2012.11.15., SZ

SOKTEST 1

van jegyzet a fizweben, Szirmay is tartja

<u>betöltésiszám-ábrázolás</u>

$\left\{\varphi_k(r,s)\right\}_{k=1}^{\infty}$ teljes orton. r. csak kötött: nem teljes r.

dobozba zárt részek, síkhullámok diszkrét k-kkal.

teljes $\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k(r,s)\rangle\langle\varphi_k(r',s')| = \delta(r-r')\delta_{ss'}$

$\sum_s \int d^3r \; \varphi_k^*(r,s)\varphi_l(r,s) = \delta_{kl}$

<u>jelmagyarázat:</u> 0, 1, 2 ... ezek a k értékei és ezek valódi kvantumszámokat rövidítenek pl. $1 \to (1,\alpha)$

$$\Psi^F_{\alpha_1 \dots \alpha_N} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1}(1) & \dots & \varphi_{\alpha_1}(N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{\alpha_N}(1) & \dots & \varphi_{\alpha_N}(N) \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{(\alpha)} (-1)^{P_\alpha} \prod_{k=1}^{N} \varphi_{\alpha_k}(r_k, s_k)$$

$\varphi_{\alpha_k} = \varphi'_k$ át is lehet őket nevezni.

<u>Fermionok:</u>

így $\Psi = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{k_1} \dots \sum_{k_N} \varepsilon_{k_1 \dots k_N} \varphi'_{k_1}(1) \dots \varphi'_{k_N}(N)$

N-részecskés telj. ast. terekben bázist alkotnak a Slaterek

nem kimondottan jó a számításokra.

„natural ordering" a k-k sorrendje

ha kikötök egy rendezést: $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \dots$
=: bozonra lehet csak, akkor
rögzítem a Slater előjelét is.

N részecskés t. asz. fvek terében a slaterek teljes ON-bázist alkotnak, ha képezzük az <u>összes</u> lehetséges $N\times N$-es slatert a φ_k-kból.

$$\langle \Psi_\beta | \Psi_\alpha \rangle = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} (-1)^{P_\alpha + P_\beta} \delta_{\alpha_1 \beta_1} \dots \delta_{\alpha_N \beta_N} = 1$$

$(-1)^{2P_\alpha}$

$\hookrightarrow$ β a δ-val elügyelődik $\sum_{(\alpha)} = N!$

<u>bozonok:</u>
teljesen szimm. hfvek.

$$\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_N}(1 \dots N) = \sum_{(\alpha)} \prod_{k=1}^{N} \varphi_{\alpha_k}(k) \frac{1}{\sqrt{N! \prod_l n_l!}}$$

ismétléses permutáció

$l = 1 \to \infty$

és belevehetjük a betöltetlen állapotokat is, mert $0! = 1$

$n_5 = 1$
$n_4 = 1$
$n_3 = 3$
$n_2 = 0$
$n_1 = 0$

számít, hogy az indexekben vagy a hely-és spinváltozókban szimmetrizálunk.

$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 1 \quad \alpha_3 = 2$ ez nem betöltési szám!!!

$\varphi_1(1) \varphi_1(2) \varphi_2(3)$

$\varphi_{\alpha_1}(1) \varphi_{\alpha_2}(2) \varphi_{\alpha_3}(3)$

1	2	3
α_1	α_3	α_2

$\varphi_{\alpha_2}(1) \quad \alpha_1(2) \quad \alpha_3(3)$ a hely-és spin egy helyben marad

$\varphi \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_1$

$\alpha_3 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2$

$\alpha_3 \quad \alpha_2 \quad \alpha_1$

2012. 11. 15. SZ

elsiklottunk afölött, hogy van benne azonos!

valójában csak $\left[\varphi_1(1)\varphi_1(2)\varphi_2(3)+\varphi_1(1)\varphi_1(3)\varphi_2(2)+\right.$

$\left.+\varphi_1(3)\varphi_1(2)\varphi_2(1)\right]\frac{1}{\sqrt{3}}$

előző oldal ismétléses, emez: ismétlés nélküli

Ψ^B-k a bázisok a telj. szim. N-r. hfvek terében.

n-eket fermionokra is érthetjük: $n=0, 1$ ↳ előfordul a Slaterben

nem

izomorfia:

$\Psi^{B/F}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_N}(1\dots N)\longleftrightarrow|n_1, n_2, \dots\rangle$

$\sum_{k=1}^{\infty}n_k=N$

ezt ∞ sok részecskére is ki-terjeszthetem. Fock-tér

ha tudom az 1r-bázist, oda-vissza mehetünk a 2 tér között.

keltő-eltüntető operátorok

bizonyítás: Szimay könyvében, Fetter-Walecka (Szépfalussy)

Abrikoszov-Gorkov: tömörebb

fermionoknál formálisan megkapható

$|0\rangle=|0,0,0,0,\dots\rangle$

$a^+_{\alpha_k}|0\rangle\sim|0,0,\dots,1,\dots 0\rangle$ (α_k)

$a^+_k|0\rangle=|0\dots1\dots0\rangle$

$\langle x|n\rangle = \varphi_n(x)$ átviszi koord.-ba.

$a^+_{\alpha_1} a^+_{\alpha_2} \dots a^+_{\alpha_N}|0\rangle \sim \Psi^{B/F}_{\alpha_1 \dots \alpha_N}(1 \dots N) \leftrightarrow |n_1 \dots n_N\rangle$

$\langle x_1 \dots x_N|$ $\langle x_1 \dots x_N|$

n_k: hányszor fordul elő α_k

szerint $|n_1 \dots n_N\rangle = N (a_1^+)^{n_1} (a_2^+)^{n_2} \dots (a_N^+)^{n_N}|0\rangle$

$n_k = \begin{cases} 0,1 & \text{fermionra} \\ 0,1,2,\infty & \text{bozonra} \end{cases}$

fermionokra:

$a_k^+ (a_1^+)^{n_1} \dots (a_k^+)^{n_k}|0\rangle = (-1)^{\Sigma_k} (a_1^+)^{n_1} \dots (a_k^+)^{n_k+1}|0\rangle \sqrt{1-n_k}$

a Slater 1. sorába írok bele. Helyére viszem: sorokat

cserélek $\boxed{\Sigma_k = \sum_{l=1}^{k-1} n_l}$ megtiltja az $n=2$-es betöltést

$a_k^+|n_k\rangle = (-1)^{\Sigma_k}\sqrt{1-n_k}\,|n_k+1\rangle$

a_k^+, a_l^+ antikommutál $\{a_k^+, a_l^+\} = \delta_{kl}$

$\{a_k^+, a_l^+\} = 0$

emiatt $(a_k^+)^2 = 0$

adjungált operátor: kell hozzája skalárszorzat.

$(a_k^+)^+ = a_k$ $\boxed{\{a_k, a_l^+\} = \delta_{kl}}$ többi ak 0.

2012. 11. 15, SZ SOKTEST 1.

az ak-ból következik a_k hatása:
antik.

$$a_k |n_1 \dots n_k \dots\rangle = (-1)^{\Sigma_k} \sqrt{n_k}\, |\dots n_k - 1\rangle$$

$$a_k|0\rangle = 0 \quad \text{mellékft.} \quad \langle 0|0\rangle = 1$$

↳ ez meg a nulla szám!

skalárszorzat:

$$\int dq_1 \dots dq_N\, \psi^{*F}_{\alpha_1' \dots \alpha_N'}(1 \dots N)\, \psi^F_{\alpha_1 \dots \alpha_N}(1 \dots N) = \delta_{\alpha_1\alpha_1'} \dots \delta_{\alpha_N\alpha_N'}$$

$\int d^3 \underline{r} \sum_{s_1}$

$$\langle n_1' \dots n_k' | n_1 \dots n_k \dots\rangle = \delta_{n_1 n_1'} \dots \delta_{n_k n_k'} \dots$$

a vákuum kivételével ∀ Fock-vektor egy Slater

nyilván $\psi^{*F} \longrightarrow \langle n_1 \dots |$

$$\psi^{*F}_{\alpha_1 \dots \alpha_N} = \langle 0| a_{\alpha_N} \dots a_{\alpha_1} = \langle 0|(a_k)^{n_k} \dots (a_1)^{n_1}$$

Fock-tér: d különböző részecskeszámhoz | SORRREND!!!

tartozó Fock-vektor skalárszorzata is definiálható.

→ nagykanonikus sokasághoz kényelmes

→ a másodkvantált jóval áttekinthetőbb!

Bose-rendszer:

$$\left.\begin{aligned} a_k^+ |\dots n_k \dots\rangle &= \sqrt{n_k + 1}\, |n_k + 1, \dots\rangle \\ a_k |n_k\rangle &= \sqrt{n_k}\, |n_k - 1\rangle \end{aligned}\right\} \text{mint a harm. osc.}$$

$a_k|0\rangle = 0$ ujelentsen

$\boxed{[a_k, a_l^+] = \delta_{kl}}$ a többi komm. 0!

$\langle n_1' \ldots n_k' | n_1 \ldots n_k \rangle = \delta_{n_1 n_1'} \ldots \delta_{n_k n_k'}$

$\langle 0|0\rangle = 1$ itt is.

$$|n_1 \ldots n_k \ldots\rangle = \frac{1}{\sqrt{\prod_{k=1}^{\infty} n_k!}} (a_1^+)^{n_1} \ldots (a_k^+)^{n_k} |0\rangle$$

azonosság: $[a_k, (a_k^+)^n] = n (a_k^+)^{n-1}$

teljes indukcióval biz.: $n=1$ ld. komm.

$n \neq 1$: $a_k a_k^+ (a_k^+)^{n-1} - (a_k^+)^n a_k = (I + a_k^+ a_k)(a_k^+)^{n-1} - (a_k^+)^n a_k =$

$= (a_k^+)^{n-1} + a_k^+ \left(a_k (a_k^+)^{n-1} - (a_k^+)^{n-1} a_k \right) = \underbrace{(a_k^+)^{n-1} + (n-1) a_k^{+\,n-1}}_{\text{ind. miatt}}$

$= n (a_k^+)^{n-1}$

VI. 22. Sz

normálás: $\frac{1}{\sqrt{\prod_{k=1}^{\infty} n_k!}} (a_1^+)^{n_1} \ldots (a_k^+)^{n_k} |0\rangle = |n_1, \ldots, n_k, \ldots\rangle$

ha $\langle 0|0\rangle = 1$

ha $a_k|0\rangle = 0$ $\quad \langle 0| a_k^+ = 0$

$$\langle n_1' \ldots, n_k', \ldots | n_1, \ldots, n_k, \ldots\rangle = \langle 0| \ldots (a_k)^{n_k'} \ldots (a_1)^{n_1'} \overset{!!!}{(a_1^+)^{n_1}} \ldots (a_k^+)^{n_k} |0\rangle$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{n_1'! \, n_1! \ldots n_k'! \, n_k!}}$$

11. 22, SZ

SOKTEST 1.

belátni: $(a_1)^{n_1'}(a_1^+)^{n_1} = (a_1)^{n_1'-1} a_1 (a_1^+)^{n_1} = (a_1)^{n_1'-1}\Big[n_1(a_1^+)^{n_1-1} +$

$+(a_1^+)^{n_1} a_1\Big]$ = 0 + adódtag +

↳ vákuumból 0-t csinál, elhagyhatjuk.

$+\begin{cases} n_1(n_1-1)\ldots(n_1-n_1')(a_1^+)^{n_1-n_1'} & n_1 > n_1' \\ n_1'(n_1-1)\ldots\cancel{\ldots} 1\,(a_1)^{n_1-n_1'} & n_1 < n_1' \end{cases}$ a keresztes balra ad 0-t, a kereszt-telen jobbra víve ad 0-t a vákuummal

kivéve ha $n_1 = n_1'$!

akkor $n_1!\,\delta_{n_1' n_1}$ az eredmény

$n_1!\,\delta_{n_1' n_1} = \sqrt{n_1!\, n_1'!}\;\delta_{n_1' n_1}$

ezt végigvíve $\langle 0| \ldots |0\rangle = \delta_{n_1 n_1'}\,\delta_{n_2 n_2'}\,\delta_{n_3 n_3'} \ldots \delta_{n_k n_k'}$

<u>téroperátorok</u>: mezőoperátorok,

$\varphi_k(\underline{r}, s)$ 1 r. bázis

$\hat{\psi}(\underline{r}, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\underline{r}, s)\,\hat{a}_k$ Milyen Hilbert-téren hat?

ez a Fock-téren hat.

