmérsékleten $n^{(0)}(q)$ csak $k_F$-ig $\infty \to \frac{k_F}{k}$ változócsere $k_F \to \frac{k_F}{k}$

$$= -\frac{e_0^2}{2\pi} \left\{ \frac{k_F^2 - k^2}{2k} \ln\left[\left(\frac{k_F+k}{k_F-k}\right)^2\right] + 2k_F \right\}$$

$$\Omega_{HF}(T, V, \mu_0) = V \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk\, k^2\, n^{(0)}(k)\, \hbar\Sigma_F(k) = \qquad y = \frac{k}{k_F}$$

kihasználom

$$= -\frac{2Ve_0^2 k_F^4}{(2\pi)^3} \int_0^1 \left[\underbrace{(1-y^2)}_{g}\, \underbrace{y \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)}_{f'} + 2y^2\right] dy = -\frac{2Ve_0^2 k_F^4}{(2\pi)^3}$$

$= 1$

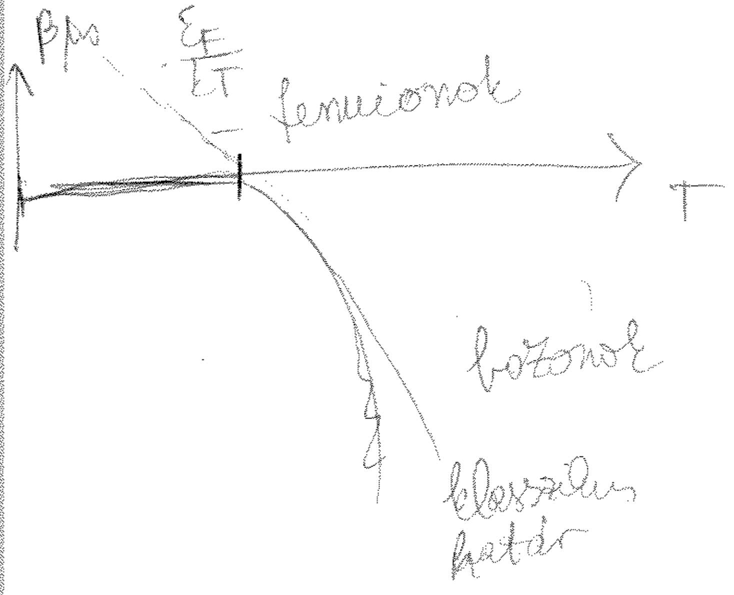
parc. int. -sal megoldható

$$\frac{E_{HF}}{N} = \frac{\Omega_{HF}}{N} = -\frac{3}{2\pi}\left(\frac{9\pi}{4}\right)^{1/3} \frac{1}{r_s} \; [ryd]$$

e fölött: korrelációs E

$$\boxed{\frac{E}{N} = \underbrace{\frac{2{,}2099}{r_s^2}}_{\text{kinetikus E}} - \frac{0{,}9163}{r_s} \; [ryd]}$$

## klasszikus határeset $(T \to \infty)$ $\quad -\beta\mu_0 \gg 1$




$$\Omega_0 = -kT(2s+1)\sum_k \ln\left[1+e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu_0)}\right] =$$

$$e^{\beta\mu_0} \ll 1$$

$$= -kT(2s+1)\sum_k e^{-\beta\varepsilon_k} \cdot e^{\beta\mu_0}$$

átírjuk ∫-be

$$= -kT\,\frac{(2s+1)V}{\lambda_B^3}\, e^{\beta\mu_0}$$

$$\lambda_B = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{m kT}}$$

teljes részecskeszám:

$$N = (2s+1)\sum_k n^{(0)}(k) = \frac{(2s+1)Ve^{\beta\mu_0}}{\lambda_B^3}$$

$$n^{(0)}(k) = e^{\beta\mu_0}e^{-\beta\varepsilon_k}$$

$$\Omega = -pV = -kTN \Rightarrow pV = NkT \checkmark$$

---

$$\Omega_{HF}(T,V,\mu_0) = -\frac{V(2s+1)}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,U(q-k)\,n^{(0)}(q)\,n^{(0)}(k) =$$

2db Gauss-∫

$$= -\frac{N}{2}\,\frac{e_0^2}{\pi^3\lambda_B}\,e^{\beta\mu_0}\underbrace{\int d^3x\,d^3y\,\frac{e^{-x^2-y^2}}{(x-y)^2}}_{\text{szám}}$$

0 tart 0-hoz!!!

$x = q\lambda_B$

$y = k\lambda_B$

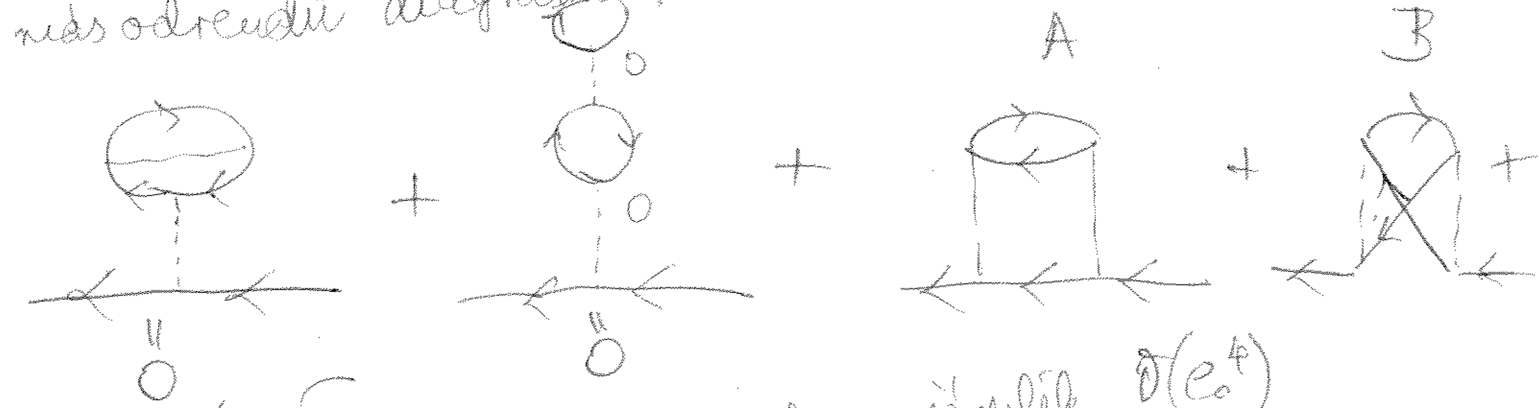
magasabb rendben kapunk korrekciókat!!!

III. 25, SZ

SOKTEST 1.

## Korrelációs E számolása

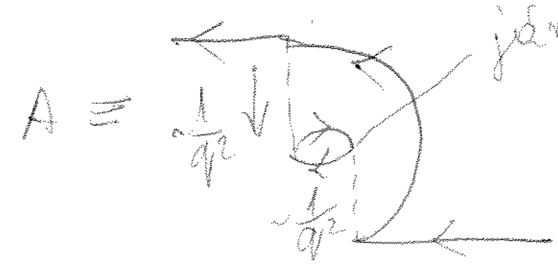
másodrendű diagramok:



B, C: véges járulék $O(e_0^4)$

A: $\infty$ járulékot ad

járuléka ko véges része kívül

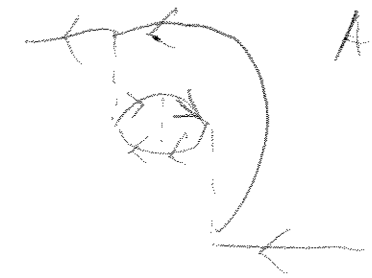


$$\int d^3q \, \frac{1}{q^4}(\,) = \int dq\, q^2 \frac{1}{q^4} = \int \frac{dq}{q^2} = \infty$$

mert határszámolás $1/q$-val tart 0-hoz.

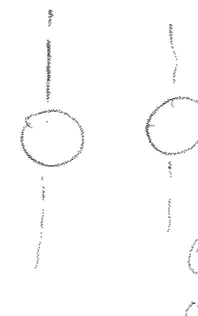
Pontosabb számításból $\ln(q)$-val száll el

harmadrend:



A-hoz hasonlóan divergál

és ezt folytathatnók

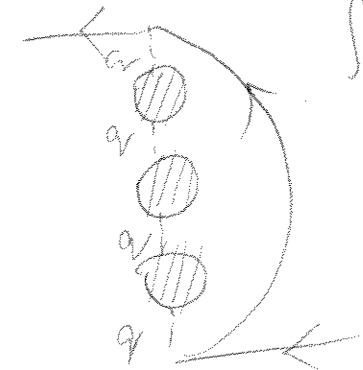


polarizációs fv.: azon diagramok összege, mely 2 Ele vonalhoz csatlakozik és nem esik szét két részre egy Ele vonal elvágásával (mint a sajátenergia)


$=: \hbar\Pi(q, i\omega_n)$


1 pol. diag.-ból rakható ki

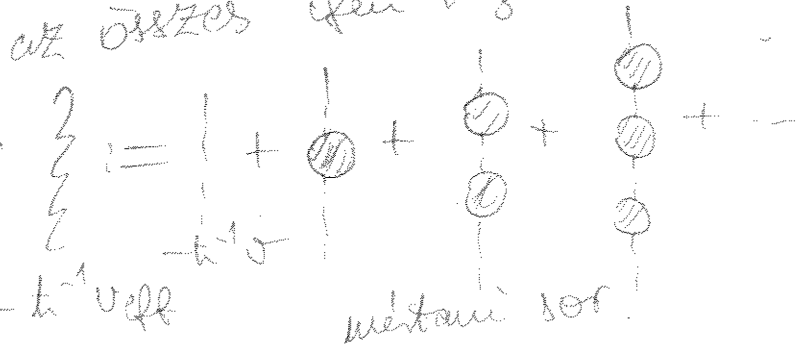
ha ismételjük:



