

Rönszkefizika

előadás: Balla László

honlap: elmfis.elte.hu/~palla / esziszke.pdf ("HF")

követelmény:

↳ errekl a feladatokból

gyakorlatból 1ZH az utolsó órán lesz 3 db a ZH-n!

gyakorlaton kiegészítjük az előadás anyagát, megbeszéljük a technikai részleteket

előismertek:

- Dirac-egyenlet (hullám megoldások)
- csoportelmélet
- imp. mom. átvitel

1. óra

Elemi részecskék, kölcsönhatások, nagyenergiák

1) Egyégsz.:

$\hbar = c = 1$ egyégsz. $\Rightarrow$ tömegben (energiában) mérhetünk mindezt

$$\lambda_{\text{Compton}} = \frac{\hbar}{mc} = \frac{1}{m}$$

$$t = \frac{\lambda}{c} = \frac{\hbar}{mc^2} \sim \frac{1}{m}$$

• hossz, távolság, $\frac{1}{m}$
idő

• rel. elmélet: $E = m \cdot c^2 \rightarrow$ energia = tömeg
tömeget mérjük energia egységben (konverzió)

^{pl.} proton tömeg $m_p \sim 940 \text{ MeV}$

($\hbar c = 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$)

2) "elemi": az "átalunk elérhető" energiákon lévő belső szerkezet

a) elemi részecske jellemzői: m , s , töltés(ek), mágneses
^{nyugalmi tömeg}
 $\downarrow$ spin (elektrom., ^{mom.} ~~spin~~
 bozonok, leptonok)

b) fajták:

• anyagot lévő részecskék

$\frac{1}{2}$ spinűek $\rightarrow$ fermionok

• kölcsönhatást közvetítő rész.-k

1 spinűek bozonok

kvarkok $\left\{ \begin{array}{ccc} u & c & t \\ d & s & b \end{array} \right.$

leptonok $\left\{ \begin{array}{ccc} \nu_e & \nu_\mu & \nu_\tau \\ e & \mu & \tau \end{array} \right.$

γ

g

Z^0

$W^\pm$

• kvarkok: tölt. el. töltésűek, képeznek kötött állapotot
 (nincsen szabad kvark)

leptonok: egész $-1/2$ spinűek, nem kötött állapotot

- anyagi részecskék VAN antirészecskéjük

m, τ ugyanolyan, V tölthet $(-1) \times$

pl. e^- antirészecskéje e^+ pozitron, ν_e antirész. elektronanti-neutrino $\bar{\nu}_e$

$\mu^- \quad \mu^+ \equiv \bar{\mu}$

- $\underbrace{u \ d \ s}_{\text{könnyű kvarkok}} \quad \underbrace{c \ t \ b}_{\text{nehéz kvarkok}} \quad \underbrace{\}_{\text{6}}_{\text{flavour}}$

- kvarkok barionszáma $B_q = \frac{1}{3} \rightarrow B_{\bar{q}} = -\frac{1}{3}$

c) kvarkok kötött állapottai: hadronok

(qqq)

barionok

$(q\bar{q})$

mesonok

• $B=1$

$B=0$

(a barionszám V létrejövő reakcióban megmarad!)

- felezési idő τ és spin

d) gluonok létezésének bizonyítása:

- V kvark 3 színben létezik, gluon: szín, antiszín

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ q & q & q \end{pmatrix} \epsilon_{abc}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ q & \bar{q} \end{pmatrix} \delta^{ab}$

8 állapot

- Higgs-bozon (b. részecske)

→ tömegük a küls. szinkronizációkra

$$c) p \sim (u u d)$$

$$\pi^+ \sim (u \bar{d})$$

$$n \sim (u d d)$$

$$K^0 \sim (\bar{s} d)$$

$$\Lambda \sim (u d s)$$

$$\Xi/\Psi \sim (\bar{c} c)$$

pl.

$$\boxed{\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda}$$

brake nioter

$$\bar{u}d + uud \rightarrow \bar{s}d + uds$$



d) leptonok:

- neutrínók ≈ 0 tömegűek (de $\sim$ neutrínó oszcilláció alapján
(~~valószínűleg~~ nem 0 tömegűek))
- smelgesek, 0 tömegűek (fizikailag megengedett)

$$\nu \text{ halkeres} \quad \nu \ll p$$

$$\bar{\nu} \text{ jobbkeres} \quad \bar{\nu} \gg p$$

- van leptonok szám megmaradása:

$$L_e \quad L_\mu \quad L_\tau$$

$$L_e$$

$$e^-, \nu_e: +1$$

$$e^+, \bar{\nu}_e: -1$$

$$\text{Vegyes r: } 0$$

$$L_\mu$$

$$\mu^-, \nu_\mu: +1$$

$$\mu^+, \bar{\nu}_\mu: -1$$

$$\text{Vegyes r: } 0$$

$$L_\tau$$

$$\tau^-, \nu_\tau: +1$$

$$\tau^+, \bar{\nu}_\tau: -1$$

$$\text{Vegyes r: } 0$$

$\forall$ reakcióban:

$$\sum_{\text{előtte}} L_e = \sum_{\text{utána}} L_e$$

lepton szám -
megmaradás

$$\sum L_\mu = \sum L_\mu$$

$$\sum L_\tau = \sum L_\tau$$

pl.

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$$

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & -1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & -1 & +1 & 0 \end{matrix}$$

L_μ

L_e

($\Rightarrow$ nem lehet a jobb oldali
neutrínókat más V-kon
csatolni)

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \gamma$$

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & -1 & 0 \end{matrix}$$

L_μ

L_e

$\leftarrow$ se L_e , se L_μ nem

marad meg, ha van külön

μ^- és e^- ~~se~~ lepton szám!

$$\frac{\Gamma(\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma)}{\Gamma(\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu)} < 10^{-9}$$

$$< 10^{-9}$$

$\Rightarrow$ tényleg tiltott a folyamat

• neutrínók csak gyenge kh.-ban vesznek részt

e) Kölcsönhatások közvetítő részecskéi

- Higgs részecske: 126 GeV

spin $\begin{smallmatrix} 0 \\ \oplus \end{smallmatrix}$ $\parallel$

skalár részecske
(paritás +1)

• az összes többi részecskevel
kölcsönhat

$\uparrow$
(pseudoskálár: -1 paritás)

• spin = 0 !

1-es spinű rész. csop. lehet vörös és tiszta

0-es $- \parallel -$ csak vörös lehet !

- foton (γ) EM. kh.-t közvetíti

- gluon (G) erős $- \parallel -$ (qqq) $(q\bar{q})$

- $Z^0, W^\pm$ gyenge kh.-t $- \parallel -$

(azaz: vörös vagy tiszta, erős $\Leftrightarrow$ leon kölcsönhatás)

- kh. jellemző: hatótávolság, "erősség"

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$$

$$\Delta E \sim mc^2$$

$$(\hbar = c = 1)$$

$$\Delta t \sim \frac{\hbar}{mc^2}$$

$$R \sim c \Delta t \sim \frac{\hbar}{mc} = \lambda_{\text{Compton}} \sim \frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow R(\text{hatótáv}) \sim \frac{1}{m}$$

photon (EM RR.)

glaucon (eros bl.)

$$Z^0, W^\pm \text{ (young br.)}$$

konk. Kettenring (∞)

vid koldvassig *

svensk katolikologi

* krankes d.h. nicht (a gluon + megl. $\in$ keine erke is)

- formalis leveret's:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

$$(E^2 = p^2 + m^2)$$

$$E \rightarrow ik J_t$$

$$\vec{r} \rightarrow -i\hbar \nabla$$

$$\Psi(\vec{x}, t) \quad (\text{left spinor is})$$

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \Delta \psi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0$$

malad Klein-Gordon-
egyenlet

(da $m=0 \rightarrow$ Nullameggenheit)

→ statikus est $\Psi(\vec{x}, t) \equiv u(\vec{x})$

$$\Delta m = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \mu$$

↳ gömürme. m. :

$$u(r) = \frac{g}{4\pi r} e^{-r/R}$$

AL

$$\Rightarrow \cancel{R} = \frac{\hbar}{mc} \sim \frac{1}{m} \quad \text{! total}$$

g: ^{right}~~(left)~~ ^{left} ^{right} ^{right}

ha

$$m=0 \Rightarrow \Delta u=0$$

$$u = \frac{Q}{4\pi r}$$

- elektrodin.: em. kh. $Q=e$

kölcsönhatás dimenziótlansága:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \rightarrow \frac{e^2}{4\pi} \sim \frac{1}{137} \quad \text{kicsi}$$

finom szerkezetű
állandó

perturbációelméletre lehetőséget ad

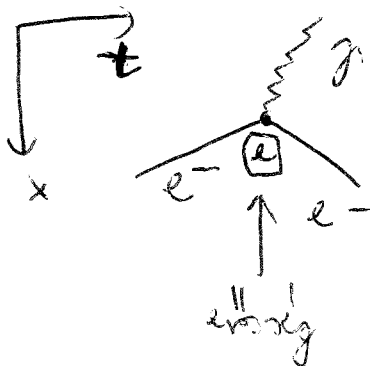
(Helmholtz-féle felvétel: perturbációs rendek)

– Feynman-grafok:

vertexek $\rightarrow$ kölcsönhatás

vonalak $\rightarrow$ részecskék propagálása ~~BA~~ (terjedés)

pl. EM kh.

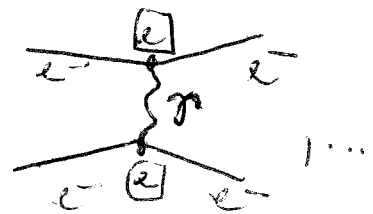


$$e^- \rightarrow e^- :$$

$$e^- \rightarrow e^-$$

$$e^- \rightarrow e^-$$

vagy



1. korrekció: $e \cdot e \sim \alpha$ rendű

2. bra

Kolonhatsék

1a) EM kr. : γ csak nagy kiegészítés, amelyet
 ∞ határ, emészt $\alpha = \left(\frac{e^2}{4\pi\hbar c} \right) = \frac{e^2}{4\pi} \sim \frac{1}{137}$

2a) gyenge kr. : $W^\pm, Z$ csak, 2 féle: $\bar{\nu}_\mu e \rightarrow \bar{\nu}_\mu \bar{e}$ pl.

① ha neutrálok, akkor gyenge (leptonok)
 nemileptonok
 $\downarrow$
 keverés + leptonok
 $\left\{ \begin{array}{l} n \rightarrow p + \bar{e} + \bar{\nu}_e \\ \bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+ \\ \pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e \end{array} \right.$

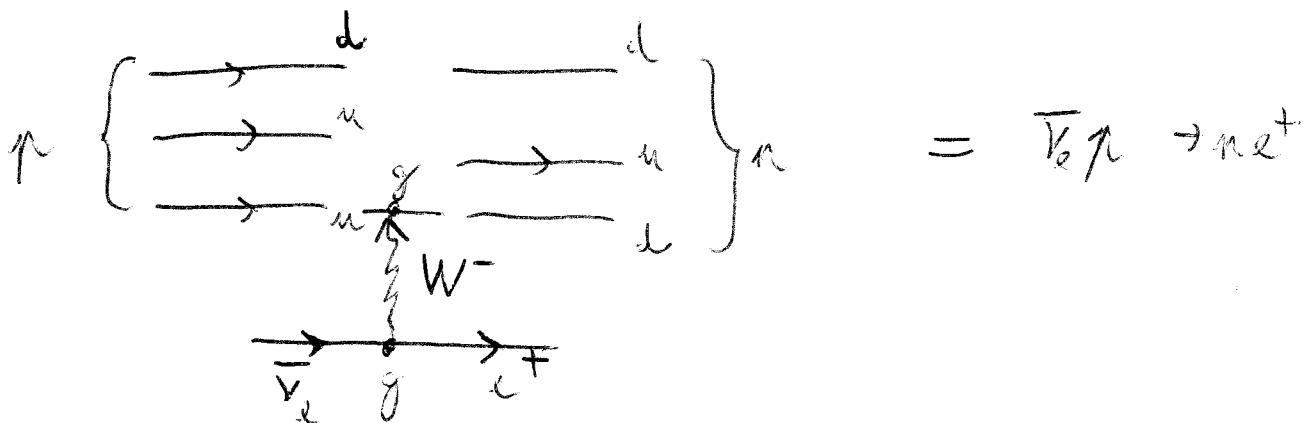
② ha $\sim \sqrt{\text{flavour}}$ -ök változnak

pl. $\Delta C \neq 0 \quad \Delta S \neq 0$

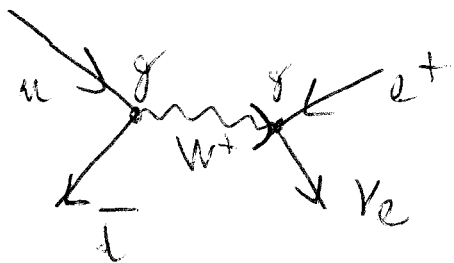
$$\sum_{j=1}^n \bar{\nu}_j \rightarrow n \pi^0$$

$\sim (1124)$
 tömeg MeV-ben

gyenge kr.
 g : dimenziótalan emészt



keverés mintén szintén a gyenge kr.!



amplitude $\sim g^2$ (2 vertex, jedes verteilchen g)

$$\Rightarrow \text{wahrs. } \sigma(P) \sim g^4$$

$$\tau \sim P^{-1}$$

Lebenszeit

EMs ganz schwach:

Lebenszeit (ganz in EM) ~~Lebenszeit~~
messbar

$$\tau \sim 10^{-10} \text{ s} \quad (1192) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tau_n^- \quad \text{ganz}$$

$$\tau \sim 10^{-19} \text{ s} \quad (1192) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tau_n^0 \rightarrow \tau^0 \quad \text{EM Lebenszeit}$$

$$\frac{\text{ganz}}{\text{EM}} \sim \frac{g^2}{\alpha} \sim \sqrt{\frac{\tau_g}{\tau_{EM}}} = \left(\frac{10^{-19}}{10^{-10}} \right)^{1/2} \sim 10^{-5} \quad (\text{adrenally energ. av})$$

$(\alpha \sim e^2) \rightarrow$ a.k. Energie
nicht haben
2 verteilte additiv
-10-

$$g^2 \approx 10^{-5} \cdot \alpha$$

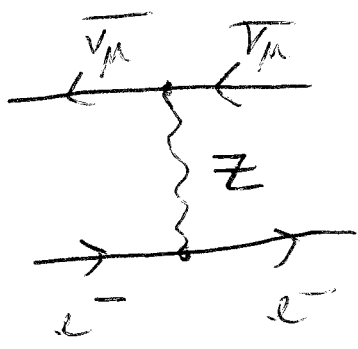
bestimmung: $m_W \sim 82 \text{ GeV}$
 $m_Z \sim 90 \text{ GeV}$

m_W^{-1} adja. bestimmt. - ob
 m_Z^{-1}

$\Downarrow$
 wird bestimmt

$W^\pm$ are light } teller are leptons in bubble light
 Z are smoggy } gauge symmetry

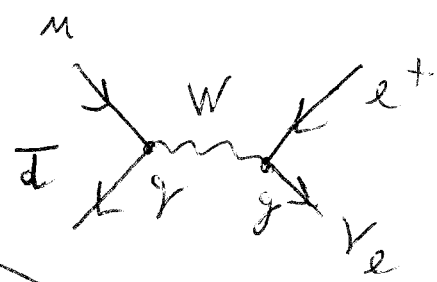
$\bar{\nu}_\mu \bar{e} \rightarrow \bar{\nu}_\mu \bar{e}$ magnetic order



gauge br. to kinetic dimension const. all order (γ)

Feynman-like const. all order

$$G_F = \frac{g^2}{M_W^2}$$

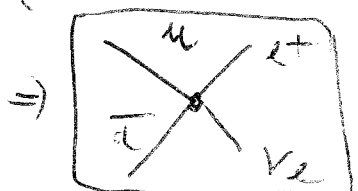


impulsstellen:

amplituden

$$q^2 \ll M_W^2$$

$$f(q) = \frac{g^2}{(q^2 + M_W^2)} \approx \frac{g^2}{M_W^2}$$



it as compl. $\sim G_F$

$$G_F \sim 1,16 \cdot 10^{-5} \cdot (\text{GeV})^{-2} \quad \text{a dimensionos konst. állandó}$$

Salam - Weinberg (standard model)

EM + gyenge együttesen

$g \sim e$ (10^{-5} alacsony energiák vesztés)
(nagy energiák)

$$M_W \sim \frac{g}{\sqrt{G_F}} \sim \sqrt{\frac{4\pi\alpha}{G_F}} \sim 80 \text{ GeV}$$

3
~~2~~) E_{p}^{II} kr.

E_{p}^{II} kr. ~~csak~~ csak a legerősebb (2. gluonok) közt hat
dimensionatlan konst. állandó: $g_s \quad \alpha_s \equiv \frac{g_s^2}{4\pi}$

$\frac{\alpha_s}{\alpha}$ vesztés $(1192) \Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma \quad \tau \sim 10^{-10} \text{ s}$

$(135) \Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma$ gyengített állapot $\tau \sim 10^{-23} \text{ s}$

$$K^+ p \rightarrow \Sigma^0(135) \rightarrow \Lambda + \pi^0$$

rem. is tudjuk kinetikaül detektálni, csak kis mélyre, folyamatok

$$\frac{\alpha_s}{\alpha} \sim \left(\frac{10^{-13}}{10^{-15}} \right)^{1/2} \sim 100$$

strukturális struktúra kinetika

nek a ~~levegő~~ (2. hidrosztatika)

$$\alpha_s \sim 100 \quad \alpha \sim 1$$

$$\alpha_s \equiv \frac{g_s^2}{4\pi} \sim \mathcal{O}(1)$$

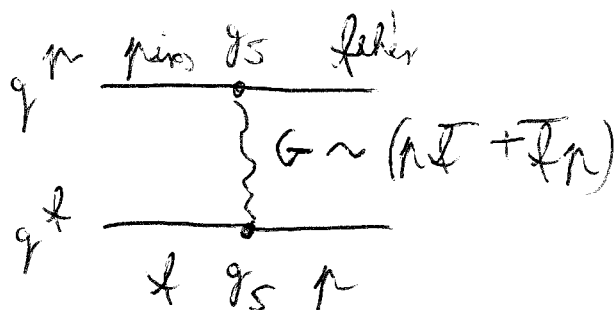
Mért így ez? Mert nem lehet elvileg sem perturbatív -
számítást csinálni.

Nem lehet perturbatíván számolni

Indoklás:

kvarkok - gluonok közt erős bh. gluonokkal megy:

$$q^{\gamma} \quad G^{ab} \quad (\text{gluonok közt})$$



colour bh. - nek

① egyesek (nem szil)

② szín (colour) singlet

állapotokat figyeltünk meg

(nincs szabad kvark / gluon)

③ beérés

$q\bar{q}$ (mesonok), q hadronokra

nehéz kvarkok (nem relat.
közelítés jö)

$$V_{q\bar{q}}(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + k \cdot r$$

← Coulomb-szerű

→ beérés ~~de~~ (kise)

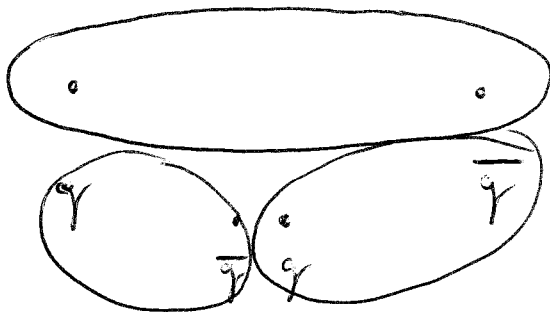
ha r kicsi $\rightarrow -\frac{1}{r}$ dominál

ha r nagy $\rightarrow \nabla^2 \psi \sim -\frac{1}{r^2}$

$$V_{gg}(r) \sim kr$$

$k-t$
 a_s-t } ki lehet mérni

mivel jobban ismert a kvarkok,
amiért nagyobb energia kell



$\rightarrow$ energetikailag is lesz a
kedvesebb

kiseb-
b kvark-antikvark párok keletkeznek

$\Downarrow$

hosszúság $\sim$ hadronikus méret $\sim 10^{-13}$ cm

Szimmetrik és megmaradások

simm. $\equiv$ rendszer (egyenlet) invariáns operáción (pl. fogadás, tükrözés)

1) 2 alapítás:

folgytató / diszkrét

- $\exists$ folyt. paraméter
- $\exists$ Q megmaradó mennyiség
- Q additív
- $\nexists$ folyt. paraméter
- Q megm. menny.
- Q multiplikatív

Heisenberg-kép $(H, Q) = 0$

2) Paritás:

operáció: $\vec{r} = (x, y, z) \rightarrow -\vec{r} = (-x, -y, -z)$

QM-ban $\hat{P} \Psi(\vec{r}, t) = \Psi(-\vec{r}, t)$

$$\hat{P}^2 = \mathbb{1}$$

ha unitár: $\lambda_P = \pm 1$

multiplikatív

szimmetria $\equiv$ a rendszer invariáns

(megj.: nem kell $\forall$ hullámf.-nek invariáns pontosan rendelkeznie)

• megmarad, ha $[H, \hat{P}] = 0$ pl. $V(\vec{r}) \rightarrow V(r)$
 $\Rightarrow H(\vec{r}) \equiv H(r)$

• kötési állapot határozott pontosára ~~transzformálható~~ transzformálható:

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \cdot Y_l^m(\vartheta, \varphi)$$

$$\vartheta \rightarrow \pi - \vartheta$$

$$\varphi \rightarrow \pi + \varphi$$

$$Y_l^m(\vartheta, \varphi) \rightarrow (-1)^l \cdot Y_l^m(\vartheta, \varphi)$$

- elmi résznek van saját pontosuk (párkelti kérdés)

pionok	$(\pi^\pm, \pi^0)$	negatív pontosuk
	$\downarrow \quad \downarrow$	
(középsúlyú hadronok)	140 MeV 135 MeV	(pseudoskálárak)

$$\boxed{\pi^- + d \rightarrow n + n}$$

$\pi^\pm, \pi^0$ 0 spinű

születési tényez: $\downarrow$

$\tau_d = 1$, τ állapotban ($L=0$)

$$\tau_\pi = 0$$

$\rightarrow \vec{J} = \vec{L} + \vec{S} = 1$, ha $\vec{J}$ megmarad $\Rightarrow 2m$ is $\boxed{J=1}$
 (másképp megmarad
 2. táblázat)

$2n$

L

S

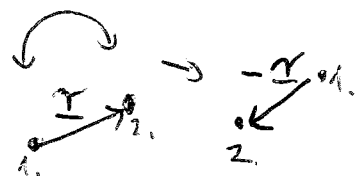
$\rightarrow$ fermionok

$S=1$

szim.

$S=0$

antiszim.