$\hat{\psi}^+(\underline{r}, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^*(\underline{r}, s)\, a_k^+$ $\begin{matrix} + & \text{FERMION} \\ - & \text{BOZON} \end{matrix}$

$\psi^+(\underline{r}, s)\,\psi^+(\underline{r}', s') \pm \psi^+(\underline{r}', s')\,\psi^+(\underline{r}, s) = \sum_{k\ell} \varphi_k^*(\underline{r}, s)\,\varphi_\ell^*(\underline{r}', s')\underbrace{\left(a_k^+ a_\ell^+ \pm a_\ell^+ a_k^+\right)}_{=0}$

adjungálva ugyanez.

$\left[\psi(\underline{r}, s), \psi^+(\underline{r}', s')\right]_{\pm} = \sum_{k\ell} \varphi_k(\underline{r}, s)\,\varphi_\ell^*(\underline{r}', s') \underbrace{\left[a_k, a_\ell^+\right]_{\pm}}_{\delta_{k\ell}} = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\underline{r}, s)\,\varphi_k^*(\underline{r}', s') \underset{\text{teljesség}}{=} \delta(\underline{r} - \underline{r}')\,\delta_{ss'}$

Operátorok betöltésiszám-ábrázolásban

$$H_0 = \sum_{k=1}^{N}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_k + V(\underline{r}_k)\right] = \sum_{k=1}^{N} H_0(k)$$ elsőkvantált Ham.

$$H_0(k)\varphi_\ell(\underline{r}_k) = E_0^{(\ell)}\varphi_\ell(\underline{r}_k)$$ / $\alpha(s)$, $\beta(s)$

H ftl. a spintől: $\varphi(\underline{r}, s) = \phi(\underline{r})\chi(s)$

$$H_0 \Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_N} = \sum_{k=1}^{N} E_0^{(k)} \cdot \Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_N}$$

most ugyanezt Fock-vektorokkal is meg lehet csinálni

$$H_0 = \sum_{k=1}^{N} E_0^{(k)} a_k^+ a_k = \sum_s \int d^3r\, \Psi^+(\underline{r}, s)\left[-\frac{\hbar^2\Delta}{2m} + V(\underline{r})\right]\Psi(\underline{r}, s)$$

ha bázist váltunk, a bázis is átalakul, de a Fock-vektorok is átalakulnak, így más $\underline{r}$-bázisban is igaz a képlet.

külső potenciál op-a: $V(\underline{r}_k)$ $\sum_{k=1}^{N} V(\underline{r}_k) = V =$

$$= \int d^3\underline{r}\; n(\underline{r}) V(\underline{r}), \quad n(\underline{r}) = \sum_{k=1}^{N} \delta(\underline{r} - \underline{r}_k)$$ $n(\underline{r})$ első kv. alakja

$$n(\underline{r}, s) = \sum_{k=1}^{N} \delta(\underline{r} - \underline{r}_k)\delta_{ss_k}$$

másodkvantált: $\Psi^+(\underline{r}, s)\Psi(\underline{r}, s)$

$$n(\underline{r}, s) = \sum_{s'}\int d^3\underline{r}'\, \Psi^+(\underline{r}', s')\delta(\underline{r} - \underline{r}')\delta_{ss'}\Psi(\underline{r}', s')$$ kicseréli a változókat.

$$\hat{V} = \int d^3\underline{r}\; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2. kv-va}}}{n(\underline{r})}\, V(\underline{r}) = \sum_s \int d^3\underline{r}\, \Psi^+(\underline{r}, s) V(\underline{r}) \Psi(\underline{r}, s)$$

11.22. SZ

SOKTEST 1.

Kétrészecske-operátor

párkorrelációs fv. op.!!!

$$P(\underline{r}, s, \underline{r}', s') = \sum_{\substack{k,l \\ k \neq l}} \delta(\underline{r}-\underline{r}_k)\delta_{s s_k} \delta(\underline{r}'-\underline{r}_l)\delta_{s' s_l}$$

Coulomb: $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\underline{r}_k-\underline{r}_l|}$

$$H_1 = \frac{1}{2}\sum_{k,l} v(\underline{r}_k, \underline{r}_l) =$$

$$= \int d^3\underline{r} \sum_{s,s'} \int d^3\underline{r}' \; P(\underline{r}, s, \underline{r}', s')\, v(\underline{r}, \underline{r}')$$

másodkvantálva: rögtön a jó operátorsorrendet kapjuk

$$P(\underline{r}, s, \underline{r}', s') = \sum_{k,l} \delta(\underline{r}-\underline{r}_k)\delta_{s s_k} \delta(\underline{r}'-\underline{r}_l)\delta_{s' s_l} - \delta(\underline{r}-\underline{r}')\delta_{ss'}$$

megsz. nélkül

$$\sum_{k=1}^{N} \delta(\underline{r}-\underline{r}_k)\,\delta_{s s'} =$$

$$= n(\underline{r}, s)\, n(\underline{r}', s') - \delta(\underline{r}-\underline{r}')\delta_{ss'}\, n(\underline{r}, s) \qquad n(\underline{r}, s) = \psi^+(\underline{r}, s)\psi(\underline{r}, s)$$

$$\psi^+(\underline{r}', s')\psi(\underline{r}', s') - \delta(\underline{r}-\underline{r}')\delta_{ss'}\,\psi^+(\underline{r}, s)\psi(\underline{r}, s) =$$

a 4 operátort ki tudom cserélni, megölik egymást.

előjellel

$$= \mp \psi^+(\underline{r}, s)\psi^+(\underline{r}', s')\psi(\underline{r}, s)\psi(\underline{r}', s') = \psi^+(\underline{r}, s)\psi^+(\underline{r}', s')\psi(\underline{r}', s')\psi(\underline{r}, s)$$

$$H_1 = \frac{1}{2}\sum_{s,s'}\int d^3\underline{r}\int d^3\underline{r}'\; \psi^+(\underline{r}, s)\psi^+(\underline{r}', s')\, v(\underline{r}, \underline{r}')\, \psi(\underline{r}', s')\psi(\underline{r}, s)$$

spinfüggő ~~[illegible]~~ esetén v ~~[illegible]~~ helyére kell írni.

- konkrét alakot is kaphatunk (???)
- szabadsághoz vissza kell írni

kicsi δf.
egyrészecske tagok:

$H_0 = \sum_i H_0(i)$ $\quad H_0 = \sum_s \int d^3 r\, \Psi^+(r,s)\, H_0\, \Psi(r,s) = \sum_{kl}$

$\sum_{kl} \langle k|H|l\rangle a_k^+ a_l$

$\langle k|H|l\rangle = \sum_s \int d^3 r\, \varphi_k^*(r,s)\, H_0(r)\, \varphi_l(r,s)$ 1r-mátrixelem

kétrészecsketagok

elsőkv. $\frac{1}{2}\sum_{k \neq l} V(r_k, r_l)$, másod. $\hat{H}_1 = \frac{1}{2}\sum_{s,s'} \int d^3 r \int d^3 r'\, \Psi^+(r,s)$
v''

$\Psi^+(r',s')\, v(r,r')\, \Psi(r',s')\, \Psi(r,s)$

$\Psi(r,s) = \sum_k \varphi_k(r,s)\, a_k$

megfordítva!!!

$a_i^+ a_j^+ a_l a_k$, $\frac{1}{2}\sum_{ijkl} \langle ij|H|kl\rangle a_i^+ a_j^+ a_l a_k$ azt tükrözi, meg az változóban $\int$-unk egyezése

$\sum_{ss'} \int d^3 r \int d^3 r'\, \varphi_k^*(r,s)\, \varphi_l^*(r',s')\, v(r,r')\, \varphi_k(r,s)\, \varphi_l(r',s')$

spinfüggetlen: $\varphi(r,s) = \phi(r)\, \chi(s)$

$\langle ij|v|kl\rangle = \delta_{m_i m_k}\, \delta_{m_j m_l} \int d^3 r \int d^3 r'\, \phi^*(r)\, \phi^*(r')\, v(r,r')$

$\sum_s \chi_m(s)\, \chi_{m'}(s) = \delta_{mm'}$

$\phi_k(r)\, \phi_l(r')$

11.22. SZ   SOKTEST 1.

homogén rendszer síkhullámbázison

$L_x L_y L_z$ téglában periodikus hf. $\phi_{\underline{k}}(\underline{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\underline{k}\underline{r}}$ peren

$\| = \Omega$, $\sqrt{V} = \sqrt{\Omega}$

$k_x = \frac{2\pi n_x}{L_x}$ $\qquad \phi_k(x+L_x, y+L_y, z) = \phi_k(x,y,z)$ stb.

$i = (\underline{k}, m)$

$\underline{k}$: imp., $m \to J_z$

egyrészecske - H

$$H_0 = \sum_{\underline{k}_1 \underline{k}_2} \sum_{m_1 m_2} a^+_{k_1 m_1} a_{k_2 m_2} \sum_s \int d^3r \, \phi^*_{k_1}(\underline{r}) \chi_m(s) \left(-\frac{\hbar^2 \Delta}{2m}\right) \phi_{k_2}(\underline{r}) \chi_{m_2}(s) =$$

$x \{ \alpha, r$

$$= \sum_{\underline{k}_1 \underline{k}_2} \sum_{m_1 m_2} \delta_{m_1 m_2} a^+_{\underline{k}_1 m_1} a_{\underline{k}_2 m_2} \int d^3r \frac{e^{-i\underline{k}_1 \underline{r}}}{\sqrt{\Omega}} \left(\frac{\hbar^2 k_2^2}{2m}\right) \frac{e^{i k_2 r}}{\sqrt{\Omega}} =$$

spin Σ $\qquad \delta_{\underline{k}_1 \underline{k}_2}$

$$= \sum_{\underline{k}_1 \underline{k}_2} \sum_{m_1 m_2} \delta_{m_1 m_2} a^+_{\underline{k}_1 m_1} a_{\underline{k}_2 m_2} \delta_{\underline{k}_1 \underline{k}_2} \frac{\hbar^2 k_2^2}{2m} = \sum_{\underline{k} m} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a^+_{\underline{k} m} a_{\underline{k} m}$$

$\underline{k}s$ $\qquad \underline{k}s \quad \underline{k}s$

$\downarrow$ vetület nem változó

- teljes térre $\int$ -ni: nem csak véges sok rácsvektor vehetünk, hanem többet is (alddimenzió), mert nem kristály!!!

11.29., Sz

$$H_0 = \sum_{\underline{k}, s} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a^+_{\underline{k}s} a_{\underline{k}s}$$

kölcsönhatási tagok:

$$\langle k_1 k_2 | v | k_3 k_4 \rangle = \frac{1}{V^2 \atop \Omega^2} \int d^3 r_1 \int d^3 r_2\, e^{-i\underline{k}_1 \underline{r}_1} e^{-i\underline{k}_2 \underline{r}_2} v(\underline{r}_{12}) e^{i\underline{k}_3 \underline{r}_1} e^{i\underline{k}_4 \underline{r}_2} =$$

$$\underline{r}_1 = \underline{R} + \frac{\underline{r}}{2}, \quad \underline{r}_2 = \underline{R} - \frac{\underline{r}}{2} \qquad |\det(\mathrm{Jac})| = 1$$

$$= \frac{1}{\Omega} \int d^3 \underline{R}\, e^{-i\underline{R}(\underline{k}_1 + \underline{k}_2 - \underline{k}_3 - \underline{k}_4)} \frac{1}{\Omega} \int d^3 \underline{r}\, e^{-\frac{i}{2}\underline{r}(\underline{k}_1 - \underline{k}_2 - \underline{k}_3 + \underline{k}_4)} v(r) =$$

spinfüggetlen pot.

$$= \delta_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2, \underline{k}_3 + \underline{k}_4} \underbrace{\frac{1}{\Omega} \int d^3 \underline{r}\, v(r) e^{-i\underline{q}\underline{r}}}_{v(q)}$$

$1/\Omega$ ~~...~~ nélkül NÉLKÜL!!!