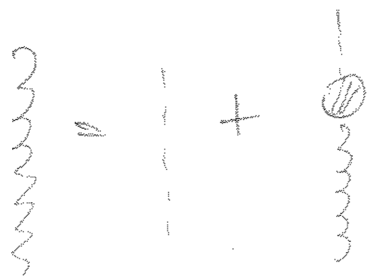

$\int dq\, q^2 \frac{1}{q^6}$
erősebb divergencia

– vegyük egybe az összes ilyen tagot!

effektív kölcs.h.:




röviden:



$$v_{eff}(q, i\omega_n) = v(q) + v(q)\Pi(q, i\omega_n)\, v_{eff}(q, i\omega_n)$$

$$v_{eff}(q, i\omega_n) = \frac{v(q)}{1 - v(q)\Pi(q, i\omega_n)} = \frac{v(\underline{q})}{1 - v(\underline{q})\Pi(\underline{q}, i\omega_n)}$$

– tehát ezt számoljuk ki:

végül fog adni!
( Fock-tag + A + ... )
53.5

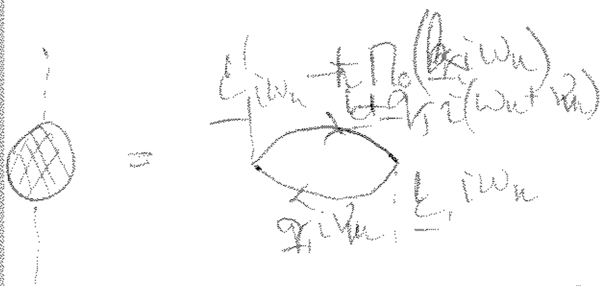
Rutherford-szórás: klasszikusan jó, kvantumosan 1. rendben is jó, de magasabb rendben tönkremegy.

III. 25., SZ — SOKTEST 1.

Olyan ez mint elektrosztatikában a dielektromos fv.

Dielektromos függvény: $\varepsilon(\underline{q}, i\omega_n) = 1 - v(\underline{q})\,\Pi(\underline{q}, i\omega_n)$

$\Pi$-t legalacsonyabb rendben számolom: $\Pi(\underline{q}, i\omega_n) \approx \Pi_0(\underline{q}, i\omega_n)$




$$\Pi_0(\underline{k}, i\omega_n) = -\frac{1}{\hbar}\underbrace{\left[-2(s+1)\right]}_{\text{fermionhurok}}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\beta\hbar}\sum_m G_0(\underline{q}, i\nu_m)\cdot G_0(\underline{k}+\underline{q}, i(\omega_n+\nu_m))$$

$\cancel{\frac{1}{\hbar}\,2(2s+1)}$ $s=\frac{1}{2}$

$$= \frac{2}{\beta\hbar^2}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\sum_m \frac{1}{i\nu_m - \hbar^{-1}(\varepsilon_{\underline{q}}-\mu)}\;\frac{1}{i(\omega_n+\nu_m) - \hbar^{-1}(\varepsilon_{\underline{k}+\underline{q}}-\mu)} =$$

parciális törtekre bontás

$$= \frac{2}{\beta\hbar^2}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{i\omega_n - \hbar^{-1}(\varepsilon_{\underline{k}+\underline{q}} - \varepsilon_{\underline{q}})}\sum_m e^{i\nu_m 0^+}\left[\frac{1}{i\nu_m - \hbar^{-1}(\varepsilon_{\underline{q}}-\mu)} - \frac{1}{i(\omega_n+\nu_m) - \hbar^{-1}(\varepsilon_{\underline{k}+\underline{q}}-\mu)}\right]$$

konvergenciafaktor az 1 propagátoros összegek miatt. (Nem kell föltétlenül beírni.)

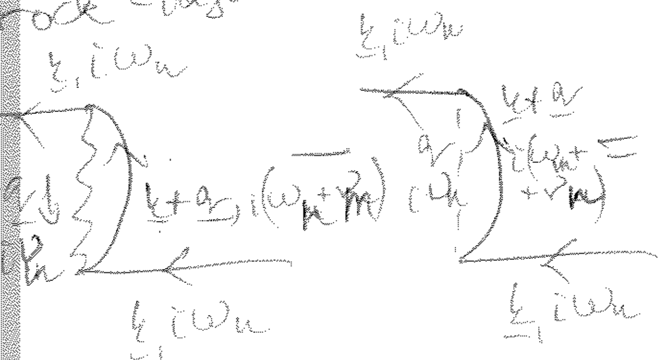
$$\beta\hbar\left[n^{(0)}(\underline{q}) - n^{(0)}(\underline{k}+\underline{q})\right]$$

$\nu_m$: fermion, $\omega_n$: bozon } frekvencia

$$\Pi_0(\underline{k}, i\omega_n) = \boxed{-2\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,\frac{n^{(0)}(\underline{k}+\underline{q}) - n^{(0)}(\underline{q})}{i\hbar\omega_n - (\varepsilon_{\underline{k}+\underline{q}} - \varepsilon_{\underline{q}})} = \Pi_0(\underline{k}, i\omega_n)}$$

Korrelációs energia

Összegezzük a buboréksort, de kivonjuk a már kiszámolt Fock-tagot.



$= -\hbar\, \Sigma_{korr}(\underline{k}, i\omega_n)$

$$\Sigma_{korr}(\underline{k}, i\omega_n) = -\frac{1}{\hbar} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta\hbar} \sum_m \left[ v_{eff}(\underline{q}, i\nu_m) - v(\underline{q}) \right] G_0(\underline{k}+\underline{q}, i(\omega_n+\nu_m))$$

V. 2, Sz

vizsga

V. 21 – VI. 2.: csak Szimai, mert az államvizsgára megy.

$$\Omega^{(1)}_{korr} = \frac{V}{\beta} \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sum_n \Sigma^{(\lambda)}(\underline{k}, i\omega_n)\, G_0(\underline{k}, i\omega_n) =$$

$$v \to \lambda \cdot v$$

$$= -V \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta\hbar} \sum_m \left[ v^{(\lambda)}_{eff}(\underline{q}, i\nu_m) - \lambda v(\underline{q}) \right] \underbrace{\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta\hbar} \sum_n G_0(\underline{k}+\underline{q}, i(\omega_n+\nu_m))\, G_0(\underline{k}, i\omega_n)}_{\frac{\hbar}{2} \Pi_0(\underline{q}, i\nu_m)}$$

$$= \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda}\, \lambda v(\underline{q})\, \Pi_\lambda(\underline{q}, i\nu_m) \overset{\text{elvégezhető}}{=} v(\underline{q}) \Pi_{(0)}(\underline{q}, i\nu_m)$$

$$\int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{\lambda v(\underline{q}) \Pi_{(0)}(\underline{q}, i\nu_m)}{1 - \lambda v(\underline{q}) \Pi(\underline{q}, i\nu_m)} = -\ln\left[1 - v(\underline{q}) \cdot \Pi_0(\underline{q}, i\nu_m)\right]$$

szám. a nev. deriváltja (−1)-gyel szorozva

V-2, SZ  SORTEST 1.

$$\Omega^{(1)}_{corr} = \frac{V\hbar}{2}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\beta\hbar}\sum_n\left\{\ln\left[1-v(q)\Pi_{(0)}(q,i\nu_n)\right]+v(q)\Pi_{(0)}(q,i\nu_n)\right\}$$

– azért nem működött a perturbációszámítás, mert az ln fv-t kellett volna sorba fejteni kis q-ra, ami elszáll.

$\boxed{T=0\text{-ban}}$ – Fermi-eloszlás egy lépcső!

– frekvenciaösszeg bekúszása

$\nu_n = \frac{2n\pi}{\beta\hbar}$  $\frac{1}{\beta\hbar}\sum_n \to \frac{1}{\Delta\nu\beta\hbar}\sum_n \Delta\nu_n \to \frac{1}{\beta\hbar}\int\frac{d\omega}{2\pi}$

$$\Omega^{(1)}_{corr} = \frac{1}{2}\frac{V\hbar}{(2\pi)^4}\int d^3q\int_{-\infty}^{+\infty}d\nu\left\{\ln\left[1-v(q)\Pi_0(q,i\nu)\right]+v(q)\Pi_0(q,i\nu)\right\}$$

$$\Pi_{(0)}(k,i\omega) = -2\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\left(\frac{n^{(0)}(k+q)-n^{(0)}(q)}{i\hbar\omega-(\varepsilon_{k+q}-\varepsilon_q)}\right)=$$

$q' = k+q$ cser az 1. tagban

$$=-2\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}n^{(0)}(q)\left[\frac{1}{i\hbar\omega-(\varepsilon_q-\varepsilon_{q-k})}-\frac{1}{i\hbar\omega-(\varepsilon_{k+q}-\varepsilon_q)}\right]=\dots=$$

$$=-\frac{m}{2\pi\hbar^2k}\int_0^{k_F}dq\,q\left\{\ln\left(\frac{\varepsilon_k+\frac{\hbar^2}{m}qk+i\hbar\omega}{\varepsilon_k-\frac{\hbar^2}{m}qk+i\hbar\omega}\right)+\ln\left(\frac{\varepsilon_k+\frac{\hbar^2}{m}qk-i\hbar\omega}{\varepsilon_k-\frac{\hbar^2}{m}qk-i\hbar\omega}\right)\right\}=$$