Pauli $\Rightarrow$ felcserélhető

$$(-1)^J = (-1)^{S+1} \cdot (-1)^L$$

$$\Rightarrow L+S = \text{páros}$$

a rész. cs. $2 \times 1/2 = 1$
 ugyanaz, mint a fentié! $\uparrow$

$\Rightarrow J=1$ $L \quad S \rightarrow L+S$ páros kell legyen
 0 1 a Pauli-elv miatt
 (1 1)0 ($S+L+1 = \text{pár}$)

 2 1
 $\Downarrow$ $L=1=S$ $S+1=2$
 $2n$ $\Downarrow$ $3p_1$ állapotok $(-1)^L = (-1)^1 = -1$
 lehet a pártas a $\uparrow$ végállapotban

$\rightarrow$
 a 2 neutronnak nincs saját pártása, még
 akkor sem, ha 1 n^0 -nak önmagában lenne
 (mert a pártás multiplikatív).

$\forall$ fermionnak (Dirac-egyenlet) konverzió $\Rightarrow (+1)$ a pártása

$d \sim (p\pi) \quad \Downarrow$
 $p\pi \rightarrow p\pi(p\pi^+)$ d pártása +1
 $\sim$

$\Rightarrow (-1) \quad \pi^-$ saját pártása
 $\leftarrow$ spin (saját spin. mom.)
 $\leftarrow$ pártas
 pionok $J^P = 0^-$ pseudoskalar
 $J^P = 1^-$ vektor
 $J^P = 1^+$ axiálevktor
 $\rho, \omega \quad \left(\frac{1}{2}\right)^+$ -12-

$$p + p \rightarrow p + \underbrace{\Lambda + K^+}$$

kísérletileg

ΛK^+ pár paritása

lehet meglát. $\Rightarrow (-1)$

Λ paritása (barion) $\Rightarrow +1$

$\Rightarrow K^+$ paritása (-1)

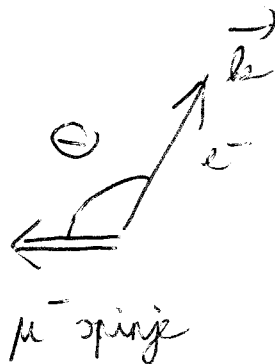
$\Rightarrow K^+ \quad 0^-$ dőresek

gyenge kr.-ban nem marad meg a paritás!

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

↓
mion

rendszere



μ^- spinje

$$\underbrace{d\Gamma(\cos\vartheta)}_{\text{sz. -e, hogy a kispölös}} \sim \left(1 - \frac{1}{3}\cos\vartheta\right) \cdot \frac{1}{2}d(\cos\vartheta) \quad (\text{ki lehet számolni})$$

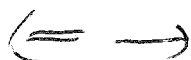
e^- irány ϑ szög zár
be a μ spinjével

$$0 \leq \vartheta \leq \pi$$

ha $\vartheta \sim 0$ $d\Gamma$ kicsi

ha $\vartheta \sim \pi$ $d\Gamma$ nagy

$\Rightarrow$



valóban



nem

DE a μ testület ~~paritása~~ a μ testület egyenlő a μ spin mérése
- 18 -
m. μ testület - μ

Ha a partícs megmaradna, azaz az. helyre fogja

$\Rightarrow$ a partícs nem marad meg P nem szim.

$$\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_\mu \quad (\text{~~de~~})$$

$$\left(1 + \frac{1}{3} \cos \theta\right) d(\cos \theta)$$

itt is elter a sz.,

P nem ~~is~~ marad meg

azaz. - antir. case sem szim.,
mert más lesz a sz. (előjel $\frac{1}{3} \cos \theta$ eltt)

~~Ha az antineutrónok csatlakoznak~~

$\downarrow$
 C sem szim.

DE CP szimmetria

2) C partícs operáció: sz. $\rightarrow$ antisz.

$$C^2 = 1 \Rightarrow \text{e.l.} = \pm 1$$

• ~~teljes~~

$\hookrightarrow$ C partícs

szimmetria ~~de~~ ^{teljesen} ~~C partícs~~ ^{megmarad} ~~szim.~~ ^{szim.} ~~szim.~~ ^{szim.}

teljes $\Rightarrow$ C nem szim.)

$$C |\pi^+\rangle = |\pi^-\rangle$$

$$C |\pi^0\rangle = \eta |\pi^0\rangle$$

$\downarrow$
lehető partícs

$$\pi^0 \rightarrow 2\gamma$$

$$|2\gamma\rangle = \eta_\gamma |\gamma\rangle$$

$\downarrow$

↓
Maxwell-egyenletek

$$\boxed{\eta_\gamma = -1} \leftarrow \begin{pmatrix} \vec{E}, \vec{B} & (\vec{g}, \vec{f}) \\ (-\vec{E}, -\vec{B}) & (-\vec{g}, -\vec{f}) \end{pmatrix}^C$$

↓

$$\boxed{\eta_{\pi^0} = +1} \quad \eta_\pi \cancel{= -1} = \cancel{(-1)} \quad \eta_\gamma^2 = 1$$

$\Rightarrow \pi^0 \rightarrow 3\gamma$ bomlás nincs

3.óra

Isospin

1) $\frac{1}{2}$ Isospinhez vesztve az a max. töltéslüktetésűnek megfelelő állomány:

n, p 1 részecske 2 lehetséges állapotok: nukleon

$$|n\rangle \rightarrow |N_1\rangle \quad |p\rangle \rightarrow |N_2\rangle$$

2) $\tilde{|N_a\rangle} = U_{ab} |N_b\rangle$ fizika utasítás

$$\langle \tilde{N}_c | \tilde{N}_d \rangle = \langle N_c | U_{ca}^\dagger U_{db} | N_b \rangle = \langle N_c | N_b \rangle$$

↓

ha nem tudjuk eldönteni, hogy $|\hat{N}\rangle$ -al vagy $|N\rangle$ -al dolgozunk, akkor U szimmetria!

U 2×2 matriks $\det U = 1$

$\hookrightarrow SU(2)$ csoport "operáció"

= valós szimmetria

$\rightarrow$ ha U és $U^\dagger$ reciproka 1 determináns sz. állapota

(pl. u, d, ν "q" (kvark) állapotai)

$\hookrightarrow$ U helyén $U^\dagger$ is, $SU(2)$ csoport a szimmetria

3) Matematikai kitérő

$$U = \exp\left(iw \frac{\tau_a}{2}\right)$$

τ_a $a=1,2,3$ Pauli-matricusok
 w valós paraméterek

Kommutáció ki lehet igazítani a fenti képlet alapján is

$SU(2)$ algebrájai

$$\frac{\tau_a}{2} \rightarrow T_a \quad \swarrow \text{generátor}$$

$\hookrightarrow U \rightarrow L \times L$ matriksok

$$[T_a, T_b] = i \sum_{c \in \mathbb{Z}} \epsilon_{abc} T_c$$

$$D(U) \quad D(U_1) D(U_2) = D(U_1 U_2)$$

irreducibilis bladsak:

$$\left(\begin{array}{l} \mathbf{I}^2 := \mathbf{I}_1^2 + \mathbf{I}_2^2 + \mathbf{I}_3^2 \quad (\mathbf{I}_i, \mathbf{I}_j) = 0 \quad \forall i \neq j \\ (\mathbf{I}^2 = \text{Casimir-operator}) \\ \mathbf{I}^2 = \text{sajotepeke} \quad \mathbf{I}(\mathbf{I}+1) \quad \text{all} \quad \mathbf{I} = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots \end{array} \right.$$

(irred.) der. dimensiija $(L) = 2\mathbf{I} + 1$

($su(2)$ -nol spec.-an $\forall$ dimensiidan on irred. bladsak)

irred. bladsak vektari ~~$\mathbf{I} \equiv j$~~ $\mathbf{I}_3 \equiv m$
 (—||— on belid m vektorik, j nem) $\rightarrow \mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2$ mdr nem kommutat

$$\mathbf{I}_3 |j, m\rangle = m |j, m\rangle \quad \mathbf{I}^2 |j, m\rangle = j(j+1) |j, m\rangle \quad \mathbf{I}_3\text{-al}$$

$$\mathbf{I}_{\pm} = \mathbf{I}_1 \pm i\mathbf{I}_2 \quad \underbrace{(\mathbf{I}_3, \mathbf{I}_{\pm}) = \pm \mathbf{I}_{\pm}}_{\text{}} \\ (\mathbf{I}_+, \mathbf{I}_-) = 2\mathbf{I}_3$$

$$\mathbf{I}_{\pm} |j, m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle$$

$$\mathbf{I}_+ |j, j\rangle = 0 \quad \mathbf{I}_- |j, -j\rangle = 0 \quad \Rightarrow \boxed{-j \leq m \leq j}$$

$$-j, -j+1, \dots, j-1, j$$

$$4) \quad |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2} \sigma_z = I_z$$

$$I_z |\uparrow\rangle = \frac{1}{2} \sigma_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I_z |\downarrow\rangle = \frac{1}{2} \sigma_z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \uparrow I_z - j\hbar \frac{1}{2} \\ \downarrow I_z - j\hbar \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\uparrow, \downarrow \quad \boxed{I = \frac{1}{2}} \Rightarrow I^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

$\Rightarrow$ hatronok elektronok töltése

I_3 a. d. ~~mellett~~:

$$\boxed{Q = I_3 + \frac{1}{2}}$$

Magnétikus töltéssűrűség $\rightarrow$ az erős k. ism. szim.

$$[H_{\text{erős}}, I_z] = 0 \leadsto [H_{\text{erős}}, I^2] = 0 = [H_{\text{erős}}, I_3]$$

(~~erős~~ erős, kommutál: csak I -tel, I_3 -tel ~~NEM!~~)

Ja valóban nem egyen van így $m_n \neq m_p$

$$\frac{m_n - m_p}{m_n + m_p} \quad \text{‰‰‰} \quad \text{erőse megfigyelhető}$$

$\Rightarrow$ valami más is van a tömegkülönbség ~~sem az erős k. -tel~~ (pl. EM k.)

(azért adhatunk, hogy a π^+ a relatív, mert van töltés (-) + kkv. energia, de nem)
 (a kkv. energiájának képest picike ez a tömegkül.,
 bármilyen energia is lesz neki)

5) isospin kifejezése a töltés hidronra

- Készenk köv. azonos tömegű, hasonló tulajdonságú részecskéket.
 ↑
 pl. π^+ , π^0 , π^-

• $\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi^+ + \pi^-)$

π^+ π^0

$$I=1$$

$$\frac{\Delta m_\pi}{m_\pi} \sim \frac{5}{140}$$

$$I_3 |\pi^+\rangle = |\pi^+\rangle$$

$$I_3 |\pi^-\rangle = -|\pi^-\rangle$$

$$I_3 |\pi^0\rangle = 0 |\pi^0\rangle$$

π^+ , π^0 , π^+ , π^0 -ra:

$$\pi^+, \pi^0 -ra \quad B=1 \Rightarrow +\frac{1}{2} \checkmark$$

$$\pi^+, \pi^0 -ra \quad B=0 \Rightarrow +0 \checkmark$$

$$Q = I_3 + \frac{B}{2}$$

6) Isospin határolatossága: csak I -től, I_3 -tól nem függ

I invariánsai:

(a kompozitum invariánsai)

$$\pi^+ \pi^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+$$

$$I_3 = \frac{3}{2}$$

$$\pi^+ \pi^- \rightarrow \pi^0 \pi^0$$

$$I_3 = -\frac{3}{2}$$

$$1 \otimes \frac{1}{2} = \left(\frac{3}{2} \right) \oplus \frac{1}{2}$$

$$-j \leq m \leq j$$

↓
csak ebben lehetne I szint! $\Rightarrow$ I meggyerik minélis polyanatra

$$\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) = \sigma(\pi^- n \rightarrow \pi^- n)$$

↓

isospin szimmetriája az erős köl.

isospin is ittkaraj (strangeress)

1) Parton káron, nagy hatékonyan mérhetők a kölcsönhatások, azaz az erős kölcsönhatások, azaz az erős kölcsönhatások, azaz az erős kölcsönhatások

$\rightarrow$ az erős kölcsönhatások hatékonyan

erős kölcsönhatások

gyengébb kölcsönhatások

$\Rightarrow$ ittkaraj : 5

	π^-	p	$\rightarrow$	Λ	K^0
I	1	$\frac{1}{2}$		0	$-\frac{1}{2}$
I_3	-1	$\frac{1}{2}$		0	$-\frac{1}{2}$
S	0	0		-1	1

I, S' megmarad

$$\Lambda \rightarrow p \pi^-$$

$$\underbrace{K^+ K^0}_{I=\frac{1}{2}}$$

$$m_{K^+} = 494 \text{ MeV}$$

$$m_{K^0} = 498 \text{ MeV}$$

$$-25 - K^+, K^0, 0^-$$

(több $\pm \frac{1}{2} - 2s$,
is $-1, 0, 1 - 2s$
isospin állapotok)

↓
az erős kölcsönhatások megmaradnak, azaz az erős kölcsönhatások megmaradnak, azaz az erős kölcsönhatások megmaradnak

$$\Lambda \rightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^+$$

$$m_{\Lambda} \sim 1115 \text{ MeV}$$

egy szimmetrikus állapot

$$I=0=I_3$$

$\hookrightarrow \pi^0 \uparrow \rightarrow \Lambda K^+ / \bar{\Lambda} K^0$ is magnetic ✓

$\hookrightarrow$

	Λ	$\rightarrow$	Λ	π^-
I	0		$\frac{1}{2}$	1
I_3	0		$\frac{1}{2}$	-1
S	-1		0	0

$\leftarrow$ Isospin mixed mag!

$\Delta I \neq 0$
 $\Delta S \neq 0$

$\Rightarrow K^0, K^+ \quad S=1, \quad K^0, K^+ : 0^-$

	π^0	Λ	$\rightarrow$	Λ	K^+
I_3	1	$\frac{1}{2}$		0	$+\frac{1}{2}$
S	0	0		-1	1

isospin magnetic

$\Rightarrow \bar{K}^0, K^- : 0^- \quad , \quad I=\frac{1}{2}, S=-1$

$\frac{1}{2}^+ : \Sigma^\pm, \Sigma^0 \quad m_\Sigma = 1190 \text{ MeV} \quad S=-1$

$m_{\Sigma^+} \sim 1189 \quad m_{\Sigma^0} \sim 1192 \quad m_{\Sigma^-} \sim 1197$

$I=1 \quad 3 \text{ states}$

$I_3 | \Sigma^\pm \rangle = \pm | \Sigma^\pm \rangle$

$I_3 | \Sigma^0 \rangle = 0 \cdot | \Sigma^0 \rangle = 0$

$\frac{1}{2}^+ \quad \Xi^- \quad \Xi^0 \quad I=\frac{1}{2} \quad S=-2$

$m_{\Xi^0} = 1315 \text{ MeV} \quad m_{\Xi^-} = 1321 \text{ MeV}$

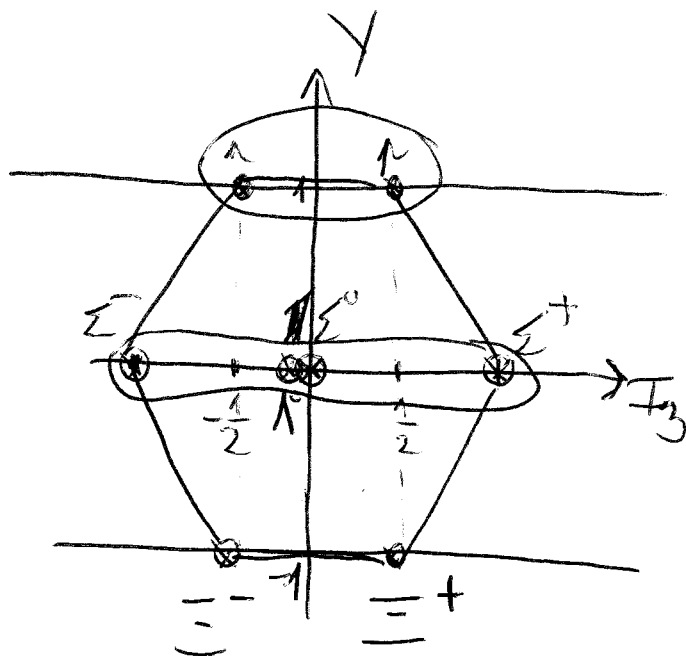
garden

Gell-Mann - Nishijima

Y hypercharge

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(B+S)$$

I_3, Y is known $(\frac{1}{2})^+$, $B=1$: n, p $S=0$

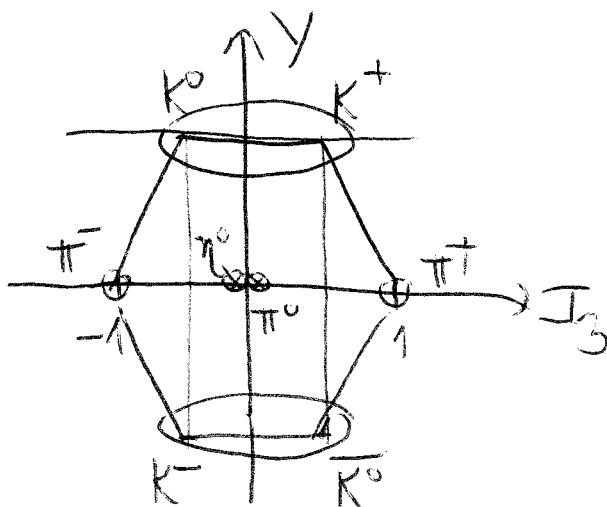


Λ $S=1$

$\Sigma^\pm, \Sigma^0$ $S=$

barion ketek

$I_3 - Y$ is known 0^- , $B=0$



π^+, π^0 $S=0$

K^0, K^+ $S=1$

$m_{\eta^0} = 549 \text{ MeV}$

$I=0=I_3$

 : η isospin
abnormal

2) Körper / nichttriviale Kronecker (u, d, o) $b = \frac{1}{3}$

a) $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad I = \frac{1}{2} \text{ (doublet)} \quad T_3 \cdot u = \frac{1}{2} u \quad S = 0$

$$T_3 d = -\frac{1}{2} d$$

$u: \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \quad \checkmark \quad \leftarrow \text{gelb-Mann-Kischijima}$

$d: \quad -\frac{1}{2} = -\frac{1}{3} \quad \checkmark$

$o: \quad I = 0 = T_3 \quad S = -1 \quad (\forall \text{ gelbe Kronecker})$

$Q_{u_3} = 0 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = -\frac{1}{3} \quad \checkmark \quad (I = 0)$

b) Fälsch konjugiert: C

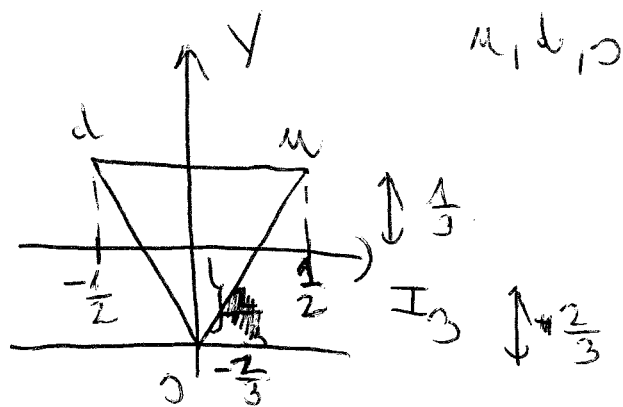
C:	$u \rightarrow \bar{u}$	$d \rightarrow \bar{d}$	$o \rightarrow \bar{o}$
Q:	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0
b:	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
S:	0	0	-1

$Q = T_3 + \frac{1}{2} Y$ wobei is ign

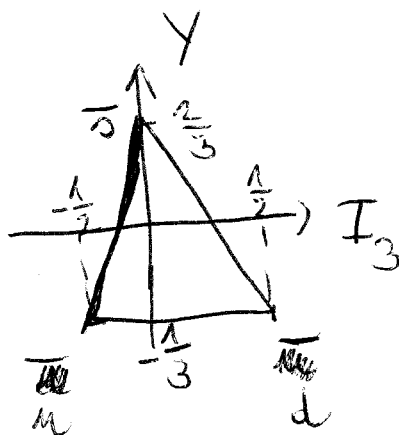
$C \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \rightarrow \text{konjugiert}$

$T_3^{\bar{u}} = Q^{\bar{u}} - \frac{1}{2} Y^{\bar{u}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

-28



(HF) $(\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}) \rightarrow$



isospin left-right q.

$$I_+ u = 0$$

$$I_+ d = u$$

$$I_- d = 0$$

$$I_- u = d$$

A hadronic quarkmodelle, $su(3)$ simmetria

Gell-Mann-Zweig

(u, d, s)

γ 3 lehetőségek állapota

$su(3)$

$\downarrow$
egyenlőség, ha

$$m_u = m_d = m_s$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \rightarrow u_\gamma$$

$\downarrow$
3x3 mátrix (egyenlőség det)

barionok: $(\gamma \gamma \gamma)$

akkor tömeg

$\downarrow$

↓
ez nem igaz (2. sketett),

de tudjuk, hogy $m_u \sim m_d \ll m_s$

→ ezt figyelembe fogjuk venni

4. óra

A hadronok kvarkmodellje és az $SU(3)$ szimmetria

① hadronok hulladéka kvarkmodellje

② $SU(3)$ formalizmus, Gell-Mann - Okubo ~~formál~~

③ kvarkmodell paradoxonjai és a szín (color) kvantumok

Gell-Mann - Zweig:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} = \psi$$

$$m_u = m_d = m_s$$

$SU(3)$ transzformáció

barionok hulladéka (qqq)

$$\psi = \psi(\underline{3}_c) \cdot \chi(\text{spin}) \cdot \underbrace{\phi(\text{kvarkflavor})}$$

szimmetria +
(kvarkflavorok miatt +)
↓
 $I^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^+$

pl.

$(qqq) \Rightarrow$ szimmetria spinben is szimmetrikus $\Rightarrow \frac{3}{2}$

uuu

$$I_3(u) = \frac{1}{2}$$

$$I_3(uuu) = \frac{3}{2}$$

$$I_-(uus) \rightarrow uds \text{ (sing!)}$$

$$I_3 = 0$$

$$\Sigma^0^*$$

$$Y = 0$$

$$I_-(uds) \rightarrow dds \text{ (symmetrical)}$$

$$I_3 = -1$$

$$Y = 0$$

$$\Sigma^-^*$$

$$- \quad uus \rightarrow u\bar{u}s \text{ (symm.)}$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \quad Y = 1 - 2 = -1$$

↑

$$Q = 0$$

$$3 \frac{1}{3} \text{ baryon}$$

$$\Sigma^0^*$$

$$I_-(uus) = d\bar{u}s$$

$$I_3 = -\frac{1}{2} \quad Y = 1 - 2 = -1$$

$$\Sigma^-^*$$

$$- \quad \bar{u}\bar{u}\bar{u}$$

$$I_3 = 0$$

$$Y = 1 - 3 = -2$$

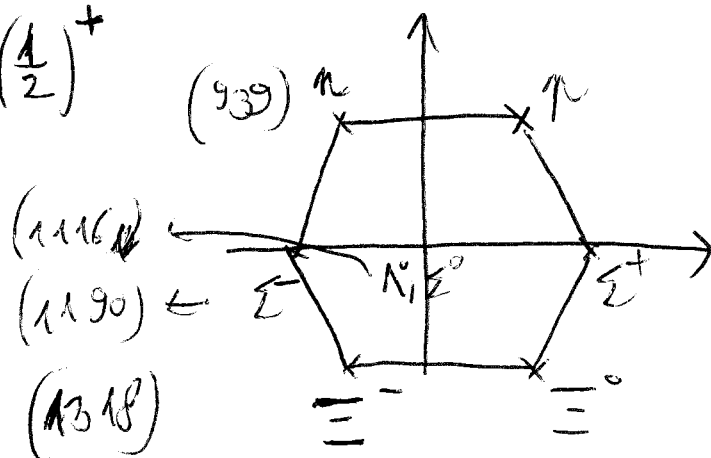
$$\bar{\Sigma}^-$$

= decuplet : 10 states, multiplied

basen ~~bleet~~ !!