$q = \underline{k}_1 - \underline{k}_3 = \underline{k}_4 - \underline{k}_2$ a δ miatt

$$v(q) = \int d^3 \underline{r}\, v(\underline{r})\, e^{-i\underline{q}\underline{r}}$$

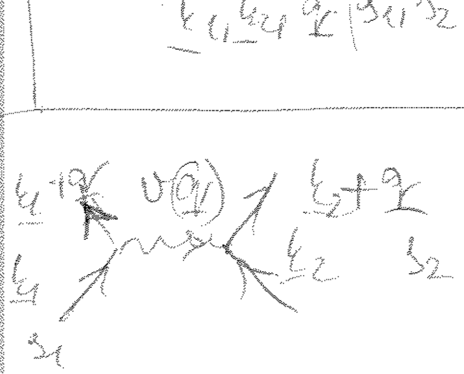
$$H_1 = \sum_{\underline{k}_1 \underline{k}_2 \underline{k}_3 \underline{k}_4} \sum_{s_1, s_2} v(\underbrace{\underline{k}_1 - \underline{k}_3}_{q}) \delta_{\underline{k}_1 + \underline{k}_2, \underline{k}_3 + \underline{k}_4} a^+_{\underline{k}_1 s_1} a^+_{\underline{k}_2 s_2} a_{\underline{k}_4, s_2} a_{\underline{k}_3, s_1} \frac{1}{2\Omega} =$$

$k_1 - k_3 = q$ legyen, így 1 Σ-t elvégezhetek

$k_3 = k_1 \quad \underline{k}_4 = \underline{k}_2, \ \underline{k}_1 \underline{k}_2 \underline{q}$ marad.

$$\boxed{= \frac{1}{2\Omega} \sum_{\underline{k}_1 \underline{k}_2 \underline{q}} \sum_{s_1 s_2} v(q)\, a^+_{\underline{k}_1 + \underline{q}, s_1} a^+_{\underline{k}_2 - \underline{q}, s_2} a_{\underline{k}_2 s_2} a_{\underline{k}_1 s_1} = H_1}$$

állandó az impulzus



Hőmérsékleti Green fv-ek

mikor dtuenui $T=0$-ba, az alapállapoti átlag kell ott, mert ? akkor az számít, itt sokaságátlagot veszünk
- véges hőmérsékletű számítás

$$H_0 = -\sum_s \int d^3\underline{r}\, \Psi^+(\underline{r},s)\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\underline{r})\right]\Psi(\underline{r},s)$$

$$H_1 = \frac{1}{2}\sum_{s,s'} \int d^3r' \int d^3\underline{r}\; \Psi^+(\underline{r},s)\,\Psi^+(\underline{r}',s')\,v(\underline{r},\underline{r}')\,\Psi(\underline{r}',s')\,\Psi(\underline{r},s)$$

nagykanonikus poti

$$\hat{K} = \hat{H} - \mu\hat{N},\quad K_0 = H_0 - \mu N,\quad K_1 = H_1 \text{ (perturbáció)}$$

$$N = \sum_s \int d^3\underline{r}\, \Psi^+(\underline{r},s)\Psi(\underline{r},s)$$

$$\beta = \frac{1}{kT}$$

$$Z = Z_G \nearrow^{\text{grand canonical}} = e^{-\beta\Omega(T,V,\mu)} = Sp\left(e^{-\beta\hat{K}}\right) = \sum_k \langle \Psi_k | e^{-\beta K} | \Psi_k\rangle$$

$$Sp(A) = \sum_k \langle k|A|k\rangle = \sum_N \sum_j \langle Nj|A|Nj\rangle = \sum_{n_1}\ldots\sum_{n_k}\ldots\langle n_1\ldots n_k\ldots|A|n\ldots\rangle$$

$$O_K(\tau) = e^{\frac{\hat{K}\tau}{\hbar}}\,\hat{O}_S\,e^{-\frac{\hat{K}\tau}{\hbar}}$$ hasonlósági trafó (többi), $\hat{O}_S$: Sch-ogr

$\tau = it$ képzetes idő

Heisenberg-szerű

$$\boxed{t \in \mathbb{R}}$$

$O_K(0) = O_S$

$O_K(\tau=0) = O_S$

$$\Psi_K^+(\underline{r},s,\tau) = e^{\frac{\hat{K}\tau}{\hbar}}\,\Psi^+(r,s)\,e^{-\frac{\hat{K}\tau}{\hbar}}$$

$$\Psi_K(\underline{r},s,\tau) = e^{\frac{\hat{K}\tau}{\hbar}}\,\Psi(\underline{r},s)\,e^{-\frac{\hat{K}\tau}{\hbar}}$$

a i idő miatt nem egymás adjungáltjai!

$$\Psi^+(\tau) \neq \left(\Psi(\tau)\right)^+$$

Ha $[H, N] = 0$, $[H, K] = 0 \Rightarrow H(\tau) = H$

nagykan. sűrűségop

$$\rho_G = \frac{e^{-\beta \hat{K}}}{Z_G}, \quad \langle A \rangle = Sp(\rho_G A)$$

mozgásegyenlet: $$\frac{d\,O(\tau)}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\left(e^{\frac{K\tau}{\hbar}} O_S e^{-\frac{K\tau}{\hbar}}\right) =$$

$$= e^{\frac{K\tau}{\hbar}} \frac{K}{\hbar} O_S e^{-\frac{K\tau}{\hbar}} - e^{\frac{K\tau}{\hbar}} O_S \frac{K}{\hbar} e^{-\frac{K\tau}{\hbar}} = \frac{1}{\hbar} e^{\frac{K\tau}{\hbar}} [K, O_S] e^{-\frac{K\tau}{\hbar}} =$$

$$\boxed{= \frac{1}{\hbar}[K, O(\tau)] = \frac{d\,O(\tau)}{d\tau}}$$

$[\Psi(\underline{r}, s, \tau), \Psi^+(\underline{r}', s', \tau)] = \delta(\underline{r} - \underline{r}')\delta_{ss'}$ azonos τ-ra!!! (EKR)

$^{B}_{F}$ $^{-}_{+}$

$$\left[e^{\frac{K\tau}{\hbar}} \Psi(\underline{r}, s) e^{-\frac{K\tau}{\hbar}}, e^{\frac{K\tau}{\hbar}} \Psi^+(\underline{r}', s') e^{-\frac{K\tau}{\hbar}}\right]_{\mp} = \underbrace{e^{\frac{K\tau}{\hbar}} \delta(\underline{r} - \underline{r}')\delta_{ss'} e^{-\frac{K\tau}{\hbar}}}_{I}$$

csak azonos τ-val működik ez.

a többi $[\Psi, \Psi]_{\pm}$, $[\Psi^+, \Psi^+]_{\pm} = 0$

véges hőmérsékletű Green-fv.:

$$\boxed{G(\underline{r}, s, \tau; \underline{r}', s', \tau') = -\langle T_\tau \Psi(\underline{r}, s, \tau) \Psi^+(\underline{r}', s', \tau') \rangle =}$$

termo állapot átlagolás.

T_τ: τ rendező ~~...~~ op, bozonra, fermionra eltérő

$$= Sp\left(e^{-\beta K} \frac{1}{Z} \Psi(\underline{r}, s, \tau) \Psi^+(\underline{r}', s', \tau')\right), \quad \tau > \tau'$$

fermionra előjelváltás

$$= Sp\left(\frac{e^{-\beta K}}{Z} \Psi^+(\underline{r}', s', \tau') \Psi(\underline{r}, s, \tau)\right) \cdot (\mp 1) \quad \tau < \tau'$$

11.29., SZ

SOKTEST 1

és egy időben $\tau' = \tau + \eta$, $\eta > 0$, infinitezimális, $\eta \to 0+$ akkor mindjárt sűr. op.-t kapunk

$$\sum_s G(\underline{r}, s, \tau, \underline{r}', s', \tau^+) = \mp \sum_s Sp\left(\varsigma_G \psi^+(\underline{r}, s, \tau) \psi(\underline{r}', s', \tau)\right) =$$

$$= \mp e^{\beta\Omega} \sum_s Sp\left(e^{-\beta K} e^{\frac{K\tau}{\hbar}} \psi^+(\underline{r}, s) e^{-\frac{K\tau}{\hbar}} e^{\frac{K\tau}{\hbar}} \psi(\underline{r}, s) e^{-\frac{K\tau}{\hbar}}\right) =$$

nyom alatt átírtam a tényezőket + azonos művelő hatványai fcs-nek

$$= \mp \underbrace{e^{\beta\Omega}}_{\text{nevező}} \sum_s Sp\left(e^{-\beta K} \underbrace{\psi^+(\underline{r}, s) \psi(\underline{r}, s)}_{n(\underline{r}, s)}\right) = \mp \langle n(\underline{r}, s) \rangle$$

$\langle \sum_s n(\underline{r}, s) \rangle$ inkább!

<u>tulajdonságok</u> 1. $X = (\underline{r}, s)$ hely és spin

$$G(x, \tau; x', \tau') \stackrel{1.}{=} G(x, \tau - \tau'; x', 0) = G(x, \tau - \tau_0; x', \tau' - \tau_0)$$

időeltolási invarianciára emlékeztet.

első $=$-séget bizonyítjuk a) $\tau > \tau'$

$$G(x, \tau; x', \tau') = -Sp\left(\varsigma_G e^{\frac{K\tau}{\hbar}} \psi(x) e^{-\frac{K\tau}{\hbar}} e^{\frac{K\tau'}{\hbar}} \psi^+(x') e^{-\frac{K\tau'}{\hbar}}\right) =$$

$$= -Sp\left(\varsigma_G e^{\frac{K(\tau - \tau')}{\hbar}} \psi(x) e^{-\frac{K(\tau - \tau')}{\hbar}} \psi^+(x')\right) = -Sp\left(\varsigma_G \psi(x, \tau - \tau') \psi^+(x', 0)\right) =$$

$$= G(x, \tau - \tau'; x', 0) \quad \checkmark \checkmark$$

2. legyen $-\beta\hbar \leq \tau \leq 0$! ~~vagfordul~~ az időrendezés érvényesül, mert ofan a sorrend

$$G(x, \tau, x', 0) =: G(x, x', \tau) = \pm G(x, x', \tau + \beta\hbar)$$

$$G(x, x', \tau) = -Sp\left(\varsigma_G \psi(x, \tau) \psi^+(x', 0)\right) = -Sp\left(\varsigma_G T_\tau\left(\psi(x, \tau) \psi^+(x', 0)\right)\right) =$$

$= \mp e^{\beta\Omega} Sp\left(e^{-\beta K} \psi^+(x',0)\, \psi(x,\tau)\right) = \mp e^{\beta\Omega} Sp\left(\psi(x,\tau) e^{-\beta K} \psi^+(x',0)\right) =$

$= \mp e^{\beta\Omega} Sp\left(\underbrace{e^{-\beta K} e^{\beta K}}_{\text{1-et szúrok be}} \psi(x,\tau) e^{-\beta K} \psi^+(x',0)\right) = \mp e^{\beta\Omega} Sp\left(e^{-\beta K} \psi(x,\tau+\beta\hbar)\psi^+(x',0)\right)$

jó a sorrend, T_τ eleje

$= \mp G(x, \tau+\beta\hbar, x', 0)$

<u>Szabad (nemkölcsönható) gáz Green-fv-e.</u>

energia

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\underline{r})\right]\varphi_{\underline{k}}(\underline{r},s) = e_{\underline{k}}\, \varphi_{\underline{k}}(\underline{r},s)$$

<u>homogén rendszerre</u>: $V=0$, $k=(\underline{k}, m)$, $\varphi_{\underline{k}}(\underline{r},s) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i\underline{k}\underline{r}} \chi_m(s)$

$\langle \varphi_{\underline{k}} | \varphi_{\underline{k}'}\rangle = \delta_{\underline{k}\underline{k}'}$

$H = \sum_{\underline{k}} e_{\underline{k}}\, a_k^+ a_k \qquad K_0 = H_0 - \mu\hat{N} = \sum_k (e_k - \mu)\, a_k^+ a_k, \; K_1 = 0, \; K = K_0$

$\psi(\underline{r},s) = \sum_k \varphi_k(\underline{r},s)\, a_k \qquad \psi(\underline{r},s,\tau) = \sum_k \varphi_k(\underline{r},s)\, \underbrace{e^{\frac{K\tau}{\hbar}} a_k e^{-\frac{K\tau}{\hbar}}}_{a_k(\tau)}$

$\hookrightarrow$ ezt fejleszti az $e^{\frac{K\tau}{\hbar}}$

$\psi^+(\underline{r},s,\tau) = \sum_k \varphi_k^*(\underline{r},s)\, a_k^+(\tau) \qquad a_k^+(\tau) \neq (a_k(\tau))^+$

azonosság: $[O_1 O_2, O_3] = O_1(O_2 O_3 \mp O_3 O_2) - (O_3 O_1 \mp O_1 O_3) O_2$

$\forall 3$ vagy B

csak kommutátor!?!

