Felelősséget
NEM vállalok
Hiba esetén a
tájékoztatást
köszönöm...

E-mail:
nikolett@
vipmail.hu

Részecskefizika vizsgatételek

1. Elemi részecskék, kölcsönhatások, nagyságrendek kvarkok, leptonok, közvetítő bozonok, barionok, mezonok, a három kölcsönhatás hatótávolsága, tipikus élettartama és hatáskeresztmetszete
2. Relativisztikus kinematika energia-impulzus négyes vektor, részecskék ütközése, TK energia (ütköző nyalábok és fix céltárgyas kísérletek), s, t, u változók
3. Az S mátrix és a szórási hatáskeresztmetszet → gyakorlat
4. Megmaradó és sérülő szimmetriák paritás, colour (szín), C paritás, isospin, ritkaság
5. A hadronok kvark modellje és az $SU(3)$ szimmetria A barion dekuplet és oktet hullámfüggvény, pszeudoskalár mezonok, az $SU(3)$ csoport és szimmetria elemei
6. A Gell-Mann Okubo tömegformula Az $SU(3)$ sérülése, a tömegformula levezetése és alkalmazásai, a kvark modell paradoxonai és a szín szimmetria
7. A semleges K^0-k és a CP sértés a rövid és hosszú élettartamú K^0, az oszcilláló ritkaság, a CP sérülése
8. Hadronrezonanciák és a Breit-Wigner formula
9. A térelméleti Lagrange-Hamilton formalizmus Mezők, hatás és mozgásegyenlet, energiaimpulzus tenzor, Noether tétel globális belső szimmetriára
10. A kanonikus kvantálás alapjai (skalár mezőre) Kanonikus csere relációk, Heisenberg egyenlet és kapcsolata a klasszikus egyenlettel, szabad valós és komplex skalár mezők kvantálása, normálrendezés
11. A Feynman propagátor skalármezőre Az időrendezett szorzatra vonatkozó egyenlet és megoldása, az integrál reprezentáció analízise és kapcsolata a közvetlen számolás eredményével
12. A kölcsönhatási kép és a perturbációszámítás Schrödinger, Heisenberg és kölcsönhatási kép, az időfejlesztő operátor és mozgásegyenlete, az egyenlet megoldása
13. Aszimptotikus állapotok és a szórás mátrix (skalármezőre) Aszimptotikus állapotok, a szórási folyamat perturbatív leírása és az időfejlesztő operátor, Feynman gráfszabályok
14. Az elektromágneses mező kovariáns kvantálása A $\partial_\mu A^\mu = 0$ mérték problematikája, kanonikus kvantálás és negatív normájú állapotok, a fizikai altér definíciója és szerkezete, a fizikai mennyiségek várható értéke, a foton propagátor
15. 1/2 spinű mezők kvantumelmélete, a kvantált elektron mező A Dirac egyenlet síkhullám megoldása, a Fourier együtthatók kvantálása, normálrendezés, energia és impulzus, töltés és az antirészecske állapotok, a fermion mezők propagátora
16. A relativisztikus elektron/pozitron rendszer és az elektromágneses mező (QED) A szabad és kölcsönhatási Lagrange és Hamilton függvények, propagátorok és vertexek
17. Az $e^-e^- \to e^-e^-$ rugalmas szórás
18. Az e^+e^- annihiláció csatornái Az $e^-e^+ \to e^-e^+$ szórás, $e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$, $e^-e^+ \to$ hadronok, a nehéz kvarkok felfedezése

Javasolt irodalom

Patkós András, Polonyi János: Sugárzás és részecskék (Typotex, 2000)

C. Itzykson, J.B. Zuber: Quantum field theory (McGraw-Hill, 1980)

D.H. Perkins: Introduction to High Energy Physics (Addison-Wesley Pub. 1987)

T.P. Cheng and L.F. Li: Gauge theory of elementary particle physics (Oxford Univ. Press, 1988)

O. Nachtmann: Elementary particle physics (Springer, 1989)

Palla László

Előzetes tárgyak

- Katz Sándor: Relativitáselmélet
- Csoportelmélet (Kvantum impulzusmomentum)

Részecskefizika

2012. 09. 11.

http://elmfiz.elte.hu/~palla/reszfizfel.pdf => házi feladatok zh-ban előfordulnak

Elemi részecskék, kölcsönhatások, nagyságrendek

többnyire $\hbar = c = 1$ egységrendszer (egyébként $\hbar c = 197$ MeVfm)

minden mennyiség tömeg vagy hossz.

Compton-hullámhossz

$$\lambda_{compton} = \frac{\hbar}{mc} \Rightarrow \frac{1}{m} \qquad t = \frac{\lambda}{c} = \frac{\hbar}{mc^2} \rightarrow \frac{1}{m}$$

idő és tér ugyanolyan dimenziójú

energia = tömeg · c^2 => energia = tömeg

Skálás: tömegeket energia egységben mérjük

pl. proton: $m_p \approx 930-940$ MeV (~ 1 GeV)

„elemi"

- Energiafüggő (időfüggő térlékelmi) kérdés
- Legnagyobb elérhető energián nincs szubstruktúrája
- görögök: 4 elem
- 19. század: atomok (periódusos rendszer)
- 20. század eleje: protonok + elektronok + fotonok

  nagyenergiájú fotonokkal letapogatva töltéseloszlás

- mai kép: lap

Elemi részecskék ma:

Az anyagi részecskék három családja (fermionok)

		I	II	III	
Kvarkok	tömeg → / töltés → / spin → / név →	2.4 MeV, 2/3, 1/2, **u** up	1.27 GeV, 2/3, 1/2, **c** charm	171.2 GeV, 2/3, 1/2, **t** top	0, 0, 1, **γ** foton
Kvarkok		4.8 MeV, -1/3, 1/2, **d** down	104 MeV, -1/3, 1/2, **s** strange	4.2 GeV, -1/3, 1/2, **b** bottom	0, 0, 1, **g** gluon
Leptonok		<2.2 eV, 0, 1/2, **ν_e** elektron-neutrínó	<0.17 MeV, 0, 1/2, **ν_μ** müon-neutrínó	<15.5 MeV, 0, 1/2, **ν_τ** tau-neutrínó	91.2 GeV, 0, 1, **Z^0** Z-bozon
Leptonok		0.511 MeV, -1, 1/2, **e** elektron	105.7 MeV, -1, 1/2, **μ** müon	1.777 GeV, -1, 1/2, **τ** tau	80.4 GeV, ±1, 1, **$W^\pm$** W bozon

Bozonok (kölcsönhatások)

nagyon nagy tömegű $W^\pm$ és Z

elemi részecskék

más statisztika

anyagi | kh-t közvetítő

jellemzőik: tömeg, spin, töltések, saját mágneses momentum

anyagi

• spin: $\frac{1}{2}$ (fermionok)

ki tudnak tiltani irányt

kvarkok

• 6 flavour-ben („íz")

• $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$ töltésűek

leptonok

• 3 családban

• 0, -1 töltésűek

∀ fermionnak ∃ antirészecskéje ‖ tömege és spinje ugyanaz, de ∀ töltése a részecske töltésének -1-szerese.

kh-t közvetítő

• egész spinűek (1-es) (bozonok)

γ foton: elektromágneses kölcsönhatást közvetíti

g gluon: erős kölcsönhatást közvetíti

Z^0, $W^\pm$: gyenge kölcsönhatást közvetíti

egyik részecske kibocsát ilyet, majd a másik elnyeli

HA tényleg felfedezték a Higgs részecskét

töltése: 0, tömeg: 126 GeV

spin: 0

első elemi skalár...

Részecskefizika

2012. 09. 11.

∀ kvarknak (q, Q) van ⅓ barionszáma (megmaradó töltés)
leptonoknak nincs bariontöltése

kvarkok

kötött állapotot alkotnak

barionok (qqq)
- barionszám $B = 1$
- spin féles $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$
- $p = (uud)$
- $n = (udd)$
- szalmund megmarad
- $\Lambda = (uds)$

mezonok $(q\bar{q})$
- $B = 0$
- spin egész $(0, 1)$
- "
- szalmund nem marad meg
- pion $(u\bar{d})$ π^+
- semleges kaon $(\bar{s}d)$ K^0
- ψ részecske $(c\bar{c})$

$$\pi^- + p \to K^0 + \Lambda$$
$$(\bar{u}d)\ (uud)\ (\bar{s}d)\ (uds)$$

$u\ \bar{u} \to s\ \bar{s}$

többi kvark csak „néző"

u és d kvarkok tömege lényegesen kisebb mint protoné

könnyű kvarkok (u, d)

proton tömege?

leptonok

töltött ← → semleges

van 3féle leptonszám

tömeges

neutrínók felső korlát 0 tömegűnek vesszük (nincs elv.)

L_e L_μ L_τ külön-külön megmaradó mennyiségek

					$\ell = e, \mu, \tau$
e^-	μ^-	τ^-	$+1$	ν_ℓ	
e^+	μ^+	τ^+	-1	$\bar{\nu}_\ell$	

$m_e \approx 0{,}5$ MeV könnyű

$m_\mu \approx 105$ MeV közepes

$m_\tau \approx 1{,}7$ GeV nehéz

$\mu^+ \to e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu$ tömeg ok

-1	0	0	-1	L_μ ✓
0	-1	1	0	L_e ✓

$\mu^+ \to e^+ \gamma$ tömeg ok

-1	0	0	L_μ ↯
0	-1	0	L_e ↯

ez lenne a domináns bomlás, de L_μ ↯ L_e ↯

$$\left.\frac{\Gamma(\mu^+ \to e^+\gamma)}{\Gamma(\mu^+ \to e^+\nu\bar{\nu}_\mu)}\right|_{exp} < 10^{-9}$$

kísérleti felső korlát

⇓

nincs a 2. folyamat

leptonszámok KÜLÖN-KÜLÖN maradnak meg.

bozonok

Higgs: új típusú kh-t közvetít csak vonzó (0 spin miatt)

A kölcsönhatásokat 2 adat jellemzi: közvetítő részecske m

hatótávolság

$R \sim \frac{1}{m}$

$\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar$

$\Delta t \sim \frac{\hbar}{mc^2}$ ideig tart egy m nyugalmi tömegű részecske kicserélése.

Ez alatt a fény $R = c\Delta t = \frac{\hbar}{mc}$

⇓ $\hbar = c = 1$

$R \sim \frac{1}{m}$

„erősség" (csatolási állandó)

$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ relativisztikus diszperziós reláció

$E \to i\hbar\partial_t$ $\vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}$

$\psi(\vec{x}, t)$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \Delta\psi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi = 0$$

Klein-Gordon-egyenlet

(ha $m = 0$ közönséges hullámegyenlet)

sztatikus m.o.:

$\psi(\vec{x}, t) = u(\vec{x})$

$$\Delta u = \frac{m^2c^2}{\hbar^2} u$$

gömbszimmetrikus megoldás az origóban lévő pontforrással:

$$u = \frac{g}{4\pi r} e^{-\frac{r}{R}} \quad R = \frac{\hbar}{mc}$$

g integrációs állandó pontforrás erőssége

$m = 0$ $u = \frac{Q}{4\pi r}$

A kölcsönhatást $R \sim \frac{1}{m}$ távolság és g csatolási állandó jellemzi

Elektromágneses kh. $R = \infty$

$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{137}$

finomszerkezeti állandó

KICSI (dimenziótlan)

⇓

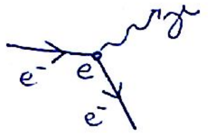
lehet perturbációszámítást alkalmazni

Részecskék + kvantált elektromágneses mező:

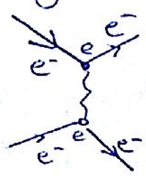
α szerint perturbációszámítással kezelhető
a perturbációszámítás rendjeinek
vizualizálása: Feynman-diagram (gráf)

vertex: itt történik a kölcsönhatás
elnyelése és kibocsátása a részecskéknek itt történik.

