Soltestprobléma

2019. 02. 12.

test 1

Kollektív gerjesztések

- nem jár részecskeszám vált.-al
- külső térrel hatunk rsz. melyben töltéssűrűség elo. van.

- rsz. lin. válasza:
  vált. a külső tér első hatv. hnányos

$|\Psi_s(t)\rangle$; időfügg$\emptyset$ H

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\Psi_s(t)\rangle = \hat{H}|\Psi_s(t)\rangle$$

$$\rightsquigarrow |\Psi_s(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\Psi_s(t=0)\rangle$$

$t = t_0$-ban időfüggő tagot adunk $\hat{H}$-hoz

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\overline{\Psi_s}(t)\rangle = \left(\hat{H} + \hat{H}_{ext}(t)\right)|\overline{\Psi_s}(t)\rangle$$

$$\rightsquigarrow |\overline{\Psi_s}(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\underbrace{\hat{A}(t)}|\overline{\Psi_s}(t=0)\rangle$$

$$\hookrightarrow \hat{A}(t) = \begin{cases} \mathbb{1} & , t < t_0 \\ \text{mi} & , t > t_0 \end{cases}$$

$$i\hbar\partial_t|\overline{\Psi_s}(t)\rangle = (\cancel{\hat{H}} + \hat{H}_{ext}(t))e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{A}(t)|\overline{\Psi_s}(0)\rangle =$$

$$\overset{i\hbar}{=}\left(\cancel{-\frac{i}{\hbar}e^{-i/\hbar\hat{H}t}\hat{A}(t)} + e^{-i/\hbar\hat{H}t}\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right)|\overline{\Psi_s}(0)\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{H}_{ext}(t)e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{A}(t)|\overline{\Psi_s}(0)\rangle = i\hbar\, e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\left(\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right)|\overline{\Psi_s}(0)\rangle$$

$$\underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{H}_{ext}(t)e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}}_{\hat{H}^H_{ext}(t)}\hat{A}(t)|\overline{\Psi_s}(0)\rangle = i\hbar\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}|\overline{\Psi_s}(0)\rangle$$

kielégíthető, ha: $\boxed{i\hbar\frac{\partial\hat{A}}{\partial t} = \hat{H}^H_{ext}(t)\hat{A}(t)}$

Megoldás:

$$\hat{A}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!}\hat{T}_t\left[\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t}dt_2\dots\int_{t_0}^{t}dt_n\ \hat{H}^H_{ext}(t_1)\dots\hat{H}^H_{ext}(t_n)\right]$$

- biz.: felső határ szerint kell deriválni...
  - $\rightsquigarrow$ végeredmény $H^H_{ext}(t)\cdot A(t)$ lesz!
  - $\rightsquigarrow$ sort lehet 1-el shiftelni...

$\underline{t > t_0}$

$$|\Psi_S(t)\rangle = e^{-i/\hbar \hat{H}t}\left[1 - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}dt_1\ \hat{H}^H_{ext}(t) + \dots\right]|\Psi_S(0)\rangle$$

- most mérünk:

$$\langle\hat{O}(t)\rangle_{ext} = \langle\Psi_S(t)|\hat{O}^S(t)|\Psi_S(t)\rangle = \langle\Psi_S(0)|\Big(1+\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}dt_1\hat{H}^H_{ext}(t_1)+\dots\Big)\underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{O}_S(t)\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}}_{\hat{O}^H(t)}\Big(1-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}dt_1\ \hat{H}^H_{ext}(t_1)\Big)|\Psi_S(0)\rangle =$$

$$= \langle\Psi_S(0)|\Big(\hat{O}^H(t) + \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}dt_1\left[\hat{H}^H_{ext}(t_1),\hat{O}^H(t)\right]+\dots\Big)|\Psi_S(0)\rangle$$

$\rightsquigarrow$ lin. rendben milyen átlag ért. kapok

$$\delta\langle\hat{O}(t)\rangle = \langle\hat{O}(t)\rangle_{ext} - \langle\hat{O}(t)\rangle = \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}dt_1\langle\Psi_S(0)|\left[\hat{H}^H_{ext}(t_1),\hat{O}^H(t)\right]|\Psi_S(0)\rangle$$

mennyivel vált. a zavarra a rendszer.

ez a lin válasz.