$[O_1 O_2, O_3] = O_1 [O_2, O_3]_{\mp\, {}^B_F} - [O_3, O_1]_{\mp} O_2$

$\hbar \frac{\partial}{\partial\tau} a_k(\tau) = [K_0, a(\tau)] = e^{\frac{K_0\tau}{\hbar}} [K_0, a]\, e^{-\frac{K_0\tau}{\hbar}} = e^{\frac{K_0\tau}{\hbar}} \sum_{k'} (e_{k'} - \mu)[a_{k'}^+ a_{k'}, a_k] \cdot e^{-\frac{K_0\tau}{\hbar}}$

II. 29, SZ SOKTEST 1.

$[a_\ell, a_{\ell'}]_\mp = 0$

$$\hbar\frac{\partial}{\partial\tau} a_\ell(\tau) = -e^{\frac{K_0\tau}{\hbar}}\Big(\sum_{\ell'}(\varepsilon_{\ell'}-\mu)\underbrace{[a_{\ell'}^+, a_\ell]_\mp}_{\delta_{\ell\ell'}} a_{\ell'}\Big) e^{-\frac{K_0\tau}{\hbar}} = -(\varepsilon_\ell-\mu)\, a_\ell(\tau)$$

teljesen hasonlóan:

$$\hbar\frac{\partial}{\partial\tau} a_\ell^+(\tau) = (\varepsilon_\ell-\mu)\, a_\ell^+(\tau)$$ nincsen − jel!!!

$\tau = 0$-ban Sch:

$$\left.\begin{aligned} a_\ell^+(\tau) &= a_\ell^+ e^{\frac{(\varepsilon_\ell-\mu)}{\hbar}\tau} \\ a_\ell(\tau) &= a_\ell\, e^{-\frac{\varepsilon_\ell-\mu}{\hbar}\tau} \end{aligned}\right\}$$ ismerjük a_ℓ, a_ℓ^+ τ-függését, kiírhatjuk a zomból a nemklh-ó rendszerben.

III. 7., SZ

$$a_k^+(\tau) := e^{\frac{K\tau}{\hbar}} a_\ell^+ e^{-\frac{K\tau}{\hbar}} = a_\ell^+ e^{\frac{\varepsilon_\ell-\mu}{\hbar}\tau}$$

$$a_\ell(\tau) = e^{\frac{K\tau}{\hbar}} a_\ell\, e^{-\frac{K\tau}{\hbar}} = a_\ell\, e^{-\frac{\varepsilon_\ell-\mu}{\hbar}\tau}$$

akkor oldhatom meg a diff. egyenletet, ha csak ~~...~~ 1r-tagok vannak K-ban (nemklh-ó rendszer tulajdonsága) ebből a klh-óra következtetünk)

$$n_\ell^{(0)} = \langle a_\ell^+ a_\ell\rangle_0$$ nemklh-ó rendszerben vett várható érték

származtatjuk

$$1 = \frac{1}{Z_0}\, Sp\left(e^{-\beta K_0}(a_\ell a_\ell^+ \mp a_\ell^+ a_\ell)\right)$$

mert $[a_\ell, a_\ell^+]_{\mp_B^F} = \delta_{\ell\ell}$

$$Sp\left(e^{-\beta K_0} a_k a_k^+\right) = Sp\left(a_k^+ e^{-\beta K_0} a_k\right) \underset{\text{műv.-e}}{\overset{\text{fiz.}}{=}} Sp\left(e^{-\beta K_0} \underbrace{e^{\beta K_0} a_k^+ e^{-\beta K_0}}_{\tau=\beta\hbar} a_k\right)$$

$$= Sp\left(e^{-\beta K_0} a_k^+(\beta\hbar)\, a_k\right) = Sp\left(e^{-\beta K_0} \underset{\text{időfüggés beírva}}{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)}} a_k^+ a_k\right) =$$

$$= e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)} Sp\left(e^{-\beta K_0} a_k^+ a_k\right)$$

$$1 = \frac{1}{Z_G} Sp\left[e^{-\beta K_0}\left(a_k a_k^+ \mp a_k^+ a_k\right)\right] = \left(e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)} \mp 1\right) Sp\left(e^{-\beta K_0} a_k^+ a_k\right)$$

$$= \left(e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)} \mp 1\right)\langle a_k^+ a_k\rangle \Rightarrow \langle a_k^+ a_k\rangle = n^{(0)} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)} \mp 1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \langle a_k^+ a_{k'}\rangle_0 &= \delta_{kk'}\, n_k^{(0)} \\ \langle a_k a_{k'}^+\rangle &= \delta_{kk'}\left(1 \underset{F}{\overset{B}{\pm}} n_k^{(0)}\right) \end{aligned}}$$

szabad Green-fv.

$$G_0(\underline{r}, s, \tau; \underline{r}', s', \tau') = -\frac{Sp\left(e^{-\beta K_0} T_\tau\left(\psi(\underline{r}, s, \tau)\, \psi^+(\underline{r}', s', \tau')\right)\right)}{Sp\left(e^{-\beta K_0}\right)} =$$

$$= e^{-\beta\Omega_0} Sp\left[e^{-\beta K_0} T_\tau\left(\psi(\underline{r}, s, \tau)\, \psi^+(\underline{r}', s', \tau')\right)\right]$$

$\tau > \tau'$: most már csak összerakjuk a fentieket.

móduskifejtés

$$\boxed{G_0(\underline{r}, s, \tau; \underline{r}', s', \tau') = -\sum_k \varphi_k(\underline{r}, s)\, \varphi_k^*(\underline{r}', s')\, e^{\frac{(\varepsilon_k-\mu)}{\hbar}\tau}\, e^{\frac{\varepsilon_k-\mu}{\hbar}\tau'}}$$

$$\langle a_k a_k^+\rangle = -\sum_k \varphi_k(\underline{r}, s)\, \varphi_k^*(\underline{r}', s')\, e^{-\frac{\varepsilon_k-\mu}{\hbar}(\tau'-\tau)} \left(1 \pm n_k^{(0)}\right)$$

III. 7. (S2) SOKTEST 1

$$\boxed{G(\underline{r}, s, \tau; \underline{r}', s', \tau')} = \mp \sum_k \varphi_k(\underline{r}, s)\, \varphi_k^*(\underline{r}', s')\, e^{-\frac{\varepsilon_k - \mu}{\hbar}(\tau' - \tau)} \langle a_k^+ a_k \rangle$$

ugyanaz, mint előbb

$\boxed{\tau < \tau'}$

$$\mp \sum_k \varphi_k(\underline{r}, s)\, \varphi_k^*(\underline{r}', s')\, e^{-\frac{\varepsilon_k - \mu}{\hbar}(\tau' - \tau)}\, n_k^{(0)}$$

egyenlőség: $\tau = \tau'$ $a_k^+ a_k$ -s tag

$N_0 = \sum_k n_k^{(0)}$ az atomok száma

$E_0(T, \mu) = \cancel{\sum_k (\varepsilon_k - \mu) a_k^+ a_k}$ $\sum_k \varepsilon_k n_k^{(0)}$

egyensúlyi termodinamikai mennyiségek

kommutálni kell ennie a $\cdot$ jelet.

$$N(T, V, \mu) = \mp \sum_s \int d^3\underline{r}\, G(\underline{r}, s, \tau; \underline{r}, s, \tau+)$$

csatolásnál | nincsen! — előreadja a hátsót

kiösszegezzük spin, tere

$$\langle T \rangle = \mp \sum_s \int d^3\underline{r} \lim_{\tau' \to \tau+} \left(\lim_{s' \to s}\right) \lim_{\underline{r}' \to \underline{r}} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta G(\underline{r}, s, \tau; \underline{r}', s', \tau') \right]$$

elhagyható itt (spinfüggetlen mátrixelem)

$$\sum_s \int d^3\underline{r}\, \Psi^+(\underline{r}, s) \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\right) \Psi(\underline{r}, s)$$

$$\langle V \rangle = \lim_{\tau' \to \tau+} \mp \sum_s \int d^3\underline{r}\, V(\underline{r})\, G(\underline{r}, s, \tau; \underline{r}, s, \tau')$$

azonosság: $[AB, C] = A[B, C] - [C, A]B$

$$\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial \tau}(\underline{r}, s, \tau) = [K, \Psi(\underline{r}, s, \tau)]$$ „Heisenberg"-egyenlet

K: kölcsönható hamiltoni!

$$\Big[K_0, \Psi(\underline{r}, s, \tau)\Big] = \Big[\sum_{s'} \int d^3 r' \underbrace{\Psi^+(\underline{r}', s', \tau)}_{A} \underbrace{\left[\frac{\hbar^2}{2m}\Delta' + V(\underline{r}') - \mu\right] \Psi(\underline{r}', s', \tau)}_{B}, \underbrace{\Psi(\underline{r}, s, \tau)}_{C}\Big] =$$

$[B, C] = 0$, $[C, A]$ marad

$$= -\sum_{s'} \int d^3 \underline{r}' \underbrace{\left[\Psi(\underline{r}, s, \tau), \Psi^+(\underline{r}', s', \tau)\right]_{\mp}}_{\delta(\underline{r}-\underline{r}')\delta_{ss'}} \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\underline{r}') - \mu\right) \Psi(\underline{r}', s', \tau) =$$

$$= -\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\underline{r}) - \mu\right) \Psi(\underline{r}, s, \tau)$$ első tag

2. tag:

$$\Big[2K_1, \Psi(\underline{r}, s, \tau)\Big] = \sum_{s'} \sum_{s''} \int d^3 \underline{r}' \int d^3 \underline{r}'' \Big[\underbrace{\Psi^+(\underline{r}', s', \tau)\Psi^+(\underline{r}'', s'', \tau)}_{A} \, v(\underline{r}' - \underline{r}'') \underbrace{\Psi(\underline{r}'', s'', \tau)\Psi(\underline{r}', s', \tau)}_{B}, \underbrace{\Psi(\underline{r}, s, \tau)}_{C}\Big] =$$

ugyanúgy csak a 2. tag marad

$$= -\sum_{s'}\sum_{s''} \int d^3 \underline{r}' \int d^3 \underline{r}'' \left[\Psi(\underline{r}, s, \tau), \Psi^+(\underline{r}', s', \tau)\Psi^+(\underline{r}'', s'', \tau)\right] v(\underline{r}' - \underline{r}'') \cdot \Psi(\underline{r}'', s'', \tau)\Psi(\underline{r}', s', \tau)$$

fontos a jó sorrend!!!