— vonalak: részecske propagálását írják le

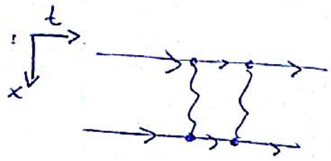


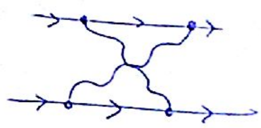
$e^-e^- \to e^-e^-$
legalacsonyabb rendben



amplitúdó $\sim \alpha$ ($\sim e^2$)
valószínűség $\sim \alpha^2$

magasabb rend:





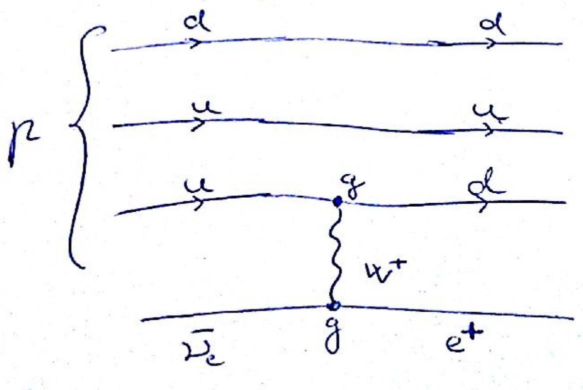
propagátorok is kellenek.

Gyenge kölcsönhatás

Z, $W^\pm$ csere

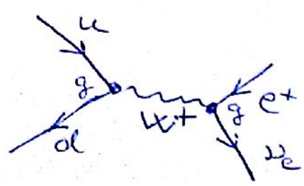
fenomenológiailag (laborban) ① vagy neutrínó vesz részt benne
② vagy a kvark flavour-ök száma változik (nem leptonos gyenge folyamat)

① pl.: $n \to p e^- \bar\nu_e$
$\bar\nu_e p \to n e^+$



$\pi^+ \to e^+ \nu_e$

$u\bar{d} \to W^+ \to e^+ \nu_e$



ugyanaz a lényegi folyamat

folyamatok erőssége

$$\frac{\text{gyenge}}{\text{em}} \sim \frac{g^2}{\alpha} \sim \sqrt{\frac{\tau_\gamma}{\tau_w}} \overset{\text{delitás}}{\sim} 10^{-5}$$

ezért gyenge a gyenge kölcsönhatás

valószínűség

$$\Gamma_\gamma \sim \alpha^2 \qquad \Gamma_w \sim g^4$$

élettartam: $\tau \sim \Gamma^{-1}$

2012. 09. 18.

Kölcsönhatás hatótávolsága $\sim \frac{1}{m}$

„erősség": csatolási állandó g (dimenziótlan).

Gyenge kh.

$W^\pm$, Z közvetítő részecske

g_w csatolási állandó: $\frac{\text{gyenge}}{\text{em}} \sim \frac{g_w^2}{\alpha} \sim \sqrt{\frac{\tau_\gamma}{\tau_w}}$

$\Sigma^\pm$ Σ^0 barionok (barion + mezon = hadron)

Σ^- (dds)

Σ^0 (uds)

$\Sigma^0 \to \Lambda\gamma$ (usd) e.m. $\tau_\gamma = 10^{-19}$ s

$\Sigma^- \to n\pi^-$ w

$\Delta s \neq 0$ $\tau_w = 10^{-10}$ s

$\frac{w}{e.m.} \sim \sqrt{\frac{10^{-19}}{10^{-10}}} \approx 10^{-5}$ $\to$ ezért gyenge kh.

alacsony energián most használjuk.

$\pi^+ \to e^+ \nu_e$

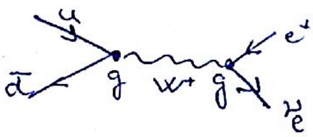


TABLE 1.3 Fundamental interactions (M = nucleon mass)

Interaction	Gravity	Electro-magnetic	Weak	Strong
Field quantum	Graviton	Photon	Intermediate bosons $W^{\pm}, Z^0$	Gluon
Spin-parity	2^+	1^-	$1^-, 1^+$	1^-
Mass (mc^2), GeV	0	0	80–90	0
Range, m	∞	∞	10^{-18}	$\leq 10^{-15}$
Source	Mass	Electric charge	"Weak charge"	"Color charge"
Coupling	K (Newton)	—	G (Fermi)	—
Dimensionless coupling constant	$KM^2/\hbar c = 0.53 \times 10^{-38}$	$\alpha = e^2/4\pi\hbar c = \frac{1}{137}$	$(Mc/\hbar)^2 G/\hbar c = 1.02 \times 10^{-5}$	$\alpha_s \sim 1$, large r; < 1, small r
Typical cross-section, m² (1 GeV)	—	10^{-33}	10^{-44}	10^{-30}
Typical lifetime for decay, s	—	10^{-20}	10^{-8}	10^{-23}

TABLE 1.4 Conservation rules

Conserved quantity	Interaction: Strong	Electromagnetic	Weak
Energy/momentum, Charge, Baryon number, Lepton number	Yes	Yes	Yes
I (isospin)	Yes	No	No ($\Delta I = 1$ or $\frac{1}{2}$)
S (strangeness)	Yes	Yes	No ($\Delta S = 1, 0$)
C (charm)	Yes	Yes	No ($\Delta C = 1, 0$)
P (parity)	Yes	Yes	No
C (charge-conjugation parity)	Yes	Yes	No
CP (or T)	Yes	Yes	Yes[a]
CPT	Yes	Yes	Yes

[a] But 10^{-3} violation in K^0 decay.

Részecskefizika 2012. 09. 18.

Impulzustérben:

W propagátor $\sim \frac{1}{q^2+m_W^2}$ q - impulzusa

$$q^2 = q_0^2 - \vec{q}^{\,2}$$

amplitúdó: $\frac{g^2}{q^2+M_W^2}$

alacsony energián $q^2 \ll M_W^2$

Fermi csatolási állandó: $G_F = \frac{g^2}{M_W^2}$ $[G_F] = \frac{1}{GeV^2}$

$$G_F = 10^{-5} (GeV)^{-2}$$

Salam-Weinberg

Standard modell elektrogyenge része

egyesíti EM és gyenge mt-t ha $g \sim e \sim \sqrt{4\pi\alpha}$

$\Downarrow$

M_W megbecsülhető a mérhető csatolási állandóból

$$M_W \sim \frac{g}{\sqrt{G_F}} \sim \sqrt{\frac{4\pi\alpha}{G_F}} \sim 90\,GeV \Longleftrightarrow$$ kísérlettel összhangban van

Gyenge kölcsönhatás a tértükrözési invarianciát sérti

1. pillanat, hogy egy fundamentális geometriai szimmetriát nem tart be (1950.)

pl.: $\mu^- \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ „paritás aszimmetria"

$\downarrow$ van spin $\Rightarrow$ polarizáljuk $\Rightarrow$ van kitüntetett irány

μ^-

bomló μ^- rendszeréhez képest a μ spinjéhez képest mekkora szögben repül ki az elektron.

$$\Gamma(\vartheta) \sim \left(1 - \frac{1}{3}\cos\vartheta\right) d(\cos\vartheta)$$

Tértükrözés hatására a spin és impulzus másképp viselkedik (axiál- és sima vektor) ⇒ spin változik, impulzus nem.

$P \quad \vartheta \to \pi - \vartheta$ $\qquad \Gamma(\vartheta) \sim (1 - \frac{1}{3}\cos\vartheta)\, d(\cos\vartheta)$

nem invariáns tértükrözésre

nagy $\vartheta \to \pi$ $\qquad$ kicsi $\vartheta \to 0$

$\Sigma \; \mu^-$

Erős kölcsönhatás

- Becslés a kh csatolási állandójára:

Σ^0 tömege 1194 GeV → gerjesztett 1385 GeV ⇒ $\Sigma^0(1385)$

élettartama: $\tau_s \sim 10^{-23}$ s (nem buborékkamrás, nem time of flight -szerűségen mérik $K^- p \to \Sigma^0(1385) \to \Lambda + \pi^0$)

nem csúcs.

$$\frac{\alpha_s}{\alpha} \sim \sqrt{\frac{\tau_\gamma}{\tau_s}} \simeq 100 \qquad \text{EM folyamat}: \Sigma^0 \to \Lambda\gamma \quad \tau \simeq 10^{-19}\,s$$

$$\alpha_s \equiv \frac{g_s^2}{4\pi} \sim 100 \underset{\uparrow}{\alpha} \sim 1 \qquad \left(\alpha = \frac{1}{137}\right)$$

Nem lehet perturbációszámítást használni, mert túl nagy a csatolási állandó.

Közvetítő részecske: gluon

A kvarkoknak és gluonoknak van még egy belső szabadsági foka, mely független a flavourtól ⇒ szín (colour)

kvarkok 3 színben, gluonok szín-antiszín kombinációban (8 db) $SU(3)$

hadronok: kvarkok vagy kvark-antikvark kötött gluonnal közvetített kh-ból

(qq) miért nincs és q miért nincs? Miért csak (qqq) és $(q\bar{q})$?

rövid válasz: colour-szimmetria egzakt és csak szín szinglett állapotokat figyelünk meg. 3 kvarkból és kvark-antikvarkból lehet szinglettet csinálni.

Részecskefizika

2012. 09. 18.

gluon spinje: 1

tömege: 0 de az erős kh. hatótávolsága nem ∞

Erős kh hatótávolsága véges, mert a szín-szimmetriának van egy „bezárás" nevű tulajdonsága

$V(r)$ kvark és antikvark közti potenciál a távolság függvényében

$\Downarrow$

nem relat kép

$\Downarrow$

jó, mert vannak nagy, lassan mozgó részecske (c kvark tömege nagyobb mint a protoné)

$$V(r) \sim -\frac{4}{3}\frac{\alpha_s}{r} + kr$$

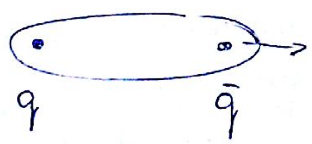
$\frac{1}{r}$ és r lineárkombinációja, együtthatók kimérhetők pl. J/ψ spektrumból

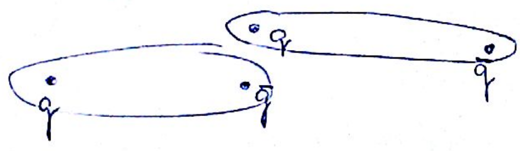
$r \to 0$ kr elhanyagolható

$r \to \infty$ kr dominál. $\Rightarrow V(r) \to \infty$

mezon $(q\bar{q})$

Azért nem lehet külön kvark, mert nagyon széthúzva az energia a végtelenhez tart $\Rightarrow$ energetikailag kedvezőbb a vákuumból kvark-antikvark párt kipolarizálni $(E \sim 2m_q)$





$\Rightarrow$ energetikailag kedvezőbb

2012. 09. 18.

Szimmetriák és megmaradási tételek

Szimmetria: van egy egyenlettel leírt rendszer. Ennek invarianciája egy transzformációra.

Folytonos

van benne folytonos paraméter

pl. eltolás ⇓

infinitezimális transzformáció

additív megmaradó menny. (Q)

$[H, Q] = 0$

Diszkrét

Nincs folytonos paraméter

pl. tükrözés

multiplikatív menny. (G)

$[H, G] = 0$

ha szimmetria

Heisenberg kép

Paritás

transzformáció: $\vec{r} \to -\vec{r}$ $(x, y, z) \to (-x, -y, -z)$

origóra vett tükrözés

$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 \longrightarrow -\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ (itt ugyanaz, mintha 1 és 2 fel lenne cserélve)

Kvantummechanika: $\hat{P}\psi(\vec{x}, t) = \psi(-\vec{x}, t)$

minden argumentumra hat

$(\hat{P})^2 = \mathbb{1}$ => unitér operátor,

sajátértékei: ± 1 „paritás"

Általában a hullámfv. nem sajátfüggvény, elég ha tud hatni $\hat{P}$.