$\int d\vartheta\cos(\vartheta)$ hoz egy $1/q$-t.

parc. int.

$$=-\frac{mk_F}{2\pi^2\hbar^2}\left\{1+\frac{m^2}{2\hbar^4k^3k_F}\left[4\varepsilon_k\varepsilon_F-(\varepsilon_k+i\hbar\omega)^2\right]\ln\left(\frac{\varepsilon_k+i\hbar\omega+\hbar v_Fk}{\varepsilon_k+i\hbar\omega-\hbar v_Fk}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{m^2}{2\hbar^4k^3k_F}\left[4\varepsilon_k\varepsilon_F-(\varepsilon_k-i\hbar\omega)^2\right]\ln\left(\frac{\varepsilon_k-i\hbar\omega+\hbar v_Fk}{\varepsilon_k-i\hbar\omega-\hbar v_Fk}\right)\right.$$

$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2k_F^2}{2m}$  $v_F = \frac{\hbar k_F}{m}$ !!!

a) statikus határeset: $\omega = 0$

$$\Pi_{(0)}(k, \omega=0) = -\frac{mk_F}{\hbar^2\pi^2}\left[\frac{1}{2} + \frac{k_F}{2k}\left(1-\frac{k^2}{4k_F^2}\right)\ln\left|\frac{k+2k_F}{k-2k_F}\right|\right]$$

b) hosszúhullámú határeset: $k \ll k_F$

$$y := \frac{k}{k_F} \ll 1, \quad \zeta := \frac{\omega}{v_F k} = \frac{\omega m}{\hbar k k_F}$$

$$\frac{m^2}{2\hbar^4 k^3 k_F} \cdot 4\varepsilon_k \varepsilon_F = \frac{1}{2}\frac{1}{y}$$

$$\frac{m^2}{2\hbar^4 k^3 k_F}\left(\varepsilon_k + i\hbar\omega\right)^2 = \frac{1}{8}y + \frac{1}{2}(i\zeta)^2\frac{1}{y} + \frac{i\zeta}{2}$$

$$\frac{m^2}{2\hbar^4 k^3 k_F}\left(\varepsilon_k - i\hbar\omega\right)^2 = \frac{1}{8}y + \frac{1}{2}(i\zeta)^2\frac{1}{y} - \frac{i\zeta}{2}$$

és a logaritmusokat sorbafejtjük

$$\ln\left(\frac{\varepsilon_k + i\hbar\omega + \hbar v_F k}{\varepsilon_k + i\hbar\omega - \hbar v_F k}\right) \stackrel{2.\,\text{r.}}{=} \ln\left(\frac{i\zeta+1}{i\zeta-1}\right) - y\frac{1}{(i\zeta)^2-1} + O(y^2)$$

$$\ln\left(\frac{\varepsilon_k - i\hbar\omega + \hbar v_F k}{\varepsilon_k - i\hbar\omega - \hbar v_F k}\right) = -\ln\left(\frac{i\zeta+1}{i\zeta-1}\right) - y\frac{1}{(i\zeta)^2-1} + O(y^2)$$

ezekkel:

$$\Pi_{(0)}(k, i\omega) = -\frac{mk_F}{\pi^2\hbar^2}\left[1 + \frac{i\zeta}{2}\ln\left(\frac{1+i\frac{1}{\zeta}}{1-i\frac{1}{\zeta}}\right)\right] = \boxed{-\frac{mk_F}{\pi^2\hbar^2}\left[1-\zeta\,\overset{\text{arctg}}{\text{arctg}}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]} + O(y)$$

$$\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right) = \text{arctg}(x)\ ✓$$

$$1-\zeta\,\text{arctg}\left(\frac{1}{\zeta}\right) =: R(\zeta)$$

V. 24. 52

SOKTEST 1

általában a buborékra:

$$\Pi_{(0)}(\underline{k}, i\omega) = -\frac{mk_F}{\hbar^2 \hbar^2} K(y, z) \qquad K(y,z) \xrightarrow[y \ll 1]{} R(z)$$

$$v(q)\,\Pi_{(0)}(\underline{q}, i\omega) = -\frac{k_{TF}^2}{q^2} K(y, z)$$

$$k_{TF}^2 = \frac{4e_0^2 m k_F}{\hbar^2 \pi}$$ Thomas–Fermi hullámszám

mel után

$$\Omega_{(1)}^{corr} = \frac{1}{2}\frac{V\hbar^2 k_F}{(2\pi)^4 m} 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^\infty dq\, q^3 \left\{ \ln\left[1 + \frac{k_{TF}^2}{q^2} K(y,z)\right] - \frac{k_{TF}^2}{q^2} K(y,z) \right\}$$

$(*)$ $\quad y = \frac{q}{k_F}$

$$\int_0^\infty dq = \underbrace{\int_0^{q_c} dq + \int_{q_c}^{k_F} dq}_{K \to R \text{ megengedett}} + \int_{k_F}^\infty dq \quad \mathcal{O}(e_0^4) \text{ ln sorbafejthető}$$

$q_c$: $\frac{k_{TF}^2}{q_c^2} R(z) = 1$ a meghatározása

$$q_c^2 = k_{TF}^2 R(z)$$

a 2. $\int$ a legnagyobb számértékű. nem fejthető sorba az ln, de

$\int$ legelső tagjában nem törődünk vele.

$$\Omega_{coor}^{(1)} = -\frac{1}{4}\frac{V\hbar^2 k_F}{(2\pi)^4 m} 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{q_c}^{k_F} dq \frac{k_{TF}^4}{q} R^2(z) =$$

ln sornak 2. rendje marad életben, az első elfűnik

$$= \frac{V\hbar^2 k_F k_{TF}^4 \pi}{(2\pi)^4 m} \ln\left(\frac{k_{TF}}{k_F}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} dz\, R^2(z)$$

$\frac{2}{3}\pi(1 - \ln(2))$ $\quad \operatorname{arctg}^2(x)$-et $\int$-ni

$$\frac{k_{TF}^2}{k_F^2} = \frac{\frac{4e_0^2 m k_F}{\hbar^2 \pi}}{k_F^2} = \frac{4}{\pi}\frac{1}{a_0 k_F} \sim r_s \qquad \ln(r_s)$$ $\Omega$-ban: furcsa (felborította a sort, mert a $(*)$-os (–t nem szabad elhanyagolni $q$-ra sorba fejteni!!)

$$\frac{\Omega^{(1)}_{corr}}{N} = \frac{2}{\pi^2}\left[1-\ln(2)\right]\cdot\ln(r_s) \quad [ryd]$$

$$\frac{E}{N} = \frac{2{,}21}{r_s^2} - \frac{0{,}916}{r_s} + 0{,}0622\,\ln(r_s) \quad [ryd]$$

$\frac{2{,}21}{r_s^2}$: $O(e_0^0)$ szabad

$\frac{0{,}916}{r_s}$: $O(e_0^2)$ Fock-tag

$0{,}0622\,\ln(r_s)$: korreláció $e_0^4 \ln(e_0^2) = o(e_0^2) \neq (e_0^4)$

kicsi $r_s$-re jó ez, fémeknél $r_s \approx 1{,}5-8$ közötti, nem jó

másik határeset: Wigner-kristály, nagy E-t kayapolják el.

interpolálunk a 2 határ között az $r_s$ nagy értékeire

vezetési jelenségeknél.

klasszikus határeset: $-\beta\mu_0 \gg 1 \Rightarrow n_0(\underline{q}) = e^{\beta\mu} e^{-\beta\varepsilon_q}$ Boltzmann-elo.

$T \to \infty$

$$\Pi_0(\underline{k}, i\omega_n) = -2\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{n_0(\underline{k}+\underline{q}) - n_0(\underline{q})}{i\hbar\omega_n - (\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_q)} \qquad \omega_n = \frac{2n\pi}{\beta\hbar}$$

F: $\Pi_0(\underline{k}, i\omega_n) = \Pi_0(\underline{k}, -i\omega_n)$

$\omega_n \sim T \quad \Pi_0(\underline{k}, i\omega_n) \sim \frac{1}{T}$, ha $n \neq 0 \Rightarrow n = 0$ is elég!!

$$\Pi_0(\underline{k}, 0) = 2\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{n_0(\underline{k}+\underline{q}) - n_0(\underline{q})}{\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_q} = \quad \text{új változó } q+k$$

vezető rend

$$= 2\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\, n_0(q)\left(\frac{1}{\varepsilon_q - \varepsilon_{q-k}} - \frac{1}{\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_q}\right) = \ldots = \frac{2}{(2\pi)^3}\,\frac{2m}{\hbar^2}\,\frac{2\pi}{k}$$

$n_0(q)$: gauss $e^{-\frac{\beta p^2}{2m}}$

$$\int_0^\infty dq\, q\, n^{(0)}(q)\,\ln\left|\frac{k-2q}{k+2q}\right| = -\frac{2\beta e^{\beta\mu_0}}{\lambda_B^3}\varphi(k\lambda_B), \quad \varphi(x) = \frac{1}{\pi x}\int_0^\infty dy\, e^{-\frac{y^2}{4\pi}} \ln\left|\frac{2y+x}{2y-x}\right|$$

$\varphi(0) = 1$, sorba fejthető (analitikus)

V.2, SZ

SOKTEST 1.