$v(\underline{r} - \underline{r}') = v(\underline{r}' - \underline{r})$ spinfüggőnél ez bonyolultabb, más a szimmetria

$$[A, BC] = [A, B]_{\mp} C \mp B [C, A]_{\mp}$$

$$\left[\Psi(\underline{r}, s, \tau), \Psi^+(\underline{r}', s', \tau)\Psi^+(\underline{r}'', s'', \tau)\right] = \left[\Psi(\underline{r}, s, \tau), \Psi^+(\underline{r}', s', \tau)\right]_{\mp} \Psi^+(\underline{r}'', s'', \tau)$$

$$\mp \Psi^+(\underline{r}', s', \tau)\left[\Psi^+(\underline{r}'', s'', \tau), \Psi(\underline{r}, s, \tau)\right] = \delta(\underline{r} - \underline{r}')\delta_{ss'} \Psi^+(\underline{r}'', s'', \tau) \pm$$

$$\pm \delta(\underline{r} - \underline{r}'')\delta_{ss''} \Psi^+(\underline{r}', s', \tau)$$

III. 7, Sz

SOKTEST 1.

$$[2K_1, \psi(\underline{r}, s, \tau)] = -\sum_{s''}\int d^3\underline{r}'' \, \psi^+(\underline{r}'', s'', \tau)\, v(\underline{r}-\underline{r}'')\, \psi(\underline{r}'', s'', \tau)\,\psi(\underline{r}, s, \tau)$$

$$\psi(\underline{r}, s, \tau) \mp \sum_{s'}\int d^3\underline{r}' \, \psi^+(\underline{r}', s', \tau)\, v(\underline{r}'-\underline{r})\, \psi(\underline{r}, s, \tau)\,\psi(\underline{r}', s', \tau) =$$

$r'' \to r'$ (2)

$s'' \to s'$ (1)

szimm. tell., hogy $v(\underline{r}-\underline{r}')$-t kiválhassuk belőle

újonan fölcserélhetően fermionok előjelet vált, $\mp \to -$

$$\boxed{-2\sum_{s'}\int d^3\underline{r}' \, \psi^+(\underline{r}', s', \tau)\, v(\underline{r}-\underline{r}')\, \psi(\underline{r}', s', \tau)\,\psi(\underline{r}, s, \tau) = [2K_1, \psi(\underline{r}, s, \tau)]}$$

cél!

$$\hbar\left\langle \psi^+(\underline{r}', s', \tau')\frac{\partial}{\partial\tau}\psi(\underline{r}, s, \tau)\right\rangle = -\left\langle \psi^+(\underline{r}', s', \tau')\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r) - \mu\right)\psi(\underline{r}, s, \tau)\right\rangle$$

$$-\sum_{s''}\int d^3\underline{r}''\left\langle \psi^+(\underline{r}', s', \tau)\,\psi^+(\underline{r}'', s'', \tau)\, v(\underline{r}-\underline{r}'')\,\psi(\underline{r}'', s'', \tau)\,\psi(\underline{r}, s, \tau)\right\rangle$$

ezt fejezzük ki

$\tau' \to \tau+$

$r' \to r$

$s' \to s$

$\int d^3\underline{r} \sum_s$ további műveletek

$$\langle K_1\rangle = \langle H_1\rangle = \mp\frac{1}{2}\sum_s\int d^3\underline{r} \lim_{r'\to r}\lim_{s'\to s}\lim_{\tau'\to\tau+}\left[\hbar\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\hbar^2\Delta}{2m} - V(r) + \mu\right] G(\underline{r}, s, \tau; \underline{r}', s', \tau')$$

levontam H_0-t

$$E = \langle T + V + H_1\rangle = \mp\frac{1}{2}\sum_s\int d^3\underline{r}\lim_{r'\to r}\lim_{s'\to s}\lim_{\tau'\to\tau+}\left(-\hbar\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r) + \mu\right) G(\underline{r}, s, \tau; \underline{r}', s', \tau')$$

1-es szorzó nem ½-del!

μ marad

belső E

alapáll. E

$T=0$-n számolunk temorát. Kell a Φ nagykan. pot.

$H(\lambda) = H_0 + \lambda H_1$ bonyolítási változó, $\lambda = 0$ szabad rendszer

$\lambda = 1$: fizikai / kölcsönható rendszer.

$$K(\lambda) = K_0 + \lambda K_1$$

$$Z_G^{(\lambda)} = e^{-\beta \Omega_\lambda(T,V,\mu)} = Sp\left(e^{-\beta K(\lambda)}\right)$$

$$\Omega_\lambda = -\frac{1}{\beta} \ln\left(Z_G^{(\lambda)}\right) \qquad \frac{\partial \Omega_\lambda}{\partial \lambda} = -kT \frac{1}{Z_G^{(\lambda)}} \frac{\partial Z_G^{(\lambda)}}{\partial \lambda}$$

$$Z_G^{(\lambda)} = Sp \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{n!} K^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{n!} Sp(K^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{n!} Sp\left[(K_0 + \lambda K_1)^n\right]$$

$$\frac{\partial Z_G^{(\lambda)}}{\partial \lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{n!} Sp\left(n (K_0 + \lambda K_1)^{n-1} K_1\right) =$$

Sp miatt végeztem el

$n=1$-től érdekes

$$= -\beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\beta)^{n-1}}{(n-1)!} Sp\left[(K_0 + \lambda K_1)^{n-1} K_1\right] \underset{l=n-1}{=} -\beta\, Sp\left(e^{-\beta K(\lambda)} K_1\right)$$

$$\frac{\partial Z_G^{(\lambda)}}{\partial \lambda} = \uparrow$$

$$\frac{\partial \Omega_\lambda}{\partial \lambda} = +\frac{\beta}{\beta} \frac{1}{Z_G^{(\lambda)}} \frac{\partial Z_G^{(\lambda)}}{\partial \lambda} = \frac{1}{Z_G^{(\lambda)}} Sp\left(e^{-\beta K_\lambda} K_1\right) = \langle K_1 \rangle_\lambda = \frac{1}{\lambda} \langle \lambda K_1 \rangle_\lambda$$

$$\frac{\partial \Omega_\lambda}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} \langle \lambda K_1 \rangle_\lambda \qquad \int_0^1 d\lambda$$

$$\boxed{\Omega = \Omega_0 + \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \langle \lambda K_1 \rangle_\lambda = \Omega_0(T,V,\mu) \mp \sum_s \int d^3r \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \lim_{r' \to r} \lim_{\tau' \to \tau+} \frac{1}{2} \left(-\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\hbar^2 \Delta}{2m} - V(r) + \mu\right) G^{(\lambda)}(r, s, \tau; r', s', \tau')}$$

részfiz: λ ~ futó csatolási állandó

III. 14., SZ

Szirmay helyettesíti Csordást.
Ez az előadás a formalizmusról szól.
összege perturbációs sorral a szabad rendszer átlagaira vezetjük vissza az átlagokat
Feynman-diagramokat fogunk számolni.

Perturbációszámítás

$$O_K(\tau) = e^{\frac{K\tau}{\hbar}} O_S e^{-\frac{K\tau}{\hbar}} \qquad \hbar \partial_\tau O_K(\tau) = [K, O_K(\tau)]$$

kölcsönhatási kép

$$O_I(\tau) := e^{\frac{K_0\tau}{\hbar}} O_S e^{-\frac{K_0\tau}{\hbar}} \qquad K = K_0 + K_1$$

ezért $\hbar \partial_\tau O_I(\tau) = [K_0, O_I(\tau)]$ az operátorok a szabad rendszernek megfelelően fejlődnek

Green-fvt K-képben kell számolni.

$$O_K(\tau) = \cancel{e^{\frac{K\tau}{\hbar}} O} \; \underbrace{e^{\frac{K\tau}{\hbar}} e^{-\frac{K_0\tau}{\hbar}}}_{} \; O_I(\tau) \; \underbrace{e^{\frac{K_0\tau}{\hbar}} e^{-\frac{K\tau}{\hbar}}}_{= U(\tau,0)}$$

visszatranszformálás

$$= U(0,\tau) \qquad O_S$$

$$\boxed{U(\tau_1,\tau_2) := e^{\frac{K_0\tau_1}{\hbar}} e^{-\frac{K(\tau_1-\tau_2)}{\hbar}} e^{-\frac{K_0\tau_2}{\hbar}}}$$

$T=0$ a S-mátrix, csak ott valós az idő

félcsoport-tul.

tul.: 1. $U(\tau,\tau) = I$ 2. $U(\tau_1,\tau_2)\,U(\tau_2,\tau_3) = U(\tau_1,\tau_3)$

3. $U(\tau_1,\tau_2)^{-1} = U(\tau_2,\tau_1)$

$\rightarrow$ U-t állítjuk elő perturbációval.

U mozgásegyenlete:

$$\hbar\partial_t U(\tau,\tau') = e^{\frac{K_0\tau}{\hbar}}\underbrace{(K_0-K)}_{-K_1}\, e^{-\frac{K(\tau-\tau')}{\hbar}}\, e^{-\frac{K_0\tau'}{\hbar}}$$

$$I = e^{-\frac{K_0\tau}{\hbar}}e^{\frac{K_0\tau}{\hbar}} \quad \text{fiz. műv.}$$

$$\hbar\partial_t U(\tau,\tau') = -e^{\frac{K_0\tau}{\hbar}} K_1\, e^{-\frac{K_0\tau}{\hbar}}\, e^{\frac{K_0\tau}{\hbar}}\, e^{-\frac{K(\tau-\tau')}{\hbar}}\, e^{-\frac{K_0\tau'}{\hbar}}$$

$$\hbar\partial_t U(\tau,\tau') = -K_{1I}(\tau)\, U(\tau,\tau') \quad \Big/ \int_{\tau'}^{\tau} d\tau$$

$$U(\tau,\tau') = I - \frac{1}{\hbar}\int_{\tau'}^{\tau} d\tau_1\, K_{1,I}(\tau_1)\, U(\tau_1,\tau')$$

iteratív megoldás: először I

1. $U^{(0)}(\tau,\tau') = I$
2. $U^{(1)}(\tau,\tau') = I - \frac{1}{\hbar}\int_{\tau'}^{\tau} d\tau_1 K_{1I}(\tau_1)$
3. $U^{(2)}(\tau,\tau') = I - \frac{1}{\hbar}\int_{\tau'}^{\tau} d\tau_1 K_{1I}(\tau_1) + \frac{1}{\hbar^2}\int_{\tau'}^{\tau} d\tau_1 \int_{\tau'}^{\tau_1} d\tau_2 K_{1I}(\tau_1) K_{1I}(\tau_2)$

$$U(\tau,\tau') = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{\hbar}\right)^k \int_{\tau'}^{\tau} d\tau_1 \int_{\tau'}^{\tau_1} d\tau_1 \dots \int_{\tau'}^{\tau_{k-1}} d\tau_n K_{1I}(\tau_1)\dots K_{1I}(\tau_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{\hbar}\right)^k \int_{\tau'}^{\tau} d\tau_1 \dots d\tau_k \frac{1}{k!} T_\tau\left(K_{1I}(\tau_1)\dots K_{1I}(\tau_k)\right)$$

Hogyan adódik a τ-rendezés?

$$\int_{\tau'}^{\tau} d\tau_1 \int_{\tau'}^{\tau_1} d\tau_2\, f(\tau_1,\tau_2) = \int_{\Delta} d\tau_1 d\tau_2\, f(\tau_1,\tau_2) = \frac{1}{2}\left[\int_{\Delta} d\tau_1 d\tau_2\, f(\tau_1,\tau_2) + \int d\tau_1 d\tau_2\, f(\tau_2,\tau_1)\right] =$$

felső Δ-re $\int$-unk

24

III. 14., SZ SOKTEST 1.

$= \frac{1}{2}\int d\tau_1 \int d\tau_2\, T_\tau f(\tau_1, \tau_2)$

$\square$ nagyobb időargumentumot teszi balra

~~~~ n $\int$-re $n!$-os lehagyados kell.

$$Z_G = e^{-\beta\Omega} = Sp\left(e^{-\beta K}\right) = Sp\left(e^{-\beta K_0}\, U(\beta\hbar, 0)\right)$$

$$U(\beta\hbar, 0) = e^{K_0 \beta}\, e^{-\beta K}$$

$$e^{-\beta\Omega} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!}\int_0^{\beta\hbar} d\tau_1 \dots d\tau_n\, Sp\left(e^{-\beta K_0}\, T_\tau K_{1I}(\tau_1)\dots K_{1I}(\tau_n)\right)$$

Green-fv.: $G(x, \tau, x', \tau') = -\frac{1}{Z_G} Sp\left(e^{-\beta K} T_\tau \psi(x, \tau)\psi^+(x', \tau')\right)$

$\boxed{\tau > \tau'}$ $G(x, \tau, x', \tau') = -\left[Sp\left(e^{-\beta K_0}\, U(\beta\hbar, 0)\right)\right]^{-1} Sp\Big(e^{-\beta K_0}\, U(\beta\hbar, 0)$

$\cdot U(0, \tau)\, \psi_I(x, \tau)\, U(\tau, 0)\, U(0, \tau')\, \psi_I^+(x', \tau')\, U(\tau', 0)\Big) =$

összevonható

$$= -\left[Sp\left(e^{-\beta K_0}\, U(\beta\hbar, 0)\right)\right]^{-1} Sp\left(e^{-\beta K_0}\, U(\beta\hbar, \tau)\, \psi_I(x, \tau)\, U(\tau, \tau')\, \psi_I^+(x', \tau')\, U(\tau', 0)\right)$$

$\beta\hbar > \tau > \tau' (> 0)$

$\tau' > \tau$ $\boxed{\beta\hbar > \tau' > \tau > 0}$

$$G(x, \tau, x', \tau') = \mp\left[Sp\left(e^{-\beta K_0}\, U(\beta\hbar, 0)\right)\right]^{-1} Sp\Big(e^{-\beta K_0}\, U(\beta\hbar, \tau')\, \psi_I^+(x', \tau')$$

($-$: B, $+$: F)

$U(\tau', \tau)\, \psi_I(x, \tau)\, U(\tau, 0)\Big)$

jobbról balra nő az időargumentumok
~~~~

$G(x,\tau,x',\tau') = -\left[Sp\left(e^{-\beta K_0}\, \mathcal{U}(\beta\hbar,0)\right)\right]^{-1} Sp\left[e^{-\beta K_0}\, T_\tau\left(\mathcal{U}(\beta\hbar,0)\right.\right.$

$\left.\left.\psi_I(x,\tau)\, \psi_I^+(x',\tau')\right)\right]$

a perturbációs sort rendezi τ szerint T_τ

$$\boxed{G(x,\tau,x',\tau')} = -\left(Sp\, e^{-\beta K_0}\, \mathcal{U}(\beta\hbar,0)\right)\ldots =$$

$$= -\left[Sp\left(e^{-\beta K_0} \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!}\int_0^{\tau} d\tau_1 \ldots d\tau_n\, T_\tau\left[K_{1I}(\tau_1)\ldots K_{1I}(\tau_n)\right]\right)\right]^{-1}\cdot$$

$$\cdot\, Sp\left(e^{-\beta K_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!}\int_0^{\tau} d\tau_1 \ldots d\tau_n\, T_\tau\left[K_{1I}(\tau_1)\ldots K_{1I}(\tau_n)\, \psi_I(x,\tau)\, \psi_I^+(x',\tau')\right]\right)$$

szabad rendszerre átlagolunk.