- $\underline{\text{most}}$: külső térrel a rsz. sűrűsége változik.

$$\hat{H}^H_{ext}(t) = \int d^3x\ \hat{n}_H(\vec{x},t)\, e\varphi_{ex}(\vec{x},t)$$

potenciál

$$\delta\langle \hat{n}(x,t)\rangle = \delta\langle \hat{\tilde{n}}(x,t)\rangle$$

ahol $\hat{\tilde{n}}(x,t) = \hat{n}(x,t) - \langle \hat{n}(x,t)\rangle$

$\rightsquigarrow$ $\tilde{n}$ átlaga 0 lesz.

tudjuk, $[\,,\,]$-ban 0 volt.

$$\delta\langle \hat{\tilde{n}}(x,t)\rangle = \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt'\int d^3x'\; e\,\varphi_{ex}(x',t')\,\langle \Psi_s(0)|\left[\hat{\tilde{n}}_H(x',t'),\, \hat{\tilde{n}}_H(x,t)\right]|\Psi_s(0)\rangle$$

- retardált sűrűség korrelációs fv.:

$$\boxed{i D^R(x,x',t,t') = \Theta(t-t')\,\frac{\langle \Psi_0|[\tilde{n}(x,t),\tilde{n}(x',t')]|\Psi_0\rangle}{\langle \Psi_0|\Psi_0\rangle}}$$

$\rightsquigarrow$ $$\delta\langle \tilde{n}(x,t)\rangle = \frac{1}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\int d^3x'\; D^R(x,x',t,t')\, e\,\varphi_{ex}(x',t')$$

- mert, $\Theta(t-t')$ és $\varphi_{ex}(x,t) = 0$, ha $t' < t_0$!

$$t_0 < t' < t$$

- homogén rsz. $\to$ $iD^R(x,t,x',t') = iD^R(x-x',t-t')$

$\mathcal{F}$: $\varphi_{ex}(\vec{k},\omega) = \int d^3x\int dt\; e^{-i\vec{k}\vec{x}}\, e^{i\omega t}\, \varphi_{ex}(\vec{x},t)$

$$\delta\langle \tilde{n}(\vec{k},\omega)\rangle = \int d^3x\int dt\; e^{-i\vec{k}\vec{x}}\, e^{i\omega t}\, \delta\langle \tilde{n}(\vec{x},t)\rangle$$

$$D^R(\vec{k},\omega) = \int d^3x\int dt\; e^{-i\vec{k}\vec{x}}\, e^{i\omega t}\, D^R(x,t)$$

- kihasználva, h. valós térben konvolúció van:

$$\delta\langle \tilde{n}(\vec{k},\omega)\rangle = \frac{1}{\hbar} D^R(\vec{k},\omega)\, e\,\varphi_{ex}(\vec{k},\omega)$$

- szuszceptibilitás:

$$\boxed{\chi(\vec{k},\omega) = \frac{\delta\langle \tilde{n}(\vec{k},\omega)\rangle}{e\,\varphi_{ex}(\vec{k},\omega)} = \frac{1}{\hbar} D^R(\vec{k},\omega)}$$

Hőmérsékleti sűrűség-sűrűség korrelációs fv.