$$v(q)\,\Pi_{(0)}(q,0) = -\underbrace{\frac{4\pi e^2}{q^2}\,\frac{2\beta e^{\beta\mu_0}}{\lambda_B^3}}_{=\frac{1}{x^2}}\,\varphi(\lambda_B q) = -\frac{1}{x^2}\,\varphi\left[2e_0\left(\frac{2\pi\beta e^{\beta\mu}}{\lambda_B}\right)^{1/2} x\right]$$

$$x^2 = q^2\,\frac{\lambda_B^3}{4\pi e_0^2\, 2\beta e^{\beta\mu_0}}$$

$$\Omega^{(n)}_{corr} = 2V\sqrt{\frac{\beta}{\pi}}\,e_0^3\left(\frac{2e^{\beta\mu}}{\lambda_B}\right)^{3/2}\int_0^\infty dx\cdot x^2\left[\ln\left\{1+\frac{1}{x^2}\varphi\left[\left(\frac{2\pi\beta e^{\beta\mu}}{\lambda_B}\right)^{1/2} 2e_0 x\right]\right\} - \frac{1}{x^2}\varphi\left(\frac{2\pi\beta e^{\beta\mu}}{\lambda_B}\right)^{1/2} 2e_0 x\right]$$

$\varphi$-t sorbafejtem $e_0$ szerint. A 2 $\int$-us tagban $e_0 = 0$ helyettesítést végezhetünk, mert rögtön $e_0^4$-t kapunk enélkül

$$\Omega^{(1)}_{corr} = 2V\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/2} e_0^3\left(\frac{2e^{\beta\mu}}{\lambda_B^3}\right)^{3/2}\underbrace{\int_0^\infty dx\,x^2\left[\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x^2}\right]}_{=-\frac{\pi}{3}}$$

$$\boxed{\Omega^{(1)}_{corr} = -\frac{2}{3}(\pi\beta)^{1/2} e_0^3\,\frac{N^{3/2}}{V^{1/2}}} \sim o(e_0^2)$$

klasszikus plazmára jó: üstökös, fúziós plazma stb.

$$F(T,V,N) = \left(\Omega_0(\mu_0) + \mu_0 N\right) + \Omega_{corr}(\mu_0) \qquad e_0^3\sqrt{kT}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^{3/2}$$

nem $\uparrow$ hanyagolható el

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V}\bigg|_{T,N} = -\frac{\partial F_0}{\partial V}\bigg|_{T,N} - \frac{\partial \Omega_{corr}}{\partial V}\bigg|_{T,N} = \frac{NkT}{V} - \frac{1}{3}(\pi\beta)^{1/2} e_0^3\, n^{3/2}$$

klasszikus plazma Debye–Hückel-féle állapotegyenlete

$$pV = NkT\left[1 - \frac{\sqrt{\pi}}{3}\left(\frac{e_0^2\, n^{1/3}}{kT}\right)^{3/2} + O(e_0^4)\right]$$

a kölcsönhatás csökkenti a gondot
minden lépésben tr. (HF elhanyagolható, magasabb rend nem)
kis paraméter: $\frac{e_0^2 n^{1/3}}{\varepsilon_F} \ll 1$

Mi köze ennek a töltésárnyékoláshoz?
Az $e^-$-gázba egy nagy $Q$ töltésű szennyezőt rakunk. $Z$

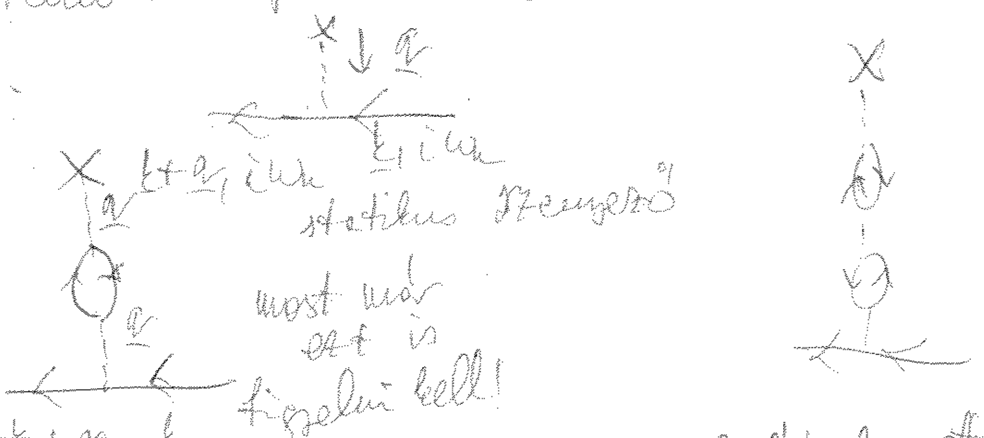
$$H_{sz} = \sum_{k,q,s} Z v(q)\, a^+_{k+q,s} a_{k,s}$$

imp. csak külső potenciállal együtt marad meg.

homogén rendszert perturbáljuk

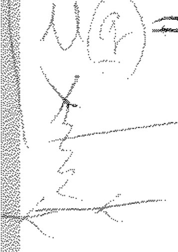
új vertexek:

2. rend




$$\boxed{U(q) = \frac{Z v(q)}{1 - v(q)\Pi_0(q,0)}}$$

szennyező által létrehozott, ám a közeg által leárnyékolt effektív poti.



$$v(q) = \frac{4\pi e_0^2}{q^2}$$

$$v(q)\Pi_0(q,0) = -\frac{k_{TF}^2}{q^2}$$

stat. hosszúhullámú h.e.

diel. fv.

$$U(r) = \sum_q U(q) e^{iqr} = \sum_q \frac{4\pi Z e^2}{q^2} \frac{1}{1 + \frac{k_{TF}^2}{q^2}} e^{iqr} =$$

$$= \sum_q \frac{4\pi Z e_0^2}{q^2 + k_{TF}^2} e^{iqr} = \frac{Z e_0^2}{r} e^{-k_{TF} r}$$

árnyékolási hossz: Thomas–Fermi-hossz $1/k_{TF}$

V. 24 SZ SOKTEST 1.

- csaltuk a régiót: kidobtuk a $\varphi \neq 0$-s tagokat.

- a teljes diel. fv.

$\varepsilon\left(\frac{q}{\ },\omega\right) = 1 - v(q)\,\Pi(\omega)(q,\omega)$

$\hookrightarrow q = k_F$-nél log. szingularitás

$\frac{\partial \varepsilon}{\partial q}\Big|_{k_F} = \infty$

rendesen elvégezve az $\int$-t: $U(r) \sim \frac{\cos(2k_F r)}{r^3}$ Friedel-oszcilláció

spinsűrűség: mágnesség ...

~~rendez~~etlen kk-okhoz vezet

- oka: betöltési számban Fermi-él.

- klasszikusan: sima futava.

---

V. 9, SZ Egyrészecske-elemigerjesztések

spektrálfv. $\varrho(\underline{r}, t; \underline{r}', t') = \langle [\Psi(\underline{r}, t), \Psi^+(\underline{r}', t')]_{\mp} \rangle$

$\Psi(\underline{r}, t) = e^{\frac{iKt}{\hbar}}\ \Psi(\underline{r})\ e^{-\frac{iKt}{\hbar}}$ valós idő!

Nyomképzés: $Sp\Big(\underset{\downarrow}{\varrho_G}\ \ldots\Big) = \sum_n \langle n | \varrho_G \ldots | n \rangle$

nagykan. sűr. m.

$\sum_n |n\rangle\langle n| = I$ teljes rendszer a Fock-téren

$\langle k | l \rangle = \delta_{kl}$ ortonormált r.

$\hat{K} = \hat{H} - \mu\hat{N}$ $\quad [K, H] = [K, N] = 0,\ [\varrho_G, K] = 0$

$[H, N] = 0,$

mindnek sfv-e $n$.

$\begin{matrix} H \\ K \\ \varrho \\ \\ N \end{matrix}\ |n\rangle = \begin{matrix} E_n \\ K_n \\ W_n \\ \\ N_n \end{matrix}\ |n\rangle$ $\qquad W_n = \frac{e^{-\beta K_n}}{Z_G}$

$W_n = W_m\, e^{-\beta(K_n - K_m)}$

Lehmann-reprezentáció: $n$ sfv. $K$-nak, $\varrho$-nak, $N$-nek.

$$\varrho(\underline{r},t;\underline{r}',t') = \sum_{n,m} w_n \Big[ \langle n|\Psi(\underline{r},t)|m\rangle\langle m|\Psi^\dagger(\underline{r}',t')|n\rangle \mp$$

$\varrho$-t átemeltük $|n\rangle$-en
2. tagban felcserélem $n$-et és $m$-et.
(2. tagban $w_m$)

$$\mp \langle n|\Psi^\dagger(\underline{r}',t')|m\rangle\langle m|\Psi(\underline{r},t)|n\rangle \Big] =$$

$|m\rangle$-en átemelhető $e^{\frac{\pm i K t}{\hbar}}$

$$= \sum_{n,m} w_n \, e^{\frac{i(K_n - K_m)(t-t')}{\hbar}} \underbrace{\langle n|\Psi(\underline{r})|m\rangle\langle m|\Psi^\dagger(\underline{r}')|n\rangle}_{A_{nm}(\underline{r},\underline{r}')} \left[1 \mp e^{\beta(K_n - K_m)}\right]$$

csak $t-t'$-től függ $\rightarrow$ Fourier-transzf.

$$\varrho(\underline{r},\underline{r}',\omega) = \int dt \, e^{i\omega t} \varrho(\underline{r},t;\underline{r}',0)$$

$$\varrho(\underline{r},t;\underline{r}',t') = \int \frac{d\omega}{2\pi} \varrho(\underline{r},\underline{r}',\omega) e^{-i\omega(t-t')}$$

$$\boxed{\varrho(\underline{r},\underline{r}',\omega) = 2\pi \sum_{n,m} w_n A_{mn}(\underline{r},\underline{r}')\left[1 \mp e^{\beta(K_n - K_m)}\right]\delta\left[\omega - \hbar^{-1}(K_m - K_n)\right]}$$

sp. fv. F-tr-ja: a $\delta$-k a rendszer E-jainál különb-ségénél van, de ott nem 0, ahol a kezdő és végáll. 1 részecskében különböznek $\rightarrow$ kvázirészecskék.