Daarom, spin nimm. - ja
u hfr-rek?

$$\left(\frac{1}{2}\right)^+$$



Alt: Daarom is spin
egzidej feelselbhe
symmetrisch

0 quark

0 isospin

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\rangle|d\rangle - |d\rangle|u\rangle) =$$

$$= \frac{1}{2} (u\uparrow d\downarrow - d\uparrow u\downarrow - u\downarrow d\uparrow + d\downarrow u\uparrow)$$

↑ n-t aksone: $(+d\uparrow)$, idale permutational
symmetrisch

$$n \sim (ddu)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^+$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} ddu - uud \\ ddu - uud \\ ddu - uud \end{array} \rightarrow uud$$

basen ~~bleet~~

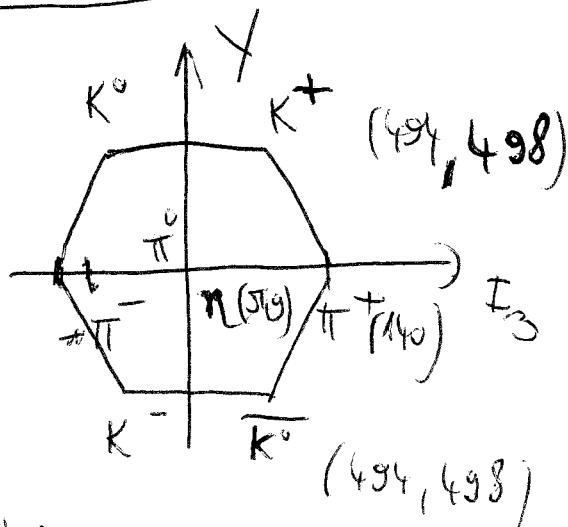
→ u u u u u u
gyschekke, met u
u u u u u u
spin u u u

meson hullámfü. -ek ($q\bar{q}$)

$X(\text{spin})$ 0 1 spin

0^- pseudoskalar

$\rightarrow |\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)$



↑ töltéshajg.
 $c\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix}$

$c|0\rangle = |\bar{0}\rangle$

$\pi^+ = u\bar{d}$ $\pi^- = -\bar{u}d$

$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{d} - u\bar{u})$

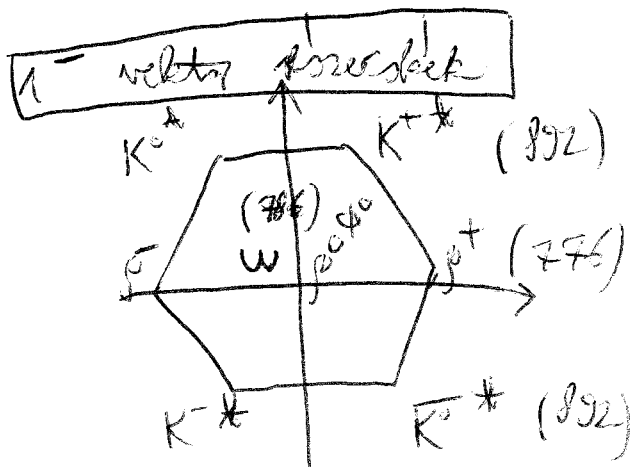
$K^+ = u\bar{s}$ $K^0 = d\bar{s}$

→ emiatt $s\bar{s}$ nem keveredik

$u\bar{u}$ $d\bar{d}$ -vel ($s\bar{s}$ $\hat{C} + 1$)
 $\downarrow$ $u\bar{u}$ $d\bar{d}$ (-1) nyitlakapata)

π^0 és η közl. állapoth

$\eta = \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$ (~~8/33~~)
 $\eta' = \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$



→ van a kvarkok között,
 de a spin más (1 spin)

(933) $\Downarrow$
 ez is gerjesztett
 (meg: $\rho = \pi^*$)

$\phi = s\bar{s}$
 $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$

2) Az $SU(3)$ szimmetria

• 3×3 unitár, egységes, $U^\dagger U = \underline{\underline{1}}$ $\det U = 1$

• 8 valós paraméter dijale

$$U = e^{\left(\frac{1}{2} \cdot i \cdot \lambda^a \cdot w_a\right)} \quad \begin{array}{l} a=1 \dots 8 \\ w_a \text{ valós} \end{array}$$

λ^a Gell-Mann mátrixok
(3×3 , hermitikus, spuriális)

λ_3, λ_8 diagonális $\rightarrow$ ezek egymással kommutálnak
(ilyen nem volt $SU(2)$ -nél)

$\left(\frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2}{2}, \frac{\lambda_3}{2}\right)$ $SU(2)$ iszalgébrait / csoportot generál

$\uparrow \uparrow \uparrow$

$\left(\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ Pauli-mátrixok

$\left[\lambda_8, \frac{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}{2}\right] = 0$ λ_8 az $SU(2)$ -vel kommutál

$\eta^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $SU(3)$ ezen vektoraival hat

1 ind. ábrázolása $su(3)$ -nak:

$$\Rightarrow \pi, \bar{\pi}, \Sigma^{\pm}, \Sigma^0, \Lambda, \bar{\Xi}^-, \Xi^0$$

$I_{31} \vee \rightarrow$ ezek indiszlik
az ábrázolás
teljes állapota

ezek 1 állapot kül. komponensei!

(ahogy a $\uparrow$ és $\downarrow$ spin ~~állapot~~ is ~~1~~ 2 sz. -hez tartozik)

vagy $\sim I = \frac{3}{2}$ kül. I_3 -ú állapotai

δ adjungált ábrázolás:

$$U^{\dagger} = U^{-1}$$

így hat M -en

$$M = c^a \frac{\lambda_a}{2} \quad \text{def: } U \text{ hat } D(U): M \rightarrow U M U^{-1}$$

ábr. hat:

$$D(U_1 U_2) = D(U_1) D(U_2)$$

infinitesimális

$$U = 1 + i \varepsilon^a \left(\frac{\lambda_a}{2} \right)$$

infinit.-en

$$M \rightarrow \left(1 + i \varepsilon^a \frac{\lambda_a}{2} \right) M \left(1 - i \varepsilon^b \frac{\lambda_b}{2} \right) = M + i \varepsilon^a \left(\frac{\lambda_a}{2}, M \right) + \dots$$

Biz:

$$U_1 U_2 M (U_1 U_2)^{-1} \stackrel{?}{=} U_1 (U_2 M U_2^{-1}) U_1^{-1} \quad \checkmark$$

F_a generátor a fundamentális

$$(U_1 U_2)^{-1} = (U_1 U_2)^{\dagger} = U_2^{\dagger} U_1^{\dagger} = U_2^{-1} U_1^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{adjungált} \quad \text{ábr.} \quad (F_a)_{\text{antása}}: M \rightarrow \left(\frac{\lambda_a}{2}, M \right)$$

$$M \xrightarrow{\text{legyen}} \frac{\lambda_c}{2} \text{ vektora}$$

$$F_a: \frac{\lambda_c}{2} \rightarrow \left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_c}{2} \right] = i f_{abc} \frac{\lambda_b}{2}$$

$$F_a \left| \frac{\lambda_c}{2} \right\rangle = \left| \frac{\lambda_c}{2} \right\rangle (F_a)_{cc} = \left| \frac{\lambda_c}{2} \right\rangle i f_{abc}$$

$$(F_a)_{cc} = \frac{1}{i} f_{abc}$$

~ adjungált ábrázoláson
a generátorokat a struktúraállandók adják!

$SU(3)$ szimmetria

$$(H^{ab}, F_a) = 0$$

$$(H^{ab}, D(U)) = 0$$

$\left. \begin{array}{ccc} n & p & \\ \Sigma^+ & \Sigma^0 & \Lambda \\ \Xi^- & \Xi^0 & \end{array} \right\} \rightarrow$ ha ezeket egy ab kh.-ban
helyettesítjük, ugyanígy jó
reakciókat kapunk nem is.
a reakció)

3) $SU(3)$ szimmetria vétele (Gell-Mann-Okubo)

$SU(3)$ szim. -hez $m_u = m_d = m_s$

valójában $m_u = m_d \neq m_s$

(valójában még ez sem

Feltételezések:

igaz, $\frac{m_u}{m_d} \approx 2$, de m_s -hez

(A) $SU(3)$ teljes egészben törvényszerű

keveset károsít)

(B) lehet perturbatív módon alkalmazni

- 32

5.óra

Az $SU(3)$ szimmetria és a Gell-Mann-Okubo tömegformula

csak a kvarktömegkülönbségtől

perturbatív számítás legelső rendje $\rightarrow m_u = m_d \neq m_s$

(Ebből kiindulva)

$SU(3)$ nem fogható
zikk)

$|q_i\rangle$ nyugalmában lévő kvarkok, H_5 a Hamilton

$$\langle q_i | H_5 | q_j \rangle = \text{er. sajátérték} = m_q$$

beállítjuk, hogy H_{ij} legyen alakú

$$= \langle q_i | \left(\frac{2m_u + m_s}{3} I + \frac{m_u - m_s}{\sqrt{3}} \lambda_8 \right) | q_j \rangle \quad H_{ij} = \text{diag}(m_u, m_u, m_s)$$

ez adja
meg m_H
(hadron
tömeget)

egységmátrix
 $SU(3)$ szimmetria

setti az
 $SU(3)$ -at

$$2 \left(\frac{\lambda_8}{2} \right)$$

$\rightarrow F_8$ -as generátorok mint
transzformációk

vagyis H_5 ~~szimmetria~~ $(SU(3)$
transz.
szimmetria):

$$H_5 = H_0 + H_8$$

$\uparrow$ $\uparrow$
inv. λ_8
szimmetria $\rightarrow$ szimmetria
transz.
szimmetria

Legyen $|H\rangle$ hadron

$$H_0 |H\rangle = m_0 |H\rangle$$

$$\langle H | H_5 | H \rangle = m_0 + \langle H | H_8 | H \rangle =$$

$$= m_0 + \sqrt{3} m_1 F_8 + \dots$$

ami, ami F_8 λ -al transz.

$\downarrow$
mi lehet
ez?

↓
 (H) milder $M(3)$ darabok ~~(+ me hat)~~

⇒ ~~isospin~~ ~~model~~ ~~...~~:

(ez is δ -ként
transf.)

$$\rightarrow \text{d. sz. } F_a F_b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cancel{F_a F_b} + \frac{\sqrt{3}}{2} (F_1^2 + F_2^2 + F_3^2) - \frac{1}{\sqrt{3}} F_8^2$$

$C = F_a F_a$ negyedik Casimir (= C^2 spinjelölés)
 ($C = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2$)

AF $(C, F_a) = 0 \quad \forall F_a$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\underbrace{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}_{\frac{1}{3} Y^2} - \frac{1}{3} F_8^2 \right) \text{ fizikai jelentés}$$

isospin generátorok

negyedik rang $(F_1, F_2, F_3 \rightarrow \text{isospin})$

$= I(I+1)$ egy I isospin hordozón

$$Y = \frac{2}{\sqrt{3}} F_8$$

$$\Rightarrow \langle H | H_5 | H \rangle = \bar{m}_0 + 5\bar{m}_1 F_8 + 5\bar{m}_2 \left(I(I+1) - \frac{Y^2}{4} \right)$$

~~max~~ H_8 has perturbáció, majd azo radian számolni:

$$\Rightarrow \boxed{m_H = \bar{m}_0 + 5\bar{m}_1 Y + 5\bar{m}_2 \left(I(I+1) - \frac{Y^2}{4} \right)} \text{ Gell-Mann-Okubo}$$

invariancia, azo multiplicitás! — 40

$\Rightarrow$ Ha a hadron multiplettben éltek I és Y , 2 hadron közt,
akkor első sorban más lesz a hadronok tömege!

(10. sorban pl. az egész oktett tömege megegyezik)

DE ha isospin-multiplettben élünk (pl. n^0, p^+), akkor
az I, Y megegyezik (I_3 tér csak ell) $\Rightarrow$ a tömeg

1. sorban ugyanaz

pl. barion oktett 2 db $I = \frac{1}{2}$ $Y = 1$, $Y = -1$

1 db $I = 1$ $Y = 0$

1 db $I = 0$ $Y = 0$

4 külön multiplet

$\Downarrow$
4 tömeg

$\overline{m}_0, \sqrt{5} m_1, \sqrt{5} m_2$

ezeket a paramétereket a csoportelmélet nem mondja meg,
de bizonylatosan meghatározhatók!

4 tömeg, de 3 paraméter $\Rightarrow$ a 4. tömeg az első
3-al kifejezhető, illetve "szelvényt" kapunk ~ 4
tömeg között:

$$\frac{1}{2}(m_N + m_{\Xi}) = \frac{1}{4}(3m_{\Lambda} + m_{\Sigma})$$

1129 MeV

1135 MeV

✓

$\rightarrow$ nagyon jó
egyezés

additív isospinmultiplicitás van

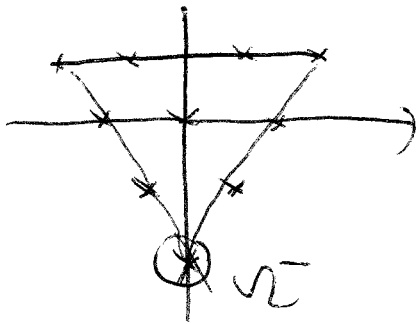
dekuplet:

$$I(\pm 1) - \frac{Y}{4} \rightarrow \frac{3}{2}Y + 2 \quad Y \text{ lin}$$

fr. -e

$$m_H = m_0 + \sqrt{3} m_1 \quad Y$$

(l. gyakorlat)



$$m_{\Sigma^+} - m_{\Delta} = 152 \text{ MeV}$$

$$m_{\Xi^+} - m_{\Sigma^+} = 149 \text{ MeV}$$

$$m_{\Sigma^-} - m_{\Xi^+} = 139 \text{ MeV}$$

} edg
jt
egyes

protonok skalár nem lehet

tömegnegyzetekre jól teljesül

(tömegekre nem olyan jól)

$$4 m_K^2 = m_{\pi}^2 + 3 m_{\eta}^2$$

$$0,98 \text{ GeV}^2$$

$$0,92 \text{ GeV}^2$$

III) A kvarkmodell paradoxonai és a colour/spin kv. szám

① nem figyelték meg $\left\{ \begin{array}{l} szalada levardat \\ tölt töltés \end{array} \right.$

② hadronok: $(qqq), (q\bar{q})$ állapotok $\rightarrow$ miért nincs

$(q\bar{q})$ vagy $(qq\bar{q}q)$ állapot?

$\uparrow$
itt is lenne
tölt töltés

$\uparrow$
itt lehetne
egyszer töltés,
magnétikus

③ Δ^{++} (az egész $(\frac{3}{2})^+$ multiplikát) bírnak a Pauli-ellor!

hisz:

- $uuu \rightarrow$ flavour szimmetria
- $\frac{3}{2}$ spin $\rightarrow$ spinok is szimmetria
- legabszolútabb töltés $\rightarrow$ alapáll. $\Rightarrow$ tilos is szimmetria

1) Kült az 1-3-12: q-nak VAN egy további szabadsági

száma: szín / colour

flavour $\uparrow$
 $u_k = (u_1 u_2 u_3) \rightarrow 3$
 $d_k = (d_1 d_2 d_3) \rightarrow 3$
 $s_k = (s_1 s_2 s_3) \rightarrow 3$
 $c_k = (c_1 c_2 c_3) \rightarrow 3$
 $\downarrow$

szín

$SU(3)_C$

$\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) \rightarrow 3$
 $\vdots$

• min lyften er stor!

→ $SK(3)_{\mathbb{C}}$ colour nimm. ~~stellen~~ ~~regulär~~

— CSAK colour rings! disproportion figural metaphor metaphor!
(inner inner $\rightarrow$ inner retail, inner retail $= 0$)

2) a) málod kúrkos az $SU(3)_C$ szimmetriájára vonatkozóan a következőket kell megfigyelni:

- gluons: 8 dim $\rightarrow$ 2nd order reinit. trans.

$\Rightarrow$ a solid brick, a solid glass river

$9\overline{9}$ $50(3)_c$ $3 \times \overline{3} = 1 \oplus 8$
 $\downarrow$
 ringelt : 200 1000000 ✓

↓
müßte : ist ¹stark ↓

gg $3 \times 3 = 5 \oplus 3$ minus singlet $\rightarrow$ 1 rem. ¹ triplet

999 $3 \times 3 \times 3 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \rightarrow 7$ möglich $\rightarrow$ latje!

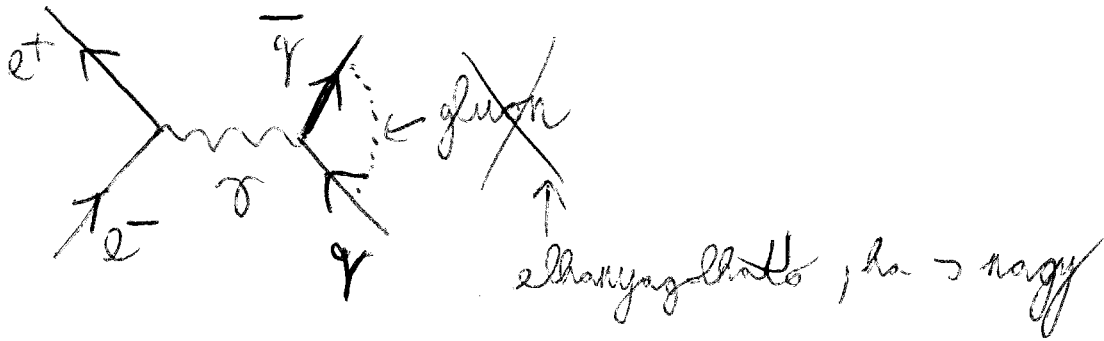
2.) $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} u^\alpha u^\beta u^\gamma \leftrightarrow \Delta^{++}$ charmon extension

3) Honnan tudjuk, hogy valóban 3-uk van?

$$e^+e^- \rightarrow \text{hadron}, \quad e^+e^- \text{ TK energy} = \infty$$

$$R(s) = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadron})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \quad (5)$$

2 ~~100~~ 1000



$$R(s) = \sum_q N \cdot Q_q^2$$

ahol N ennek száma
amiről is fel kell "számolni"



$$\sum_q \rightarrow \text{kinematikailag megengedett kvarkok}$$

$$s < (2m_c)^2$$

amely q tömeg

$$\sum_q = u, d, s$$

$$R(s) = N \cdot \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \right) = N \cdot \frac{2}{3} = 2$$

$N=3$

mértékkel $R(s) = 2 \Rightarrow \underline{\underline{N=3}}$!

~~Ha $m_c > (2m_c)^2$~~

$$\sum_q \rightarrow u, d, s, c \Rightarrow N \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{3}$$

ahol c csak tiszta állapotban
hisz lehet benne

~~No -15-~~

CP invariancia és értéke a K^0 $\bar{K}^0$ rendszerben

- 1957 gyenge kh.-ban P és C sérül, CP megmarad

elméleti megfontolások: CPT invariancia fennáll

$\Rightarrow$ T invariancia is van

- 1964 Fitch kísérlet: semleges K^0 bomlásai a CP nem marad meg

$\Rightarrow$ T invariancia sérül mikroszkopikus szinten!

$$K^0 \sim (\bar{s}d)$$

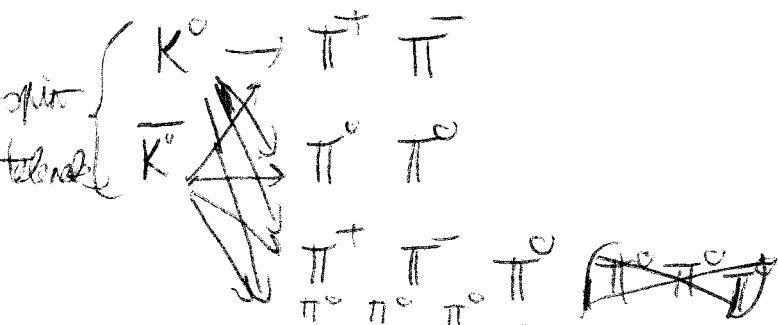
$$\bar{K}^0 \sim (s\bar{d})$$

$$S = 1$$

$$S = -1$$

ritkaság

K^0 és $\bar{K}^0$ csak egyen mennyiségben különböznek, ami a gyenge kh.-ban nem marad meg.



bomlasi időkétl $\Rightarrow$ ezek gyenge folyamatok

(elm. megfontolások: $K^0, \bar{K}^0$ -nak van ritkasága)

① a gyenge l.h. CP invariancia $\Leftrightarrow \exists$ ~~is~~ ^{van} olyan
állottárú K^0

$$\left. \begin{aligned} P |K^0\rangle &= -|K^0\rangle \\ P |\bar{K}^0\rangle &= -|\bar{K}^0\rangle \\ C |K^0\rangle &= |\bar{K}^0\rangle \\ C |\bar{K}^0\rangle &= |K^0\rangle \end{aligned} \right\} \Rightarrow K^0, \bar{K}^0 \text{ NEM CP sajátállapotok}$$

$$|K_1^0\rangle = \frac{|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$|K_2^0\rangle = \frac{|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$CP |K_1^0\rangle = \frac{-|\bar{K}^0\rangle + |K^0\rangle}{\sqrt{2}} = |K_1^0\rangle \quad CP |K_2^0\rangle = -|K_2^0\rangle$$

ES

$$(2T) : CP(\pi^0 \pi^0) = 1 \quad CP(\pi^+ \pi^-) = C(\pi^+ \pi^-) P(\pi^+ \pi^-) = (-1)^L (-1)^L = 1$$

$\Rightarrow 2\pi - \pi \sim |K_1^0\rangle$ ~~but~~ CP ~~örökl~~ domináns $\sim |K_2^0\rangle$ nem!

$$CP |\pi^0 \pi^0 \pi^0\rangle = -|\pi^0 \pi^0 \pi^0\rangle \in K_2^0$$

$$CP |\pi^+ \pi^- \pi^0\rangle = (-1)^{L+1} |\pi^+ \pi^- \pi^0\rangle \begin{cases} L \text{ páros} \Rightarrow (-1) \in K_2^0 \\ L \text{ páratlan} \Rightarrow (+1) \in K_1^0 \end{cases}$$

$$\vec{J} = \vec{0} = \vec{L} + \vec{S} \quad \vec{L} = -\vec{S}$$

$$\pi^+ \pi^- \pi^0 \quad \pi. m.$$

17

$\boxed{L=0}$ domináns

($l=0$: a hullósnívr. tud nagy kéri az origót)

$l \neq 0$: $-||-$ nem tud $-||-$

a bomlás az origótól rajlik le

$\Downarrow$

$l=0$ a domináns)

$\Downarrow$

dominánsan csak a K_2^0 tud $(3\pi)^0$ -re bomlani, K_1^0 nem

$$K_1^0 \rightarrow 2\pi$$

$$K_2^0 \rightarrow 3\pi$$

domináns bomlások

($\pi^+\pi^-\pi^0$)

($\pi^+\pi^-\pi^0$)

lehetőség a részletek

$$\frac{\Gamma(K_1^0 \rightarrow 2\pi)}{\Gamma(K_2^0 \rightarrow 3\pi)} \sim 10^3$$

$$\tau_1 \sim 10^{-10} \text{ s} \leftarrow \text{rövid}$$

$$\tau_2 \sim 5 \cdot 10^{-8} \text{ s} \leftarrow \text{hosszú}$$

! $\pi^+\pi^-\pi^0$
 K^0

kitérés: $K^0 \bar{K}^0$ rendszer is az oscilláló rendszer

kezdés:

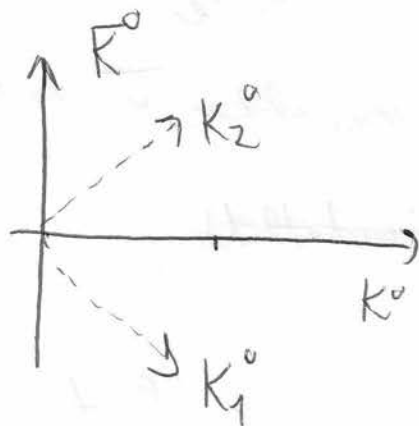
$\pi^- p \rightarrow \Lambda K^0$ erős folyamat, K^0 5 sajátállapot, DE bomlani K_1^0 K_2^0 -ként tud (ezek nem $5 - || -$ de)

$t=0$ -kor $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ milyen nagy szögben lesz a K^0 $\bar{K}^0$ között
 $\psi = \begin{pmatrix} K^0 \\ \bar{K}^0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} K^0 \\ \bar{K}^0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} K_1^0 \\ K_2^0 \end{matrix}$

5. ora

1) K^0 $\bar{K}^0$ rendszer első bñ-lon ~~keletkez~~ ~~kelet~~ $J = \pm 1$

állapotban keletkeznek, CP sajátállapotban bomlanak: K_1^0, K_2^0



$t=0$ -ban K^0 -ként $\pi^- p \rightarrow \Lambda K^0$

$t > 0$ milyen aránnyal fog $\bar{K}^0$ -ként bomlani?