Ha tükrözés invariancia: $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$

pl.: $V(\vec{r}) = V(r)$ $r = |\vec{r}|$

Kötött állapotok határozott paritásúak.

$\psi(r, \vartheta, \varphi) = \chi(r)\, Y_l^m(\vartheta, \varphi)$

tükrözésnél: $\vartheta \to \pi - \vartheta$ $\varphi \to -\varphi$

$Y_l^m(\vartheta, \varphi) \to (-1)^l\, Y_l^m(\vartheta, \varphi)$

Részecskefizika

2012. 09. 18.

Paritás részecskék belső (saját) tulajdonsága

Az élet meglepően üres.

$\pi^{\pm}$ π^0 Megmutatjuk, hogy pszeudoskalárok, saját paritásuk -1.

$m_{\pi^{\pm}} = 140\,MeV$ $m_{\pi^0} = 135\,MeV$

felhasználjuk, hogy:

- 0 spinűek
- $\pi^- + D \to n + n$ reakció analízise (D: deuteron) erős folyamat
- impulzusmomentum megmarad

Csak a negatív gondolatok hátráltatják az embert. Nincs olyan, hogy rossz út, rossz ember. Mi akarunk csak címkéket az életünkben jelenlévő dolgokra, tulajdonságokra, emberekre, valójában ezek nem léteznek. Nem attól élünk tudatosan, hogy valamit gyakorlunk, hanem attól, hogy tudjuk, minden cselekedetünknek következménye van, s ennek megfelelően elfogadjuk vagy elutasítjuk az adott helyzeteket.

deuteron az s pályáról fogja be a π^--t

2 nukleon $\frac{1}{2}$ spinnel $\to S_D = 1$ $\quad l_{\pi^-} = 0$ $\quad$ kezdő állapot: $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} = \vec{1}$

$n + n$ is $\vec{1}$ impulzusmomentumú állapotban van (megmarad)

Úgy töltjük meg az életünket tartalommal.

L $\quad S \to n$-k spinje $\frac{1}{2}$

1 szim. ($S=1$ paritás 1)

0 antiszim a részecskék felcserélésére ($S=0$ paritás -1)

Pauli-elv érvényes a neutronokra $\Rightarrow$ antiszimmetrikusnak kell felcserélésre (-1) $\Rightarrow$ $(-1) = (-1)^{S+1}(-1)^L$

TKP koordináta csere $\Rightarrow$ nem változik; relatív koordinátában $\Rightarrow$ csere impulzusmomentum relatív koordinátában

$L + S$ páros

$\vec{L} + \vec{S} = \vec{1}$

$\vec{L}$	$\vec{S}$
0	1
1	1; 0
2	1

páros $L + S$ csak $\vec{L} = \vec{1}$ és $\vec{S} = \vec{1}$

$2n$ csak $^3P_1$ állapotban

ennek paritása -1 (mert $\vec{L} = 1$)

ha erős folyamatban a paritás megmarad, akkor a kezdő állapot paritása is -1.

$\cdot$ (neutron paritása)^2

p, n paritások: konvencionálisan: 1

Dirac-egyenletből $\quad p\bar{p} \to p\bar{p}p\bar{p}$ van

relatív paritás D-e-ből -1

D-ben p_1, n_1 és végállapot $2n_{12}$ paritásai Sicsnek

kezdő állapot paritása -1 $\Rightarrow$ π^- paritása

Jelölés: $J^P \rightarrow$ saját paritás

$\Downarrow$

saját impulzusmomentum

0^- pszeudoskalárok $(\pi^\pm, \pi^0)$

0^+ skalár (kísérletileg nincs)

1^- vektormezonok

1^+ axiálvektormezonok

$\frac{1}{2}^+$ p, n például

$p + p \rightarrow p + \Lambda + K^+$

ΛK^+ pár paritása -1

Λ barion (usd) konvencionálisan paritása $+$

$\Lambda \in (\frac{1}{2})^+$

$\Downarrow$

K^+ paritása (-1) $\Rightarrow$ $K^+ \in 0^-$

Töltéskonjugáció

C paritás (C konjugálás)

transzformáció: részecske $\forall$ töltését (-1)-szeresére változtatja

$e^- \leftrightarrow e^+$ $\quad$ $p \leftrightarrow \bar{p}$ $\quad$ $n \leftrightarrow \bar{n}$

$C|\pi^+\rangle = |\pi^-\rangle$ $\quad$ $C^2 = \mathbb{1}$ $\Rightarrow$ sajátértékek: ± 1 C paritás

$\neq \pm|\pi^\pm\rangle$ nem sajátállapot

$C|\pi^0\rangle = \eta_{\pi^0}|\pi^0\rangle$ $\quad$ $\eta_{\pi^0} = ?$

Maxwell-egyenletek: lineárisak

források ρ és $\vec{j} \xrightarrow{C} -\rho \, ; \, -\vec{j}$

Részecskefizika 2012. 09. 18.

linearitás $\Rightarrow$ Maxwell-egyenletek invariánsak a C transzformáció alatt, ha

$$(\vec{E},\vec{B}) \xrightarrow{C} (-\vec{E},-\vec{B})$$

$\Downarrow$

foton $\eta_{foton} = -1$

EM-kh-ban C paritás ekkor megmarad

n db foton $\eta = (-1)^n$

$\exists$ $\pi^0 \to 2\gamma$ bomlás (domináns)

$\eta_{\pi^0} = (-1)^2 = 1$ $\Rightarrow \pi^0 \not\to 3\gamma$ tiltott!

Izospin

történetileg Heisenberg (1930-as évek) vezette be magerők töltésfüggetlensége miatt.

p és n egy N részecske (nukleon) 2 lehetséges állapota

$|p\rangle = |N_1\rangle$ $|n\rangle = |N_2\rangle$ $|N_a\rangle$ $a = 1,2$

$|N_a\rangle \to |\tilde{N}_a\rangle = \underbrace{U_{ab}}_{2\times 2 \text{ mátrix}} |N_b\rangle$

$\langle \tilde{N}_a | \tilde{N}_b \rangle$ tetszőleges állapot (amplitúdó) ugyanaz, mint $\langle N_a | N_b \rangle$ között $\Rightarrow$ ne függjön U_{ab}-től.

U_{ab} unitér, egység determinánsú, 2×2-es mátrix.

2012.09.25.

Izospin: magerők töltésfüggetlensége

$|p\rangle = |N_1\rangle \quad |n\rangle = |N_2\rangle$

$|\tilde{N}_a\rangle = U_{ab} |N_b\rangle$

$\langle \tilde{N}_a | \tilde{N}_b \rangle = \langle N_a | N_b \rangle \quad \forall |N_{a,b}\rangle$

U_{ab} 2x2-es folytonos mátrix

$\det U = 1$
$U^+ U = 1$ } SU(2) csoport a mátrixszorzással
általános alak: $U = \exp(i \varepsilon^a I_a)$ $a = 1,2,3$ ε^a valós $I_a^+ = I_a$

generátor kommutációs relációja: $[I_a, I_b] = i\varepsilon_{abc} I_c$

forgathatom tetszőlegesen ezzel az izospin állapotokat

a fizika nem függ ettől

transzformáció $|N_b\rangle \to |\tilde{N}_a\rangle$

Lie-algebra

$[I_a, I_b] = i \varepsilon_{abc} I_c$ (ugyanúgy mint az impulzusmomentum)

$I_a = \frac{1}{2} \sigma_a$ (σ_a Pauli mátrixok) formában reprezentálódik

$I_3 |p\rangle = \frac{1}{2} \sigma_3 |p\rangle = \frac{1}{2} |p\rangle$

$I_3 |n\rangle = \frac{1}{2} \sigma_3 |n\rangle = -\frac{1}{2} |n\rangle \qquad |N\rangle = \begin{pmatrix} |p\rangle \\ |n\rangle \end{pmatrix}$

A belső tér $|p\rangle$ és $|n\rangle$

$Q = I_3 + \frac{1}{2}$ (elemi töltés egységben)

Az erős kh-ban az izospin megmarad, izospin szimmetrikus

$[H^{erős}, I_a] = 0$

izospin generátora

Mivel a generátorok nem kommutálnak:

$I^2 = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 \qquad [I^2, I_a] = 0 \quad \forall a$-ra

pontosítás

egyszerre diagonalizálhatók

$[H^{erős}, I^2] = 0 \quad [H^{erős}, I_3] = 0$

Az izospin kiterjeszthető más hadronokra is.

Ha más kh nincs $\Rightarrow m_p = m_n$ DE $\frac{m_n - m_p}{m_n + m_p} \approx$ ‰

$m_p \neq m_n$ nem erős effektus $\Rightarrow$ más kell, hogy létezzen

Részecskefizika 2012. 09. 25.

A proton EM-ben, proton és neutron gyengében különböznek

protonnak kéne ~~egy~~ nagyobb tömegűnek lenni, mert

ő EM-ben is különbözik. De ez nem ilyen egyszerű

(Tömegkülönbség nem az erős kh. eredménye (

Hasonló térelő tulajdonságú

↳ spin, paritás megegyezik

$\dotplus$ tömeg közel egyforma

SU(2) csoport (unitér, irreducibilis) ábrázolásai:

$N \times N$-es $D(U)$ unitér mátrixot rendelünk U-hoz.

$$D(U_1)D(U_2) = D(U_1U_2)$$

$[I_a, I_b] = i\,\varepsilon_{abc}\, I_c$ absztrakt reláció

2×2-ben $\frac{1}{2}\sigma_i$ - k ábrázolják

$N\times N$?

$I_\pm := I_1 \pm i I_2$ $\quad [I_3, I_\pm] = \pm I_\pm$ $\quad [I_+, I_-] = 2I_3$ algebra szánt

$I_3 I_\pm |n\rangle - I_\pm I_3 |n\rangle = \pm I_\pm |n\rangle$

$I_3 I_\pm |n\rangle - n I_\pm |n\rangle = \pm I_\pm |n\rangle$

$I_3 (I_\pm |n\rangle) = (n\pm1)(I_\pm |n\rangle)$

$I_\pm$ ⇓ I_3 sajátértéket ±1-gyel változtatja

⇓

léptető operátor

Sajátállapot $|j, m\rangle$ $\quad$ I_3 diagonalizációja

$$I_3 |j, m\rangle = m |j, m\rangle$$

lehetséges teljes izospin:

- $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$

félegész

- fix j esetén

$$m = \underbrace{-j, -j+1, \dots, j-1, j}_{2j+1 \text{ db}}$$

$$I_\pm |j, m\rangle = \sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\, |j, m\pm1\rangle$$

⇓

$I_+ |j, j\rangle = 0 \qquad I_- |j, -j\rangle = 0$

legmagasabb és legalacsonyabb súlyú ábrázolás

pl. $j = \frac{1}{2} \quad 2j+1 = 2$

$m = -\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \quad \Rightarrow |p\rangle$ és $|n\rangle$

Reprezentáció száma megadja a megfelelő ábrázoláshoz tartozó j-ket.