"sűrűség-fluktuáció operátor a hőmérsékletfüggő formalizmusban"

$$\tilde{n}(r) = n(r) - \langle n(r)\rangle = \sum_s \Psi^+(r,s)\Psi(r,s) - \sum_s \langle \Psi^+(r,s)\Psi(r,s)\rangle$$

$$D(r_1,\tau_1,r_2,\tau_2) = -\left\langle T_\tau\left(\tilde{n}(r_1,\tau_1)\,\tilde{n}(r_2,\tau_2)\right)\right\rangle$$

$$\left\langle T_\tau\left(n(r,\tau)\,n(r',\tau')\right)\right\rangle = \frac{D_{sz}}{D_{nev.}} \qquad \text{/hasonlóan stat. fiz.-hez.../}$$

$$D_{sz} = \mathrm{Tr}\Bigg\{ e^{-\beta K_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} T_\tau\Bigg(\int_0^{\beta\hbar} d\tau_1 \int_0^{\beta\hbar} d\tau_2 \ldots \int_0^{\beta\hbar} d\tau_n\, K_1(\tau_1) K_1(\tau_2) \ldots K_1(\tau_n) \cdot$$

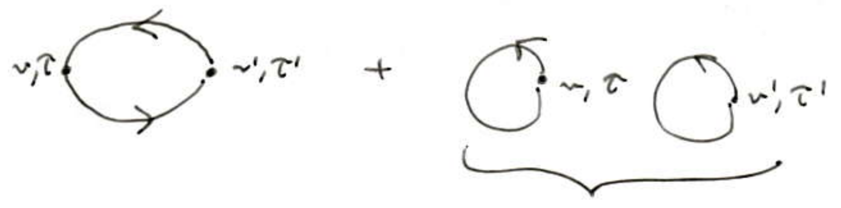
$$\cdot \sum_{s,s'} \Psi^+(r,s)^{\tau}\, \Psi(r,s)^{\tau}\, \Psi^+(r',s')^{\tau'}\, \Psi(r',s')^{\tau'} \Bigg)\Bigg\}$$

$$D_{nev} = \mathrm{Tr}\Bigg\{ e^{-\beta K_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} T_\tau\Bigg(\int_0^{\beta\hbar} d\tau_1 \int_0^{\beta\hbar} d\tau_2 \ldots \int_0^{\beta\hbar} d\tau_n\, K_1(\tau_1) K_1(\tau_2) \ldots K_1(\tau_n) \Bigg)\Bigg\}$$

→ most Wick-tétel:

D_{sz}, 0-rend:

D_{sz} =



↓

n·n szorzat 0-ad rendű megnyilvánulása.

$\langle n(r)\rangle$ =

(teljes Green-fv.)

⤳ $\tilde{n}$-nál az ilyen tagok ki fognak majd esni

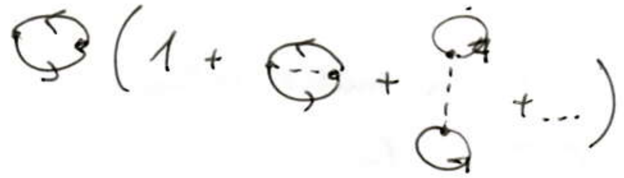
$$D(r,\tau,r',\tau') = -\left\langle T_\tau\left(\underset{n-\langle n\rangle}{\hat n(r,\tau)}\ \hat n(r',\tau')\right)\right\rangle =$$

$$= -\left\langle T_\tau\left(n(r,\tau)\, n(r',\tau')\right)\right\rangle + \langle n(r,\tau)\rangle\langle n(r',\tau')\rangle$$