ψ operátor khi képben már 6 operátornak kell a várható-értékét ... kiírni, első rendben

Wick-tétel

$$\alpha_k = \begin{cases} a_k \\ a_k^+ \end{cases} \qquad \lambda_k = \begin{cases} +1, & \alpha_k = a_k^+ \\ -1, & \alpha_k = a_k \end{cases}$$

egyszerű a jelölés: $\alpha_k(\tau) = \alpha_k(0)\, e^{\lambda_k(\varepsilon_k-\mu)\frac{\tau}{\hbar}}$

$\alpha_{kI}(\tau)$!!

Párosítás: időfüggetlen eset

$$\overline{\alpha_a \alpha_b} = \frac{[\alpha_a, \alpha_b]_{\mp}}{1 \mp e^{\lambda_a(\varepsilon_a-\mu)\beta}}$$

csak azonos jelölő és keltő-eltüntető pár esetén találunk érdekességet

$$\overline{a_k a_k^+} = \frac{[a_k, a_k^+]_{\mp}}{1 \mp e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}} = \frac{1}{1 \mp e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}} = 1 \pm n_k^{(0)}$$

$$\overline{a_k^+ a_k} = \frac{[a_k^+, a_k]_{\mp}}{1 \mp e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)}} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)} \mp 1} = n_k^{(0)}$$

Két esetben állandót kapunk.

$$\boxed{\overline{\alpha_a \alpha_b} = \langle \alpha_a \alpha_b \rangle_0}$$

26

III. 14.) SZ

SOKTEST 1.

csak ps számú op. várható értéke különbözhet 0-tól, mert ptl operátornál eltérő részecskeszámokat számunk össze skalárisan

$Sp(\varrho_0 \alpha_a \alpha_b \ldots \alpha_f) = Sp(\varrho_0 [\alpha_a, \alpha_b]_\mp \alpha_c \ldots \alpha_f) \pm Sp(\varrho_0 \alpha_b [\alpha_a, \alpha_c] \ldots$

$\ldots \alpha_d \ldots \alpha_f) + Sp\, \varrho_0 \alpha_b \alpha_c [\alpha_a, \alpha_d] \alpha_e \ldots \alpha_f]_\mp \ldots + \underbrace{Sp[\varrho_0 \alpha_b \alpha_c \ldots \alpha_f \alpha_a]}_{\text{előrevitt}}$

$\alpha_a \varrho_0 = \frac{\alpha_a e^{-\beta K_0}}{Z_0} = \frac{e^{-\beta K_0}}{Z} e^{\beta K_0} \alpha_a e^{-\beta K_0} = \frac{e^{-\beta K_0}}{Z} \alpha_{a,I}(\beta\hbar)$

meg-oldott $= \frac{e^{-\beta K_0}}{Z} \alpha_a e^{t_a \beta(\varepsilon_a - \mu)}$

utolsó tag: $Sp(\varrho_0 \alpha_a \alpha_b \ldots \alpha_f) e^{t_a(\varepsilon_a - \mu)\beta}$ az eh-val, megfelelő átírom baloldalra, leosztok kapom meg a párosításokat.

$Sp(\varrho_0 \alpha_a \alpha_b \ldots \alpha_f) = Sp(\varrho_0 \overbrace{\alpha_a \alpha_b} \ldots \alpha_f) \pm Sp(\varrho_0 \alpha_b \overbrace{\alpha_a \alpha_c} \alpha_d \ldots \alpha_f) +$

$+ Sp(\varrho_0 \alpha_b \alpha_c \overbrace{\alpha_a \alpha_d} \alpha_e \ldots \alpha_f) \pm \ldots$

új jelölés!

$Sp(\varrho_0 \alpha_a \alpha_b \ldots \alpha_f) = Sp(\varrho_0 \overbrace{\alpha_a \alpha_b} \alpha_c \ldots \alpha_f) + Sp\, \varrho_0 (\overbrace{\alpha_a \alpha_b \alpha_c \ldots \alpha_f}^{\text{fölcserél - 1 elő-jelfélemonrm}}) +$

+ többi
→ kivihetem a párosítást a nyomképzés elé és kettővel csökkent az operátorok száma!

$\mathrm{Sp}(\rho_0\, a_a a_b a_c \dots a_f) = \overbrace{a_a a_b} \overbrace{a_c \dots a_f} + \overbrace{a_a a_b a_c} a_d \dots a_f \dots$

összes lehetséges ~~[illegible]~~ párt megalkotjuk

Wick-tétel időfüggő operátorra
τ fgg.

τ-függő operátorokra

$\overbrace{a_a(\tau_a)\, a_b(\tau_b)} = \langle T_\tau\, a_a(\tau_a)\, a_b(\tau_b)\rangle_0 =$ szabad rendszerre

$a_a e^{\pm(\varepsilon_a-\mu)\frac{\tau_a}{\hbar}}\; a_b e^{\pm(\varepsilon_b-\mu)\frac{\tau_b}{\hbar}}$

erre hat a T_τ, $\forall$ 2 szám.

$$= \begin{cases} \overbrace{a_a a_b}\; e^{\pm(\varepsilon_a-\mu)\frac{\tau_a}{\hbar}}\, e^{\pm(\varepsilon_b-\mu)\frac{\tau_b}{\hbar}} \\ \pm \overbrace{a_b a_a}\; e^{\pm(\varepsilon_a-\mu)\frac{\tau_a}{\hbar}}\, e^{\pm(\varepsilon_b-\mu)\frac{\tau_b}{\hbar}} \end{cases}$$

$\langle T_\tau\, a_a(\tau_a)\, a_b(\tau_b) \dots a_f(\tau_f)\rangle \overset{\rho s}{\underset{\text{idő op}}{=}} \overbrace{a_a(\tau_a)\, a_b(\tau_b)}\, \overbrace{a_c(\tau_c)\, a_d(\tau_d)} \dots$ [illegible]

$\tau_a > \tau_b > \dots > \tau_f$

+ többi

elvégeztük a párosítást, visszaírtuk az időfüggést

időrendezés, időfgg-re visszavezetés előtt

– ~~[illegible]~~ rendezzük a sorrendet!

párosítás: $\boxed{\langle T_\tau A B\rangle = \overbrace{A B}}$

téroperátor: diszkributivitás $\psi(x\tau) = \sum_k a_k(\tau)\varphi_k(x)$

$A = \begin{cases} \psi(x,\tau) \\ \psi^+(x,\tau) \end{cases}$

$\langle T_\tau A B \dots F\rangle = \overbrace{AB}\,\overbrace{C \dots F} + \overbrace{A B C D \dots F}$ összes lehetséges teljes párosítás

III. 14., SZ

SOKTEST 1.

$$\langle T_\tau \psi(1)\psi(2)\psi^+(3)\psi^+(4)\rangle = \underset{x_1\tau_1}{\psi(1)}\,\psi(2)\,\psi^+(3)\,\psi^+(4) + \psi(1)\,\psi(2)\,\psi^+(3)\,\psi^+(4)$$

$$= G^{(0)}(1,4)\,G^{(0)}(2,3) \underset{2\text{ csere}: (-1)^2}{\pm} G^{(0)}(1,3)\,G^{(0)}_2(2,4)$$

$\psi(1)\psi^+(2) = G_0(1,2)$ csak 1-et vittem odébb!!!

III. 21., SZ

$\langle T_\tau AB \ldots\rangle = \overline{AB}\ldots + \ldots$ Wick-tétel

Kölcsönhatási képben lévő $K_1(\tau)$ átírása

$$G(x,\tau,x',\tau') = -\tfrac{1}{\hbar}\,Sp\left(e^{-\beta K_0}\, T_\tau\, U(\beta\hbar,0)\,\psi_I(x,\tau)\,\psi^+_I(x',\tau')\right)\Big/ Sp\, e^{-\beta K_0}\, U(\beta\hbar,0)$$

∞ sorral van megadva.

$$Sp\left[e^{-\beta K_0}\, U(\beta\hbar,0)\right]$$

időrendezés!

$$= Sp\left[e^{-\beta K_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{\hbar}\right)^n\frac{1}{n!}\int_0^{\beta\hbar}d\tau_1\ldots\int_0^{\beta\hbar}d\tau_n\, T_\tau\left(K_1(\tau_1)\ldots K_1(\tau_n)\,\psi_I(x,\tau)\,\psi^+_I(x',\tau')\right)\right]\cdot$$

$$\cdot\left\{Sp\left[e^{-\beta K_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{\hbar}\right)^n\frac{1}{n!}\int_0^{\beta\hbar}d\tau_1\ldots\int_0^{\beta\hbar}d\tau_n\, T_\tau\left(K_1(\tau_1)\ldots K_1(\tau_n)\right)\right]\right\}^{-1}$$

ezt is időben rendezni!!!

$\overline{\psi(x,\tau)\,\psi^+(x',\tau')} = -G_0(x,\tau,x',\tau')$ csak időkülönbségtől függ: ha időfüggetlen a korrelációs fv. hamiltoni.

$$K_1(\tau_1) = \frac{1}{2}\sum_{s_1 s_2}\int d^3r_1\int d^3r_2\, \psi^+(r_1,s_1,\tau_1)\,\psi^+(r_2,s_2,\tau_1)\, v(r_1,r_2)\cdot$$

$\psi(r_2,s_2,\tau_1)\,\psi(r_1,s_1,\tau_1)$ $\forall$ a τ_1-től függ!

$= \frac{1}{2}\sum_{s_1,s_2}\int d^3r_1 \int d^3r_2 \int_0^{\beta\hbar} d\tau_2\, \psi^+(r_1,s_1,\tau_1)\,\psi^+(r_2,s_2,\tau_2)\, v(r_1\tau_1, r_2\tau_2)\cdot$

v-t időfüggővé teszem: $v(r_1,r_2)\,\delta(\tau_1-\tau_2) \overset{!}{=} v(r_1,\tau_1,r_2,\tau_2)$

$\cdot\,\psi(r_2,s_2,\tau_2)\,\psi(r_1,s_1,\tau_1)$

$x_i =: (r_i, s_i)$, $\int dx_i = \sum_{s_i}\int d^3r_i$ ~~ko~~ bővítek $\frac{1}{Z_0}$-vel, $e^{-\beta K_0}/Z_0 = \hat\rho_{G_0}$

ekkor: $G(x,\tau,x',\tau') =$

$$= Sp\Big\{\hat\rho_{G_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2\hbar}\right)^n \frac{1}{n!}\int\prod_{l=1}^{n} dx_l\, dx_l'\, d\tau_l\, d\tau_l'\; T_\tau\Big[\prod_{l=1}^{n}\big(\psi^+(x_l\tau_l)\,\psi^+(x_l'\tau_l')$$

ħ miatt!!! kifejtem a K-kat jelen volt kibővítettem a δ miatt szimmetria miatt!!! 2 fél. τ: τ_l, τ_l'

Π eddig

$$\cdot\, v(x_l,\tau_l,x_l',\tau_l')\cdot\psi(x_l'\tau_l')\,\psi(x_l\tau_l)\big)\,\psi(x,\tau)\,\psi^+(x',\tau')\Big]_{c\text{-}r.}\Big\}\Big/$$

$$\Big/\, Sp\Big[\hat\rho_{G_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2\hbar}\right)^n\frac{1}{n!}\int\prod_{l=1}^{n} dx_l\, dx_l'\, d\tau_l\, d\tau_l'\; T_\tau\Big[\prod_{l=1}^{n}\big(\psi^+(x_l\tau_l)\,\psi^+(x_l'\tau_l')\, v(x_l\tau_l\, x_l'\tau_l')\,\psi(x_l'\tau_l')\,\psi(x_l,\tau_l)\big)\Big]\Big]$$

az k-s, l-es indexek cseréje fognak esni, ti x_1, x_1' stb. kerekedik ki belőlük és így állnak párba az integrálok a mezőoperátorokkal!