Más hadronok izospinje

$\pi^\pm \ \pi^0$ $\quad 0^{-}$ paritás, spin → pszeudoskalárok

térideális tul-ok „=" -k :)

$$\frac{\Delta m_\pi}{m_\pi} \sim \frac{5}{140} << 1 \quad \text{tömegfelhasadás nem erős effektus}$$

$3 = 2j+1$

⇓

$j=1$ teljes izospin

$I^2 |j,m\rangle = j(j+1)|j,m\rangle$ kvadratikus Casimir-operátor

a sajátértékek m-től nem függ, egész ábrázoláson ugyanaz

$I_3 |\pi^\pm\rangle = \pm|\pi^\pm\rangle$

$I_3 |\pi^0\rangle = 0$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{array}$$

Az izospin triplett ábrázolását adja a pion, amit $j=1$ jellemez

$Q = I_3 + \frac{B}{2}$ $\quad$ B: barionszám

⇓

olyan reláció kell, mely pionra és proton-neutronra is igaz

$B_p = 1 = B_n$ $\qquad B_{\pi^\pm} = B_{\pi^0} = 0$

Erős kh. izospin-szimmetrikus ⇒ reakciók összehasonlíthatóak:

$\pi^+ + p \to \pi^+ + p$

$\pi^- + n \to \pi^- + n$

rugalmas szórások

→ hkm-ek között kapcsolat kell, hogy legyen.

pion-nukleon rendszer

πN $\qquad \frac{1}{2} \otimes 1 = \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2}$

$j_1 \quad j_2 \quad (j_1+j_2)$-től $|j_1-j_2|$-ig Σ

$\pi^+ + p \to \pi^+ + p$ $\qquad \pi^- + n \to \pi^- + n$

$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ $\qquad -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$

Részecskefizika 2012. 09. 25.

Mindkét szórás csak a $\frac{3}{2}$ ábrázolásban lehet

⇓

A 2 reakció egy izospin forgatással egymásba vihető

⇓

nem függ tőle a hkm.

$\sigma(\pi^+ p \to \pi^+ p) = \sigma(\pi^- n \to \pi^- n)$ ⇒ kísérlettel igazolták

Ritkaság + izospin a ritka részekre

'50-'60-as években több olyan hadront találtak, amik párban könnyen nagy számban keletkeznek, de lassan, hosszú idő után bomlanak. ⇓

⇓ gyenge folyamat — erős folyamat

Elképzelés: Az ilyen részecskék egy új kvantumszám hordozói, amit ritkaságnak (strangeness) neveznek.

Az erős kh-ban ez megmarad, a gyengében viszont nem.

$\underset{d\bar{u}}{\pi^-}\ \underset{uud}{p} \to \underset{uds}{\Lambda}\ \underset{d\bar{s}}{K^0}$ $\qquad$ $\underset{\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u}-d\bar{d})}{\pi^0}\ \underset{uud}{p} \to \underset{uds}{\Lambda}\ \underset{u\bar{s}}{K^+}$ erős folyamatok, ritkaság megmarad

$\Lambda \to p\pi^-$ (lassan) $\qquad$ $K^+ \to \mu^+ \nu_\mu$ → gyenge folyamat, ritkaság sérül

Λ $\left(\frac{1}{2}\right)^+$ egy töltésállapota van $\quad m_\Lambda \approx 1115$ MeV

nincs több ilyen állapot, ami közel lenne tömegben $\quad j=0 \quad I_3=0$

$K^{+,0}$ → 494 MeV, 498 MeV $\qquad 0^-$ pszeudoskalárok → $j=\frac{1}{2}$

	π^-	p	$\to \Lambda$	K^0
I	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
I_3	-1	$\frac{1}{2}$	0 ⇒	$-\frac{1}{2}$
ritkaság ($s \to -1$)	0	0	-1	1

	π^0	p	$\to \Lambda$	K^+
I	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
I_3	0	$\frac{1}{2}$	0 ⇒	$+\frac{1}{2}$
ritkaság	0	0	-1	1

gyenge bomlás

	Λ	$\to p$	π^-
I	0	$\frac{1}{2}$	1
I_3	0	$\frac{1}{2}$	-1
S	-1	0	0

sem a ritkaság, sem az izospin nem marad meg

K^0, K^+ izodublett ⇒ $\begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}$

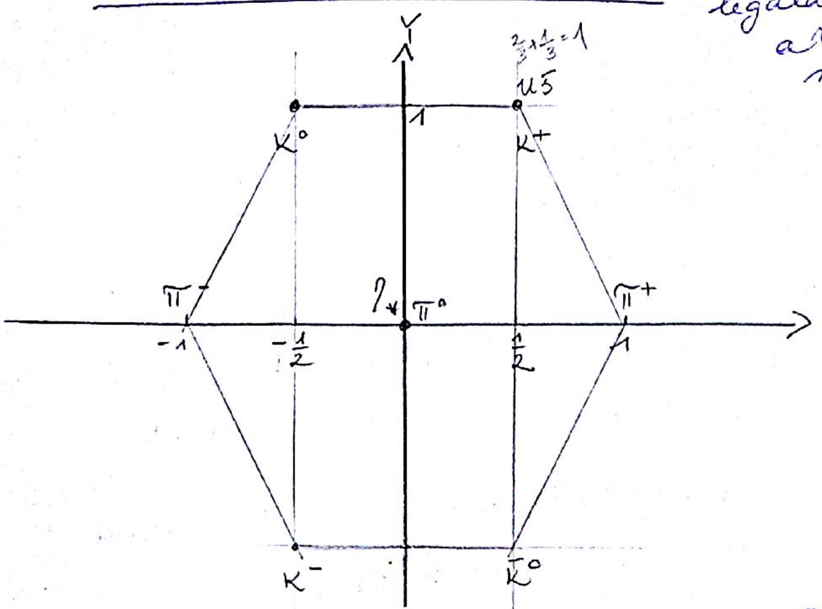
K^0 és K^+ ritkasága 1.

Gell-Mann - Nishijima összefüggés

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}\underbrace{(B+S)}_{Y \text{ hipertöltés}}$$

0^- pszeudoskalár mezonok az I_3 - Y síkon:

legalacsonyabb tömegűek az adott (kvantumszámmal rendelkezők között

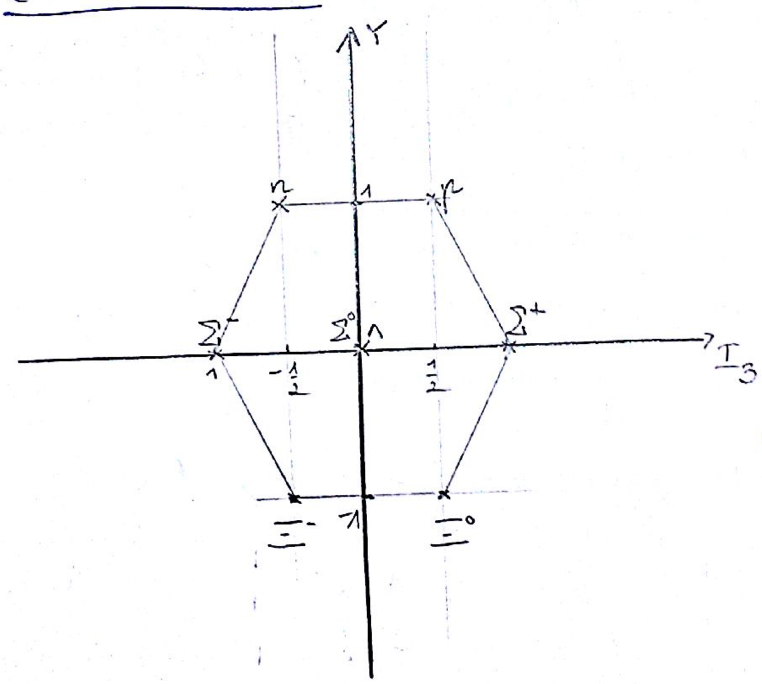


- pion . $Y = 0$ $S=0$ $B=0$
  $m_\pi \sim 140$ MeV ($\Delta m = 5$ MeV)
- K^+, K^0 : $Y = 1$ (m_K 494 - 498 MeV)
  $S=1$ $B=0$
  forgatás invariancia
  ⇓
  $K^-, \bar{K}^0$
- η $I=0$ $I_3=0$ $S=0$
  $m_\eta \sim 549$ MeV

pszeudoskalár - oktett
8 állapot

antirészecskék is benne vannak

$\left(\frac{1}{2}\right)^+$ barionok



($m_N \sim$ 938-940 MeV)

- $n, p \to N$ $Y = 1+0$
- Λ $Y = 1-1=0$
- $\Sigma^{\pm,0}$ $I=1$ $S=-1 \Rightarrow$ $Y=0$

$m_\Sigma \sim 1190$ MeV

- Ξ^- Ξ^0 $m_\Xi \sim 1320$ MeV

$S = -2$ $Y = -1$
⇑
$\Xi^0 \to K^0 K^0$ keltés

itt csak részecskék vannak.

Ritka részek stabilak lennének, ha nem létezne gyenge kölcsönhatás.

Izospin és ritkaság kvarkokra

• $q=\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ $j=\frac{1}{2}$ dublett ábrázolás izospin szempontjából

$I_3|u\rangle = \frac{1}{2}|u\rangle$

$I_3|d\rangle = -\frac{1}{2}|d\rangle$

$S=0$

	$Q=I_3+\frac{1}{2}(B+S)$	anti:
u	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}+0)=\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-\frac{1}{3}+0)=-\frac{2}{3}$
d	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}+0)=-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-\frac{1}{3}+0)=\frac{1}{3}$
s	$0+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-1)=-\frac{1}{3}$	$0+\frac{1}{2}(-\frac{1}{3}+1)=\frac{1}{3}$
c	⋮ ?	
t		
b		

Állítás: $Q=I_3+\frac{1}{2}Y$ rájuk is érvényes, mert $B_q=\frac{1}{3}$

• s kvark

$I_3=0$ $j=0$ izoszinglett, nem hordoz izospint

$S=-1$

$\boxed{I_+,\ I_-}$

$I_+|u\rangle = 0$ $\qquad I_+|d\rangle = |u\rangle$ $\qquad \sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\sqrt{(\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2}))(\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})+1)}=1$

$I_-|d\rangle = 0$ $\qquad I_-|u\rangle = |d\rangle$ $\qquad \sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1)}=1$

töltéskonjugálás

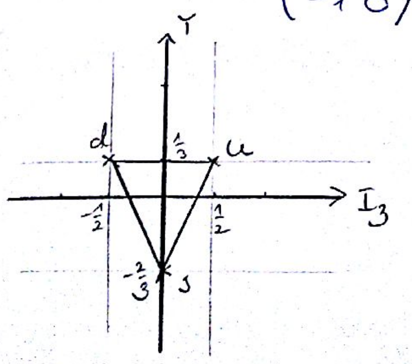
C	u	$\to \bar{u}$	$d \to$	$\bar{d}$	$s \to$	$\bar{s}$
Q	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0
B	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
S	0	0	0	0	-1	1

G-M-N igaz az antikvarkokra is

$C\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix}$ $\qquad I_3|\bar{d}\rangle = \frac{1}{2}|\bar{d}\rangle$

fáziskonvenció

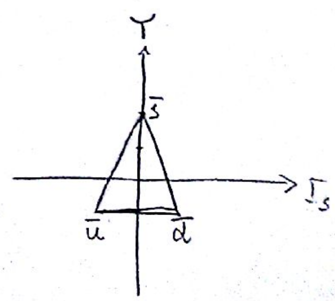
$C \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2 = i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$



$Y_{u,d} = \frac{1}{3}+0=\frac{1}{3}$

$Y_s = \frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$

ref$(\bar{u},\bar{d},\bar{s})$



Hadronok kvarkmodellje

I. A hadron hullámfv-k összetétele

II. SU(3) formalizmus és a Gell-Mann - Okubo tömegformula

III. Kvarkmodell paradoxonai és a színkvantumszám (cbur)

Gell-Mann és Zweig

u, d, s kvark 1 kvark 3 lehetséges állapota

összes többi kvarkra $I_3=0$ $j=0$.

$q \to \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$ $\quad q' \to \underset{3\times 3}{U} q$ fizikailag nem számít átmeneti amplitúdók megegyeznek.