$K_i^0 \quad i=1,2$

$\hbar = c = 1$

QM-ből: (stac. állapot, adott bomlani való:

$$|i(t)\rangle = e^{-i(m_i - \frac{i}{2}\Gamma_i)t} \cdot |i(0)\rangle$$

m_i K_1^0 K_2^0 tömeg

Γ_i — — — élettartama⁻¹

QM
$$K^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|K_1^0\rangle + |K_2^0\rangle \right)$$

$$\downarrow(t) \quad \downarrow(t)$$

$$\langle \bar{K}^0 | \frac{K_1^0(t) + K_2^0(t)}{\sqrt{2}} \rangle =$$
 → mekkora amplitúdóval lesz $\bar{K}^0$ + idő múlva

$$= \frac{1}{4} \left\{ e^{-\Gamma_1 t} + e^{-\Gamma_2 t} + 2 e^{-\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} t} \cos\left(\frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2} t\right) \right\}$$

$$\downarrow$$

$\frac{1}{K_0}$ találm mehet!

$$\overline{K^0} \rightarrow 1 \pi^+$$

$$K^0 \rightarrow 1 \pi^+$$

$$\overline{K^0} \rightarrow \pi^+ e^- \overline{\nu_e}$$

$$K^0 \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e$$

$\Rightarrow \sim \pi^+$ -kat kell mérni: ha van, akkor $\overline{K^0}$ is volt

$\hookrightarrow$ az oscilláció ritkaság mérésén kimutatható

2) 1964 Fitch - Cronin CP sértés $K_2^0 \xleftarrow{CP} K_L$

$$K_2^0 \rightarrow 2\pi$$

1000 K_2^0

komlások

~ 3 -ban sértés

a CP sértés.

$$\in \begin{cases} \frac{n(K_2^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{n(K_2^0)} = 2 \cdot 10^{-3} \\ \frac{n(K_2^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0)}{n(K_2^0)} = 10^{-3} \end{cases}$$

ha CP sértés:

$$n(K_2^0 \rightarrow \pi^+ e^- \overline{\nu_e}) = n(K_2^0 \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e)$$

ezek valószínűségei megegyeznek (mert

~ 2 CP sajátállapotban tud előállni, és ezek valószínűségei

amplitúdóval vannak K_2^0 -ban)

$$DE \quad \frac{\Gamma(K_2^0 \rightarrow \pi^+ \mu^- \bar{\nu}_\mu) - \Gamma(K_2^0 \rightarrow \pi^+ e^- \bar{\nu}_e)}{\Gamma} = (0,33 \pm 0,01) \cdot 10^{-3}$$

exp
(kísérleti)

3) CP+ invariancia:

$$CP+ |a\rangle = |\bar{a}\rangle$$

$$\langle \bar{b} | H | a \rangle^* = \langle \bar{b} | H | \bar{a} \rangle \quad \text{közvetlen mérés}$$

stabil rész.-re $m_a = m_{\bar{a}}$

lombó rész.-re $\tau_a = \tau_{\bar{a}}$

$$\frac{\tau(\mu^-)}{\tau(\mu^+)}$$

$$\frac{\tau(\pi^-)}{\tau(\pi^+)}$$

10^{-5} pontoságig igaz

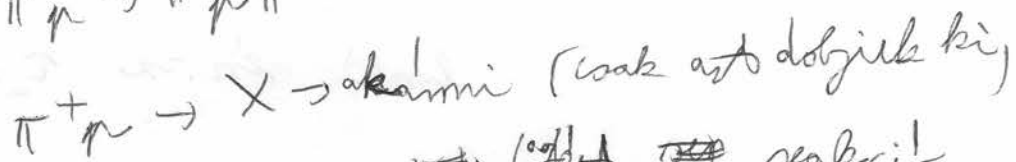
$$\frac{2(m_{\pi^-} - m_{\pi^+})}{m_{\pi^-} + m_{\pi^+}} = (7 \pm 4) \cdot 10^{-5}$$

A hadronrezonanciák, Breit-Wigner formula

$\tau \sim 10^{-23} \text{ s} \rightarrow$ nem lehet laboratóriumban / emulzióban látni

szárazsi kísérletekben teljes
differenciális } hatáskeresztmetszet
spec. irányokba

legfontosabb tanulmányozott pion - nukleon reakció



mikor nem ~~látjuk~~ ~~reakció~~

$\Rightarrow$ teljes hatáskeresztmetszet

papír $\rightarrow p_L$: pion labirintus - a

$$30 - 100 \text{ mb} = (3 - 10) \times 10^{-26} \text{ cm}^2$$

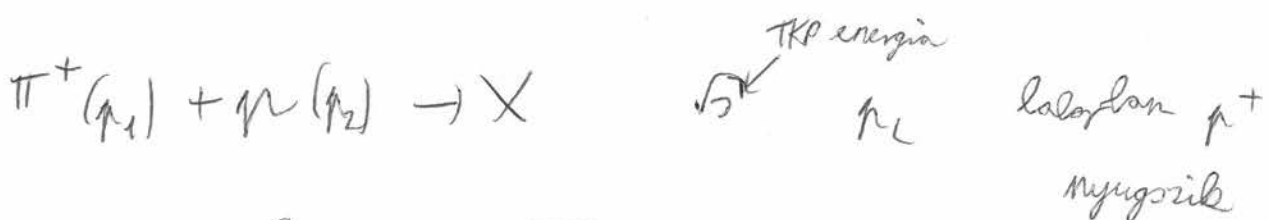
$\rightarrow$ geometriai keresztmetszet

(hisz: $r \sim 10^{-13} \text{ cm} = 1 \text{ Fermi}$)

$\uparrow$ a hatáskeresztmetszet
az erős kölcsönhatás

Ra vannak rezonanciák, a teljes hatáskeresztm. - ben csúcsok vannak.

$\hookrightarrow$ minél rövidebb a rez. élettartama, annál nehezebb a hatáskeresztm.



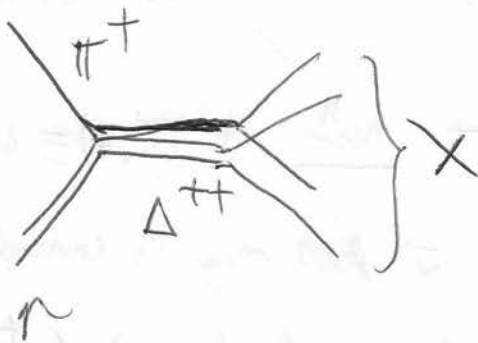
$$s = (p_1 + p_2)^2 = 2 m_p \cdot \sqrt{p_L^2 + m_\pi^2} + m_p^2 + m_\pi^2$$

$= \sqrt{s}$

és maximum

$$p_c \sim 0,3 \text{ GeV}$$

$$\sqrt{s} \sim 1,23 \text{ GeV} \approx \Delta^{++} \text{ tömege}$$



ez az elképzelés: a rezonancia
részecskéi között van
a π^+ részecske

$$S_{fi} = S_{if} + (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) T_{fi} \quad (\text{szcizmatix})$$

$$T_{fi} \sim \frac{1}{m_\Delta^2} \quad (\text{bármely két részecske})$$

bármely részecske: $m_\Delta \rightarrow m_\Delta - i \frac{\Gamma_\Delta}{2} \quad \Gamma_\Delta \gg 0$

↑
valós

$$m_\Delta^2 \gg \Gamma_\Delta^2$$

ez kell ahhoz, hogy legyen a rezonancia

A térelméleti Lagrange-Hamilton formalizmus

1) Lagrange-Hamilton véges szabadsági fok $\rightarrow \infty$ sok szab. fok

$$q_i(t) \quad i=1, \dots$$

dinamikai koordináták

$$a=1, \dots$$

$$\phi^a(\vec{x}, t) \equiv \phi^a(x)$$

$\downarrow$
4-es koordin.

$$\xrightarrow{\text{mero}} \phi^a(\vec{x}, t) \equiv \phi^a_x(t)$$

$\vec{x}$ felel meg az indexeknek,

$\phi \approx q$ koordináták, ~~de~~

~~de~~ ~~mindig~~ ~~kontinuumjához~~

($\vec{x}$ csak egy címke!) $\equiv$

~~$a=1, 2, 3, 4$~~

• absztraktil hármas jelölés:

(EM-ter): 0-törvény vektormező $\phi^a(x) \quad a=1 \dots V: V$ valós skalar

• négyesvektor mező $\rightarrow A^a_\mu(x) \quad \mu=0, 1, 2, 3$ Lorentz-vektor

• Dirac-spinorok $\rightarrow \psi^a(x)$

(elektron)

2) hatásintegrál: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi^a, \partial_\mu \phi^a) \quad \hbar=c=1$

$$S =$$

jelölés: $x^\mu = (x^0, \vec{x})$

$$x_\mu = (x_0, -\vec{x})$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \vec{\nabla})$$

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\partial_0, -\vec{\nabla})$$

+ Einstein-konvenció

~~Att:~~ csak előrenéző
dinamikus függ (különben
kauzalitáshoz lenne)
~~Einstein~~

~~S =~~

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi^a, \partial^\mu \phi^a) = \int dt \int d^3x \mathcal{L}(\phi^a, \partial^\mu \phi^a) = \\ = \int dt L[\phi^a, \partial^\mu \phi^a]$$

S extrémumai ^{→ klass. mozg.} ~~egyenlet~~ egyenlet, S ~~Lorentz~~ Lorentz-invariáns
 d^4x ~~Lorentz~~ Lorentz-inv.

$\mathcal{L}(\phi^a, \partial^\mu \phi^a)$ is ~~Lorentz~~ Lorentz-inv.!

• klasszikus mozgásegyenlet:

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi^a)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a}$$

$$\parallel \\ \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^a)} \right)$$

$$a = 1 \dots$$

miel $\mathcal{L}$ és $\partial^\mu, \partial_\mu \phi^a$ is
Lorentz-inv. ~~(Lorentz)~~, ezért
az egyenlet kovariáns

• $\mathcal{L}(\phi^a, \partial^\mu \phi^a)$ nem függ ^(nyílt) a koordinátáktól expliciten

$$\Rightarrow x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu \text{ invariancia}$$

• kanonikus energia-imp. tenzor:

$$T^{\mu\nu} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{\phi}^\mu)} \cdot \dot{\phi}^\nu - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

(def. szerint)

Ha: ha $\mathcal{L}$ nem függ ^{explicit} a koordinátától, akkor

$T^{\mu\nu}$ megmarad, $\boxed{\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0}$ $\leftarrow$ 4 db egyenlet
 (3 imp. megm. + energia megm.)

$$p^\nu = \int_{x^0=\text{all}} d^3x T^{0\nu}$$

$$\dot{p}^\nu = \frac{d}{dx^0} p^\nu = \int_{x^0=\text{all}} d^3x \partial_0 T^{0\nu} = - \int_{x^0=\text{all}} d^3x \partial_i T^{i\nu} = 0$$

Gauss-tétel +
 + felület a végtelenbe
 ZART m2.

az egy
 priori feltétel,
 hosszú hatótávolság
 skálánál ezt
 ellenőrizni kell

$\rightarrow$ a ∞ -ben 0-k az int. ok

értelmezés: p^ν Lorentz-vektor

ugyanis $T^{0\nu}$ $x^0 \rightarrow dx^0$ szerint transz., és d^3x inv.

$\Rightarrow p^\nu = (d^3x) T^{0\nu} \Rightarrow$ tényleg ν szerint transz. $\rightarrow$ 4-es vektor

4 db megmaradó Lorentz-vektorok $\rightarrow$ 4 db mennyiség, és
 transz. szim. hasz. tényleg megmaradó 11-ek (def. szerint)

$$\Rightarrow P^\mu = (E, \vec{P})$$

$\downarrow$ energia $\swarrow$ hamasimp. (def. szerint, most ez marad meg)

$$E = \int d^3x \cdot T^{00} \quad \rightarrow \quad H = \int d^3x \underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^a} \dot{\phi}^a - \mathcal{L} \right)}_{T^{00}}$$

$x^0 = \text{all}$ $x^0 = \text{all}$ Kanilton sz.

• Még egy db, hogy ez a Kanilton:

$$q_i(t) \rightarrow p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{kanonikus imp.} \quad (\text{véges nat. fok})$$

$$\downarrow$$

$$\pi_{\vec{x}}^a(t) \equiv \boxed{\pi^a(\vec{x}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_{\vec{x}}^a(t)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^a}}$$

$\phi^a(x)$ din. változó

konjugált impulzus

$\Downarrow$

$$H = \int d^3x \left(\underbrace{\pi^a(\vec{x}, t) \dot{\phi}^a(\vec{x}, t)}_{\dot{\phi}^a(\vec{x}, t)} - \mathcal{L} \right)$$

$x^0 = \text{all}$

$$\Leftrightarrow H = p_i \dot{q}_i - L$$

✓ véges nat. fok

3) példák

a) 1db valós skálarmező önkölcsönható $\phi(x)$

$\partial^\mu \phi$ $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 - V(\phi)$

kin. energia *energiaes tagot kiemeltük*

$$(\partial_\mu \phi)^2 = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) = (\partial^0 \phi)^2 - (\vec{\nabla} \phi)^2$$

→ polinom
(vagy expon.)
↓ (2-nél)
φ magasabb hatványait
tartalmazza

~~mozg. egyenlet~~

• kanonikus impulzus: $\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} = \partial^0 \phi$

• mozg. egyenlet:

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi = -m^2 \phi - V'(\phi)$$

$$\boxed{(\square + m^2) \phi = -V'(\phi)}$$

Klein-Gordon-eg.

→ még önkölcsönható, mert
φ saját magának a
forrása ($V(\phi)$ -n keresztül)

ha $V(\phi) \equiv 0$ szabad KG-egyenlet

→ szabad skálarmező Lagr.-sűrűsége

b) $\phi \rightarrow \phi^a$ N db skálar $V(\phi^a)$

$$m \rightarrow m_a^2$$

$$\boxed{(\square + m_a^2) \phi_a = -\frac{\partial V}{\partial \phi_a}}$$

→ ilyenkor V az egymással
 $a = 1, \dots, N$ valós kh.-t is leírja

• erre a pot.-ra:

$$H = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} (\pi^a(x))^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi^a)^2 + \frac{1}{2} m_a^2 \phi_a^2 + V(\phi^a) \right\}$$

4) Noether-tétel: $\forall$ folyt. szim. lar $\exists$ megmaradó mennyiség!

$\rightarrow$ $\forall$ helyb szim.-lar $\mathcal{F}^M = (\mathcal{F}^0, \vec{\mathcal{F}})$

(töl. lar: $\partial_\mu \mathcal{F}^M = \partial_0 \mathcal{F}^0 + \partial_i \mathcal{F}^i = 0$ konst. egyenlet)

$$Q \equiv \int_{x^0 = \text{all}} d^3x \mathcal{F}^0 \quad \text{megmaradó töltés}$$

$\phi_i(x)$ $i=1 \dots N$ merék, t^a ($a=1 \dots \dim G$) $N \times N$

matricák

így $(t^a, t^b) = i f^{abc} t^c$

lehet t -k

hermitikusak

f^{abc} a G struktúra állandói

G szimmetria:

$$\phi_i(x) \rightarrow \phi_i'(x) = \phi_i(x) + i \overbrace{\varepsilon^a (t^a)}^{\delta \phi_i}{}_{ij} \phi_j$$

ε^a konstans
infinitesimális
paraméterek

"helyb": a töl. pontok nem változnak,
csak a ϕ -k helyb térben

transzformáltak!

globális
szimmetria

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_i, \gamma^\mu \phi_i)$$

~~ha G a m. szimmetriája, a Lagrange nem változik.~~

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta \phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi_i)} \cdot \underbrace{\delta (\partial^\mu \phi_i)}_{\substack{\text{marg. egyenletek} \\ \downarrow \\ \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi_i)} \delta \phi_i + \\ = \partial^\mu (\delta \phi_i) \\ \uparrow \\ \text{mert } \varepsilon_a \text{ konstans!}}}} = \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi_i)} \delta \phi_i +$$

$$+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi_i)} \cdot \partial^\mu (\delta \phi_i) = \partial^\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi_i)} \delta \phi_i \right] \stackrel{\delta \phi_i = \dots}{=} 0$$

$$= \varepsilon^a \cdot i \cdot \partial^\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi_i)} (t^a)_{ij} \cdot \phi_j \right] = 0$$

ha G a m. szimmetriája, $\mathcal{L}$ -t invariancia legyja

$$\Rightarrow \delta \mathcal{L} = 0$$

$$\vec{F}_\mu^a := -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi_i)} \cdot (t^a)_{ij} \phi_j$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu \vec{F}_\mu^a = 0} \quad \forall a=1, \dots, n \rightarrow \text{megmaradó mennyiségek}$$

$$\boxed{Q^a = \int d^3x \vec{F}_0^a = \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^0 \phi_i)} i (t^a)_{ij} \cdot \phi_j =}$$

$$= \boxed{-i \int d^3x \pi_i (t^a)_{ij} \cdot \phi_j}$$

az általános (modellfoktlen)
~~de~~ állítás

(Megj.: a tényleg szim.-kat ~~akkor~~ úgy lehet leírni a
Lagr.-ban, hogy invariánsa tennük a transz.-ra
 $\Leftrightarrow$ ez megmaradó töltéseket definiál)

$\rightarrow$ megmar. ~~tétel~~ nem ~~valtaik~~ ^{val} teljes divergencia ~~val~~ ^{val} valtaik
a Lagr.:

$$\text{fla: } \delta L = \underbrace{\sum_{\mu} j^{\mu} K_{\mu}^{\alpha}}_{\text{teljes divergencia}}$$

akkor $\delta L - \sum_{\mu} j^{\mu} K_{\mu}^{\alpha} = \sum_{\alpha} \left[i \partial^{\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial (j^{\mu} \phi_i)} \right) (t)_{ij} \cdot \phi_j \right] - j^{\mu} K_{\mu}^{\alpha}$
ez lesz a megmaradó
lamm

Kanonikus kvantálás

$\Pi^{\alpha}(x), \phi^{\beta}(x) \rightarrow \text{operator}$

EKR: egyidegi kommutálási
relációk

QM analógiájára:

ha $\hbar \neq 1$

$\hbar \rightarrow \hbar \delta^{ab}$

ÉS

$$\begin{aligned} [\phi^a(t, \vec{x}), \Pi^b(t, \vec{y})] &= i \hbar \delta^{ab} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ [\phi^a(t, \vec{x}), \phi^b(t, \vec{y})] &= 0 \\ [\Pi^a(t, \vec{x}), \Pi^b(t, \vec{y})] &= 0 \end{aligned}$$

egyidegi ^{val} ~~akkor~~ ^{ha} ~~akkor~~ ^{itt}
anna ~~akkor~~ ^{itt}
egyszeres ~~akkor~~ ^{itt}

(ez jö, mert klassikus limit: $\hbar \rightarrow 0$)

ilyenkor ϕ^a, π^a is kicsike $\rightarrow$ nem lesznek operátorok)

H is operátor lesz:

• $\forall$ operátor megfigyelhető (Heisenberg-ek):

$$\partial_t \phi^a(t, \vec{x}) = i [H, \phi^a(t, \vec{x})]$$

$\Rightarrow H$ -ra is igaz $\Rightarrow H$ megmarad kvantumosan is
(mert magával kommutál)

$$\partial_t \phi^a(t, \vec{x}) = i [H, \phi^a(t, \vec{x})]$$

(Ez az operátorok von. , a vz. állapotokra nem)

$$\partial_t \pi^a(t, \vec{x}) = i [H, \pi^a(t, \vec{x})]$$

Heisenberg - mozgásegyenletek

(Tétel) — is az EKR miatt ϕ_a kielégíti a
 $(\square + m_a^2) \phi_a = -\frac{\delta V}{\delta \phi_a}$ klasszikus mozgásegyenletet

Bisonyltds

- Lemmlki:

$$(\partial_{x_i} \phi^a(t, \vec{x}), \pi^b(t, \vec{y})) = i \delta^{ab} \partial_{x_i} \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

$$[\mathcal{L}(\phi(t, \vec{x})), \pi^b(t, \vec{y})] = i \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a}(\phi(t, \vec{x})) \cdot \delta^{ab} \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

használna $\phi \leftrightarrow \pi$ csere
(a-ma indexek)

$$- \quad \partial_0 \phi^a(t, \vec{x}) \stackrel{!!}{=} i [\mathcal{H}, \phi^a(t, \vec{x})]$$

$$\boxed{\partial_0 \phi^a(t, \vec{x})} = i \int d^3x' \left[\frac{1}{2} (\pi^b(\vec{x}', t))^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi^b(\vec{x}', t))^2 + \frac{m_0^2}{2} \phi_b^2(\vec{x}', t) + V(\phi^b(t, \vec{x}')) \right] \phi^a(t, \vec{x}) =$$

~ δ_{xx} kommutal ϕ^a -val

$$= i \int d^3x' \left[\frac{1}{2} (\pi^b(\vec{x}', t))^2, \phi^a(t, \vec{x}) \right] = i(-i) \int d^3x' \pi^a(\vec{x}', t) \cdot \delta(\vec{x} - \vec{x}') = \boxed{\pi^a(\vec{x}, t)}$$

$$\cdot \delta(\vec{x} - \vec{x}') = \boxed{\pi^a(\vec{x}, t)}$$

$\Rightarrow$ kvantumozar is igaz, hogy: $\boxed{\partial_0 \phi^a(t, \vec{x}) = \pi^a(\vec{x}, t)}$

$$(i = 1)$$

1) Kanarikus kvantálás (Helyb.)