SPIN NÉLKÜL!!

spektrálfv. tulajdonságai

1 összegszabály

(1) $\displaystyle\int \frac{d\omega}{2\pi} \varrho(\underline{r},\underline{r}',\omega) = \delta(\underline{r}-\underline{r}')$ (F-tr. a $t=0$-ban, itt a felcserélési szabályok lagják)

(2) $$\int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\varrho(\underline{r},\underline{r}',\omega)}{e^{\beta\hbar\omega} \mp 1} = \sum_{n,m} w_n A_{n,m}(\underline{r},\underline{r}') = \sum_{n,m} w_m \langle m|\Psi^\dagger(\underline{r}')\Psi(\underline{r})|m\rangle$$

$= \langle \Psi^\dagger(\underline{r}')\Psi(\underline{r})\rangle = \langle \dots \rangle$ ???
1 részecske redukált sűrűségmátrix

$$w_n\left(1 \mp e^{\beta(K_n - K_m)}\right) = w_m\left(e^{\beta(K_m - K_n)} \mp 1\right)$$

homogén rendszerek

$$\Psi(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\underline{k}} e^{i\underline{k}\underline{x}} a_{\underline{k}}$$

$$\varrho(\underline{k},\omega) = \int d^3(x_1 - x_2)\, e^{-i\underline{k}(x_1-x_2)}\, \varrho(x_1, x_2, \omega)$$

$$\varrho(x_1, x_2, \omega) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \varrho(\underline{k},\omega)\, e^{+i\underline{k}(x_1-x_2)}$$

$$A_{m,n}(\underline{x}, x') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} A_{m,n}(\underline{k}) e^{i\underline{k}(x-x')}$$

$$A_{m,n}(\underline{k}) = \oint \langle m | a^{\dagger}_{\underline{k}} | n \rangle \langle n | a_{\underline{k}} | m \rangle$$

H: felcélni. kell: $P|n\rangle = P_n|n\rangle$

$$\varrho(\underline{k},\omega) = 2\pi \sum_{m,n} w_n A_{m,n}(\underline{k}) \left(e^{\beta\hbar\omega} \mp 1\right) \delta\left[\omega - \hbar^{-1}(K_m - K_n)\right]$$

tul.-ok.: (1) $\int \frac{d\omega}{2\pi} \varrho(\underline{k},\omega) = 1$

(2.) $\int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\varrho(\underline{k},\omega)}{e^{\beta\hbar\omega} \mp 1} = \sum_{m,n} A_{m,n}(\underline{k}) = \langle n_{\underline{k}} \rangle$

más: (3.) $\varrho(\underline{k},\omega)$ valós, (4) fermionra valós és nemnegatív, bozonra csak valós

$\varrho(\underline{k},\omega) \geq 0$ f

$\varrho(\underline{k},\omega)\,\mathrm{sgn}(\omega) \geq 0$ b

$\varrho(\underline{k},\omega) \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \geq 0$

Retardált Green-fv. Szemmel a hőm.-i G-fvt írták újra, retardáltat nyomtatottal, R jelöléssel.

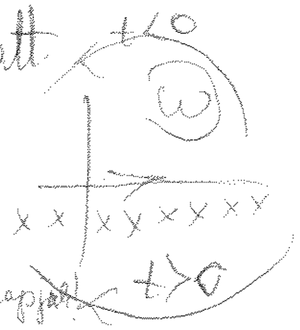
$$\boxed{iG^R(x_1, t_1; x_2, t_2) = \Theta(t_1 - t_2)\, \varrho(x_1 t_1, x_2 t_2)}$$

nincsen Fourier-trafója, illetve: regularizálni kell.
Laplace-tr.-ja vagyon.

$$G^R(x_1,x_2,\omega)=\int_0^\infty dt\, e^{i(\omega+i\varepsilon)t}\, G^R(x_1,t,x_2,0)=\sum_{n,m} w_n \frac{A_{mn}(x_1,x_2)}{\omega-\hbar^{-1}(K_m-K_n)+i\varepsilon}$$

$$\varepsilon>0$$

$\left[1\mp e^{-\beta(K_m-K_n)}\right]$ pólusok a valós tengely alatt




$$G^R(x_1,t_1,x_2,0)=\int\frac{d\omega}{2\pi}G^R(x_1,x_2,\omega)e^{-i\omega t}$$

$\int$-ás után tartunk $\varepsilon$-nal 0-ba

ld. Sasvári óráit

$$\frac{1}{x+i\varepsilon}\longrightarrow P\left(\frac{1}{x}\right)-i\pi\delta(x)$$

$$G^R=\mathrm{Re}\,G^R+i\,\mathrm{Im}\,G^R$$

$$\mathrm{Re}\,G^R(x_1,x_2,\omega)=\sum_{n,m}w_n P\frac{1}{\omega-\hbar^{-1}(K_n-K_m)}A_{mn}(x_1,x_2)\left[1\mp e^{-\beta(K_m-K_n)}\right]$$

$$\boxed{\mathrm{Im}\,G^R(x_1,x_2,\omega)=-\pi\sum_{n,m}w_n A_{mn}(x_1,x_2)\left[1\mp e^{-\beta(K_m-K_n)}\right]\delta(\omega-\hbar^{-1}(K_m-K_n))}$$

$$\delta(\omega-\hbar^{-1}(K_m-K_n))$$

$$\boxed{=-\frac{1}{2}\rho(x_1,x_2,\omega)}$$

$$G^R(x_1,x_2,\omega)=\int\frac{d\omega'}{2\pi}\rho(x_1,x_2,\omega')\frac{1}{\omega-\omega'+i\varepsilon}=$$

(Kramers–Kronig)

a $\delta$ felhasználásával kaptuk.

$$=-\frac{1}{\pi}\int d\omega'\frac{\mathrm{Im}\,G^R(x_1,x_2,\omega')}{\omega-\omega'+i\varepsilon}$$

V. 9., SZ

SOKTEST 1. Hilbert-trafó

$$\boxed{\mathrm{Re}\, G^R(x_1, x_2, \omega) = -\frac{1}{\pi} P\int d\omega' \frac{\mathrm{Im}\, G^R(x_1, x_2, \omega')}{\omega - \omega'}}$$

(Titch–Marsh-tétel ...)

Avanzsált Green-fv.

$$G^A(x_1, t_1, x_2, t_2) = \Theta(t_2 - t_1)\cancel{\delta}(x_1, t_1; x_2, t_2)$$ negatív időkre különbözik 0-tól

$$G^A(x_1, x_2, \omega) = \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\varrho(x_1, x_2, \omega')}{\omega - \omega' - i\varepsilon}$$ és nem +!!!

ha $\omega$ valós, $\omega \in \mathbb{R}$: $\mathrm{Re}\, G^A = \mathrm{Re}\, G^R$, $\mathrm{Im}\, G^A = -\mathrm{Im}\, G^R$ $\Big\}\; G^{R*}(\underline{x}, \omega) = G^A(\underline{x}, \omega)$

ha $\omega \in \mathbb{C}$ $\boxed{G^A(\underline{x}, \omega^*) = G^{R*}(\underline{x}, \omega)}$

Hőmérsékleti és retardált Green-fvek kapcsolata

$$\mathcal{G}^{\text{hőm.}}(x_1\tau_1; x_2\tau_2) = -\langle T_\tau(\psi_K(x_1, \tau_1)\psi_K^+(x_2, \tau_2))\rangle =$$

$$= -\sum_{n,m} w_n \Big[\Theta(\tau_1 - \tau_2)\langle n|\psi(x_1)|m\rangle\langle m|\psi^+(x_2)|n\rangle e^{-\frac{(K_m - K_n)(\tau_1 - \tau_2)}{\hbar}} \pm$$

$$\pm \Theta(\tau_2 - \tau_1)\langle n|\psi^+(x_2)|m\rangle\langle m|\psi(x_1)|n\rangle e^{\frac{(K_m - K_n)(\tau_1 - \tau_2)}{\hbar}}\Big]$$

$$\mathcal{G}(x_1, x_2, i\omega_n) = \int_0^{\beta\hbar} \mathcal{G}(x_1, \tau, x_2, 0)\, e^{i\omega_n \tau} = \hbar\sum_{n,m} w_n A_{nm}(x_1, x_2) \cdot \frac{1 \mp e^{-\beta(K_m - K_n)}}{i\omega_n - \hbar^{-1}(K_m - K_n)}$$

$$= \sum_{n,m} W_n A_{mn}(x_1, x_2) \frac{1 \mp e^{-\beta(K_m - K_n)}}{i\omega_n - \hbar^{-1}(K_m - K_n)}$$

$$g(\underline{r}_1, \underline{r}_2, i\omega_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\rho(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \omega)}{i\omega_n - \omega}$$

homogén rendszere:

$$\boxed{G(\underline{k}, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\rho(\underline{k}, \omega)}{(z - \omega)}}$$

$$z = \begin{cases} i\omega_n, & \text{hőm. } G \quad \mathcal{G} \\ \omega + i\varepsilon, & \text{ret. } G \quad G^R \\ \omega - i\varepsilon, & \text{av. } G \quad G^A \end{cases}$$