$\boxed{\text{gráfokat rajzolunk.}}$

a)

$G_0(x,\tau,x',\tau') = -\langle\psi(x,\tau)\,\psi^+(x',\tau')\rangle$ így jelöli

$v(x,\tau,x',\tau')$ potenciálvonal.

b) $(-1)^F$: hány fermionhurok vagyon

Megkaptuk a Feynman-gráfokat

$\forall$ csomóban $\sum_\sigma \int d^3r \int d\tau$

a fermionhurokokhoz:

$F = 1$

bozonra ilyen nincs

$\psi^+(x,\tau)\psi(x,\tau)$ ad ilyet!

C) egyidejűség

$G^0(r_k, s_k, \tau_k; r_k, s_k, \tau_k) :=$
$:= \lim_{\tau_e \to \tau_k + 0} G^0(r_k, s_k, \tau_k; r_k, s_k, \tau_e)$

nevező első tagja $Sp(\hat{\varrho}_0) = 1$

$x_i, \tau_i = X_i$
$x_i', \tau_i' = X_i'$

nev. 2. tagja: $\frac{1}{2\hbar} \int dx_1 dx_1' d\tau_1 d\tau_1' \, v(x_1\tau_1, x_1'\tau_1')$

most nincs késleltetés ez egy "klasszikus pot. tér", az operátor csak a mező-operátor!

$\langle T_\tau \psi^+(X_1)\psi^+(X_1')\psi(X_1')\psi(X_1)\rangle =$

SZORZAT!!!

$= -\frac{1}{2\hbar} \int dX_1 dX_1' \, v(X_1, X_1') \Big\{ -G_0(X_1', X_1') \Big(\overset{B}{\underset{F}{\pm}} G_0(X_1, X_1) \Big) +$

G_0 miatt, $\psi\psi^+$ legyen a sorrend: így 2 előjelváltás, hogy átírtuk ψ-t.

1. tag: egyenlő idejű párok!

$\psi(X_1)\psi^+(X_1)\psi(X_1')\psi^+(X_1')$

szemléltetjük:

$+ \Big[-G_0(X_1, X_1') \cdot \big(\mp G_0(X_1', X_1') \big) \Big\}$

Számláló:

1. tag:

$$-\mathrm{Sp}\left[\varrho_0\, T_t\left(\psi(x)\psi^+(x')\right)\right] \overset{\text{Wick}}{=} -\psi(x)\psi^+(x') = G_0(x,x')$$

2. tag

$$-\varrho_0 \left(-\frac{1}{2\hbar}\right)\int dx_1\, dx_1'\, v(x_1,x_1') \Big\langle T_t\Big[\psi^+(x_1)\,\psi^+(x_1')\,\psi(x_1')\,\psi(x_1)\cdot \psi(x)\,\psi^+(x')\Big]\Big\rangle$$

∀G-ra hat az időrendezés!!!

pontosítás: csak + és 0

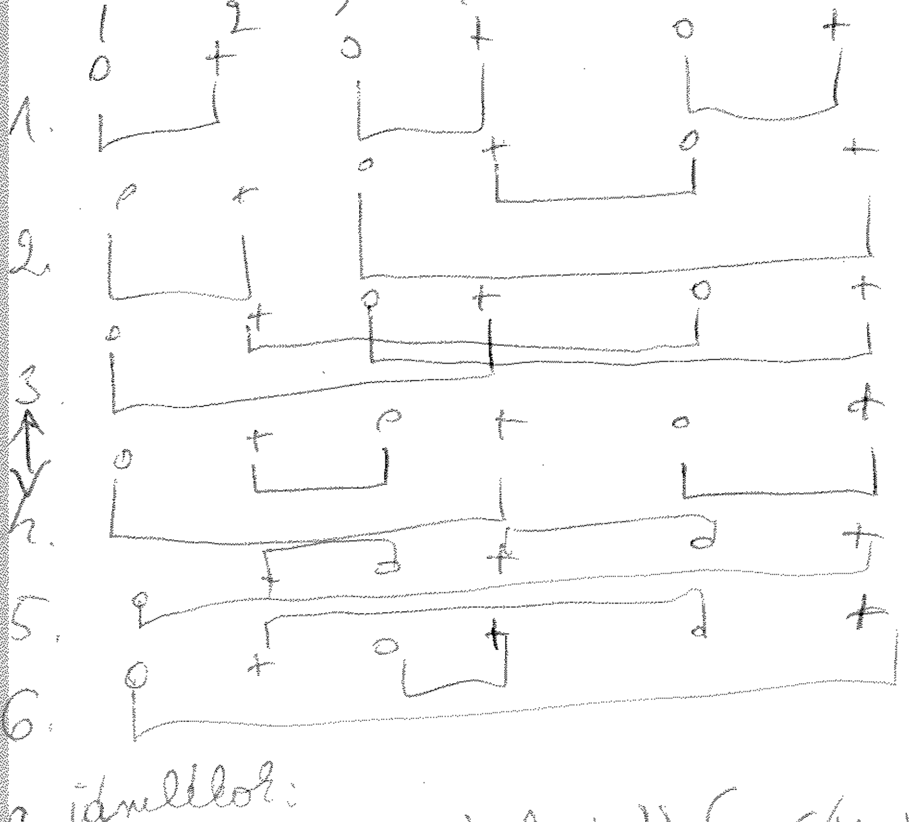
+ ψ(x) legelőre

és ψ(x₁)-et előbbre 2-vel.

$$\begin{array}{cccccc} + & + & 0 & 0 & 0 & + \\ \psi(x) & \psi^+(x_1) & & & & \\ 0 & + & + & 0 & 0 & + \end{array}$$

+ 0 váltott sorrendben!

$$\underset{1}{\psi(x)}\;\underset{2}{\psi^+(x_1)}\;\underset{3}{\psi(x_1)}\;\underset{4}{\psi^+(x_1')}\;\underset{5}{\psi(x_1')}\;\underset{6}{\psi^+(x')}$$



a járulékok:

$$= -\left(-\frac{1}{2\hbar}\right)\int dx_1\, dx_1'\, v(x_1,x_1')\Big\{-G_0(x,x_1)\,G_0(x_1,x_1)\,G_0(x_1',x') + (-1)\cdot$$

$$(\pm 1)\,G_0(x,x_1)\,G_0(x_1,x')\,G_0(x_1',x_1') - (\pm)\,G_0(x,x_1)\,G_0(x_1,x_1')\,G_0(x_1',x')$$

[illegible] 4.

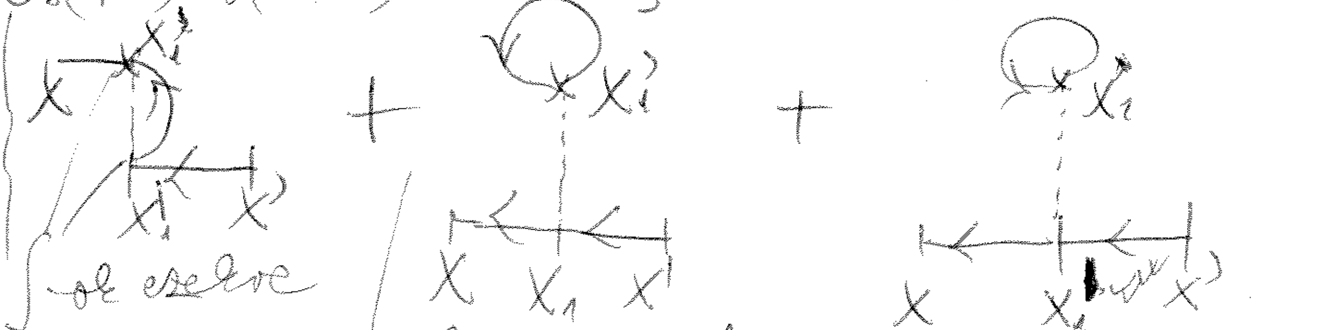
III. 21., SZ

$$-G_0(x_1'', x_1)\, G_0(x_1', x_1)\, G(x_1, x') - G_0(x, x')\, G_0(x_1, x_1)\, G_0(x_1', x_1') +$$ SOKTEST 1.

végső pont: Eli-i vonal 2 végpontja

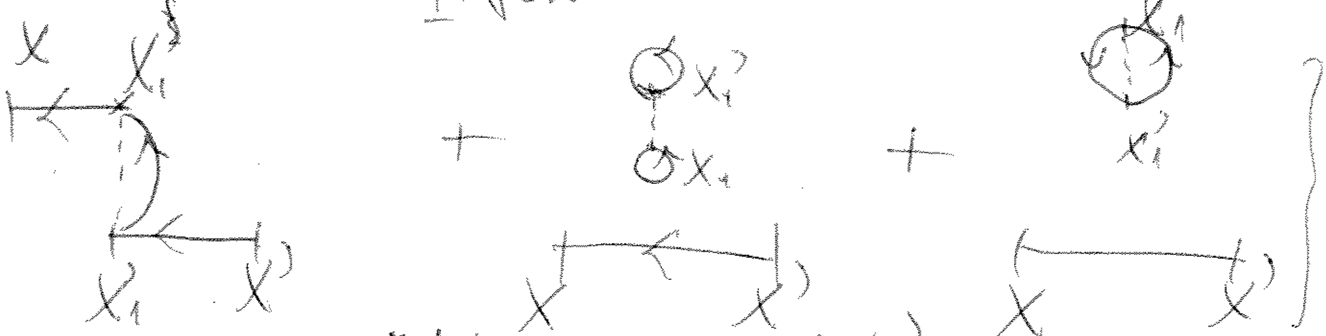
$$(\pm 1)(-1)\, G_0(x, x')\, G_0(x_1', x_1')\, G_0(x_1, x_1')\Big\} =$$

$$= \left(-\frac{1}{2\hbar}\right)\Big\{$$



∫-ok eszelve

±: fermionhurok



1., 4.-ikre, csak kicseréltem x_1-et x_1'-re.

①–④, ②–③, maradék: számláló mellékl-a

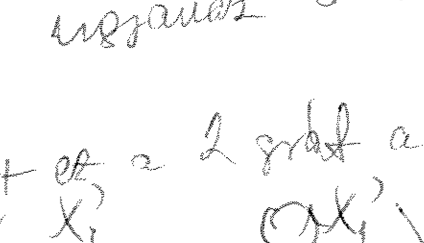
$x_1 \leftrightarrow x_1'$ a mellékl.-vonalak, ugyanaz a szorzótényező

ha kicserélem

mint a nevezőnél.

⑤, ⑥: széteső gráfok, 0. rend + ez a 2 gráf a számlálóban

$$\overleftarrow{x \quad x'}\left[1 + -\frac{1}{2\hbar}\int dx_1 dx_1' \left(\quad + \quad \right) + \dots \right]$$



ép ez állt a nevezőben is elő-

rendig!

magasabb rendben is!!!