$\phi^a(x), \pi^b(y) \rightarrow \text{EKR}$ (egyszerűsített kommutációs relációk)

$$\forall \psi(x) \text{ qantuma } \partial_\mu \psi(\vec{x}, t) = i [H, \psi(\vec{x}, t)]$$

$$\Rightarrow \partial_0 \phi^a(t, \vec{x}) = \pi^a(t, \vec{x}) \quad (\text{látuk})$$

(Tétel) $(\square + m^2) \phi^a(x) = - \frac{\delta V}{\delta \phi^a} \rightarrow \text{szó akarjuk bizonyítani}$

$$\begin{aligned} \partial_0 \pi^a(t, \vec{x}) &= i [H, \pi^a(t, \vec{x})] = i \int d^3x' \left[\frac{1}{2} (\pi^b(t, \vec{x}'))^2 + \frac{1}{2} (\nabla_{x'} \phi^b(t, \vec{x}'))^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_a^2}{2} \phi_a^2(t, \vec{x}') + V(\phi^b(t, \vec{x}')) \right], \pi^a(t, \vec{x}) \Big] = 0 \end{aligned}$$

és kommutál π^a -val

$$= i \left\{ \int d^3x' i (m_a \phi_a + \frac{\delta V}{\delta \phi^a}) \delta(\vec{x}' - \vec{x}) + \int d^3x' \left[\frac{1}{2} (\nabla_{x'} \phi^b)^2, \pi^a \right] \right\} =$$

$$= -m_a^2 \phi_a(t, \vec{x}) - \frac{\delta V}{\delta \phi^a}(t, \vec{x}) + \Delta \phi^a(t, \vec{x}) =$$

$$= \partial_0^2 \phi^a(t, \vec{x}) \leftarrow \partial_0 \pi^a = \partial_0 (\partial_0 \phi^a) \quad (\text{el. elv. dől})$$

$$\Rightarrow (\underbrace{\partial_0^2 - \Delta}_{\square} + m^2) \phi^a = - \frac{\delta V}{\delta \phi^a}$$

□ $\Downarrow$

megjelenik a δ deriváltja
b) parciális integrálunk
+ felületi tagot eldobjuk
(- előjel befőn a parciális-
lál)

= a mérések kielégítik a klasszikus mozgásegyenletet

2) 1 db valós, szabad skalármező $\phi^a(x) \rightarrow \phi(x)$ $V(\phi) \equiv 0$

↳ klasszikusan $\phi^*(x) = \phi(x) \Rightarrow \phi^\dagger(x) = \phi(x)$

móvíegyenlet: $(\square + m^2) \phi(x) = 0$

• Eljárás: az egyenlet ^{megoldásait} síkhullámok superpoz. - jaként
keressük, melyek együttesen operátorok legyenek $\rightarrow$
 $\rightarrow$ ezek kommutációs ~~relációi~~ ^{relációi} ~~függ~~ ^{logikát} kielégíteni

az EKR - elv

• megoldás:

$\rightarrow$ síkhullámok superpozíciója e^{ikx} $kx = k_0^0 - \vec{k} \cdot \vec{x}$

$$0 = -k^2 + m^2 = -(k_0^2 - \vec{k}^2) + m^2 \leadsto \boxed{k_0^2 = \vec{k}^2 + m^2}$$

disp. reláció:

$$k_0 = E(\vec{k}) = \omega(\vec{k}) = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$

akkor elégíti ki a
síkhullám egyenletet

és mindig a $\oplus$ gyök (még negatív
energós állapotoknál is)

$$k^\mu(\omega(\vec{k}), \vec{k})$$

$\Downarrow$

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \cdot \delta(p^2 - m^2) \cdot \pi \cdot \theta(p^0) \cdot \left[a(\vec{p}) e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p}) e^{ipx} \right]$$

θ fr (lépésfüggő.)
 ettd. lesz valós!!
 rel. invariancia
 kvantizálás:
 $a(\vec{p})$ (generátorok)
 $a^\dagger(\vec{p})$
 ez 4-es imp.!!!

p_0 neminté integrálható
 elvégezzük

$$\int d p^0 \theta(p^0) \cdot \delta\left(\frac{(p^0 + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2})}{(p^0 - \sqrt{\vec{p}^2 + m^2})}\right) =$$

$$p_+^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} = \frac{1}{2E(\vec{p})} = \frac{1}{2\omega(\vec{p})}$$

l. gyakorlat $\delta(f(p^0)) = \dots$

$$1. \quad d\vec{p} \equiv \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 (2\omega(\vec{p}))}$$

$\forall$ mőgötte bñt fr. pben $p^0 \rightarrow \omega(\vec{p})$

így:

$$\phi(x) = \int d\vec{p} \cdot (a(\vec{p}) e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p}) e^{ipx})$$

$$\pi(x) = \partial_0 \phi = -i \int d\vec{p} \cdot \omega(\vec{p}) \cdot (a(\vec{p}) e^{-ipx} - a^\dagger(\vec{p}) e^{ipx})$$

EKR - lőle:

$$[a(\vec{p}), a(\vec{p}')] = 0 = [a^\dagger(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] \quad \forall \vec{p}, \vec{p}' \neq 0$$

(időfüggő tagok 0-ból) - 6

időfüggően tagok
~~5-től~~ 5-től szorzatuk

$$[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] = (2\pi)^3 \cdot 2\omega(\vec{p}) \cdot \delta(\vec{p} - \vec{p}')$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} [a(\vec{p}), a(\vec{p}')] &= [a^\dagger(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] = 0 \\ [a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] &= (2\pi)^3 \cdot 2\omega(\vec{p}) \cdot \delta(\vec{p} - \vec{p}') \end{aligned}}$$

$$\forall \vec{p}, \vec{p}' \neq \vec{p}$$

Állapotok:

vakuum $|0\rangle$ (Fock-vakuum): $a(\vec{p})|0\rangle = 0 \quad \forall \vec{p}$

$$a^\dagger(\vec{p})|0\rangle = |\vec{p}\rangle \quad (+ \text{éltelmesítés})$$

$\vec{p}$ impulzus állapothoz tartozó $\vec{p}$ vakuumot

$$\begin{aligned} \langle \vec{k} | \vec{k}' \rangle &= \langle 0 | a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}') | 0 \rangle = \langle 0 | [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] + \\ &+ \underbrace{a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}')}_{0} | 0 \rangle = \langle 0 | [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] | 0 \rangle = \end{aligned}$$

$$= \boxed{(2\pi)^3 \cdot 2\omega(E) \cdot \delta(\vec{k} - \vec{k}')} \underbrace{\langle 0, 0 \rangle}_1$$

kovarianson normált
 sűrűség ≥ 0

$|\vec{p}\rangle$ éltelmesítés

$$\mathbf{P}^\mu := \int d^3x T^{\mu 0} = \int d^3x (\pi(x) \cdot \partial^\mu \phi - g^{\mu 0} \mathcal{L}) \quad \text{andras impulzus vektora}$$

megmutatjuk, hogy: $P^M |\vec{p}\rangle = p^M |\vec{p}\rangle$ energia $w(\vec{p})$
 akkor értelmesnek hívjuk $|\vec{p}\rangle$, mint 1db impulzus $\vec{p}$
 szabadon mozgó relat. részecske $w(\vec{p})$ disp. reláciával

$$P^M = \int d^3x \left(\underset{\uparrow}{\pi(x)} \underset{\uparrow}{\partial^M \phi} - \underset{\uparrow}{g^{0M} \mathcal{L}} \right)$$

$\phi(x), \pi(x)$ szöküllam kifejtett alakját
 helyjük (l. következő gyakorlat)

$$P^M = \int d^3\vec{p} \cdot p^M \frac{1}{2} (a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p}) + a(\vec{p}) a^\dagger(\vec{p}))$$

$\left(\begin{array}{l} P^M |0\rangle = 0 \\ \text{titkos} \end{array} \right) \equiv$ fizikai invariancia; fizikai állapotoké pozitív

$$:P^M: = \underbrace{\int d^3\vec{p} \cdot p^M a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p})}_{\cdot |0\rangle = 0} + g^{0M} (2\pi)^3 \cdot \underbrace{\delta(0)}_{V \text{ 3-as ter térfogata}} \cdot \underbrace{\left(\int d^3\vec{p} w(\vec{p}) \right)}_{\substack{\text{nullponti energia } \infty \\ (w(\vec{p})) \\ \text{behatárolt.} \\ \text{-ból}}}$$

$\therefore$ normálizációs jels:

az elhanyagoljuk

konstans

lyan alakba írjuk át, amiben

$a(\vec{p})$ van a jobb oldalon (vakuumra $0 \rightarrow a|0\rangle$),

és a konstansokat (kommutátorokból) elhanyagoljuk

$(a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}))$ spec. polinomja
 -ből

$$N(\vec{k}) |\vec{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) |0\rangle = (2\pi)^3 \cdot 2\omega(\vec{k}) \cdot \delta(\vec{k}-\vec{k}) |\vec{k}\rangle$$

$$\Rightarrow |\vec{k}\rangle: 1 \text{ db } \vec{k} \text{ impulzus, } \Rightarrow N(\vec{k}) |\vec{k}\rangle \sim |\vec{k}\rangle$$

$\omega(\vec{k})$ energiájul viselkedik

$$\text{hasznosítva: } a^\dagger(\vec{k}_1) a^\dagger(\vec{k}_2) |0\rangle = p^\mu \\ = |\vec{k}_1 \vec{k}_2\rangle \rightarrow 2 \text{ rész, } \text{analízis}$$

$\vec{k}_1 + \vec{k}_2$ impulzus, $\omega(\vec{k}_1) + \omega(\vec{k}_2)$ energiájuk

$$p^\mu |\vec{k}_1 \vec{k}_2\rangle = (\vec{k}_1 + \vec{k}_2)^\mu |\vec{k}_1 \vec{k}_2\rangle$$

$|0\rangle$ Fock-vakuum, Fock-tér, $\langle 0|0\rangle = 1$

$$|0\rangle, |\vec{k}\rangle, |\vec{k}_1 \vec{k}_2\rangle, |\vec{k}_1 \dots \vec{k}_3\rangle \dots |\vec{k}_1 \dots \vec{k}_N\rangle \dots$$

$$\text{energia} \geq N \cdot m$$

[Hf] belátni, hogy a küls. rész. számok állapotok

ortogonalizáltak, azaz $\langle \vec{k}_1 \dots \vec{k}_N | \vec{k}_1 \dots \vec{k}_M \rangle = 0$ ha $N \neq M$

($\langle 0|0\rangle = 1$, $a^\dagger(\vec{k})|0\rangle \neq 0 \rightarrow \langle 0|a(\vec{k}) \neq 0$, melyet kell felhasználni)

3) komplex skalarmező (skalár) ϕ_1, ϕ_2 vektor

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2)$$

$$\phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 - i\phi_2)$$

$\phi(x), \phi^*(x)$ (ezek füglen mennyiségek!)

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^* \rightarrow$$

van belső szimmetriája

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi \quad \alpha \text{ valb konst}$$

$$\phi^* \rightarrow e^{-i\alpha} \phi^*$$

1 szim. $\Rightarrow$ van 1 megmaradó töltés (l. áram)

(ha ϕ_1, ϕ_2 azonos tömegűek)

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi^*$$

$$\pi^*(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi^*)} = \partial_0 \phi$$

$$\text{EKR} \quad [\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] = i \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

$$[\phi^*(t, \vec{x}), \pi^*(t, \vec{y})] = i \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

$\forall$ egyéb egyes kommutátor = 0

$$\phi, \phi^* : (\square + m^2) \phi = 0$$

$$(-\square + m^2) \phi^* = 0$$

} megoldásmentes

✓ most nem valószínű lenne,

$$\phi(x) = \int d^3 \vec{p} \left[a(\vec{p}) e^{-ipx} + b^+(\vec{p}) e^{ipx} \right]$$

most komplex
a mező!

$$\phi^\dagger(x) = \int d\vec{p} \left[a^\dagger(\vec{p}) \cdot e^{ipx} + b(\vec{p}) \cdot e^{-ipx} \right]$$

EKR-ekke bekezdése:

$$[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] = (2\pi)^3 2\omega(\vec{p}) \cdot \delta(\vec{p} - \vec{p}') = [b(\vec{p}), b^\dagger(\vec{p}')] \\ \forall \text{ egyéb } \text{kommutátor} = 0$$

$$: P^\mu : = \int d\vec{p} \cdot p^\mu \left(a^\dagger(\vec{p}) \cdot a(\vec{p}) + b^\dagger(\vec{p}) \cdot b(\vec{p}) \right)$$

$$a^\dagger(\vec{p})|0\rangle = |\vec{p} \rightarrow\rangle$$

$$b^\dagger(\vec{p})|0\rangle = |\vec{p} \rightarrow\rangle$$

$\pm$ azt jelöli, hogy $a^\dagger$ vagy $b^\dagger$ kelti -e (az energiáját meg nem tudjuk)

$$\boxed{\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi, \quad \phi^* \rightarrow e^{-i\alpha} \phi^*} \Rightarrow \text{Noether-tétel:}$$

$$Q = \int d^3x \frac{1}{2i} (\phi^* \partial_0 \phi - \phi \partial_0 \phi^*) = \int d\vec{p} (a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p}) - b^\dagger(\vec{p}) b(\vec{p}))$$

(ahol ϕ_1, ϕ_2 egyforma tömegűek kell lenniük)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - \frac{m^2}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2)$$

Fock-ter:

$$|0\rangle, |\vec{k}, \pm\rangle, |\vec{k}_1, \vec{k}_2, \begin{smallmatrix} + & + \\ - & - \end{smallmatrix}\rangle, \dots$$

2) (visszatérő) ^{idő} való skálázás

$\phi(x)$ (T egy) időrendezett sorozata:

$$T(\phi(x), \phi(y)) = \underbrace{\Theta(x^0 - y^0)}_{\text{ezek nem}} \cdot \phi(x) \phi(y) + \Theta(y^0 - x^0) \phi(y) \phi(x)$$

felcserélhető! (ha kül. időben vannak)
 az $x^0 \neq y^0$
 (nem értelme az időrend, sorozatok)

Tétel:

$$(\square_x + m^2) \cdot i \cdot T(\phi(x), \phi(y)) = \delta^{(4)}(x - y)$$

9. óra

A Feynman-propagátor

(Idő való skáláz $\phi(x) = \psi$)

$$T(\phi(x) \phi(y)) = \Theta(x^0 - y^0) \phi(x) \phi(y) + \Theta(y^0 - x^0) \phi(y) \phi(x)$$

↓ ennek a vákuum várható értéke a Feynman-propagátor $\Delta(x, y)$

$$i \langle 0 | T(\phi(x) \phi(y)) | 0 \rangle = i \Delta(x, y) \Leftrightarrow (\square_x + m^2) i \Delta(x, y) = \delta^{(4)}(x - y)$$

eller:

Tétel

$$(\square_x + m^2) \cdot i \cdot T(\phi(x) \phi(y)) = \delta^{(4)}(x - y) \quad \text{Green-fv.}$$

Biz:

$$\square_x^2 T(\phi(x) \phi(y)) = \square_x \left(\Theta(x^0 - y^0) \square_x \phi(x) \cdot \phi(y) + \Theta(y^0 - x^0) \phi(y) \square_x \phi(x) \right)$$

$$+ \delta(x_0 - y_0) \cdot [\phi(x), \phi(y)] = (*)$$

$$\delta(x_0 - y_0) \leftarrow \# \Delta_{x_0} \theta(x_0 - y_0)$$

$$\downarrow \# \Delta_{x_0} \theta(y_0 - x_0)$$

$$= 0$$

egyszerűen kommutatorként,

az egyidejűleg pedig $\delta(x_0 - y_0)$

listázva

$$(*) = \theta(x_0 - y_0) \Delta_{x_0}^2 \phi(x) \phi(y) + \theta(y_0 - x_0) \phi(y) \Delta_{x_0}^2 (\phi(x)) +$$

$$+ \delta(x_0 - y_0) [\Delta_{x_0} \phi(x), \phi(y)]$$

$$\delta(x_0 - y_0) (-i) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$

$$\xleftarrow{\text{EKR}} \Delta_{x_0} \phi(x) = \pi(x, \vec{x})$$

$$(\text{mert } (\phi(\vec{x}) \pi(\vec{y})) = i \delta(\vec{x} - \vec{y}))$$

$$(\pi(\vec{x}), \phi(\vec{y})) = -i \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

$\Downarrow$

$$(\Delta_x - m^2) \cdot \phi(x)$$

$$\Delta_{x_0}^2 \pi(\phi(x) \phi(y)) = \pi(\Delta_{x_0}^2 \phi(x) \cdot \phi(y)) - i \delta^{(4)}(x - y) = (**)$$

$$\phi(x) \text{ megoldása } (\square_x + m^2) \phi(x) = 0 = (\Delta_{x_0}^2 - \Delta_x m^2) \phi(x) = 0$$

$$\Delta_{x_0}^2 \phi = (\Delta_x - m^2) \phi(x)$$

Δ kiemelt

$$(**) = (\Delta_x - m^2) \pi(\phi(x) \phi(y)) - i \delta^{(4)}(x - y) = \Delta_{x_0}^2 \pi(\phi(x) \phi(y))$$

$$\underbrace{(\Box_x^2 - \Delta_x + m^2)}_{\Box_x} T(\phi(x)\phi(y)) = -i\delta^{(4)}(x-y) \quad \blacksquare$$

$$\Rightarrow \boxed{i \langle 0 | T(\phi(x)\phi(y)) | 0 \rangle = i G(x,y) = -i \Delta(x,y)} \quad \leftarrow \text{Feynman-propagator}$$

Megoldás:

(megoldjuk $G(x,y)$ -ra) ① Fourier transz. $\rightarrow (\Box_x + m^2) e^{-ikx} = (-k^2 + m^2) e^{-ikx}$

$$\textcircled{2} \quad m^2 \rightarrow m^2 - i\varepsilon \quad \varepsilon > 0$$

$$(\Box_x + m^2 - i\varepsilon) e^{-ikx} = (-k^2 + m^2 - i\varepsilon) e^{-ikx}$$

$$G(x,y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ik(x-y)} \quad \varepsilon > 0$$

(m.o.)

most:

$$\int d^4k: (k^2 - m^2 + i\varepsilon) = (k_0^2 - \vec{k}^2 - m^2 + i\varepsilon) =$$

$$x_0 > y_0$$

$$x_0 < y_0$$

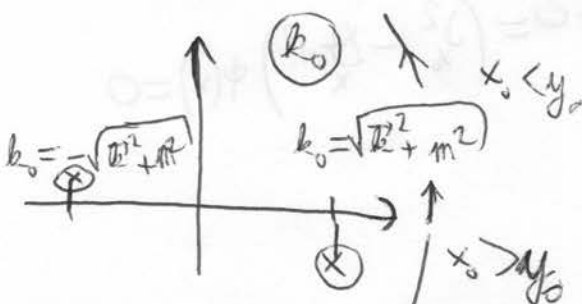
$$= (k_0 - \sqrt{\vec{k}^2 + m^2 - i\varepsilon}) (k_0 + \sqrt{\vec{k}^2 + m^2 - i\varepsilon})$$

$$\downarrow$$

$$k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2 - i\varepsilon}$$

$$\downarrow$$

$$k_0 = -\sqrt{\vec{k}^2 + m^2 - i\varepsilon}$$



⊗: polesek $\rightarrow$ ha nem lenne $m(-i\varepsilon)$, akkor nem lehetne k_0 mentén felintegrálni

(l. gyakorlat)

A kölcsönhatási képlet a perturbációszámítás

$\phi(x)$ skalár vekt, legyen önkölcsönhatás

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad \lambda \text{ dimenziótalan}$$

EKR, $i\partial_t \phi = i[H, \phi] \xrightarrow{\phi} \boxed{(\square + m^2) \phi = -\frac{\lambda}{3!} \phi^3}$ mögözgés

Ez egy nemlin. diff. egyenlet! $\rightarrow$ Hogyan oldjuk meg?

$$H = H_0 + H'$$

$$= \int d^3x \left(\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 \right) + \int d^3x \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

H_0 : szabad Hamilton op! (önkölcsönhatás)

- Kh.-i képlet adozunk $\rightarrow$ operátorok időfejlődése: H_0
- H' -t (λ sorinti) perturbációszámítással $\rightarrow$ állapotok időfejlődése: H'
keresjük

Kitérés:

Képlet ① Heisenberg ② Schrödinger ③ Kh.-i képlet

① $i\partial_t \phi = i[H, \phi(t)] \rightarrow \phi(\vec{x}, t) = e^{iHt} \cdot \phi(\vec{x}, 0) \cdot e^{-iHt}$ jó megoldás

Képlet $\Rightarrow$ vektor $\Rightarrow$ időfüggő

(Heis. képlet)

② Schrödinger: ϕ időfüggetlen $\Rightarrow$ ~~(időfüggetlen)~~ $\Rightarrow$ $t=0$ -ban illusztrálunk
- 75 $\phi(\vec{x}) \equiv \phi(\vec{x}, 0)$

$$\phi^S(\vec{x}) \equiv e^{-iHt} \cdot \phi(\vec{x}, t) e^{iHt} \quad i\partial_t |\alpha, t\rangle^S = H |\alpha, t\rangle^S$$

$$|\alpha, t\rangle^S = e^{-iHt} |\alpha\rangle$$

↑
időfüggetlen (H.-képleti állapot)

③ Ha: $\phi^I(\vec{x}, t) = e^{iH_0 t} \phi^S(\vec{x}) e^{-iH_0 t} = \underbrace{e^{iH_0 t} e^{-iH t}}_{U(t,0)} \cdot \phi(\vec{x}, t)$

$$\cdot \underbrace{e^{iH_0 t} e^{-iH_0 t}}_{U^{-1}(t,0)} = U(t,0) \phi(\vec{x}, t) U^{-1}(t,0)$$

↘ H is H₀
nem kettőzve
erőtel !!!