(Mindegyik Green-fv-t analitikusan folytathatjuk a $\mathbb{C}$ síkon, annak megfelelően, hogy mit akarunk kapni.)

példa: szabad gáz

$$G_{(0)}(\underline{k}, i\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \hbar^{-1}(\varepsilon_k - \mu)} \qquad i\omega_n \to \omega + i\varepsilon$$

$\mathcal{G}_{(0)}$

$$G^R(\underline{k}, \omega) = \frac{1}{\omega - \hbar^{-1}(\varepsilon_k - \mu) + i\varepsilon}$$ más $\varepsilon$!

$$\rho^{(0)}(\underline{k}, \omega) = 2\pi\, \delta\left(\omega - \hbar^{-1}(\varepsilon_k - \mu)\right)$$

kölcsönható rendszer:

$$\mathcal{G}(\underline{k}, i\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \hbar^{-1}(\varepsilon_k - \mu) - \Sigma(\underline{k}, i\omega_n)}$$

és $\Sigma^R(\underline{k}, \overset{\omega + i\varepsilon}{\omega}) = \mathrm{Re}\,\Sigma^R + i\,\mathrm{Im}\,\Sigma^R$

$$G^R(\underline{k}, \omega) = \frac{1}{\omega + i\varepsilon - \hbar^{-1}(\varepsilon_k - \mu) - \Sigma^R(\underline{k}, \omega)}$$

$$\rho(\underline{k}, \omega) = -2\,\mathrm{Im}\, G^{R!!!}(\underline{k}, \omega) = \frac{-2\,\mathrm{Im}\,\Sigma^R(\underline{k}, \omega)}{\left[\omega - \hbar^{-1}(\varepsilon_k - \mu) - \mathrm{Re}\,\Sigma^R(\underline{k}, \omega)\right]^2 + \left[\mathrm{Im}\,\Sigma^R(\underline{k}, \omega)\right]^2}$$

(So kell egy tört képzetes részét redukálni)

Ha $\mathrm{Im}\,\Sigma \ll \mathrm{Re}\,\Sigma$, a korábban említett $\Sigma$-os határátmenetet visszük ($\frac{1}{x + i\varepsilon} \to -i\pi\delta(x)$, $i$ eltűnik)

$$\rho(\underline{k}, \omega) = 2\pi\,\delta\left(\omega - \hbar^{-1}(\varepsilon_k - \mu) - \mathrm{Re}\,\Sigma^R(\underline{k}, \omega)\right)$$

V-9,52 SOKREST ↑

tudjuk: $\delta(f(x)) = \sum_{x_0} \frac{\delta(x-x_0)}{|f'(x_0)|}$

Ekkor: $\rho(\underline{k},\omega) = 2\pi\, Z(\underline{k})\, \delta[\omega - \hbar^{-1}(E_{\underline{k}} - \mu)]$

$E_{\underline{k}} = \varepsilon_{\underline{k}} + \hbar\, \mathrm{Re}\, \Sigma^R(\underline{k}, \hbar^{-1}(E_{\underline{k}} - \mu))$ $E_{\underline{k}}$ az elemi gerjesztések energiája

kis Im $\Sigma$-ra ~~ks~~ a szabad gázhoz közeli eredményre jutunk.

és $\frac{1}{Z(\underline{k})} = 1 - \frac{\partial}{\partial\omega} \mathrm{Re}\, \Sigma^R(\underline{k},\omega) \Big|_{\omega = \hbar^{-1}(E_{\underline{k}} - \mu)}$

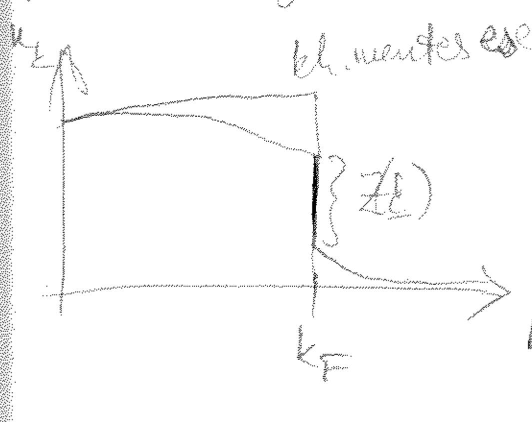
---

Fermi-gáz T=0-ban

Im $\Sigma^R(\underline{k}_F, 0) = 0$ Fermi-felületen eltűnik. Im $\Sigma^R(\underline{k}) \sim (k - k_F)^2$

a részecske nem tud tovább bomlani!

$n_{\underline{k}} = \int \frac{d\omega}{2\pi} \rho(\underline{k},\omega) \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} + 1} = Z(\underline{k}) \frac{1}{e^{\beta(E_{\underline{k}} - \mu)} + 1} + F_{\underline{k}}$ sima rész




fermion.

$Z(k)$ nevezetű ugrás

elemi gerjesztések megléte mellett is marad ugrás (Luttinger, 1952)

ezek a normál Fermi-rendszerek

Nem normál Fermi-r.: szupravezető, ott feloldódik a F-f

1D-rendszerek

fizikai kép: $\rho_{T=0} = |\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|$

$G(\underline{k},t) = \langle\Psi_0| a_{\underline{k}}(t)\, a^+_{\underline{k}}(0) |\Psi_0\rangle$ $t = \text{áll}$

alapban (alapáll.-ban) t-ben beteszünk egy részecskét, mekkora valószínűséggel marad meg a részecske?

$$G^R(\underline{k},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} G^R(\underline{k},\omega) e^{-i\omega t}$$

képzetes rész: $\mathrm{Im}\, G^R(\underline{k},\omega) = \frac{\Gamma_k}{(\omega - \hbar^{-1}(E_k - \mu))^2 + \Gamma_k^2}$

ha úgy folytatjuk el $G$-t a felső félsíkra, hogy az alsóban van 1 pólusa, akkor $G^R$ képzetes része Lorentz görbe alakú, akkor.

$$G^R(\underline{k},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega - \hbar^{-1}(E_k - \mu) + i\Gamma_k} = e^{-\frac{i(E_k-\mu)}{\hbar}t} e^{-\Gamma_k t}$$

$$= e^{-\frac{i(E_k-\mu)}{\hbar}t} e^{-\Gamma_k t}$$

↳ csillapítás

pólus a felső félsíkon: instabilitás: nőnek az elemi gerjesztések: vagy átalakulás vagy elszállás!

---

V. 16., Sz

Cserti Attila

$\boxed{\text{jövő szerda: vizsga}}$ 5.55

Surján Péter kvantumkémia

kollektív gerjesztések

kvázirészecskék: bozonoknál bármely fermionoknál f.-ok.

kvázirészecskék: nem kvázi-szabad részecskék, sűrűséghullámok például: nem külső potenciálgradiensre adott válaszok hanem

sűr. hull.

---

sűrűségfluktuációs propagátor

$\hat{n}(\underline{r}) = \psi^+(\underline{r})\psi(\underline{r})$

$\hat{\tilde{n}}(\underline{r}) = \hat{n}(\underline{r}) - \langle \hat{n}(\underline{r}) \rangle$

$D(\underline{r},\tau;\underline{r}',\tau') = -\langle T_\tau(\hat{\tilde{n}}(\underline{r},\tau)\hat{\tilde{n}}(\underline{r}',\tau'))\rangle$ prop.

V. 16.) 5E

SOKTEST 1

$$D(\underline{r},\tau,\underline{r}',\tau') = -\langle T_\tau\, n(\underline{r},\tau)\, n(\underline{r}',\tau')\rangle + \langle n(\underline{r})\rangle\langle n(\underline{r}')\rangle$$

perturbációval

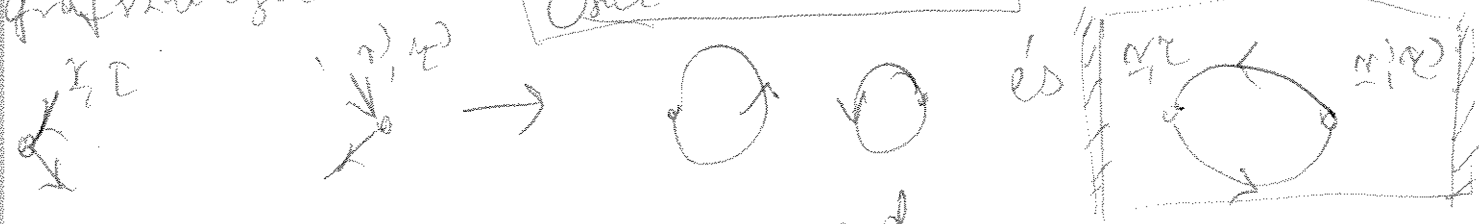
$$\langle T_\tau\, n(\underline{r},\tau) n(\underline{r}',\tau')\rangle = \left(Sp\left\{e^{-\beta K_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\hbar^{-1}\right)^n\int_0^{\beta\hbar} d\tau_1\ldots d\tau_n\, T_\tau\left[K_1(\tau_1)\ldots K_n(\tau_n)\right]\right\}\right)^{-1}\cdot$$

$$\cdot\, Sp\left(e^{-\beta K_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{\hbar}\right)^n\int_0^{\beta\hbar} d\tau_1\ldots d\tau_n\, T_\tau\left[K_1(\tau_1)\ldots K_1(\tau_n)\,\psi^+(\underline{r},\tau)\psi(\underline{r},\tau)\,\psi^+(\underline{r}',\tau')\psi(\underline{r}',\tau')\right]\right)$$

1 vonal fut ki és be a külső pontokba.

gráfszabályok:

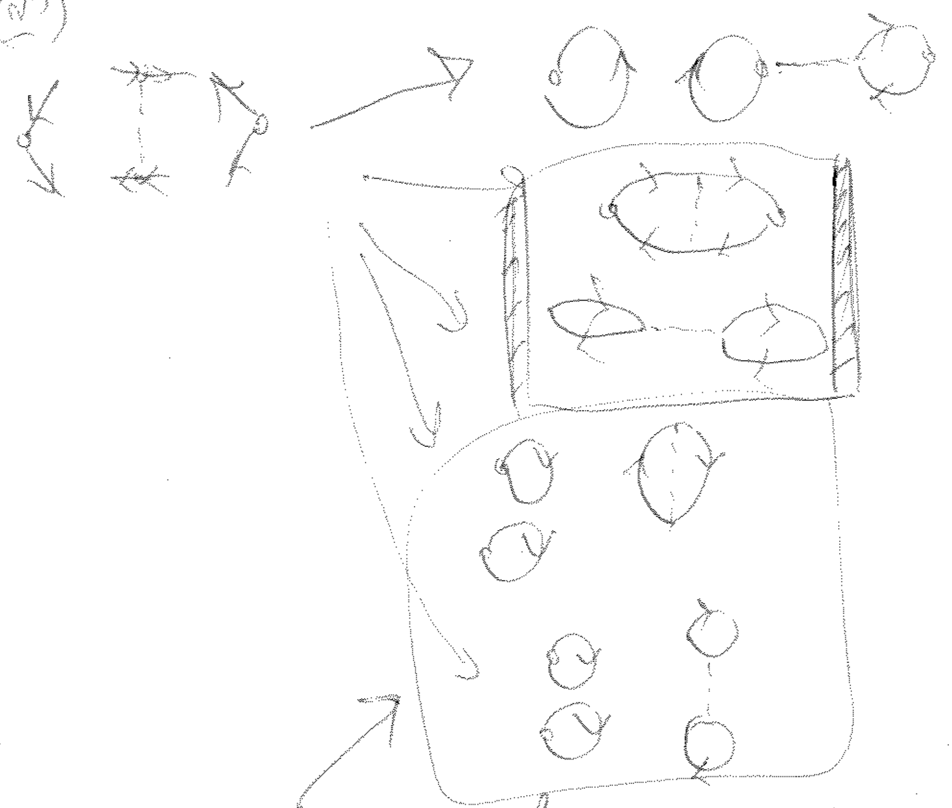
csak szétválók!!!



0. rend

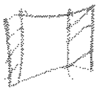
$n^{(0)}(\underline{r})\, n^{(0)}(\underline{r}')$

1. rend



széteső diagram: van olyan komponense, ami nem csatlakozik egy külső ponthoz sem

Igaz itt is, hogy csak a csatolt gráfokkal foglalkozunk, mert a szétesők kiegyszerűsödnek a nevezővel

 csatolt és egyetlen összetevőből áll!

 $n(\underline{r})\,n(\underline{r}')$ ezek jönnek belőlük, 2 pont által összekötve

HF: gráfszabályok megtanulása.

homogén rendszer $\qquad \Psi(\underline{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\underline{k}} e^{i\underline{k}\underline{r}} a_{\underline{k}}$

$$\hat{n}(\underline{r}) = \hat{\Psi}^+(\underline{r})\hat{\Psi}(\underline{r}) = \sum_{\underline{k}\underline{k}'} \frac{1}{V} e^{i(\underline{k}-\underline{k}')\underline{r}}\, a^+_{\underline{k}} a_{\underline{k}} = \frac{1}{V}\sum_{\underline{k}\underline{q}} e^{i\underline{q}\underline{r}}\, \underbrace{a^+_{\underline{k}+\underline{q}} a_{\underline{k}}}_{n_{\underline{q}}} =$$

$$n_{\underline{q}} = \sum_{\underline{k}} a^+_{\underline{k}+\underline{q}} a_{\underline{k}}$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{\underline{q}} e^{i\underline{q}\underline{r}} n_{\underline{q}}$$

$r, r'$ különbségétől függ

$\beta\hbar$ szerint periodikus $D(\underline{k},\tau)$

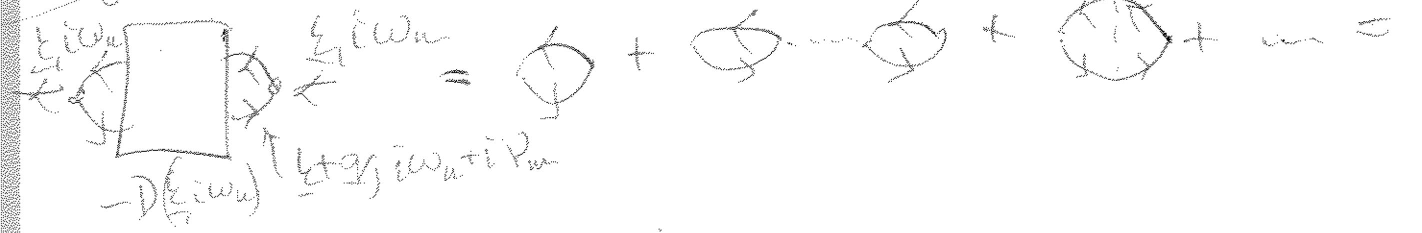
$$D(\underline{k},\tau) = -\frac{1}{V}\langle T_\tau\, n_{\underline{k}}(\tau)\, n_{-\underline{k}}(0)\rangle$$

$$D(\underline{k},\tau) = D(\underline{k},\tau+\beta\hbar)$$

$\Rightarrow$ Matsubara-rep.-ban: $D(\underline{k},i\omega_n) = \int_0^{\beta\hbar} d\tau\, e^{i\omega_n\tau} D(\underline{k},\tau)$

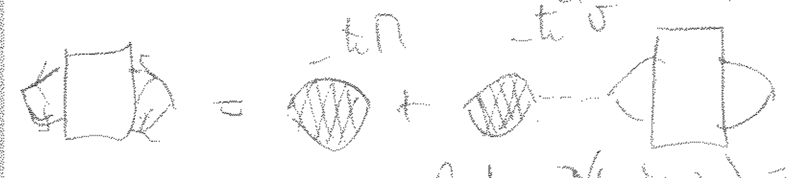
$$D(\underline{k},\tau) = \frac{1}{\beta\hbar}\sum_n e^{-i\omega_n\tau} D(\underline{k},i\omega_n) \qquad \omega_n = \frac{2n\pi}{\beta\hbar}$$ mindig bozonikus!!

a Dyson-egyenlet megfelelője:




nem esnek szét
2 részre vonalat
kivéve elvágva (?)

polarizációs fv.




Neumann-egyenlet: $D(\underline{k},i\omega_n) = \hbar\,\Pi(\underline{k},i\omega_n) + \Pi(\underline{k},i\omega_n)\, v(\underline{k})\, D(\underline{k},i\omega_n)$

$$D(\underline{k},i\omega_n) = \frac{\hbar\,\Pi(\underline{k},i\omega_n)}{1-v(\underline{k})\Pi(\underline{k},i\omega_n)} =: \frac{\hbar\,\Pi(\underline{k},i\omega_n)}{\varepsilon(\underline{k},i\omega_n)} \qquad \varepsilon(\underline{k},i\omega_n) = 1-\frac{v(\underline{k})}{\Pi(\underline{k},i\omega_n)}$$

dielektromos fv.

legegyszerűbb köz.: $\Pi = \Pi_0$

1. 16,52 SOKTEST 1.

valós időben milyen spektrálfv-t kapunk?

Spektrálfv.:

$$\rho^D(\underline{r},t,\underline{r}',t') = \langle [\hat{\tilde{n}}(\underline{r},t), \hat{\tilde{n}}(\underline{r}',t')] \rangle$$

$$\hat{\tilde{n}}(\underline{r},t) = e^{\frac{iKt}{\hbar}} \hat{\tilde{n}}(\underline{r}) e^{-\frac{iKt}{\hbar}}$$ Heisenbergi időfüggés

Lehmann-reprezentáció:

$\hat{K}|n\rangle = K_n|n\rangle$ $\quad \rho_0|n\rangle = w_n|n\rangle$

$$\rho^D(\underline{r},t,\underline{r}',t') = \sum_{m,n} w_n e^{-\frac{i}{\hbar}(K_m-K_n)(t-t')} A_{m,n}(\underline{r},\underline{r}')\left[1-e^{-\beta(K_m-K_n)}\right]$$

$t-t'$-től függ csupán!

$$A_{mn}(\underline{r},\underline{r}') = \langle n|\hat{\tilde{n}}(\underline{r})|m\rangle\langle m|\hat{\tilde{n}}(\underline{r}')|n\rangle$$

$$\rho^D(\underline{r},\underline{r}',\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \rho^D(\underline{r},t,\underline{r}',t')\, e^{i\omega t} = \sum_{m,n} 2\pi\, w_n A_{mn}(\underline{r},\underline{r}')\left[1-e^{-\beta(K_m-K_n)}\right]$$

$$\cdot\, \delta\left[\omega - \hbar^{-1}(K_m-K_n)\right]$$

homogén rendszerre

$$\rho^D(\underline{k},\omega) = 2\pi \sum_{m,n} w_n \left|\langle n|\hat{\tilde{n}}_{\underline{k}}|m\rangle\right|^2 \left[1-e^{-\beta(K_m-K_n)}\right]\delta\left[\omega-\hbar^{-1}(K_m-K_n)\right]$$

FT itt

megj.: $\hat{\tilde{n}}_{\underline{k}} = \hat{n}_{\underline{k}}$, ha $\underline{k} \neq 0$, hiszen $\underline{k}=0$ a várható érték

csúcsai vannak a spektrálfv-nek.

retardált sűrűségkorrelációs fv.

$$i D^R(\underline{r},t,\underline{r}',t') = \Theta(t-t')\, \rho^D(\underline{r},t,\underline{r}',t')$$ Laplace-trafó újfent.