Az SU(3) sérülést le tudjuk írni csoportelméletileg

$m_u \neq m_d \neq m_s$ az SU(3) szimmetria csak közelítő $\Downarrow$ $m_u = m_d \neq m_s$

az erős kh-ra. De a sérülést ezzel le tudjuk írni: SU(3)-ban van egy kitüntetett irány.

I. A hadron hullámfüggvények összetétele

Barion hullámfv-ek

(qqq)

$\psi = \alpha(\text{tér})\,\beta(\text{spin})\,\gamma(\text{flavour})$

felcserélési szimmetriák: $\downarrow$

(Pauli-elv miatt, mivel a barionok spinje félegész $\Rightarrow$ fermionok felcserélésre előjelet vált a hullámfv. (antiszim))

$uuu \to$ felcserélésre teljesen szimmetrikus

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = I_3 = \frac{3}{2}$ $\qquad I_+ d = u$

$Q = 3\cdot\frac{2}{3} = 2$ $\qquad I_- u = d$

$\Downarrow$

Δ^{++} van-e ilyen? állítás: van.

[illegible]

Δ rezonancia [illegible] — 2012. 03. 21.

Δ^{++} $\left(\frac{3}{2}\right)^{+}$ ← paritás   tömeg $m_{\Delta} \approx 1232$ MeV

(uuu) spin $I_3 = \frac{3}{2}$

$\downarrow I_-$

(uud) aszimmetrikus [illegible]

$I_3 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \rightarrow Q = 2 - 1 = 1$

Δ^{+}

2012. 10. 02.

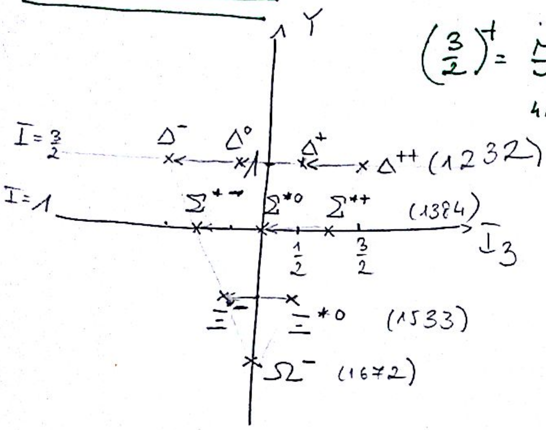
A hadronok hullámfüggvényének kvarktartalma

$\psi = \alpha(\text{tér})\,\beta(\text{spin})\,\gamma(\text{flavour})$

teljesen szimmetrikus

Δ^{++} uuu $I_3 = \frac{3}{2}$ $Q = 2$ $Y = B + S$

Barion dekuplett $I = \frac{3}{2}$ $I_- u = d$



$\left(\frac{3}{2}\right)^+ = J^P$
⇓
4 állapot

Δ^+ uuu $\xrightarrow{I_-}$ uud
⇓
szimmetrizáljuk

$\frac{1}{\sqrt{3}}(uud + udu + duu)$

$I_- u = d$ $I_3 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

$Q = 2 - 1 = 1$

Δ^0 uud $\xrightarrow{I_-}$ udd

$\frac{1}{\sqrt{3}}(udd + dud + ddu)$

$I_3 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

$Q = 1 - 1 = 0$

Δ^- udd $\xrightarrow{I_-}$ ddd

$I_3 = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$

$Q = 0 - 1 = -1$

teljesen szimmetrikus

Σ^{*+} uuu → uus (szim)

$\frac{1}{\sqrt{3}}(uus + usu + suu)$

$I_3 = 1 \quad (2 \cdot \frac{1}{2})$

$Q = 1 \quad (2 \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{3})$

$Y = 1 - 1 = 0$

Σ^{*0} uus $\xrightarrow{I_-}$ uds

$\frac{1}{\sqrt{6}}(uds + dus + sud + usd + sdu + dsu)$

$I_3 = 1 - 1 = 0$

$Q = 1 - 1 = 0$

Σ^{*-} uds $\xrightarrow{I_-}$ dds

$\frac{1}{\sqrt{3}}(dds + dsd + sdd)$

$I_3 = 0 - 1 = -1$

$Q = 0 - 1 = -1$

Ξ^{*0} uus → uss

$\frac{1}{\sqrt{3}}(uss + sus + ssu)$

$I_3 = \frac{1}{2}$ $Q = 0$
$\left(\frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{1}{3}\right)$

$Y = 1 - 2 = -1$

Ξ^{*-} uss $\xrightarrow{I_-}$ dss

$\frac{1}{\sqrt{3}}(dss + sds + ssd)$

$I_3 = -\frac{1}{2}$ $Q = -1$

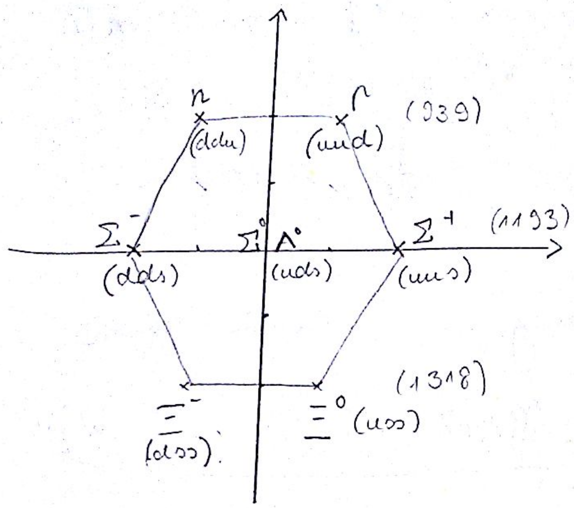
uss → sss

$I_3 = 0$ $Q = -1$

$Y = 1 - 3 = -2$

Összesen 10 állapot, melyek teljesen szimmetrikusak flavourben.

Barion oktett



spin + flavour egyidejű felcserélésére szimmetrikus

n $I = \frac{1}{2}$ $J = \frac{1}{2}$

$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle\right)}_{\to J=0} \otimes$

$\otimes \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u\rangle|d\rangle - |d\rangle|u\rangle\right)}_{\to I=0}$

$\underbrace{\text{spin: antiszim, flavour: antiszim}}_{\otimes \text{ szimmetrikus}}$

$\frac{1}{2}\left(u\uparrow d\downarrow - u\downarrow d\uparrow - d\uparrow u\downarrow + d\downarrow u\uparrow\right)$ ez még nem neutron

n I_3-ja $-\frac{1}{2}$ $S=0 \Rightarrow$ ritka nem

↳ d kvarkot kell még beletenni

ha pl $\uparrow$ spinű neutron $\Rightarrow$ $d\uparrow$-val kell tenzorszorozni, és ciklikus permutációval szimmetrikussá tenni

Az így kapott hullámfv: (ddu) = n

$\Sigma^0 \to I = 1$ $\Lambda^0 \to I = 0$ ez a különbség

8 db ilyen spinben és flavourben egyszerre szimmetrikus állapot van.

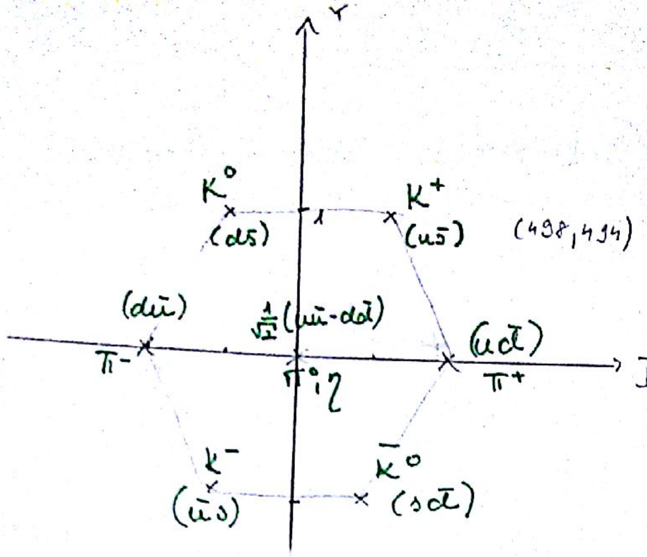
Pszeudoskalár mezonok

kvark + antikvark $\Rightarrow$ 2 különböző „dolog" $\Rightarrow$ nem kell felcseréléssel, szimmetrizálással foglalkozni

0^- $(q, \bar{q})$ 0 spin: $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle\right)$

$C\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix}$ töltéskonjugáció

$$C\begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar d\\ -\bar u\end{pmatrix}$$



K^+ $\quad Y = 1 = B + S$, $\quad B = 0$, $S = 1$ $\Rightarrow \bar s$

$I_-\downarrow$ $\quad I_3 = \frac{1}{2} \Rightarrow u$

K^0 $\quad I_3 = -\frac{1}{2} \Rightarrow (d\bar s)$

$$\eta = \frac{1}{\sqrt6}(u\bar u + d\bar d - 2s\bar s)$$

Kvarkmodell jóslata:

Semmi nem akadályozza meg, hogy 1 spin legyen

$$\underbrace{|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle \qquad \frac{1}{\sqrt2}\left(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle\right) \qquad |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle}$$

Vektormezon $\quad J^P = 1^-$

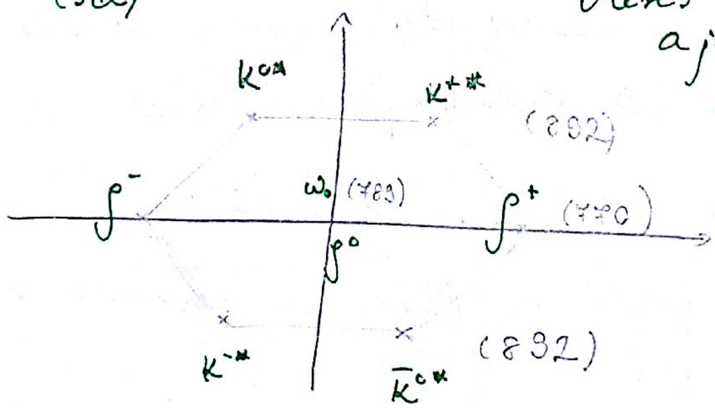
*: gerjesztett

$(d\bar s)$ $\quad (u\bar s)$ $\quad (892)$ $\qquad$ íz ugyanaz

$(d\bar u)$ $\quad \frac{1}{\sqrt2}(u\bar u - d\bar d)$ $\quad (u\bar d)$ $\qquad \cancel{\eta = \frac{1}{\sqrt6}(u\bar u + d\bar d - 2s\bar s)}$

$(\bar u s)$ $\quad (s\bar d)$ $\qquad$ mérés igazolta a jóslatot

ω_0 más



II. Az SU(3) szimmetria a kvark modellben, Gell-Mann – Okubo tömegformula

Gell-Mann – Zweig:

$$q_i = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \qquad |q_i\rangle \to |q_i'\rangle = U_{ij}|q_i\rangle$$

$$\langle q_i'|q_j'\rangle = \langle q_i|q_j\rangle$$

U unitér, $\det U = 1$

U: $N \times N$ unitér mátrix

komplex: $2 \times N^2$ valós paraméter

unitér:

$U^+U = 1$ $\qquad U_{cb}^* U_{ac} = \delta_{ab}$ off diagonális egyenletek.

a'=b' => valós egyenlet: $\qquad 2 \cdot \frac{1}{2}(N-1)N$

N db $\qquad$ komplex $\qquad$ a'≠b'-n külön

$$2N^2 - N(N-1) - N = N^2$$

$\det U = 1$ => +1 egyenlet => $SU(N)$ mátrixot N^2-1 paraméter jellemzi.

$SU(3)$-at 8 db valós paraméter jellemzi.