— $U(t,0)$: időfejlesztő operátor, mis:

$$|\alpha, t\rangle^I = e^{iH_0 t} |\alpha, t\rangle^S = e^{iH_0 t} e^{-iH t} |\alpha\rangle = U(t,0) |\alpha\rangle$$

• $t=0$ -kor illesztés $U(0,0)=1$

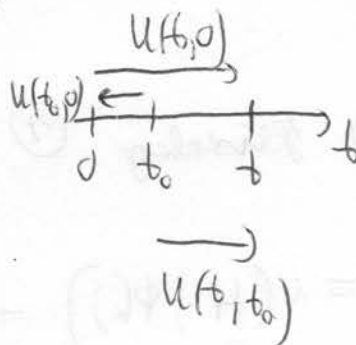
• $t_0 \rightarrow t$ hogyan látható?

$t=t_0$ -kor is

$$U(t, t_0) = 1$$

$$U(t, t_0) = U(t, 0) U^{-1}(t_0, 0)$$

úgy:



$$i\partial_t U(t, t_0) = H(t)^I U(t, t_0)$$

készenléti és készenléti képlet

Biz:



$t_0 \rightarrow$ fix, t nem függ

$$\begin{aligned}
 i \frac{d}{dt} U(t, 0) U^{-1}(t_0, 0) &= i \left\{ e^{iH_0 t} \cdot iH_0 \cdot e^{-iH_0 t} - e^{iH_0 t} iH e^{-iH_0 t} \right\} U^{-1}(t_0, 0) \\
 &= (i)^2 e^{iH_0 t} \underbrace{(H_0 - H)}_{-H'} e^{-iH_0 t} U^{-1}(t_0, 0) = e^{iH_0 t} \underbrace{H'}_{H'(t)^\top} e^{-iH_0 t} \underbrace{e^{iH_0 t} e^{-iH_0 t}}_{U(t, 0)} U^{-1}(t_0, 0) \\
 &\Rightarrow i \frac{d}{dt} U(t, t_0) = H'(t)^\top U(t, t_0) \quad \square
 \end{aligned}$$

(Megj.: $H'(t)^\top = H'(\phi^\top(x))$) (formálisan ezt jelenti, mert ϕ -n keresztül függ $t \rightarrow U(t)$)

$$U(t, t_0) = \mathbb{I} - i \int_{t_0}^t dt' \cdot H'(t')^\top \cdot U(t', t_0)$$

H' -ben van egy
szó: **állandó!**

iteratív megoldás:

$$\begin{aligned}
 U(t, t_0) &= \mathbb{I} - i \int_{t_0}^t dt_1 H'(t_1)^\top + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H'(t_1)^\top H'(t_2)^\top + \dots + \\
 &+ (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H'(t_1)^\top H'(t_2)^\top \dots H'(t_n)^\top + \dots
 \end{aligned}$$

$$t \geq t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n \geq t_0$$

időrendezett (T) sorozat átalakítása:

$$T(A_1(t_1) \dots A_n(t_n)) = \sum_n \theta(t_{n_1} \dots t) A_{n_1}(t_{n_1}) \dots A_{n_n}(t_{n_n})$$

$$t_{n_1} \geq t_{n_2} \geq \dots \geq t_{n_n}$$

$$U(t_1, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^{t_1} \prod_i dt_i T(H^I(t_i) \dots H^I(t_n)) :=$$

$$= T \exp \left(-i \int_{t_0}^{t_1} dt H^I(t) \right)$$

~~old~~ Megj.:

$$T \exp \left(i \int_{t_1}^{t_3} \mathcal{O}(t') dt' \right) = T \exp \left(i \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{O}(t') dt' \right) T \exp \left(i \int_{t_2}^{t_3} \mathcal{O}(t') dt' \right)$$

↑
tetr. operátor

tudja az expon. kv. monosságát

• $\forall$ olyan elméletben, ahol $\nexists$ definiált csatlakozás

$$H^I(x)^I = - \int d^3x \mathcal{L}^I(x)^I$$

$$U(t, t_0) = T \exp \left(i \int_{t_0}^t d^4x \mathcal{L}^I(x)^I \right)$$

• a szórás mátrix S mátrix:

✓ koraidős!

$$S \sim \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t_0 \rightarrow -\infty}} U(t, t_0) \sim T \exp \left(i \int d^4x \mathcal{L}^I(x)^I \right) \quad (\text{késsé létező fogjuk})$$

Aszimptotikus állapotok is a skalar mátrix (S mátrix) (melo & mero)

1) • skálai állapot

$\mathcal{H}_{in} \xrightarrow{\text{Hilbert-Hilbert}} \mathcal{H}_f$ ~~vanak a~~ ^{kereszt} ~~ve~~ ^{gallapok} ~~alakok~~

$\xrightarrow{\text{Hilbert-Hilbert}} \mathcal{H}_f$ ~~vanak a~~ ^{kereszt} ~~ve~~ ^{gallapok} ~~alakok~~

mind határozhatóságú k.h.
 $\Downarrow$
 elég távol maradok

• energia $\phi_i(x)$, $\phi_f(x)$ szabad térfüggvények keltik:

$$(\square + m^2) \phi_{i,f}(x) = 0$$

• $\phi(x)$ (k.h. - & mero) $\frac{\lambda}{4!} \phi^4$

$$\begin{array}{ccc} \phi(x) & \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} & \phi_f(x) \\ & \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} & \phi_i(x) \end{array}$$

vagyis $t \rightarrow \pm\infty$ -re $\lambda \rightarrow 0$ közelít

2) nyugalmas 2 részre

$$\vec{p}_1 \vec{p}_2 \rightarrow \vec{p}_1' \vec{p}_2'$$

$$|i\rangle \leftrightarrow a_i^+(\vec{p}_1) a_i^+(\vec{p}_2) |0\rangle \rightarrow |i, t\rangle \stackrel{I}{=} U(t, -\infty) |i\rangle$$

$$|f\rangle \leftrightarrow a_f^+(\vec{q}_1) a_f^+(\vec{q}_2) |0\rangle \quad \downarrow t \rightarrow +\infty$$

$$S_{fi} \equiv \langle f | i, \infty \rangle = \langle f | \underbrace{U(\infty, -\infty)}_{\text{S mátrix}} | i \rangle \quad \underbrace{|i, t \rightarrow \infty\rangle}_{\text{hova fejlődik az } |i\rangle \text{ állapot}} \stackrel{I}{=} U(\infty, -\infty) |i\rangle$$

10. óra

asimptotikus állapotok és a S-mátrix

$$\frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

$$\vec{p}_1 \vec{p}_2 \rightarrow \vec{q}_1 \vec{q}_2$$

$\phi_i(x)$ in

out $\phi_o(x)$

$$x^0 \rightarrow -\infty$$

$$\phi(x) \longrightarrow \phi_i$$

$$\xrightarrow{\quad} \phi_o$$

$$|i\rangle = a_i^\dagger(\vec{p}_1) a_i^\dagger(\vec{p}_2) |0\rangle \rightarrow |i, t\rangle = U(t, -\infty) |i\rangle$$

$i \rightarrow f$ átmeneti amplitúdó

$$|f\rangle = a_f^\dagger(\vec{q}_1) a_f^\dagger(\vec{q}_2) |0\rangle$$

$$S_{fi} = \langle f | U(\infty, -\infty) | i \rangle = \langle f | T \exp \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_I'(t) \right) | i \rangle =$$

$$= S_{fi} - i \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle f | H_I'(t) | i \rangle + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \langle f | T(H_I'(t_1) H_I'(t_2)) | i \rangle + \dots$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt H_I'(t) = \int d^4z \mathcal{L}_I'(z)$$

↓

normálrendszer: $H_I'(t) = \int d^3x \frac{\lambda}{4!} : \phi_I^4(x) :$

eltérítési op. a jobb oldalon, belső op. a bal oldalon

motiváció:

in vákuum } ezekre 0-t ad a normálrendszerrel azok
out $\rightarrow$

$$\phi(x) = \underbrace{\int d\vec{k} \left(a(\vec{k}) \cdot e^{-i\vec{k}x} \right)}_{\phi^{(+)}(x)} + \underbrace{a^\dagger(\vec{k}) e^{i\vec{k}x}}_{\phi^{(-)}(x)}$$

$$\phi_i^{(+)}(x) |0\rangle_i = 0$$

$$\phi_0^{(-)}(x) |0\rangle_0 = 0$$

$$\langle 0 | 0 \rangle_{in} = \langle 0 | T \exp \left(i \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathcal{H}'(t) \right) | 0 \rangle_{in} = 1$$

$\Rightarrow$ a normálrendszer esetén a vákuum vákuum marad!

$$(|0\rangle_{out} = |0\rangle_{in})$$

$$\vec{p}_1 \vec{p}_2 \rightarrow \vec{q}_1 \vec{q}_2$$

$$\cdot \mathcal{V}(\lambda^0)$$

$\downarrow$
nincs kkt.

$$\sqrt{s} \begin{cases} \vec{q}_1 = \vec{p}_1 \\ \vec{q}_2 = \vec{p}_2 \end{cases}$$

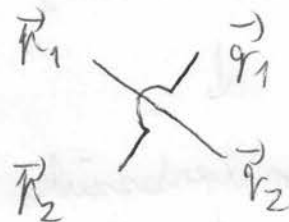
$$p_1 \text{ ————— } q_1$$

$$p_2 \text{ ————— } q_2$$

$$\vec{q}_2 = \vec{p}_1$$

$$\vec{q}_1 = \vec{p}_2$$

$\downarrow$
"keresztelt"



$$\cdot \mathcal{V}(\lambda^1) \quad \frac{\lambda}{4!} \int d^4x : \phi(\phi)^4 :$$

$\nearrow$ 16 tag!

$$! \text{ abb. merkeset} : \langle 0 | a_i a_i : (a + a^\dagger)^4 : a_i^\dagger a_i^\dagger | 0 \rangle$$

tipusok: $a^\dagger a^\dagger a^\dagger a^\dagger$

$a^\dagger a^\dagger a^\dagger a$

$a^\dagger a^\dagger a a$

$a^\dagger a a a$

$a a a a$

(normálrendezés után)

$\rightarrow$ a többi 0-ból ad ~~meg~~ a vákuumot

propagátor z -ből x -be

$$\Delta_0(x, z) = \langle 0 | T(\phi(x) \phi(z)) | 0 \rangle$$

$$\langle 0 | T(a_1 a_1 a^\dagger a^\dagger a a a^\dagger a^\dagger) | 0 \rangle$$

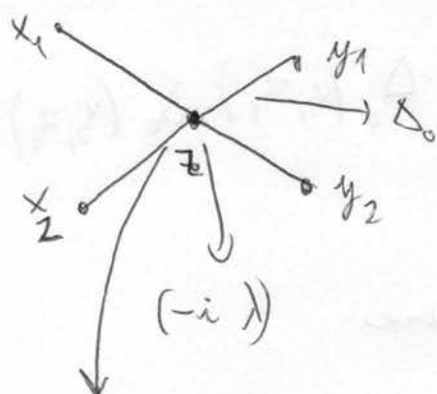
$\downarrow$

$$-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4 z \langle f | : \phi^4(z) : | i \rangle = -i \lambda \cdot \int d^3 x_i d^3 y_i d^4 z e^{-i \vec{x}_1 \vec{p}_1} \quad i=1,2$$

$|i\rangle, |f\rangle$ -re a multiplikon integrálhatóság

$$e^{-i \vec{x}_2 \vec{p}_2} e^{i \vec{y}_1 \vec{p}_1} e^{i \vec{y}_2 \vec{p}_2} \Delta_0(x_1, z) \Delta_0(x_2, z) \Delta_0(z, y_1) \Delta_0(z, y_2)$$

Feynman-Diagram



z a belső pont, ahol a kh. végpontok
 $\rightarrow$ ez végigfuttatva a teljes téren

$$(\int d^4 z) ! \rightarrow \int d^4 z \text{ belső ponton}$$

$$\int \prod d^3 x_i d^3 y_i e^{i \vec{p}_1 \vec{p}_1} e^{-i \vec{p}_2 \vec{p}_2} \text{ belső ill. végpontokra}$$

vertex: kh.-i pont: onygi vonal indul ki belső, ahányad
rendű a kh. $(ph, \phi^4 \rightarrow 4)$

második rendben ($\mathcal{O}(\lambda^2)$):

$$-\frac{\lambda^2}{(4!)^2} \int d^4 z_1 d^4 z_2 \langle 0 | T (\phi^4(z_1) : \phi^4(z_2) :) | 0 \rangle$$

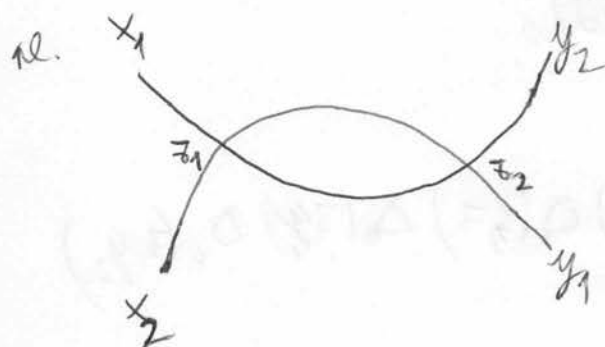
✓
simbolikus:

$$\langle 0 | T (a_{\text{left}} : (a + a^\dagger)^4 : (a + a^\dagger)^4 : a_i^\dagger a_i^\dagger | 0 \rangle$$

$\xrightarrow{\text{kommutálhatjuk}} \Delta_0$
 $\xrightarrow{\text{kommutálhatjuk}} \Delta_0$

↓
az egész nincs
semmi semmi, normálrendszer, csak tagokként!

✓ ilyen lehetőségek tartoznak egy Feynman-diagram, ✓ ilyen lehetőségek figyelembe kell venni.



$$(-i\lambda)^2 \int d^3 x_i d^3 y_i e^{i\vec{p}_i \vec{x}_i} e^{i\vec{q}_i \vec{y}_i} d^4 z_1 d^4 z_2 \cdot \Delta_0(x_1, z_1) \cdot \Delta_0(x_2, z_1) \Delta_0^2(z_1, z_2) \cdot \Delta_0(z_2, y_1) \cdot \Delta_0(z_2, y_2)$$

2. melléklet: ~~7~~ 7 típusú jövelek van

• $\lim x_i^0 \rightarrow \infty$

• $\lim y_i^0 \rightarrow \infty$

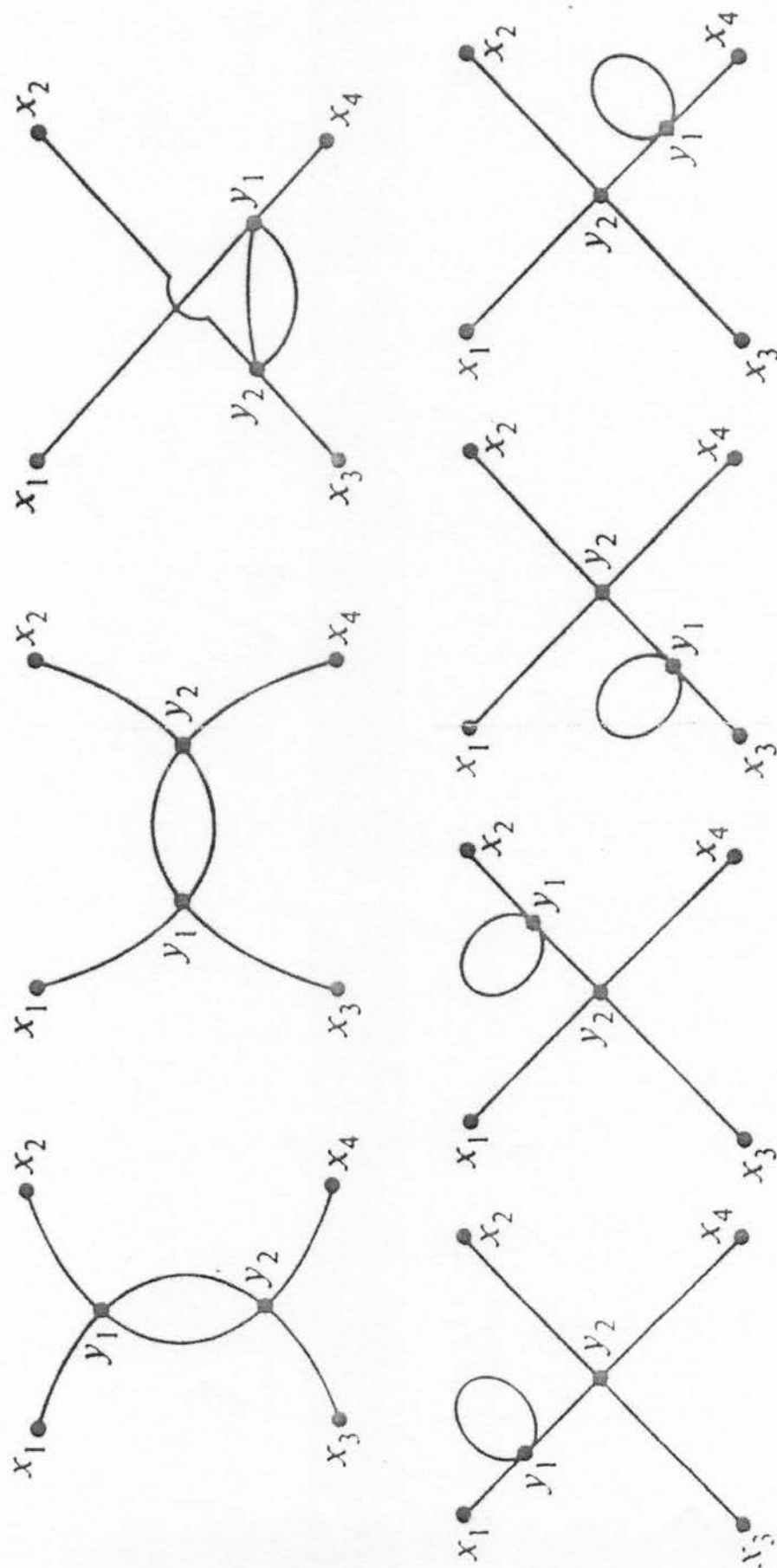


FIG. 1.2. Graphic representation of eqn (1.35).

• diagramm szimmetria faktorai

ha megcseréltem a két vonalat ($x_1 \rightarrow y_2, x_2 \rightarrow y_1$)

$\Rightarrow$ 2-sel kell osztani a diagramm jelmértékét

(ha azonos részecskék vannak)

vertexekből arányi kell, ahányad mindig megjűnik el

$\lambda \phi^4$ elmélet Feynman-szabályai

n_i kezdő részecske

n_f végző $\longrightarrow$

N -ik rendjében

① n_i, n_f, N db pontok
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 1 vonal 1 vonal 4 vonal

② felírjuk az összes összefüggő diagramot

③ $\forall$ vonalhoz $D_0(x_i, z_i)$ $\forall$ vertexben $(-i\lambda)$

④ $\forall$ vertex helyére $d^4 z_i$ kezdő + végállapoti hullámfv. int.

⑤ $\forall$ diagramot szimmetria faktorával osztunk

Levezetés: Wick-tétel

a szabad mezőkre időrendezéssel soroztatva a normálrendezéssel soroztatuk és az ún. párosításuk segítségével állítjuk elő

$$\widehat{\phi(x)\phi(y)} \equiv \langle 0 | T(\phi(x)\phi(y)) | 0 \rangle \quad (\text{norm})$$

$\uparrow$ $\widehat{}$ $\downarrow$ $\downarrow$
 parentheses (operator) (norm)

$$T(\phi(x)\phi(y)) = : \phi(x)\phi(y) : + \widehat{\phi(x)\phi(y)} \quad \text{Wick-tétel}$$

$$\cdot \langle 0 | \dots | 0 \rangle = \widehat{\phi(x)\phi(y)}$$

$$2. \downarrow \phi^{(-)} \phi^{(+)} \quad \phi^{(+)} \phi^{(+)} \quad \phi^{(-)} \phi^{(-)}$$

$$\langle 0 | \downarrow | 0 \rangle = \widehat{\phi(x)\phi(y)}$$

$$\downarrow \quad \langle 0 | \downarrow | 0 \rangle \rightarrow 0$$

$$\cdot \square_x + m^2 - \cancel{2} \text{ hatra mindkét oldalra } (\square + m^2) T(\dots) = (\square_x + m^2) \widehat{\phi(x)\phi(y)}$$

$$(\square_x + m^2) : \phi(x)\phi(y) : \stackrel{?}{=} 0$$

$\uparrow$
belátható, hogy igen

$\Rightarrow$ jó lehet a tétel (nem bizonyítjuk, hogy jó is)

$\rightarrow$ 3 merőlet:

$$T(\phi(x)\phi(y)\phi(z)) = : \phi(x) : \widehat{\phi(y)\phi(z)} + \widehat{\phi(x)\phi(y)} : \phi(z) : + \widehat{\phi(x)\phi(z)} : \phi(y) : + : \phi(x)\phi(y)\phi(z) :$$

$$T(\phi(x_1) \dots \phi(x_n)) = : \phi(x_1) \dots \phi(x_n) : + \sum_{k \leq l} : \phi(x_1) \dots \widehat{\phi(x_k)} \dots \widehat{\phi(x_l)} \dots \phi(x_n) : + \dots$$

$\widehat{\phi(x_k)\phi(x_l)}$

- pánthén számú operátor inkonzisztens érték 0
- páros —||— nem 0

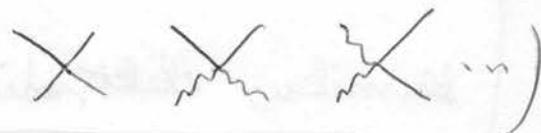
• Wick-tétel fermionokra kicsit változik

Más elméletben Feynmann szabályai:

① ψ mező szabad propagátora

② ka.-i Lagrange-fü.-ből vertex alakját

(pl. eldin. $\Rightarrow e$ és γ mező $\Rightarrow$ töltéssel vertex lehet)



A szabad elektromágneses mező kovariáns
kezelése

kovariáns tárgyalás bsz, de van nem kovariáns tárgyalás is

$\downarrow$
el. invariáns jelölés $(\vec{E}, \vec{B}) \rightarrow F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$

$$F^{0i} = E^i$$

$$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$$

$$F^{ij} \sim \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} B^k$$

dinamikai

~~term.~~ szabadsági fokok: 4-es vektortenzor elemi:

$$\boxed{A^\mu = (A^0, \vec{A}) \equiv (\phi, \vec{A})}$$

↓
a "mero"

$$\hbar = c = 1 \quad (\text{CGS})$$

$$A_\mu = (\phi, -\vec{A})$$

$$j_\mu = (j_0, \vec{j})$$

||
j_x

$$j^\mu = (j_0, -\vec{j})$$

$$F^{\mu\nu} = j^\mu A^\nu - j^\nu A^\mu \rightarrow \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

$$\vec{E} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi$$

klassikus elektrodinamika

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}} \quad (\sim (\vec{E}^2 - \vec{B}^2))$$

fundamentális Maxwell-egyenletek azonoságként leírhatók:

$$j_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

↑
szimmetria, mert itt nincs semmi ^{nincs} (ρ, j) forrás

kanonikus kvantálás:

$$\phi^i \rightarrow \pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^0 \phi^i)} \quad (\text{def. szerint})$$

most:

$$\phi^i \rightarrow A^0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^0 A^0} \leftarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^0 A^0} \leftarrow F^{\mu\nu} \text{ ben nincs } \partial^0 A^0, \text{ most szimmetria!}$$

DE A^μ nem fizikai $A^\mu \rightarrow \tilde{A}^\mu = A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ gauge transzformáció
- sz

mérték ~~in~~ rögzítés: Lorentz-mérték

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2$$

ilyenkor
hosszadhatom ~~0~~ $\rightarrow 0 \rightarrow$

morg. egy.: $\square A_\mu - (1-\lambda) \partial_\mu (\partial^\nu A_\nu) = 0$ ha $\lambda \neq 0$

$$\partial^\mu / \Rightarrow \square (\partial^\nu A_\nu) = 0$$

$$\Rightarrow \pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_\mu} = F^{\mu 0} - \lambda g^{\mu 0} (\partial^\nu A_\nu)$$

így:

$$A^i \rightarrow \pi^i = F^{i0} = E^i \quad \begin{matrix} A^i\text{-hez} \\ (\text{kanonikusan konj. imp.}) \end{matrix}$$

$$A^0 \rightarrow \pi^0 = -\lambda \partial^\nu A_\nu \quad \begin{matrix} (=0) \\ \text{Lorentz-felt.-ben} \end{matrix}$$

Baj:

EKR:

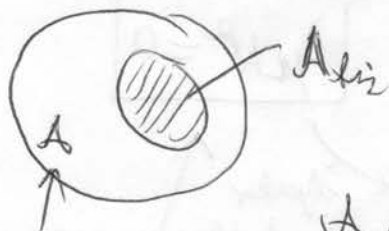
$$[A_\rho(\vec{x}, t), \pi^\nu(\vec{y}, t)] = i \delta_\rho^\nu \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

$$\Downarrow \quad \begin{matrix} =0 \text{ (Lorentz-feltétel)} \\ [A_0(\vec{x}, t), \pi^0(\vec{y}, t)] \neq 0 \end{matrix} \quad \leftarrow \text{alt. form (általános EKR-lal)}$$

$\Rightarrow$ Lorentz-feltétel operátorosan nem állhat fent!

kiút:

$A_\rho(\vec{x}, t)$ $\forall$ komponens "egyetem" $\rightarrow$ melyek nem fizikai
- ρ_2 $\rightarrow$ val. fok^{is} vannak



állapotok



ezen dolgozunk,

de ki kell majd jönnünk

a fizikai alapról

A_{lis} -en a Lorentz-feltétel

VÁRHATÓ ellenben teljesül

11.óra

A szabad EM mértékvariációs kvantálása (folgt)

$$1) A^\mu = (A^0, A^i) = (\Phi, \underline{A}) \quad \hbar=c=1$$

$$\underline{B} = \text{rot } \underline{A} \quad \underline{E} = -\frac{\partial \underline{A}}{\partial t} - \nabla \Phi$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$$

Lorentz-feltétel $\partial^\mu A_\mu = 0 \rightarrow \emptyset$ lehet op. egyenlet

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial^\mu A_\mu)^2 \quad \swarrow \text{hisz (lathatjuk)}$$

$$\pi^i = (F^{i0}) = E^i$$

$$\pi^0 = -\lambda (\partial_\mu A^\mu) \rightarrow (A_0, \pi^0)$$

ezt utólag mindenképpen le akarjuk vonni az egyenletből, hogy $\pi^0 \neq 0$ legyen, de π^0 csak akkor lehet nem nulla, ha a operátoron fennáll a Lorentz-felt. a Lorentz-felt.