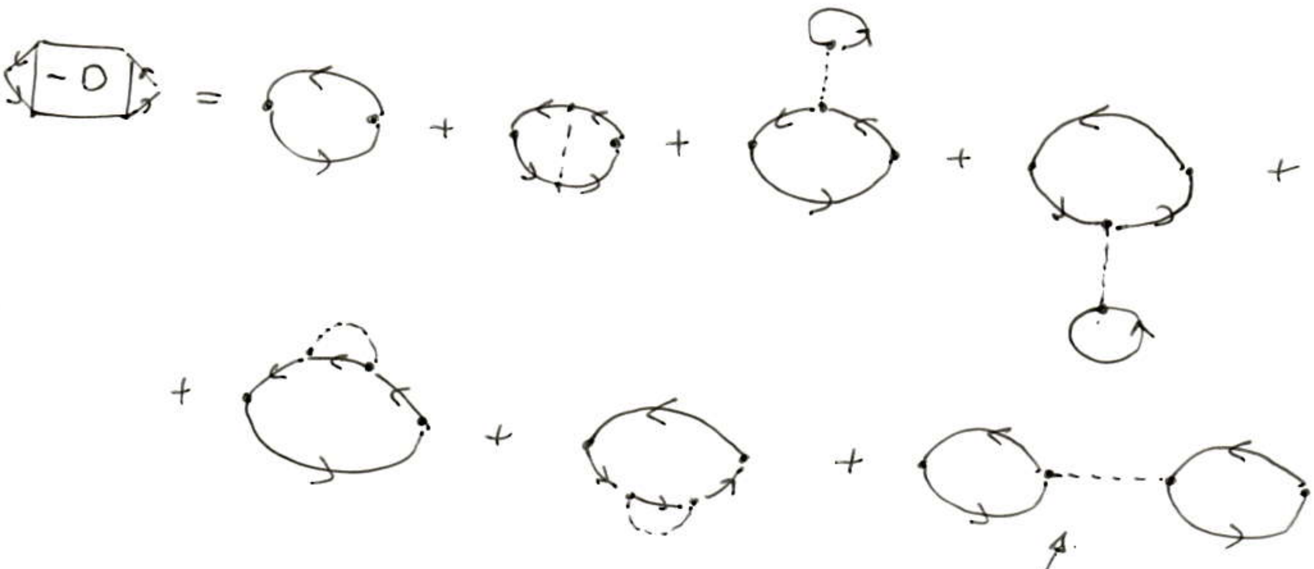
$$= -\left\langle T_\tau\Big(\big(n(r,\tau) - \langle n(r,\tau)\rangle\big)\big(n(r',\tau') - \langle n(r',\tau')\rangle\big)\Big)\right\rangle =$$

$$= -\left\langle T_\tau\left(n(r,\tau)\, n(r',\tau')\right)\right\rangle + \langle n(r,\tau)\rangle\langle n(r',\tau')\rangle + \cancel{\langle n(r,\tau)\rangle\langle n(r',\tau')\rangle}$$
$$\cancel{-\langle n(r,\tau)\rangle\langle n(r',\tau')\rangle}$$

Nevező:



Első rendben ami megmarad: r,τ  r',τ'
(mint a polarizációs gráf)



/ez marad.../

ez nehéz lesz...

Feynman-szabályok a sűrűségfluktuációs operátorra

1. Rajzoljunk fel $\forall$ n kölcsönhatást tartalmazó, topologikusan különböző, két külső pontot tartalmazó gráfot.
   (x, τ, x', τ')

2. $2n$ db belső pontot x_i, x_i'-vel jel. $x_i = (r_i, s_i, \tau_i)$

3. $x_i \longleftarrow x_i' = -G_0(x_i, x_i')$

4. $x_i \bullet \cdots\cdots \bullet x_i' = -\frac{1}{\hbar} v_i(x_i, x_i') = -\frac{1}{\hbar} v(r_i, r_i')\,\delta(\tau_i - \tau_i')$

5. Integrálni $\forall$ x_i belső pontra: $\int dx_i = \int dr_i \int d\tau_i \sum_{s_i}$

   $\left[\begin{array}{l} + \to \text{bozonok} \\ - \to \text{fermionok} \end{array}\right]$

6. A gráf szorzandó $(2s+1)^N$, ahol N a hurkok száma.
   $(\pm 1)^F$, ahol F a fermion-hurkok száma.