~~$iD^R(\underline{k},t) = \Theta(t)$~~

$$D^R(\underline{r},\underline{r}',\omega) = \int_0^{\infty} \rho^D(\underline{r},t,\underline{r}',0)\, e^{i(\omega+i\varepsilon)t} = \sum_{m,n} \frac{w_n A^D_{mn}(\underline{r},\underline{r}')\left[1-e^{-\beta(K_m-K_n)}\right]}{\omega-\hbar^{-1}(K_m-K_n)+i\varepsilon}$$

$\Rightarrow$ homogén rendszerre

$$D^R(\underline{k},\omega) = \sum_{m,n} \frac{w_n K_m |\langle n|\hat{u}_{\underline{k}}|m\rangle|^2 \left[1-e^{-\beta(K_m-K_n)}\right]}{\omega - \hbar^{-1}(K_m-K_n)+i\varepsilon}$$

és megint $\frac{1}{x+i\varepsilon} \to P\left(\frac{1}{x}\right) - i\pi\delta(x)$

$$D^R(\underline{k},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\rho^D(\underline{k},\omega')}{\omega+i\varepsilon-\omega'}$$

$$D^A(\underline{k},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\rho^D(\underline{k},\omega')}{\omega-i\varepsilon-\omega'}$$

$$D(\underline{k},i\omega_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\rho^D(\underline{k},\omega')}{i\omega_n-\omega'}$$

eltolgatás, mint Sarwárnál.

alkalmazás: plazmagerjesztések a zselémodellben.

töltött gáz sűrűséggerjesztése: plazmon.

$$D^R(\underline{k},\omega) = \frac{\hbar\,\Pi^R(\underline{k},\omega)}{\varepsilon^R(\underline{k},\omega)}$$

$\varepsilon^R(\underline{k},\omega)=0$ a gerjesztések helye.

$$0 = 1 - v(\underline{k})\,\Pi^R(\underline{k},\omega)$$

$\Pi(\underline{k},\omega) = \Pi_0(\underline{k},\omega)$
legalacsonyabb rend

$k \ll k_F$: hosszúhullámú határeset (gap környéke)

$$\Pi^{(0)}(\underline{k},i\omega_n) = -\frac{m k_F}{\hbar^2\pi^2} R(\zeta), \quad \zeta = \frac{\omega_n m}{\hbar k k_F}$$


$$R(\zeta) = 1 - \zeta\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

$$i\omega_n \to \omega+i\varepsilon: \quad \zeta = -\frac{i(\omega+i\varepsilon)m}{\hbar k k_F}$$

$(\omega+i\varepsilon) \to$ elfelejtjük (a pólust ki akarjuk vele kerülni)

$$-\frac{i\omega m}{\hbar k k_F} \xrightarrow{k} \infty$$
$\downarrow$
$0$

74

V. 16.) SZ SORTEST 1.

$$R(z) \simeq 1 - z\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{z}\right) \xrightarrow[z \to \infty]{} 1 - z\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3}\frac{1}{z^3}\right) \approx \frac{1}{3}\frac{1}{z^2}$$

$\mathrm{arctg}(x) \approx x - \frac{1}{3}x^3$

visszarakom $\varepsilon^R(k,\omega) = 0$-ba

és $\omega = \omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n e_0^2}{m}}$ (hogyan jön ez ide?)

$$\omega_k = \omega_p\left[1 + \frac{9}{10}\left(\frac{k}{k_{TF}}\right)^2 + \dots\right]$$

$\Pi_0$-ba belerakom, $R(z)$-t, ami még $\frac{1}{z^2}$-es, ez még $k^2$-es

másfajta gerjesztés: $e^-$-lyuk-pár, ez is megőrzi a részecskeszámot.

Nagyon sok $k$-jú állapot $\varepsilon \approx 0$ mellett.

$e^-$-lyuk-pár-gerjesztések kontinuuma, véges élettartammal.

afölött véges.

$k_F$-től $\infty$ az élettartamuk,

$T \to \infty$: klasszikus határeset.

$$\varepsilon^R(k,\omega) = 1 - v(k)\,\Pi^R_{(0)}(k,\omega) \quad q' = q - \frac{k}{2} \quad q' = q + \frac{k}{2}$$

$$\Pi^R_{(0)}(k,\omega) = -\frac{2}{\hbar}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,\frac{n^{(0)}(k+q) - n^{(0)}(q)}{\omega + i\varepsilon - \hbar^{-1}(\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_q)} =$$

$i\omega_n \to \omega + i\varepsilon$ energia!!

$$= -\frac{2}{\hbar}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,n^{(0)}\left(q + \frac{k}{2}\right)\left(\frac{1}{\omega + i\varepsilon - \frac{\hbar}{m}qk} - \frac{1}{\omega + i\varepsilon + \frac{\hbar}{m}qk}\right) =$$

$e_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ — ból $\left(q_0\right)$

$$= -\frac{2}{\hbar}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,n^{(0)}\left(q + \frac{k}{2}\right) = -\frac{2}{\hbar}e^{\beta\mu}\underbrace{\left(\int\frac{d^2q_\perp}{(2\pi)^2}e^{-\beta\frac{\hbar^2q_\perp^2}{2m}}\right)}_{= \dots}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dq_\parallel}{2\pi}\,e^{-\frac{\beta\hbar^2\left(q_\parallel + \frac{k}{2}\right)^2}{2m}}$$

$$\left(\frac{1}{\omega+i\varepsilon-\frac{\hbar}{m}kq_{\parallel}}-\frac{1}{\omega+i\varepsilon+\frac{\hbar}{m}kq_{\parallel}}\right)$$

ezt nem tudjuk elvégezni,

Változtatásból:

$$\mathrm{Re}\,\Pi_0^R(k,\omega)=-\frac{2e^{\beta\mu}}{\hbar\lambda_B^2}P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dq}{2\pi}e^{-\frac{\beta\hbar^2(q+\frac{k}{2})^2}{2m}}\left(\frac{1}{\omega-\frac{\hbar}{m}kq}-\frac{1}{\omega+\frac{\hbar}{m}kq}\right)$$

$$\mathrm{Im}\,\Pi_0^R(k,\omega)=+\frac{2e^{\beta\mu}}{\hbar\lambda_B^2}\int_{-\infty}^{+\infty}dq\,e^{-\frac{\beta\hbar^2}{2m}(q+\frac{k}{2})^2}\left[\delta\left(\omega-\frac{\hbar}{m}kq\right)-\delta\left(\omega+\frac{\hbar}{m}kq\right)\right]=$$

elvégezhető

$$=-\frac{n\beta\omega}{2}\left(\frac{1}{2}\pi\beta m\right)^{1/2}e^{-\frac{\beta m\omega^2}{2k^2}-\frac{\beta\hbar^2k^2}{8m}}\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}{\beta\hbar\omega}$$

$$\mathrm{Re}\,\Pi_0^R(k,\omega)=-\frac{n}{\hbar k}\left(\frac{1}{2}\beta m\right)^{1/2}\left\{\Phi\left[\left(\frac{1}{2}\beta m\right)^{1/2}\left(\frac{\omega}{k}+\frac{\hbar k}{2m}\right)\right]-\Phi\left[\left(\frac{1}{2}\beta m\right)^{1/2}\left(\frac{\omega}{k}-\frac{\hbar k}{2m}\right)\right]\right\}$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}P\int_{-\infty}^{+\infty}dy\,\frac{e^{-y^2}}{x-y}$$

gyepet várunk a spektrumban

$x\gg 1$-re kell

$\frac{\omega}{k}\to\infty$ $\quad\Phi(x)$

$$\Phi(x)=\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+\dots\right)$$ jegyzetben szerepel. (aszimptotikus sor)

$$0=1-v(q)\,\mathrm{Re}\,\Pi^R(\omega,q)\qquad \omega=\Omega_q-i\gamma_q$$

$$-i\,v(q)\,\mathrm{Im}\,\Pi_0^R(q,\Omega_q-i\gamma_q)$$

ezt kell megoldani, perturbatíve

1. $\mathrm{Im}\,\Pi\sim\gamma_q\ll 1$

$$1-v(q)\,\mathrm{Re}\,\Pi^0(q,\Omega_q)=0$$

$$\mathrm{Re}\,\Pi_0^R(q,\Omega_q-i\gamma_q)=\mathrm{Re}\,\Pi^R(q,\Omega_q)+\frac{\partial\,\mathrm{Re}\,\Pi_0^R}{\partial\omega}\bigg|_{\Omega_q}(-i\gamma_q)$$

$$\gamma_q=\frac{\mathrm{Im}\,\Pi_0^R(q,\Omega_q)}{\frac{\partial}{\partial\omega}\mathrm{Re}\,\Pi_0^R(q,\omega)\big|_{\Omega_q}}\Rightarrow\quad \Omega_q=\pm\Omega_{pl}\left(1+\frac{3}{2}\left(\frac{q}{q_0}\right)^2+\dots\right)$$

$$\Omega_p=\sqrt{\frac{4\pi e^2 n}{m}}$$

$$\gamma_q=\Omega_{pl}\sqrt{\frac{\pi}{8}}\left(\frac{q_0}{q}\right)^3e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{q_0}{q}\right)^2}$$ Landau-csillapodás