→ Ez így folytatódik

csak az összefüggő gráfokat kell venni!

$$\to G(x, x') = -\left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \int \left(\prod_{l=1}^{n} dx_l\, dx_l'\right) T_r\left[\prod_{l=1}^{n} K(x_l, x_l')\right] \psi(x)\, \psi^\dagger(x') \right\rangle_c$$

ha csak összefüggő gráfokat képzelünk, nem kell kiírni olni a nevezőt!!!

connected ←

III. 28, Sz

$x = (r, s) \quad X = (x, \tau)$

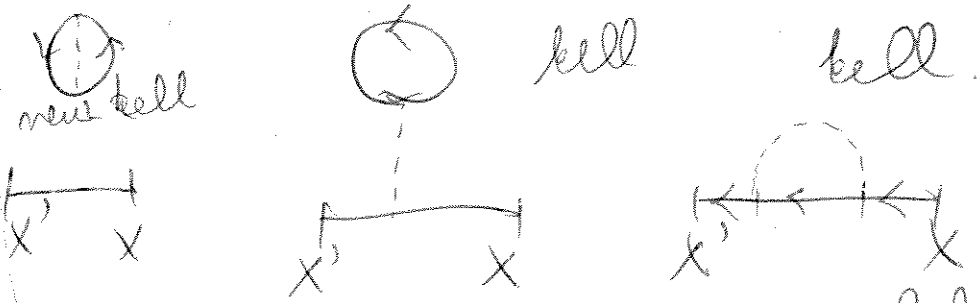
$$G(X, X') = -\left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \left(\prod_{k=1}^{n} \int dX_k \, dX'_k\right) T_\tau \prod_{l=1}^{n} k_1(X_l X'_l)\, \psi(X)\, \psi^+(X') \right\rangle_0$$

← $u(\psi^+\psi)$ eddig

nevező is beleértve csak összekötött gráf

$$k_1 = \frac{1}{2} \psi^+(X_l)\, \psi^+(X'_l)\, v(X_l, X'_l)\, \psi(X'_l)\, \psi(X_l)$$

k: $\int$ is legyen benne.



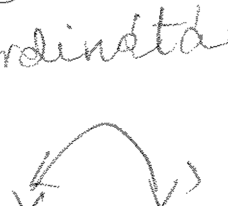
1/2 sem kell: mert a gráfokon a belső pontokat több sorrendben oszthatom ki.

$\int$-ást is belevesszük a gráfszabályok közé.

GRÁFSZABÁLYOK koordináta repr.-ban.

1. Rajzoljunk le $\forall$, n db-i vonalat tartalmazó topológiailag különböző, két külső vonallal rendelkező, csatolt gráfot.

2. Osszuk ki a $2n$ belső pont (integrálási változók) koordinátáit.

3.  járuléka $\boxed{-G_0(X_k, X'_l)}$

4.  jár.-a $\boxed{\frac{1}{\hbar} v(X_k, X'_l)}$

III. 28 4 8Z

SOKTEST 1.

(5.) Integráljunk $\forall X_\ell, X_\ell'$ belső pontra

(6.) $(-1)^F$ szabály: gráf jeléhez szorzandó $(-1)^F$, hol F a fermionhurkok száma. (egy adott gráfra vonatkozik)

TUDNI KELL!!

sok E. mar.

$$-G(X, X') \simeq \frac{1}{2^n} \prod_{\ell=1}^{n} v(X_\ell X_\ell') \left\langle T_\tau \psi(x) \psi^+(X_1) \psi^+(X_1') \psi(X_1') \psi(X_1) \psi^+(X) \right\rangle_{0,C}$$

n. rendben

$$\frac{1}{2^n} \prod_{\ell=1}^{n} v(X_\ell X_\ell') \left\langle T_\tau \psi(x) \psi^+(X_1) \psi(X_1) \psi^+(X_1') \psi(X_1') \ldots \psi^+(X') \right\rangle_0$$

X_ℓ, X_ℓ' - k permutációjával elérem, hogy 1 ág. gráfban egy adott kipárosítás mellett ilyen legyen a sorrend:

$\psi(x) \psi^+(X_1) \psi(X_1) \ldots \psi^+(X')$; ilyenben nincsen fermionhurok, nem is történt előjelváltás

hurok: $\psi^+(X')$ előbb vándorlik be a sorba.

$\psi(X) \psi^+(X_{\alpha 1}) \psi(\alpha_1) \ldots \psi(\alpha_p) \psi^+(X') \cdot \psi^+(X_{\beta_1}) \psi(X_\beta) \quad \psi(X_{\beta_p})$

$\cdot \psi^+(X_{\gamma_1}) \ldots$

ptl dbon kell a legutolsó ψ-t átemelni.

Matsubara-frekvenciák M.-kép (repr.)

Ha H nem függ explicite az időtől

$G(x, \tau, x', \tau') = G(x, x', \tau - \tau')$

– elég, ha $0 \leq \tau, \tau' \leq \beta\hbar$-on ismerem G-t

$-\beta\hbar \leq \tau - \tau' \leq \beta\hbar$ is elég, széle a fermió intervallumon Fourier-sorba fejthetjük a fv-t.

$$G(x, x', \tau) = \frac{1}{\beta\hbar} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(x, x', i\omega_n)\, e^{-i\omega_n \tau} \qquad \omega_n = \frac{2\pi n}{2\beta\hbar} = \frac{\pi n}{\beta\hbar}$$

véges tartományon volt értelmezve, ezzel periodikussá is tettem $2\beta\hbar$ periódussal!

$$G(x, x', i\omega_n) = \frac{1}{2} \int_{-\beta\hbar}^{\beta\hbar} G(x, x', \tau)\, e^{i\omega_n \tau}$$

, mert $\frac{1}{\beta\hbar}$-t raktunk az odafelé való transzformálásban és nem $\frac{1}{2\beta\hbar}$-t

láttuk: ha $-\beta\hbar \leq \tau \leq 0$, $G(x, x', \tau) = \pm G(x, x', \tau + \beta\hbar)$ ($\pm$: B / F)

$$G(x, x', i\omega_n) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\beta\hbar}^{0} + \int_{0}^{\beta\hbar}\right) G(x, x', \tau)\, e^{i\omega_n \tau}\, d\tau = \frac{1}{2} \int_{-\beta\hbar}^{0} G(x, x', \tau + \beta\hbar)\, e^{i\omega_n \tau}\, d\tau + \int_{0}^{\beta\hbar} G(x, x', \tau)\, e^{i\omega_n \tau}\, d\tau =$$

első tartományon $\ominus\ \tau$, $\tau < 0$

$\tau' = \tau + \beta\hbar$

$$= \frac{1}{2}\left[\pm e^{-i\omega_n \beta\hbar} \int^{\beta\hbar} G(x, x', \tau')\, e^{i\omega_n \tau'}\, d\tau' + \int_0^{\beta\hbar} G(x, x', \tau)\, e^{i\omega_n \tau}\, d\tau\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\pm(-1)^n + 1\right) \int_0^{\beta\hbar} G(x, x', \tau)\, e^{i\omega_n \tau}\, d\tau$$

amplitúdókra kidugjuk néhány bizonyos ps v. ptl.

$1/2$: eltűnik az $\frac{1}{2}\left[(-1)^n (\pm) + 1\right]$-gyel

Fourier-ek

$$G(x, x', \tau) = \frac{1}{\beta\hbar} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(x, x', i\omega_n)\, e^{-i\omega_n \tau}$$

$$G(x, x', i\omega_n) = \int_0^{\beta\hbar} G(x, x', \tau)\, e^{i\omega_n \tau}\, d\tau$$

, DE! $\omega_n = \begin{cases} \frac{2\pi n}{\beta\hbar} & \text{bozonra} \\ \frac{2\pi(n+1)}{\beta\hbar} & \text{fermionra} \end{cases}$ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

11.28., SZ — SOKTEST 1.

impulzus rep.-ban egyszerű részecskék

Szabad Green-fv.:

$$G_0(x,\tau,x',\tau') = -\sum_k \varphi_k(x)\varphi_k^*(x') e^{-\frac{\varepsilon_k-\mu}{\hbar}(\tau-\tau')} \cdot \begin{cases} (1 \pm n_k^{(0)}), & \tau>\tau' \\ \pm n_k^{(0)}, & \tau<\tau' \end{cases}$$

bozonra: $\omega_n = \frac{2n\pi}{\beta\hbar}$

ekkor és bozonra $\tau > \tau'$

$$G(x,x',i\omega_n) = -\sum_k \varphi(x)\varphi_k^*(x')\left(1+n_k^{(0)}\right)\int_0^{\beta\hbar} e^{i\omega_n\tau} e^{-\frac{\varepsilon_k-\mu}{\hbar}\tau} d\tau =$$

bozonra!!! ~~valamint különleges eset (?)~~

$$= -\frac{\sum_k \varphi_k(x)\varphi_k^*(x)\left(1+n_k^{(0)}\right)}{i\omega_n - \frac{\varepsilon_k-\mu}{\hbar}}\left[\underset{\downarrow\ 1}{e^{i\omega_n\beta\hbar}} e^{-\frac{\varepsilon_k-\mu}{\hbar}\beta\hbar} - 1\right]$$

$$\left(1+\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)}-1}\right)\left(e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}-1\right) = -1$$

$$\omega_n = \frac{2n\pi}{\beta\hbar},\quad G_0(x,x',i\omega_n) = \sum_k \frac{\varphi_k(x)\varphi_k^*(x')}{i\omega_n - \frac{\varepsilon_k-\mu}{\hbar}}$$

fermionra

$$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta\hbar},\quad G_0(x,x',i\omega_n) = \sum_k \frac{\varphi_k(x)\varphi_k^*(x')}{i\omega_n - \frac{\varepsilon_k-\mu}{\hbar}}$$

~~és $\tau<\tau'$:~~

fermionra

$$G_0(i\omega_n) = -\sum_k |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k| \left(1-n_k^{(0)}\right)\int_0^{\beta\hbar} e^{i\omega_n\tau} e^{-\frac{\varepsilon_k-\mu}{\hbar}\tau} d\tau =$$

$$= -\frac{\sum_k \varphi_k(x)\varphi_k^*(x)}{i\omega_n - (\varepsilon_k-\mu)/\hbar}\left(e^{i\hbar\omega_n\beta} e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)} - 1\right)\left(1-n_k^{(0)}\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)}+1}\right)\left(e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}+1\right)=+1$$ ugyanazt kapom.

$$v(x,\tau,x',\tau')=\delta(\tau-\tau')\,v(x,x')$$

térelméletben kicsit más, mert véges a kh. terjedési sebessége: részfizikán ugyanezek vannak, csak bonyolultabb: renormálás, QCD, ---

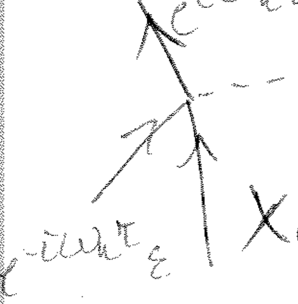
$$\delta(\tau)=\frac{1}{\beta\hbar}\sum e^{i\omega_n\tau}\qquad \omega_n=\frac{2n\pi}{\beta\hbar}$$

$$v(x,\tau,x',\tau')=\frac{1}{\beta\hbar}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega_n(\tau-\tau')}\,v(x,x',i\omega_n)$$

$v(x,x',i\omega_n)=v(x,x')$ ω-független állandó!

ha csak nem spinváltó, spfü. a kh. $\forall\omega_n$-re!!!

integrál: $\frac{1}{\beta\hbar}\int_0^{\beta\hbar}d\tau\, e^{i\omega_n\tau}=\delta_{n,0}$ $\quad\omega_n=\frac{2n\pi}{\beta\hbar}$



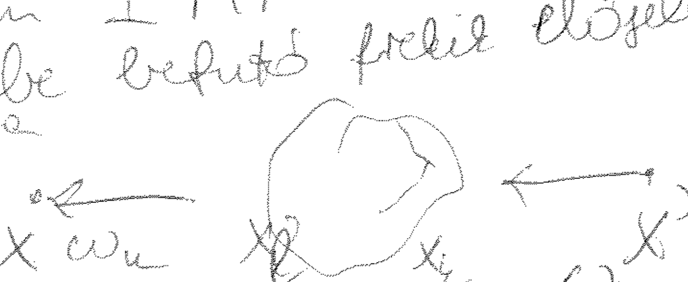
ellátom v-t előjellel.

ezek együttesen: $\int_0^{\beta\hbar}e^{-i(\omega_n+\omega_n'-\omega_n'')\tau_k}d\tau_k=\beta\hbar\,\delta_{\omega_n+\omega_n',\omega_n''}$

Ez adja át $\mathring{\mathrm{EMT}}$-t!

k-térben IMT is!!!

vertexbe befutó frekv. előjeles összege nulla.
csúcsba



összefüggő gráfban ω_n a be- és kimenő élen a frekvencia.