$SU(N)$ mátrixok csoportot (folytonos) alkotnak a sima mátrixszorzás (kompozíció) műveletével

U: 3×3 unitér egységdeterminánsú mátrixok csoportja

$U = \exp\left(i\omega^a \frac{\lambda^a}{2}\right)$ $a = 1, \dots, 8$

ω^a valós

λ^a 3×3 hermitikus nyomtalan mátrix

bázis: Gell-Mann-mátrixok.

Csoport generátorai

LAP

$\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$ kvarkokat u transzformálja, átmeneti amplitúdók nem változnak

$\frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2}{2}, \frac{\lambda_3}{2}$ zárt algebrát alkotnak

123 → 1 rank

12, 13, 23 nincs a többiben

ezek kommutátora 123-on belül marad

SU(2) részalgebrát alkot. (I_3 volt ilyen)

$\lambda_1 \to \sigma_1 \quad \lambda_2 \to \sigma_2 \quad \lambda_3 \to \sigma_3$

$$\frac{\lambda_3}{2} q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} q \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u \\ -\frac{1}{2}d \\ 0 \end{pmatrix}$$

azok az értékek, amiket I_3 felvesz u, d, s kvark esetén

$\frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2}{2}, \frac{\lambda_3}{2} \equiv$ izospin (ezzel azonosítjuk, ellenőrizni kell)

λ_8 diagonális mátrix

$$[\lambda_8, SU(2)_I] = 0$$

λ_8 az SU(2) generátorokkal kommutál

$$\left.\begin{aligned} Y_u &= B + S = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3} \\ Y_d &= \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3} \\ Y_s &= \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} \end{aligned}\right\} \quad Y = \frac{\lambda_8}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\lambda_8}{2}$$

$$I_3 = \frac{\lambda_3}{2} \qquad Y = \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_8$$

$[I_3, Y]$ kommutál SU(3)-on belül.

Maximális egyszerre kommutáló generátorok száma: 2

29.2.6. *The group SU(3)*

The fundamental representation of the group SU(3) is given by the matrices

$$U = \exp(\tfrac{1}{2}\lambda_i\omega_i), \qquad i = 1,2,\dots,8,$$

where λ_i are the Gell-Mann matrices, and ω_i are eight real parameters. Usually the matrices λ_i are chosen in the form:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

The matrices λ satisfy the following relations:

$\frac{1}{2}\{[\lambda_i,\lambda_j] + \{\lambda_i,\lambda_j\}\} = 2i f_{ijk}\lambda_k + \frac{2}{3}\delta_{ij}1\, d_{ijk}\lambda_k$

$$\mathrm{Tr}\,\lambda_i\lambda_j = 2\delta_{ij},$$

→ SU(3) struktúra állandói

$$[\lambda_i,\lambda_j] = 2if_{ijk}\lambda_k,$$

$$[\lambda_i,\lambda_j]_+ = \tfrac{4}{3}\delta_{ij}I + 2d_{ijk}\lambda_k, \qquad \text{where } i,j,k = 1,2,\dots,8.$$

antikommutátor

Here f_{ijk} are structure constants of the group SU(3), d_{ijk} are symmetrical and f_{ijk} are antisymmetrical with respect to permutations of any pair of indices. Direct calculations easily give 54 non-zero constants f_{ijk} and 58 non-zero constants d_{ijk}:

antiszimmetrikus   teljesen szim

	ijk	f_{ijk}	ijk	d_{ijk}	ijk	d_{ijk}
	123	1	118	$1/\sqrt{3}$	355	$\frac{1}{2}$
417 $-\frac{1}{2}$	147	$\frac{1}{2}$	146	$\frac{1}{2}$	366	$-\frac{1}{2}$
471 $\frac{1}{2}$	156	$-\frac{1}{2}$	157	$\frac{1}{2}$	377	$-\frac{1}{2}$
	246	$\frac{1}{2}$	228	$1/\sqrt{3}$	448	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
	257	$\frac{1}{2}$	247	$-\frac{1}{2}$	558	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
	345	$\frac{1}{2}$	256	$\frac{1}{2}$	668	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
	367	$-\frac{1}{2}$	338	$1/\sqrt{3}$	778	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
	458	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	344	$\frac{1}{2}$	888	$-1/\sqrt{3}$
	678	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-			

$d_{\alpha\beta 8}F_\alpha F_\beta = -\frac{1}{2\sqrt{3}}F_\alpha F_\alpha + \frac{3}{2\sqrt{3}}(F_1^2+F_2^2+F_3^2) - \frac{1}{2\sqrt{3}}F_8^2$

($54 = 9 \times 6$ where 6 is the number of permutations of indices $i \neq j \neq k$, and $58 = 4 \times 6 + 11 \times 3 + 1$). Note that $d_{ijk} = 0$ if the number of indices 2, 5, 7 is odd. On the other hand, $f_{ijk} = 0$ if the number of these indices is even. These indices, 2, 5, 7, are special because the corresponding matrices λ are antisymmetric.

29.2.7. *Fierz identities for λ matrices*

Using the completeness of the nine matrices δ^α_β, λ^α_β, we can write:

$$\delta^\alpha_\beta\delta^\gamma_\delta = A\delta^\alpha_\delta\delta^\gamma_\beta + B\lambda^\alpha_\delta\lambda^\gamma_\beta,$$

$$\lambda^\alpha_\beta\lambda^\gamma_\delta = C\delta^\alpha_\delta\delta^\gamma_\beta + D\lambda^\alpha_\delta\lambda^\gamma_\beta,$$

where A, B, C and D are coefficients to be determined and where

$$\lambda\cdot\lambda = \lambda_i\lambda_i, \qquad i = 1,2,\dots,8.$$

Multiplication of these two equalities by $\delta^\delta_\alpha\delta^\beta_\gamma$ yields

$$3 = 9A, \qquad 16 = 9C,$$

and multiplication by $\delta^\beta_\alpha\delta^\delta_\gamma$ yields

$$9 = 3A + 16B, \qquad 0 = 3C + 16,$$

whence

$$\delta^\alpha_\beta\delta^\gamma_\delta = \tfrac{1}{3}\delta^\alpha_\delta\delta^\gamma_\beta + \tfrac{1}{2}\lambda^\alpha_\delta\cdot\lambda^\gamma_\beta,$$

$$\lambda^\alpha_\beta\cdot\lambda^\gamma_\delta = \tfrac{16}{9}\delta^\alpha_\delta\delta^\gamma_\beta - \tfrac{1}{3}\lambda^\alpha_\delta\cdot\lambda^\gamma_\beta.$$

Now it is not difficult to show that

$$8\delta^\alpha_\beta\delta^\gamma_\delta + 3\lambda^\alpha_\beta\cdot\lambda^\gamma_\delta = +(8\delta^\alpha_\delta\delta^\gamma_\beta + 3\lambda^\alpha_\delta\cdot\lambda^\gamma_\beta),$$

$$4\delta^\alpha_\beta\delta^\gamma_\delta - 3\lambda^\alpha_\beta\cdot\lambda^\gamma_\delta = -(4\delta^\alpha_\delta\delta^\gamma_\beta - 3\lambda^\alpha_\delta\cdot\lambda^\gamma_\beta).$$

Applied to the product of two triplet spinors, the first of these expressions selects the state 6, and the second one selects the state $\bar{3}$ (recall that $3 \times 3 = 6 + \bar{3}$).

29.2.8. *SU(3) multiplets*

A contravariant three-component spinor t^α is transformed by the matrices $U = \exp(\frac{1}{2}i\omega_i\lambda_i)$; it is denoted by 3. A covariant spinor t_α is transformed by complex conjugate matrices $U^* = \exp(-\frac{1}{2}i\omega_i\lambda_i^*)$; it will be denoted by $\bar{3}$. Representations of higher dimensions can be constructed out of 3 and $\bar{3}$ by making use of the invariant tensors δ^{α}_{β}, $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$, and $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$:

$$3\times\bar{3}=8+1: \quad \text{singlet,} \quad 1\sim t^{\alpha}t_{\beta}\delta^{\beta}_{\alpha};$$
$$\text{octet,} \quad 8\sim T^{\alpha}_{\beta}=t^{\alpha}t_{\beta}-\tfrac{1}{3}\delta^{\alpha}_{\beta}(t^{\gamma}t_{\gamma}).$$

$$3\times 3=6+\bar{3}: \quad \text{antitriplet,} \quad \bar{3}\sim T_{\gamma}=t^{\alpha}t^{\beta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma};$$
$$\text{sextet,} \quad 6\sim T^{\alpha\beta}=t^{\alpha}t^{\beta}+t^{\beta}t^{\alpha}.$$

$$3\times 6=8+10: \quad 8\sim T^{\gamma}_{\delta}=t^{\alpha}t^{\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\delta};$$
$$\text{decuplet,} \quad 10\sim T^{\alpha\beta\gamma}.$$

$$\bar{3}\times 6=3+15: \quad 3\sim T^{\gamma}=t_{\alpha}T^{\alpha\gamma};$$
$$15\sim T^{\beta\gamma}_{\alpha}.$$

$$8\times 8=1+8+8+10+\overline{10}+27: \quad \overline{10}\sim T_{\alpha\beta\gamma}; \quad 27\sim T^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}.$$

An arbitrary tensor can be written in the form

$$T^{q}_{p}=T^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_q}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p},$$

where symmetrization is carried out separately over all upper and lower indices, and the trace for any pair $\alpha_i\beta_k$ is zero. The total number of components of the multiplet T^{q}_{p} is found easily:

$$N=\tfrac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2).$$

Examples of physical SU(3) multiplets:

$$q^{\alpha}=\begin{pmatrix}u\\ d\\ s\end{pmatrix} \quad \text{quark triplet,}$$

$$\bar{q}_{\alpha}=(\bar{u},\bar{d},\bar{s}) \quad \text{antiquark (anti)triplet,}$$

$$P^{\alpha}_{\beta}=\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{1}{6}}\,\eta^0+\sqrt{\frac{1}{2}}\,\pi^0 & \pi^+ & K^+\\ \pi^- & \sqrt{\frac{1}{6}}\,\eta^0-\sqrt{\frac{1}{2}}\,\pi^0 & K^0\\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2\eta^0}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} \quad \text{octet of pseudo-scalar mesons,}$$

$$B^{\alpha}_{\beta}=\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{1}{6}}\,\Lambda^0+\sqrt{\frac{1}{2}}\,\Sigma^0 & \Sigma^+ & p\\ \Sigma^- & \sqrt{\frac{1}{6}}\,\Lambda^0-\sqrt{\frac{1}{2}}\,\Sigma^0 & n\\ \Xi^- & \Xi^0 & -\sqrt{\frac{1}{6}}\,2\Lambda^0\end{pmatrix} \quad \text{octet of baryons.}$$

When the isotopic subgroup SU(2) of group SU(3) is singled out, it is convenient to plot the particles of the multiplet on the so-called T_3Y diagrams. Examples are given in figs. 29.1, 2, 3.

By combining d and s (or s and u) quarks, instead of u and d, into an SU(2) doublet we single out the U (or V) spin subgroup* of SU(3) (see fig. 29.4). Figs. 29.1–4 demonstrate that particles within one U-multiplet have identical charges. The composition of U-multiplets is obvious in these figures, with the exception of the central particles on the T_3Y diagram for the octet. The point is that the Σ^0 and Λ^0 states possess a definite T-spin but no definite U-spin. It is their linear superpositions

$$\Sigma^0_U=-\tfrac{1}{2}\Sigma^0+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,\Lambda^0,\ \Lambda^0_U=-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,\Sigma^0-\tfrac{1}{2}\Lambda^0,$$

that possess definite U-spin: unity for the first and zero for the second.