$\neq 0$ EKR-lle



már kell

$\Rightarrow$ ha EKR-t elfogadjuk, nem lehet

-ga op. egyenlet a Lorentz-egy.

A_μ mind a 4 komponens egyformán kezeljük, "

Lorentz-feltétel: fizikai állapotok tesznek a kiválasztásának használatuk

$$\Rightarrow \text{EKR: } [A_\mu(x,t), A_\nu(y,t)] = 0 = [\dot{A}_\mu(x,t), \dot{A}_\nu(y,t)]$$

$$[\dot{A}_\rho(x,t), A_\nu(y,t)] = i g_{\rho\nu} \delta^{(3)}(x-y)$$

$$(g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1))$$

$$\text{használat } [\hat{\Phi}(x,t), \hat{\Phi}(y,t)] = i \delta(x-y) \quad - \text{m}$$

DE csak A_0 térszerű komponenseire, A_0 időszűrés elől különbözik!

$$2) \lambda = 1 \rightarrow \text{mög. egy.} \\ (\text{L. 89. old})$$

$$\square A_\mu = 0$$

(operátorok kielégítik a klasszikus mög. egyenletet)

a) megoldás: síkhullámok szuperpozíciója $\rightarrow$ együtttehető operátorok

$$e^{\pm i k x} : k^2 = k_0^2 - \underline{k}^2 = 0$$

$$k_0 = |\underline{k}| = \omega(\underline{k}) \quad \text{disp. reláció}$$

$$A_\mu(x) = \int d\vec{k} \sum_{\lambda} \left(a^{(\lambda)}(\underline{k}) \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\underline{k}) e^{-i k x} + a^{(\lambda)\dagger}(\underline{k}) \varepsilon_\mu^{*(\lambda)}(\underline{k}) e^{i k x} \right)$$

$$\lambda = 0, 1, 2, 3 \quad (4 \text{ tér})$$

$\varepsilon_\mu^{(\lambda)} \rightarrow$ polarizációs vektor, $\varepsilon_\mu^{(\lambda)} e^{\pm i k x}$ hullám

b) Lorentz-mez.: $n^\mu \cdot n_\mu = 1 \quad n^0 > 0$ (időirányú egységvektor)

$$\varepsilon_\mu^{(i)}$$

$$i = 1, 2$$

$\hookrightarrow$ transzverz.

$$\varepsilon_\mu^{(i)}(\underline{k}) \cdot n^\mu = 0 = \varepsilon_\mu^{(i)}(\underline{k}) \cdot \underline{k}^\mu$$

$$\varepsilon_\mu^{(i)} \varepsilon^{(j)\mu} = -\delta_{ij} \quad \text{norma}$$

$$\varepsilon_\mu^{(1)} \varepsilon_\mu^{(2)} = 1 \quad \varepsilon_\mu^{(1)} \varepsilon_\mu^{(1)} = 0$$

• $\lambda=3$: longitudinalis: $\epsilon_{\mu}^{(3)}$ benne van (k, n) skálában

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu}^{(3)} \cdot n^{\mu} &= 0 \\ \epsilon_{\mu}^{(3)} \epsilon^{(3)\mu} &= -1 \end{aligned}$$

• $\lambda=0$: skalár: $\epsilon_{\mu}^{(0)} = n_{\mu}$

ne. $\hookrightarrow n^{\mu} := (1, \underline{0})$, $k^{\mu} := (\underline{k}, 0, 0, \underline{k})$ $\rightarrow \underline{k}$ z irányú
 $\uparrow$
 $k^0 = |\underline{k}|$ miatt
 ekko:

$$\underbrace{\epsilon_{\mu}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{skalár}}, \quad \underbrace{\epsilon_{\mu}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \epsilon_{\mu}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{transzverz}}, \quad \underbrace{\epsilon_{\mu}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{longitud}}.$$

(össz)

$$\epsilon_{\mu}^{(\lambda)}(k) \epsilon^{(\lambda')\mu}(k) = g^{\lambda\lambda'}$$

norma

$$\sum_{\lambda} \frac{\epsilon_{\mu}^{(\lambda)} \epsilon_{\nu}^{(\lambda)*}}{\epsilon_{\rho}^{(\lambda)} \epsilon^{(\lambda)\rho}*} = g_{\mu\nu}$$

c) $\rightarrow$ átküldöm kifejtés EKR-be egyetlen nemzérus kommutátor:

$$[a^{(\lambda)}(\underline{k}), a^{(\lambda')\dagger}(\underline{k}')] = -g^{\lambda\lambda'} \cdot 2k^0 \cdot (2\pi)^3 \cdot \delta(\underline{k} - \underline{k}')$$

$(g^{00}=1, g^{ii}=-1)$

$\forall a^{(\lambda)}(\underline{k})$ elhárított
 $a^{(\lambda)}(\underline{k})^{\dagger}$ helyett $|n\rangle$, $a^{(0)}(\underline{k})|0\rangle = 0 \quad \forall (\underline{k}, \lambda)$

↑
 $|1^0\rangle = \int d\vec{k} f(\vec{k}) a^{(0)}(\vec{k})^\dagger |0\rangle$
 $\hookrightarrow \in L^2(\text{kv. -ek})$

$$\langle 0|0\rangle = 1$$

$$|1^i\rangle = \int d\vec{k} f(\vec{k}) a^{(i)}(\vec{k})^\dagger |0\rangle$$

$$\langle 1^0|1^0\rangle = -\langle 0|0\rangle \int d\vec{k} |f(\vec{k})|^2 \rightarrow \text{ennek negatív a normája}$$

$$\langle 1^i|1^i\rangle = \langle 0|0\rangle \int d\vec{k} |f(\vec{k})|^2$$

↓
 valószínűségi értel.-el
 baj van

valószínűségi ért. és konvenció ← ha ez is kell, akkor bajok
 kell!

Ha: $a^{(1)}(\vec{k})^\dagger$ -al $|0\rangle$ kétféle lin. komb. $\rightarrow$ ebben negatív
 normájú állapotok is vannak
 $\hookrightarrow$ Lorentz-feltétel kell

3) $\boxed{\psi \text{ lin} \in \mathcal{A}}$: $\psi \in \mathcal{A}$ lin, ha $\boxed{\langle \psi | \hat{p}_\mu A^\mu | \psi \rangle = 0}$

Lorentz-felt. vonatkozó esetben

lin. állapotokat $\in$ bejövő
kiválogatja

a) így:

$$A_\mu(x) = \int d\vec{k} \underbrace{\sum_{\lambda=0}^3 \left(a^{(\lambda)}(\vec{k}) \varepsilon_\mu^{(\lambda)} e^{-ikx} \right)}_{A_\mu^{(+)} \text{ poz. frekv. állapot}} + \underbrace{a^{(\lambda)\dagger}(\vec{k}) \varepsilon_\mu^{(\lambda)} e^{ikx}}_{A_\mu^{(-)}} \quad \left(\text{negatív frekv. állapot} \right)$$

$$\langle \psi | \partial_\mu A^{\mu(+)} + \partial_\mu A^{\mu(-)} | \psi \rangle = 0$$

$$\partial_\mu A^{\mu(+)} | \psi \rangle = 0$$

→ azért nincs 0, hogy az is benne legyen a his-ben
→ elegy esté kiírt

$$\Rightarrow \langle \psi | \partial_\mu A^{\mu(-)} = 0$$

$$i \partial_\mu A^{\mu(+)}(x) = \int d\vec{k} \sum_{\lambda=0}^3 a^{(\lambda)}(\underline{k}) \cdot \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\underline{k}) k^\mu e^{-ikx}$$

de $\epsilon_\mu^{(i)} k^\mu = 0$ ha $i=1,2 \Rightarrow$ a transverzális komponensek automatikusan teljesül a Lorentz-két.

$$\Rightarrow | \psi \rangle = | \psi_+ \rangle \otimes | \phi \rangle, \text{ ahol } | \psi_+ \rangle = a^{(i)}(\underline{k})^+ \text{ } i=1,2\text{-vel kétféle } \downarrow$$

skalar + long. fotonsok kétféle

$$\sum_{\lambda=0}^3 \text{ helyett } \sum_{\lambda=0,3}$$

b) a mi $\epsilon_\mu^{(\lambda)}$ helyett használva $(\underline{k} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix})$ $\left(\epsilon_\mu^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \epsilon_\mu^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$\left(a^{(0)}(\underline{k}) - a^{(3)}(\underline{k}) \right) | \phi \rangle = 0 \quad \forall \underline{k}$$

$$\partial_\mu A^{\mu(+)} | \psi \rangle = 0 \text{ miatt}$$

$$a^{(0)}(\underline{k}) \cdot | \phi \rangle = a^{(3)}(\underline{k}) \cdot | \phi \rangle$$

$$\langle \phi | a^{(0)}(\underline{k})^+ = \langle \phi | a^{(3)}(\underline{k})^+$$

$$\{ | \phi \rangle \} \quad \bar{N} = \int d\vec{k} \left(a^{(3)}(\underline{k})^+ a^{(3)}(\underline{k}) - a^{(0)}(\underline{k})^+ a^{(0)}(\underline{k}) \right)$$

↳ $| \phi_n \rangle$ állapotok
számára

0,3-as grádűségek összegzésének

$$N | \phi_n \rangle = n | \phi_n \rangle$$

$$\left(a^{(0)}(\underline{k}) - a^{(3)}(\underline{k}) \right) | \phi_n \rangle = 0$$

alt. álláspont:

$$|\psi\rangle = c_0 |0\rangle + c_1 |\psi_1\rangle + \dots + c_n |\psi_n\rangle + \dots$$

$\downarrow$
 $\equiv \phi_0$

$$\langle \phi_m | \phi_n \rangle = 0 \quad \text{ha} \quad m \neq n$$

$$\langle \phi_n | \phi_n \rangle = ?$$

$$\langle \phi_n | \hat{N} | \phi_n \rangle = n \langle \phi_n | \phi_n \rangle = 0$$

↑ expl. leírva
(l. gyakorlat)

↓ az összes fiz. állapot 0 normájú lesz!

$$\boxed{\langle \phi_n | \phi_n \rangle = \delta_{n0}}$$

(inkább továbbra is igaz, hogy $\langle 0 | 0 \rangle = 1$)

$$\langle \psi | \psi \rangle = |c_0|^2 \geq 0$$

est látnunk, hogy ≥ 0

$$\langle \psi | \psi \rangle = \langle \psi_+ | \psi_+ \rangle \otimes \langle \psi | \psi \rangle = \langle \psi_+ | \psi_+ \rangle |c_0|^2 \geq 0$$

||

(megoldott a 93. lal
melléklet)

↳ fiz-en már nincs 0 normájú
állapot $\Rightarrow$ valósz. est. ✓

4) $c_i = \text{tetsz?}$ $i=1, \dots \rightarrow$ ezek $\in$ fiz

Megmutatjuk, hogy a fiz. mennyiségekhez ezek nem adnak járulékot!
($\langle \psi | H | \psi \rangle$ nem függ tőlük)

$$H = : \int d^3x (\pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}) : = \frac{1}{2} \int d^3x \left\{ \sum_{i=1}^3 \dot{A}_i^2 + (\nabla A_i)^2 - \dot{A}_0^2 - (\nabla A_0)^2 \right\}$$

$$= \int d^3k \omega(k) \left\{ \sum_{i=1}^3 a^{(i)}(k)^+ \cdot a^{(i)}(k) - a^{(0)}(k)^+ a^{(0)}(k) \right\}$$

-95-

így:
$$\frac{\langle \Psi | H | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} = \frac{1}{\langle \Psi_+ | \Psi_+ \rangle \langle \Phi | \Phi \rangle} \left\{ \langle \Psi_+ | \int d^3k w(k) \sum_{i=1,2} a^{(i)}(k)^\dagger a^{(i)}(k) | \Psi_+ \rangle \right.$$

0

$$\left. \langle \Phi | \Phi \rangle + \langle \Psi_+ | \Psi_+ \rangle \cdot \langle \Phi | \int d^3k w(k) (a^{(3)}(k)^\dagger a^{(3)}(k) - a^{(0)}(k)^\dagger a^{(0)}(k)) | \Phi \rangle \right\} =$$

hisz. ottan belül $a^{(0)}(k) | \Phi \rangle = a^{(3)}(k) | \Phi \rangle$

$$\langle \Phi | a^{(0)}(k)^\dagger = \langle \Phi | a^{(3)}(k)^\dagger$$

$$= \frac{1}{\langle \Psi_+ | \Psi_+ \rangle} \langle \Psi_+ | \int d^3k w(k) \sum_{i=1,2} a^{(i)}(k)^\dagger a^{(i)}(k) | \Psi_+ \rangle = \frac{\langle \Psi | H | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle}$$

skalár és long. nincs benne $\rightarrow$ csak vízszintes irányban igaz
 $H | \Psi \rangle = \dots$
 $H \rightarrow f - \kappa$ is OK

||

(vib. irányban) csak a két transzverz polarizáció ad járulékat!
 (10), (13) kell, mert annyira a lokalitással kerülne ki bajba)

5) Foton propagátor: (Gupta - Bleuler kvantálás)

$\lambda = 1$ (Feynman-mérték) $\Rightarrow \square A_\mu = 0$ (ide is természetesen elég diff. megmaradt itt is)

$$T(A_\mu(x) \cdot A_\nu(y)) \equiv \theta(x_0 - y_0) A_\mu(x) A_\nu(y) + \theta(y_0 - x_0) A_\nu(y) A_\mu(x)$$

(def. szerint)

$$\langle 0 | T(A_\mu(x) A_\nu(y)) | 0 \rangle = i g_{\mu\nu} D_F(x-y) = -i g_{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 + i0} \quad \epsilon > 0$$

Kiintegrálás: $D_F(x-y) = \frac{1}{4\pi^2 i} \cdot \frac{1}{x^2 - i\epsilon}$

A kvantált elektron ψ , $1/2$ spinű részecske QFT-je

1) $\hbar = 1$, Dirac-egyenlet $\rightarrow$ nincs egyrészes problémája

$$\Delta x \Delta p \sim 1, \text{ ha } \Delta x \leq \frac{1}{m}$$

Compton hull.hosszal kisebbre szorítjuk
 $\Delta p > m$

$$\text{relat: } \Delta p \sim \boxed{E \geq m}$$

többsz. állapotok is nem elhanyagolható nullával bekeverednek

$\psi(x)$ Dirac-spinorként transzformálódó komplex rész.
 $\hookrightarrow$ ezt kvantáljuk

$\{ \}$ garantálja majd a Pauli elvet
(antikommutátor)

2) $\rightarrow$ Dirac-egyenlet síkhullám megoldásai

$$\boxed{(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0} \leftarrow \text{ez a Dirac-egyenlet vagy mozg. egy.}$$

$\psi(x)$ Dirac-spinor $\rightarrow$ 4 komponensű!

γ^μ 4×4 mátrixok: $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1}_4$
 $\uparrow$ antikomm. $\uparrow$ 4×4 egységmátrix

standard reprezentáció:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, (\gamma^0)^T = \gamma^0, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, (\gamma^i)^T = -\gamma^i$$

12. á.

A feladat spinu merok kvantálása

$$1) (\gamma^\mu p_\mu - m) \psi(x) = 0$$

síkhullám kikötés + együttthatókat kvantáljuk:

a) Dirac-egyenlet síkhullám megoldásai:

$$e^{-ipx} u_s(p)$$

$$e^{ipx} v_s(p)$$

$$p^\mu = (p^0, \vec{p})$$

pozitív fekv./energia

negatív fekv./energia

$$p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) u_s(p) = 0$$

$s = \pm \frac{1}{2}$ spinbeállítás

$$(\gamma^\mu p_\mu + m) v_s(p) = 0$$

$$X_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_s(p) = \sqrt{p^0 + m} \begin{pmatrix} X_s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{p^0 + m} X_s \end{pmatrix}$$

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_s(p) = \sqrt{p^0 + m} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{p^0 + m} \epsilon \cdot X_s \\ \epsilon \cdot X_s \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}_s u_s = 2m$$

$$\bar{v}_s v_s = 2m$$

Dirac konjugált: $\bar{\psi}_s(p) = u_s^\dagger(p) \gamma^0$

alt. mo.: lineáris komb.:
 $d\vec{p}$

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p_0} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \left(e^{ipx} u_s(p) \cdot \overset{\uparrow}{\underset{\text{módsz. kvantálás}}{b_s^\dagger(p)}} + e^{-ipx} v_s(p) \cdot \overset{\uparrow}{\underset{a_s(p)}{a_s(p)}} \right)$$

b) qenitörök: Pauli-elv tisztelhetetlenül miatt
 ANTIKOMMUTÁTORRAL kvantáljuk meg

$$\{a_s(\mathbf{k}), a_{s'}(\mathbf{k}')\} = 0 = \{b_s(\mathbf{k}), b_{s'}(\mathbf{k}')\}$$

$$\{a_s^\dagger(\mathbf{k}), a_{s'}^\dagger(\mathbf{k}')\} = 0 = \{b_s^\dagger(\mathbf{k}), b_{s'}^\dagger(\mathbf{k}')\}$$

$$\{a, b\} = 0$$

$$b_s^\dagger(\mathbf{k}) b_{s'}^\dagger(\mathbf{k}') |0\rangle = -b_{s'}^\dagger(\mathbf{k}') b_s^\dagger(\mathbf{k}) |0\rangle$$

↑

Pauli-elv $\Leftrightarrow$ antiszim. a hullámf.

$b_s(\mathbf{k})^\dagger b_s^\dagger(\mathbf{k}) \neq 0 \Rightarrow$ 2 részre, nem lehet ugyanabban az
 állapotban

nem elhanyagolható antikommutátorok:

$$\{a_s(\mathbf{k}), a_{s'}^\dagger(\mathbf{k}')\} = \{b_s(\mathbf{k}), b_{s'}^\dagger(\mathbf{k}')\} = \delta_{ss'} (2\pi)^3 \cdot 2k^0 \cdot \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

elv: $a_s(\mathbf{k}), b_s(\mathbf{k})$ elhanyagolható, $a_s^\dagger(\mathbf{k}), b_s^\dagger(\mathbf{k})$ kettő g.

- Heisenberg-egyenlet: (qenitörök időfejlesztése)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = i [H, \Psi]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \int d\mathbf{k} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \left(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} a_s(\mathbf{k}) \cdot i k^0 b_s^\dagger(\mathbf{k}) - e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} a_s^\dagger(\mathbf{k}) \cdot i k^0 a_s(\mathbf{k}) \right) = \\ &= \int d\mathbf{k} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \left(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \cdot a_s(\mathbf{k}) \cdot i [H, b_s^\dagger(\mathbf{k})] + e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} a_s^\dagger(\mathbf{k}) \cdot i [H, a_s(\mathbf{k})] \right) \end{aligned}$$

3) Megmaradó menny.-ek: x^μ -től $\Rightarrow$ explicit $\Rightarrow$ Megmaradó energia-imp. tensor:

$$\theta^{\mu\nu} = \left(\delta^\nu \bar{\psi} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \delta^\nu \psi \right) - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (\text{alt. formula})$$

$$P_\nu := \int d^3x \theta^0_\nu \quad \text{megmaradó mozgásimpulzus}$$

$x^0 = \text{all}$

$$P_M = \int d^3x \cdot \frac{1}{2} \sum_{S=\pm 1/2} \left(\psi^\dagger_S(\mathbf{x}) \cdot \psi_S(\mathbf{x}) - \psi_S(\mathbf{x}) \cdot \psi^\dagger_S(\mathbf{x}) \right)$$

Fig: ez önmagában nem tétel, el a invariancia $(P_M | 0) = 0$

$\Rightarrow$ normalizálás kell!! (de hogy $\rightarrow$ 102. old)

kell legyen.)

b) $\mathcal{L}$ invarians: $\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi$, $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{-i\alpha}$ α valós, konst. (globális transz.)

infinitesimális: $\psi \rightarrow (1+i\alpha) \cdot \psi$, $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} (1-i\alpha)$ megmaradó Noether-áramok

$$\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = 0 \text{ miatt}$$

$$\mathcal{J}^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \Rightarrow Q = \int d^3x \mathcal{J}^0 = \int d^3x \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \int d^3x \psi^\dagger \psi = \text{all}$$

$x^0 = \text{all}$

$\Rightarrow \mathcal{J}^\mu$, Q alkalmas csatási állandóval szorozva ismerős fiz. mennyiség,
az elektron pozitron párosok elektromos árama/töltése

Terlekeztünk: Dirac-egyenletre költöz EM térben:

$$(i \gamma^\mu (\partial_\mu - ie A_\mu) - m) \psi = 0 \quad \mathcal{L} = \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi + e \underbrace{\bar{\psi} \gamma^\mu \psi}_{\text{elektromágneses áram}} \cdot A_\mu$$

elektromágneses áram $(j_\mu \cdot A^\mu \sim \Delta E)$

• elektron töltés: $-e$

$$Q = -e \int d^3x \psi^\dagger \psi$$

↓ fizikai alapra $\langle 0|Q|0\rangle = 0$ (vakuum semleges)

$$\psi \sim b + a^\dagger \quad \psi^\dagger \sim b^\dagger + a$$

$$\psi^\dagger \psi \sim b b^\dagger + a a^\dagger + b a^\dagger + a b$$

$$\langle 0|b b^\dagger|0\rangle = \langle 0|\{b, b^\dagger\}|0\rangle \neq 0$$

↓
normalizációs !!

az kell legyen a normalizációs

$$:b b^\dagger: = b b^\dagger - \{b, b^\dagger\} = -b^\dagger b$$

!!! van egyébként normalizációs rel!

(bracket [] itt, ezt $:b b^\dagger: = b^\dagger b$ is)

↓

$$j^\mu = -e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \Rightarrow :j^\mu: = -e : \bar{\psi} \gamma^\mu \psi :$$

$$Q \rightarrow :Q: = -e \int d^3x : \psi^\dagger \psi :$$

$$= -e \int d^3x \sum_{s=\pm 1/2} (a_s^\dagger(\mathbf{p}) a_s(\mathbf{p}) - b_s^\dagger(\mathbf{p}) b_s(\mathbf{p})) = :Q:$$

⇒ így:

$$:Q: |s, \mathbf{p}\rangle^{(1)} = -e |s, \mathbf{p}\rangle^{(1)}$$

$$:Q: |s, \mathbf{p}\rangle^{(2)} = e |s, \mathbf{p}\rangle^{(2)}$$

$$:P_\nu: = \int d^3x \sum_{s=\pm 1/2} (a_s^\dagger(\mathbf{p}) a_s(\mathbf{p}) + b_s^\dagger(\mathbf{p}) b_s(\mathbf{p}))$$

így már $H|0\rangle = |0\rangle$!! $(H = P^0)$

||

$|s, \uparrow\rangle^{(1)} |s, \uparrow\rangle^{(2)}$ olyan tömegű részecske (mert ugyanaz a, b eljele)

= antikommutátorral kvantálás + megfelelő normalizálás

- Pauli-elv ✓
 - $:H:|0\rangle = 0$ H spektruma nem negatív
 - $\varphi|0\rangle = 0$: φ : nem definiált
- } marad Dirac-egyenlet ellenes "töltés", azonos tömegű leles spinű részecskéket is le

Megjegyzések:

① $|0\rangle$ (normalizálás)

↓
⇒ betöltött Dirac "tenger"

||
nincs egy részecskének sem 0 energiája (kvantumtérelméletben)

② a, b antikommutációs relációk → $\psi_i(\vec{x}, t)$ $\bar{\psi}_j(\vec{y}, t)$
(i, j spinindexek)

$$\{\psi_i(\vec{x}, t), \bar{\psi}_j(\vec{y}, t)\} = (\gamma^0)_{ij} \cdot \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$

$$\{\psi(\vec{x}, t), \psi(\vec{y}, t)\} = 0 = \{\bar{\psi}(\vec{x}, t), \bar{\psi}(\vec{y}, t)\}$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi, \quad p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \bar{\psi} i \gamma^0$$

||

kanonikus kvantolás ANTIKOMMUTATORRAL

$$\{ \psi_i(\vec{x}, t), p_{\psi_j}(\vec{y}, t) \} = i \delta_{ij} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$

$$(\sigma^0)^2 = \mathbb{1}_4$$

4 dim. egységm

— egyenletek ugyanazok

||
az általunk használt γ mátrixok (Lagrange fr., ...) és ugyanarra vezet, misztika az eredeti egyidejű kommutatort (l. bosonok) antikommutátorok helyett.

$\hbar = c = 1$ $\hbar \rightarrow 0$ visszaadjuk $\{ \psi_i(\vec{x}, t), p_{\psi_j}(\vec{y}, t) \} = i \delta_{ij} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$
klasszikus limitben $\hbar \rightarrow 0$

$$\{ \psi_i(\vec{x}, t), \psi_j(\vec{y}, t) \} = 0 \quad \text{nem } c \text{ számok!}$$

$\Rightarrow$ a fermionok klasszikus limitben sem kommutálnak !!!
~~(nem kommutálnak)~~

③ Mi van, ha kommutátorral kvantálunk a ^{Dirac-spinor} ψ mérése?

- nem lenne ^{abszolút} korlátos az energia
- a lokalitás sérülne (az egy pontban mért fiz. mennyiség nem kommutálna (?)

~~(Dirac spinor)~~

Dírac spinor terek időrendezett sorozata és a
propagátor

$$T(\psi_i(x) \bar{\psi}_j(y)) = \theta(x^0 - y^0) \psi_i(x) \bar{\psi}_j(y) + \theta(y^0 - x^0) \bar{\psi}_j(y) \psi_i(x)$$

$$T(\psi(x) \bar{\psi}(y)) = : \psi(x) \bar{\psi}(y) : + \underbrace{\langle 0 | T(\psi(x) \bar{\psi}(y)) | 0 \rangle}_{\text{jelölés: } \psi(x) \bar{\psi}(y)}$$

Ad:

$$\langle 0 | T(\psi_i(x) \bar{\psi}_j(y)) | 0 \rangle = i \delta_{ij} \Delta(x-y)$$

Biz.: 2 féle módon ① $\psi(x) \bar{\psi}(y)$ szorzatát kifejtve,
EAKR (egyidejű antikommutációk)

② levezetjük az egyenletet EAKR + $\psi, \bar{\psi}$ marad
Dírac-egyenletet

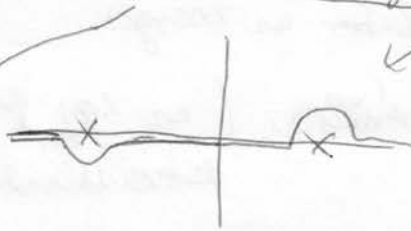
$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m)_{ij} T(\psi_j(x) \bar{\psi}_k(y)) = i \delta_{ik} \delta^{(4)}(x-y)$$

$$\Delta(x-y)_{ij} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \left(\frac{k + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right)_{ij}$$

az ugyan mint
a skalármezőnél

hol

$$k = k_\mu \gamma^\mu$$



hisz:

$$k^2 = k_\mu k_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = k_\mu k_\nu \left(\frac{1}{2} \{ \gamma^\mu \gamma^\nu \} + \frac{1}{2} [\gamma^\mu \gamma^\nu] \right) = k^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{k + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right)_{ij} = \frac{k + m}{(k + m)(k - m) + i\epsilon} = \frac{-1}{\underbrace{k^2 - m^2}_{\text{2. g. m.}} - k + m - i\epsilon} = \frac{1}{k - m - i\epsilon} \quad \checkmark \quad \leftarrow \text{mert } i \gamma^\mu k_\mu - m \rightarrow i \gamma^\mu k_\mu$$

$$S(x) = (i \not{\partial} + m) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \cdot \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = \dots$$

A relativisztikus elektron/positron rendszer is
az elektromágneses mező kh.-a
(QED)

$$\mathcal{L} = \boxed{\mathcal{L}_{\psi\bar{\psi}} + \mathcal{L}_{EM}} + \mathcal{L}_{ka.}$$

$\swarrow$ $\searrow$
 szabad elektron/poz. szabad elektromágneses mező
 mező

B.ora

A QED $\equiv$ relativisztikus elektron/positron + EM. t.f.

$$1) a) \mathcal{L}_{QED} = \underbrace{\mathcal{L}_{ED}}_{\text{szabad elektrodinamika}} + \underbrace{\mathcal{L}_{\psi, \bar{\psi}}}_{\text{szabad } e^-/e^+} + \underbrace{\mathcal{L}_I}_{\text{kölcsönhatás}}$$

$$\bullet \lambda=1 \Rightarrow \mathcal{L}_{ED} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial^\mu A_\mu)^2$$

$$\bullet \mathcal{L}_{\psi, \bar{\psi}} = \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \Leftrightarrow \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) - m \bar{\psi} \psi$$

• csatolás:

$$\mathcal{L}_I = \underbrace{e : \bar{\psi} \gamma^\mu \psi : A_\mu}_{-ij^\mu} \leftarrow \text{minimális csatolás}$$

2) klassikus mozg. egyenletek + mátkrögzítés

• EM (Maxwell): $\partial_\nu F^{\mu\nu} = \square A^\mu = -e \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$

• e^-/e^+ (Dirac): $(i \gamma^\mu (\partial_\mu - ie A_\mu) - m) \Psi(x) = 0$

} csatolt - egy. m.
a mozg. egy. lól

~~Quantal~~

2) Kvantálás: szabad részecskék kvantáljuk

kl.-i képletet használjuk a részecskéket

a) impulzusok:

$\Pi_\Psi = \frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^0$

$\Pi_{\bar{\Psi}} = -\frac{i}{2} \gamma^0 \Psi$

$\Pi^\mu = F^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \partial_\nu A_\nu$

↳ $EK(A) A$ (egyidejű komm./antik. relációk)

b) $H := \int d^3x i: (T_{00} \Phi - \mathcal{L}):$

$:H: = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} \dot{A}_i^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} A_i)^2 - \frac{1}{2} \dot{A}_0^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} A_0)^2 - i \bar{\Psi} \gamma^0 \partial_t \Psi + m \bar{\Psi} \Psi \right\}$

$\underbrace{-e \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu}_{H_I} = \underbrace{\text{szabad EM rész}}_{H_0} + \underbrace{\text{szabad } e^-/e^+ \text{ rész}}_{H_I}$

H_0 : szabad Karmellon-q.

c) interakciós képlet: $\forall n. (\bar{\Psi}, \Psi, A_\mu) |H_0\rangle$ -al

• fizikailag ismert (és látható eddig)

• állapotok ismertek: ~~szabad részecskék~~ ~~szabad részecskék~~

$i \frac{\partial}{\partial t} |\Phi\rangle = H_I |\Phi\rangle$

$t \rightarrow -\infty : |i\rangle \rightarrow t \rightarrow +\infty : |f\rangle$

(initial state)

(final state)

$(-i) \cdot (-e) = i \cdot e$

$$S_{fi} = \langle f | \exp \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_I(t) \right) | i \rangle = T \langle f | \exp \left(i e \int d^4x : \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A^\mu : \right) | i \rangle$$

d) ~~elektron~~ ^{elektron} vertex:

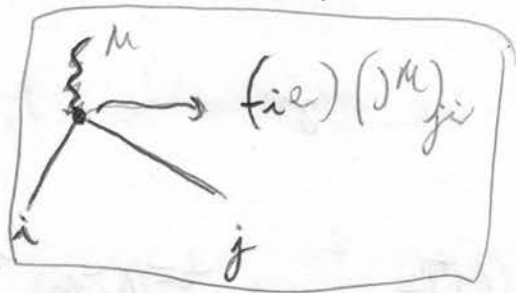
• photon propagator: x, μ, y, ν $= \langle 0 | T(A_\mu(x) A_\nu(y)) | 0 \rangle =$

• e^-/e^+ propagator: $= \int d^4k \cdot \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 + i\epsilon} \cdot g_{\mu\nu}$



$$S(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \cdot \left(\frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \quad (\not{k} = \gamma_\mu k^\mu)$$

$\Rightarrow$ vertex:



i, j : ~~lepton~~ ^{lepton} index

3) a) H_I : ~~electron~~ ^{electron} ~~töltés~~ ^{töltés} ~~negatív~~ ^{negatív}:

$\hookrightarrow$ Feynman ~~diag~~ ^{diag} ~~van~~ ^{van} ~~száma~~ ^{száma} ~~egy~~ ^{egy}
~~lepton~~ ^{lepton} ~~van~~ ^{van} ~~száma~~ ^{száma}
~~egy~~ ^{egy} ~~száma~~ ^{száma} ~~lepton~~ ^{lepton} ~~száma~~ ^{száma}
~~van~~ ^{van}



b) ~~száma~~ ^{száma} ~~lepton~~ ^{lepton} ~~száma~~ ^{száma} (-1) ~~száma~~ ^{száma}

az:

$$T \left(: \bar{\psi}(x_1) \gamma_\mu \psi(x_1) : : \bar{\psi}(x_2) \gamma_\nu \psi(x_2) : \dots : \bar{\psi}(x_n) \gamma^\mu \psi(x_n) : \right)$$

a ~~lepton~~ ^{lepton} ~~száma~~ ^{száma} (-1) ~~száma~~ ^{száma} $\sim (-1)$

A megoldás $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ során

$$e^-(p_1, r_1) + e^-(p_2, r_2) \rightarrow e^-(p_3, r_3) + e^-(p_4, r_4)$$

p_i : impulzus

r_i : spin

kh.-i lép. legalszorgat ~~(szorzat)~~ rendjében

1) • kinematika ~~(klasszikus)~~

+ klasszikus energia-imp. megmaradás $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$

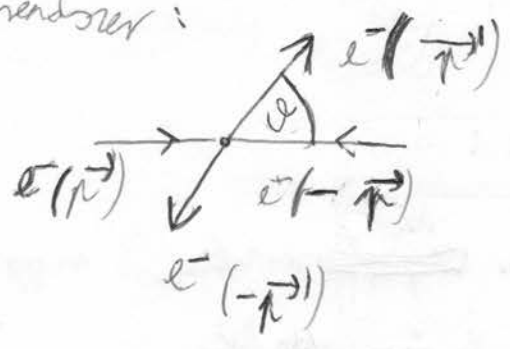
Loxatz-skalárok

~~(klasszikus)~~

(2. gyök)

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2$$

2) TK rendszer:



$\theta(TK)$ szórási szög $\leftarrow$ invariáns

$$|p| = |p'|$$

$$p_1 = (p_0, \vec{p})$$

$$p_2 = (p_0, -\vec{p})$$

$$p_3 = (p_0, \vec{p}')$$

$$p_4 = (p_0, -\vec{p}')$$

$$\Rightarrow s = 4p^2, \quad t = -4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad u = -4p^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

klasszikus

e^-e^- során ~~(klasszikus)~~ ^{ther} (Purcell-féle):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\text{klasszikus}} = \frac{q^2 m^2}{16 |\vec{p}|^4} \left(\frac{1}{\sin^2(\frac{\theta}{2})} + \frac{1}{\cos^2(\frac{\theta}{2})} \right)$$

↓
alacsony energiák (v. lassú)

az a funkció! az átlag, mert megfigyelés-teljesítmény

$$\theta \rightarrow \pi - \theta$$

is lehet a szórási szög

↓
VAN kerekűs QM-ban (alacsony energiánál)

$$v. számú = |\sum \text{amr}|^2 \Rightarrow \text{VAN interferencia!}$$

3) $t \rightarrow -\infty$ $|i\rangle = a_{r_1}^+(p_1) a_{r_2}^+(p_2) |0\rangle$ ha e^-e^+ szórás, a^+ kell, e^+ nélkül b^+

$$\psi \sim a + b^+ \quad \psi^+ \sim a^+ + b$$

$$t \rightarrow +\infty \quad \langle f | = \langle 0 | a_{r_3}(p_3) a_{r_4}(p_4)$$

térfeleg szűk:

$$(p_1 r_1) (p_2 r_2) \Rightarrow (p_3 r_3) (p_4 r_4)$$

Sti 'e' milyen rendjű

$$\langle 0 | A_\mu | 0 \rangle = 0$$

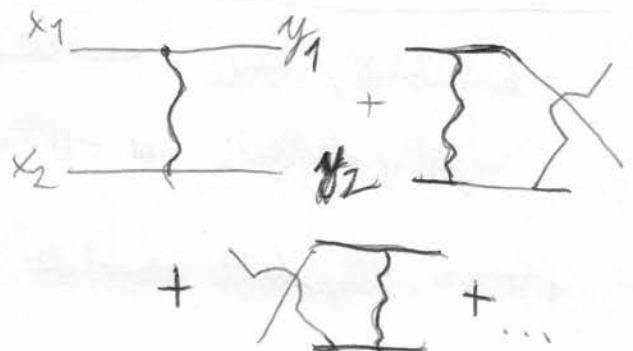
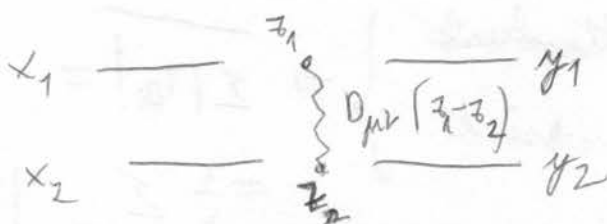
$$-ie \int d^4x : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : A_\mu \rightarrow \text{ez a rend nem ad járulékot}$$

$$\frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 T \left(: \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) : : \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) : A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) \right) \\ = D_{\mu\nu}(x_1 - x_2)$$

a b, b^+ rendjű kiegészítések (ha $\langle f | i \rangle$ -vel megrendíreljük)

↳ a többi tag milyen polynomiális ad?

1. rend $\rightarrow$ 2. rend pontok (z_1, z_2) :



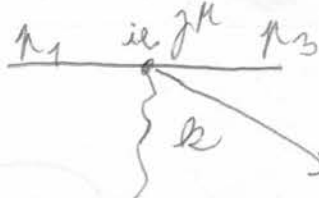
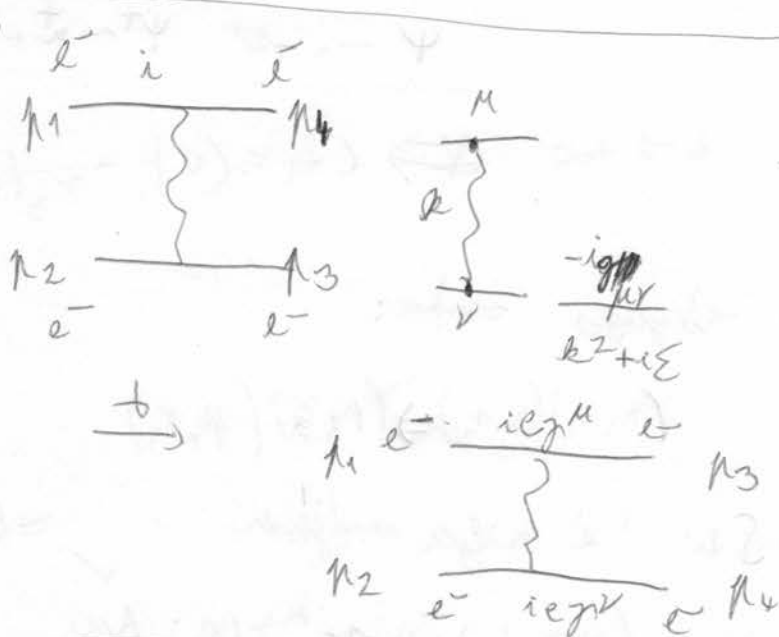
$$S_{fi} = i(2\pi)^4 \delta(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \cdot T_{fi}$$

$$T_{fi} = \frac{1}{i} \left\{ \bar{u}_{\gamma_4}(p_4) \cdot (ie\gamma^\mu) \cdot u_{\gamma_1}(p_1) \cdot \frac{(-ig_{\mu\nu})}{(p_1 - p_4)^2} \bar{u}_{\gamma_3}(p_3) (ie\gamma^\nu) \cdot u_{\gamma_2}(p_2) - \bar{u}_{\gamma_3}(p_3) \cdot (ie\gamma^\mu) \cdot u_{\gamma_4}(p_4) \cdot \frac{(-ig_{\mu\nu})}{(p_3 - p_4)^2} \bar{u}_{\gamma_1}(p_1) (ie\gamma^\nu) u_{\gamma_2}(p_2) \right\}$$

hogy lehet-e ez értelmezni?
 ↳ impulzus táblái

Feynman diagramok:

bejövő e^- : $u_{\gamma_1}(p_1)$
 kimenő e^- : $\bar{u}_{\gamma_4}(p_4)$



$$p_1 - p_3 + k^\nu$$

↳ az impulzus megmaradás sérül!

antimion. sérül

de $d\sigma \sim |T_{fi}|^2 \rightarrow$ a mérési aml. ha ez nem jelenik meg

$e^- e^- \rightarrow e^- e^-$ polarizált állapotok

szórásállapotbeli spinok szorzata } $\rightarrow \sum |T_{fi}|^2 =$
 vegállapotbeli spinok szorzata } $= \frac{1}{4} \sum_{\text{spinok}} |T_{fi}|^2$
 (tehát, állapotok közötti T vagy spinok szorzata)

$$d\sigma = \frac{1}{4 (k_1 k_2)^2 - m^4}^{1/2} \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \cdot \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \sum |\mathcal{M}_{fi}|^2 \cdot (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - p_1 - p_3)$$

$\checkmark$ fluxus
 $\nwarrow$ részecske sűrűség alags
 $\swarrow$ állapot-konfiguráció
 $\searrow$ (Møller 1932)

σ, b, u $b(\vartheta), u(\vartheta)$ szögfüggvények:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2k^2 u^2} \left\{ (1 - 2m^2)^2 (b^2 + u^2) + 4ub (-4m^2 + 12m^4 + ub) \right\}$$

$$d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

$$0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \quad \leftarrow \quad \vartheta \geq \vartheta_0 \geq \frac{1}{2}(1 - 4m^2)$$

$\uparrow$
ami π és $\frac{\pi}{2}$ között van,
az a $\pi - \vartheta$ -ba ad járulékos

A) nem-rel. limit $|\vec{k}| \ll m \quad E^2 \sim m^2$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 m^2}{16 |\vec{k}|^4} \left[\frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{\vartheta}{2}} - \frac{1}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2}} \right]$$

$\downarrow$
interferencia

Termi-statistikai miatt
(boson + lepton)

B) ultrarelativistikus limit $|\vec{k}| \gg m$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{s} \left\{ \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{\vartheta}{2}} + 1 \right\}$$

$\sigma \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow$ "költség"

dim. tan mennyiség $(\sigma) = [m^2] = \frac{1}{(e)^2} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^2 d\Omega$

elektron mérete lehet kör.

ha van mérete: $r \sim \frac{1}{\Lambda}$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = f(r/\Lambda^2)$$

↓

mai mérések alapján lehet adni Λ -n

$\Rightarrow$ nincs belső struktúrája az elektronnak
(pontszerű)