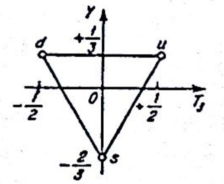


Fig. 29.1

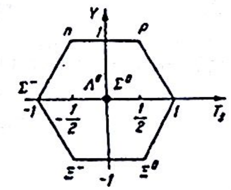


Fig. 29.2

*Sometimes the minus sign is assigned to some of the particles of the SU(3) multiplet in order to make positive the matrix elements of the ladder operators of a given SU(2) subgroup (see J. J. de Swart, *Rev. Mod. Phys.* 35 (1963) 916).

2012. 10. 09.
2012. 10. 02.

Részecskefizika

I_3 Y sajátértékeivel jellemezhetjük az állapotokat 1 ábrázoláson belül → SU(3)-on belül sajátállapotok a részecskék.
SU(2) (L_3, I_3, J_3 különbözteti meg)

$q_i \to \quad t^a \qquad [U]^a{}_b$

Definiáló transzformáció

$t^a \to t'^a = [U]^a{}_b t^b$

~~t^{*a}~~

$t^*_a \to t'^*_a = [U^*]^b{}_a \, t^*_b$

3 → kvarkok
↕ különböző ábrázolások
$\bar{3}$ → antikvarkok

Nem vihetők egymásba hasonlósági transzformációval

kvark ⊗ antikvark ⇒ részecskék

Mezon

$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$

kvark-antikvark ábrázolás: szinglett + $\underbrace{8 \text{ dimenziós ábrázolás}}$

oktett ⇒ pszeudoskalár mezon

Barion

$3 \otimes 3 \otimes 3 = 3 \otimes (6 \oplus \bar{3}) = \underbrace{1 \oplus 8}_{3 \otimes \bar{3}} \oplus \underbrace{8 \oplus 10}_{3 \otimes 6}$

tenzorszorzás asszociatív

N^* rezonanciák

barion oktett

dekuplet

Hadronok elemiek: SU(3) irreducibilis ábrázolásai
Ezen belül nincs invariáns altér

8 dimenziós ábrázolás

Oktett

SU(3) ábrázolása
A csoportelemekhez hozzárendelünk egy $N \times N$-es mátrixot: $D(g_1 g_2) = D(g_1)\, D(g_2)$ $\quad g \in SU(3)$
infinitezimálisra gondolunk g alatt

$\frac{\lambda_a}{2} \overset{lépe}{\Rightarrow} F_a$ $N \times N$-es hermitikus mátrixok $[F_a, F_b] = i f_{abc} F_c$

λ_a-kal arányos kommutáló reláció

$$[F_a, F_b] = i \underbrace{f_{abc}}_{SU(3) \text{ struktúra állandói}} F_c$$

Oktet

SU(3)-t a Lie-algebráján ábrázoljuk

M 3×3 hermitikus nyomtalan mátrix

$\underset{\text{nyomtalan}}{M} = c^a \frac{\lambda_a}{2}$ $\quad \langle M'|M\rangle = 2\,\mathrm{Tr}(M'M)$

λ_a - 8 bázist alkotnak

$U \in SU(3)$

$M \to U M U^+$ adjungált ábrázolás, hatás

$\Downarrow$

skalárszorzatra invariáns

$$D(g_1 g_2) = D(g_1) D(g_2)$$

$F_a \Rightarrow 8\times 8$ mátrix (8féle)

infinitezimális

$$U_{inf} = \mathbb{1} + i\varepsilon^a \frac{\lambda_a}{2}$$ hermitikus

$$U^+_{inf} = \mathbb{1} - i\varepsilon^a \frac{\lambda_a}{2}$$

$$M \to \left(\mathbb{1} + i\varepsilon^a \frac{\lambda_a}{2}\right) M \left(\mathbb{1} - i\varepsilon^a \frac{\lambda_a}{2}\right) =$$

$$= M + i\varepsilon^a \left[\frac{\lambda_a}{2}, M\right] + \dots$$

$\varepsilon\delta^a_{ab} \Rightarrow \varepsilon_b \frac{\lambda_b}{2}$ nincs összegzés

$F_b \Rightarrow M \to i\left[\frac{\lambda_b}{2}, M\right]$

$\mathrm{Tr}(\lambda_i\lambda_j) = 2\delta_{ij}$ $\quad [\lambda_i, \lambda_j] = 2i f_{ijk}\lambda_k$ $\quad \{\lambda_i, \lambda_j\} = \frac{1}{3}\delta_{ij} + 2 d_{ijk}\lambda_k$

$$\sum_i c^i \frac{\lambda_i}{2} \sum_j c^j \frac{\lambda_j}{2} = \sum_{ijk} \frac{c^i c^j}{4}\left(\frac{2}{3}\delta_{ij} + \frac{1}{2} 2 d_{ijk}\lambda_k\right) = \sum_i \frac{c_i^2}{6} + \frac{1}{2}\sum_{ijk} d_{ijk}\lambda_k c^i c^j$$

$$2\,\mathrm{Tr} \sum_{ij} \frac{c_i c_j}{4}\lambda_i\lambda_j = \sum_{ij} \frac{c_i c_j}{2} 2\delta_{ij} = \sum_i |c_i|^2 = 1$$

SU(3) szimmetria

$q = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$ 3 ábrázolás $\frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2}{2}, \frac{\lambda_3}{2}$ $SU(2) \leftrightarrow$ izospin

$\frac{\lambda_3}{2}, \lambda_8$ diagonálisak

$Y = \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_8 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\lambda_8}{2}$ hipertöltés

$F_3 \longleftrightarrow I_3 \quad Y \longleftrightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} F_8$

$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$ önadjungált hermitikus spúrtalan 3x3 mátrixok

$M = c^a \frac{\lambda_a}{2}$ ← kifejtés λ_a-k bázisán

$M \to u M u^+$

Infinitezimális transzformáció

$u_{inf} = 1 + i \varepsilon^a \frac{\lambda_a}{2}$

$F_a : M \to \left[\frac{\lambda^a}{2}, M \right]$

$(F_a)_{bc}$ felírása (mátrixelem)

Speciális M: $\frac{\lambda_c}{2}$

speciális kifejtés, egy báziselemmel kifejthető

$\frac{\lambda_c}{2} \to \left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_c}{2} \right] = i f_{acb} \frac{\lambda_b}{2}$

$F_a \left| \frac{\lambda_c}{2} \right\rangle = \underbrace{\left| \frac{\lambda_b}{2} \right\rangle \left\langle \frac{\lambda_b}{2} \right|}_{\mathbb{1}} F_a \left| \frac{\lambda_c}{2} \right\rangle = (F_a)_{b,c} \left| \frac{\lambda_b}{2} \right\rangle$

$F_a \left| \frac{\lambda_c}{2} \right\rangle = (F_a)_{bc} \left| \frac{\lambda_b}{2} \right\rangle = i f_{acb} \frac{\lambda_b}{2}$

$F_a \left| \frac{\lambda_c}{2} \right\rangle = \left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_c}{2} \right] = i f_{acb} \frac{\lambda_b}{2} = -i f_{cab} \frac{\lambda_b}{2}$

$$\boxed{(F_a)_{bc} = \frac{1}{i} f_{abc}}$$

A struktúraállandókból csinálhatók meg a generátorok önadjungált ábrázolásai. Ez általános, nem csak 3x3-asra erős kh. SU(3) szimmetrikus

ha $m_u = m_d = m_s$

hadronok SU(3) irrepjeibe leszedhatók (8, 10 dim)

Gell-Mann – Okubo reláció

- multipleten belüli tömegfelhasadás csoportelméleti magyarázata:

pl.: $\left(\frac{1}{2}\right)^+$ barionoktet

SU(3) egzakt szimmetria esetén minden tömeg ugyanakkora lenne.

1 multipleten belül miért nem ugyanakkorák (néhány %-on belül) a tömegek?

Tfh.:
- $m_u = m_d < m_s$
- ez az egyetlen forrása az SU(3) sértésnek

$$H_{erős} = \underbrace{H_0}_{SU(3)\ \text{invariáns}} + \underbrace{\tilde{H}}_{\text{ez még nem}}$$

Hogyan transzformálódik $\tilde{H}$ SU(3) alatt?

nyugvó kvarkok energiájuk = tömegük

$$\langle q_i | H_{erős} | q_j \rangle = \langle q_i | H_{kvark} | q_j \rangle =$$

$$H_{kvark} = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_u & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2m_u+m_s}{3} & & \\ & \frac{2m_u+m_s}{3} & \\ & & \frac{2m_u+m_s}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{m_u-m_s}{3} & & \\ & +\frac{m_u-m_s}{3} & \\ & & -2\frac{m_u-m_s}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \langle q_i | \Big(\underbrace{\frac{2m_u+m_s}{3} I_{3\times 3}}_{SU(3)\ \text{invariáns}} + \underbrace{\frac{m_u-m_s}{\sqrt{3}} \lambda_8}_{\text{nem } SU(3)\ \text{invariáns}} \Big) | q_j \rangle$$

nem SU(3) invariáns $\to$ λ_8-ként transzformálódik

$H_{erős} = H_0 + H_8$

$\hat{H}$ 8. ashént transzformálódik
(λ_8)

Mértékelő kölcsönhatás

feltevés: H_8 „kicsi" ⇒ lehet legalacsonyabbrendű perturbációszámítást alkalmazni (vagy jó, vagy nem)

$|H^{(0)}\rangle$ Hadron-multiplett (perturbálatlan H_0 saját-állapota)

$H_0|H^{(0)}\rangle = m_0|H^{(0)}\rangle$

közös tömeg (minden hadron tömege SU(3) szerint)

$m_H = \langle H^{(0)}|H_{erős}|H^{(0)}\rangle = m_0 + \langle H^{(0)}|H_8|H^{(0)}\rangle$

$H^{(0)}$ ábrázolásban F generátorok közt van olyan, ami:

H_8: 8-ként transzformálódik

F_8

$$\underbrace{d_{8ab}F_aF_b}_{\text{ez is 8-ként transzformálódik}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\overbrace{F_aF_a}^{\forall \text{ generátorral kommutál}} + \frac{\sqrt{3}}{2}(F_1^2+F_2^2+F_3^2) - \frac{1}{2\sqrt{3}}F_8^2$$

(struktúraáll.-k antiszim)

F_aF_a ∀ generátorral kommutál
Schur-lemma ⇒ egységmátrixszal arányos

kvadratikus a generátorokban (lehet ilyet csinálni <= csoportban)

$(F_1^2+F_2^2+F_3^2)$ izospin generátorok négyzetösszege: $I(I+1)$

$\frac{1}{2\sqrt{3}}F_8^2$ hipertöltéssel arányos

$$H_8 = I\hat{m}_0 + \underset{\substack{\uparrow \\ F_8\text{-ból}}}{\delta m_1 Y} + \underbrace{\delta m_2\Big(\overbrace{I(I+1)}^{F_1^2+F_2^2+F_3^2} - \overbrace{\frac{Y^2}{4}}^{\frac{1}{2\sqrt{3}}F_8^2}\Big)}_{d_{8ab}F_aF_b\text{-ből}} \qquad Y = \frac{2}{\sqrt{3}}F_8$$

$$\boxed{m_H = \hat{m}_0 + \delta m_1 Y + \delta m_2\left(I(I+1) - \frac{Y^2}{4}\right)}$$

Gell-Mann – Okubo tömegformula

$$m_H = \hat{m}_0 + \delta m_1 Y + \delta m_2 \left(I(I+1) - \frac{Y^2}{4}\right)$$

$\hat{m}_0$, δm_1, δm_2 ismeretlen => csoportelm. persze nem mondja meg

Példa

barion oktet $\left(\frac{1}{2}\right)^+$

$I(I+1) - \frac{Y^2}{4}$

(n, p) $Y = 1$ $I = \frac{1}{2}$

$(\Sigma^\pm, \Sigma^0)$ $Y = 0$ $I = 1$

Λ $Y = 0$ $I = 0$

(Ξ^-, Ξ^0) $Y = -1$ $I = \frac{1}{2}$

ezektől függnek (Y, I) mind különbözik

⇓

különböző tömeg

3 ismeretlen paraméter → 4 tömeg

$m_N = \tilde{m}_0 + \delta m_1 + \delta m_2\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)$ $m_\Lambda = \tilde{m}_0$

$+\ m_\Xi = \tilde{m}_0 - \delta m_1 + \delta m_2\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)$ $m_\Sigma = \tilde{m}_0 + \delta m_2 2 \Rightarrow \frac{1}{2} m_\Sigma = \frac{1}{2}\tilde{m}_0 + \delta m_2$

$m_N + m_\Xi = 2\tilde{m}_0 + \delta m_2$ tömegek közt reláció lesz

$= \frac{1}{2}(3m_\Lambda + m_\Sigma)$

$$\underbrace{\frac{1}{2}(m_N + m_\Xi)}_{1129\ \text{MeV}} = \underbrace{\frac{1}{4}(3m_\Lambda + m_\Sigma)}_{1135\ \text{MeV}} \Rightarrow \text{‰-re jó}$$

Gell-Mann – Okubo-ból

dekuplet

$\left(\frac{3}{2}\right)^+$

$I(I+1) - \frac{Y^2}{4}$ Y-nak lineáris fv-e

$\frac{3}{2}Y + 2$ $\delta\tilde{m}_1 = \delta m_1 + \frac{3}{2}\delta m_2$

$\tilde{m}_0 = \hat{m}_0 + 2\delta m_2$ $m_H = \hat{m}_0 + \delta\tilde{m}_1 Y$

A hadronok tömege lineárisan függ a ritkaságszámmal.

$m_{\Sigma^*} - m_\Delta \sim 152\ \text{MeV}$

$m_{\Xi^*} - m_{\Sigma^*} \sim 149\ \text{MeV}$

$m_{\Omega^-} - m_{\Xi^*} \sim 139\ \text{MeV}$

Ω^- tömegét innen jósolták meg

⇓

kísérletileg ezután találták meg

pszeudoskalár oktett (0^-)

Egzakt SU(3)-nál 0-8 a tömegek => ( )²-ekre teljesül

$$4 m_K^2 = m_\pi^2 + 3 m_\eta^2$$

$0{,}98 (GeV)^2$ $\quad$ $0{,}92 (GeV)^2$

III. Kvarkmodell paradoxonai és a szín (colour) kvantumszám

1.) ∄ szabad kvark

(laboratóriumi körülmények közt nem sikerült megfigyelni) $\quad$ (=> nincs tört töltés)

2.) (qqq) $(q\bar{q})_{van}$, miért nincs $\quad$ (qq), (qqqq)?

$\Big(\underbrace{\text{(qq), (qqqq)}}_{\text{itt se lehetne egész töltés}}\Big)$

3.) Δ^{++} bajban van a Pauli-elvvel.

$\left(\frac{3}{2}\right)^+$

- $\frac{3}{2}$ spin miatt spinben szimmetrikus
  mindegyik a spinje $\frac{1}{2}$
- flavourben is szimmetrikus
- térben is szimmetrikus
  ha nem => gerjesztett állapot,
  akkor viszont kéne egy milyen kvantumszámokkal rendelkező alacsonyabb tömegű => NINCS

Han - Nambu

szín v. colour

Minden kvarknak van további belső szabadsága és mindegyik kvark ezen belső szabadság szempontjából triplet ábr. =>

$u_\alpha = (u_1, u_2, u_3) \to 3$ $\qquad$ $\bar{u}^\beta = (\bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^3) \to \bar{3}$

$d_\alpha = (d_1, d_2, d_3) \to 3$ $\qquad$ $\bar{d}^\beta = (\bar{d}^1, \bar{d}^2, \bar{d}^3) \to \bar{3}$

$s_\alpha = (s_1, s_2, s_3 \to \underset{\uparrow}{3}$ $\qquad$ $\bar{s}^\beta = (\bar{s}^1, \bar{s}^2, \bar{s}^3) \to \bar{3}$

colour SU(3)

flavour és colour SU(3) ortogonálisak egymásra

↓ nincs közük egymáshoz.

SU(3) $\qquad$ $\underbrace{SU(3)_c}$

Ez a szimmetria nem sérül, egzakt

Csak szín-szinglet állapotok a megfigyelhetők.

⇓

Kvarkbezárás

① Magyarázata:

Szabad kvark egy színes állapota lenne
Nem szinglet

② Magyarázata

$q_\alpha \bar{q}^\beta$ $(q\bar{q})$ $\rightarrow 3\times\bar{3} = 8 + 1$ colour-ban $\Rightarrow$ itt is van szinglet!

$q_\alpha q_\beta$ (qq) $\rightarrow 3\times 3 = 6+\bar{3}$ } itt nincs szinglett!

(qqq) $\quad 3\times 3\times 3 =$ (lásd múltkor)
$= 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$
$\quad$ ↳ szinglett

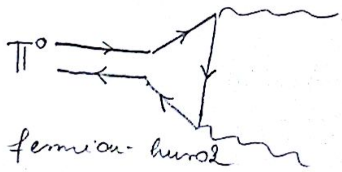
③ Magyarázata

Δ^{++} (uuu) $\quad u_\alpha u_\beta u_\gamma \underbrace{\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}}$ szinglet

Colour-ban antiszimmetrizálva van.

Miért N=3 szín van?

- $N \geq 3$ $\quad (uuu)$ antiszimmetrizálásához
- $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$



fermion-hurok

ki lehet számolni egzaktul

perturbáció magasabb rendjei nem adnak járulékot

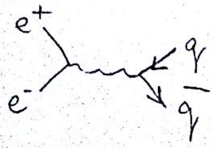
kvarkokra összegzés

Megfigyelt valószínűség $\Leftrightarrow N=3$

- $e^+e^- \rightarrow$ hadron

$$R(s) = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadron})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = N\sum_q Q_q^2$$

s: tömegkp-i energia



kvarkokra összegzés

Q_q $\underbrace{\text{kinematikailag megengedett}}_{2m_q \leq \sqrt{s}}$ kvarkok töltése

$$\underbrace{\sqrt{s_1} << 2m_q << \sqrt{s_2}}_{R(s_1) \qquad\qquad R(s_2)}$$

különbség: $N Q_q^2 = \begin{cases} N\frac{4}{9} \xrightarrow{N=3} \frac{4}{3} \\ N\frac{1}{9} \xrightarrow{N=3} \frac{1}{3} \end{cases}$

Q_q $+\frac{2}{3}$ v. $-\frac{1}{3}$

pl. c kvarknál $\frac{4}{3}$-os ugrás látszik

megnézni Sugrész könyvben

CP invariancia és sérülése a $K_0 \bar{K}_0$ rendszerben

1957: gyenge kh-ban $\not{C}$, $\not{P}$ de CP megvan
sérül sérül

1964: Fitch Cronin

$K^0 \bar{K}^0$ 2π-s bomlásaiban CP sérül

CPT egzakt (elméleti okok + nagyon precíz kísérlet)

$m_p = m_{\bar{p}}$ legpontosabb Horváth Dezső RMKI

ha CP sérül T invariánsan sérül makroszkopikus skálán
töltés paritás időtükrözés

$K^0 \sim (s\bar{d})$ $\bar{K}^0 \sim (\bar{s}d)$
$S = 1$ $S = -1$

0 → 0
1 → −1
0 → 0
$\frac{1}{2}$ → $-\frac{1}{2}$

$C|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle$
$C|\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle$ egymás töltés-konjugáltjai és
térükrözésre $P|K^0\rangle = -|K^0\rangle$ pszeudoskalárok
$P|\bar{K}^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle$

töltéstükrözés $CP|K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle$
$CP|\bar{K}^0\rangle = -|K^0\rangle$

csak a ritkaság kvantumszámok nem egyezik meg, mely a gyenge kh-ban nem marad meg, CP megmarad

① K_S^0 és K_L^0 van egy rövid(s) és egy hosszú(l) élettartamú K^0

$K^0 \to \pi^+\pi^-$, $\pi^0\pi^0$ gyenge bomlások => CP megmarad

Milyen K_S^0 és K_L^0, milyen a domináns bomlás?

$$|K_1^0\rangle = \frac{|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle}{\sqrt{2}} \qquad |K_2^0\rangle = \frac{|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle}{\sqrt{2}}$$

$CP|K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle$
$CP|\bar{K}^0\rangle = -|K^0\rangle$

$CP|K_1^0\rangle = |K_1^0\rangle \qquad CP|K_2^0\rangle = -|K_2^0\rangle$

$CP(\pi^0\pi^0) = \left(CP(\pi^0)\right)^2 = 1$

$CP(\pi^+\pi^-) = C(\pi^+\pi^-)P(\pi^+\pi^-) = (-1)^\ell(-1)^\ell = 1$

relatív impulzus momentum: ℓ π^+ és π^- között

CP őrzéssel (gyenge kh-val) csak $|K_1^0\rangle$ tud 2π-re bomlani $\qquad P\pi^- = -\pi^-$

∃ 3π bomlás is $\qquad \underbrace{\pi^+\pi^-}_{\ell}\pi^0 \qquad \pi^0\pi^0\pi^0$

π^+ és π^- közt ℓ rel imp. mom
π^0 és π^- közt ℓ rel. imp. mom

relatív imp. mom. $\qquad CP(\pi^0\pi^0\pi^0) = -1$

relatív imp. mom. ℓ

0-t $\ell+\ell$-el tudjuk előállítani $\qquad$ ⇑

$\underbrace{CP(\pi^+\pi^-\pi^0) = (-1)^{\ell+1}}$ $\qquad$ $C\ \pi^0 = \pi^0$ $\qquad$ K_2^0 tud ide bomlani

ennek CP paritása ℓ-től függ

páros $\qquad$ páratlan

$-1 \qquad\qquad 1$

0 itt van

Ha $\ell > 0$ hullámfv. kicsi az origóban
amplitúdó kicsi az $\ell = 0$-hoz képest.

$K_2^0 \to \pi^0\pi^0\pi^0$, $\pi^+\pi^-\pi^0$ domináns

Konklúzió $\qquad K_1^0 \to 2\pi$ (P sértő) $\qquad K_2^0 \to 3\pi$ (P őrző) $\qquad$ CP őrzés

2012. 10. 09.

Részecskefizika

K^0 élettartama

$$\frac{\Gamma(K_1^0 \to 2\pi)}{\Gamma(K_1^0 \to 3\pi)} \sim 10^3$$

↳ fázistérfogat

rövid $\tau_S \sim 10^{-10}\,s$

hosszú $\tau_L \sim 5 \cdot 10^{-8}\,s$

kevés adat de nagy különbség

Részecskefizika 2012. 10. 16.

A CP invariancia és sérülése a $K^0\bar{K}^0$ rendszerben (1)

$K^0 \sim (\bar{s}d)$ $\bar{K}^0 \sim (s\bar{d})$ nem CP sajátállapot

$$|K_1^0\rangle = \frac{|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle}{\sqrt{2}} \leftarrow CP = 1$$

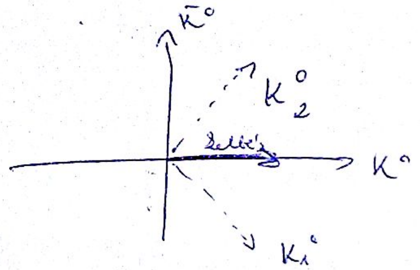
$$|K_2^0\rangle = \frac{|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle}{\sqrt{2}} \leftarrow CP = -1$$

domináns bomlás $K_1^0 \to 2\pi$ $\tau_1 \sim 10^{-10}$ s; $K_2^0 \to 3\pi$ $\tau_2 \sim 5\cdot 10^{-8}$ s; léteznek, van határozott élettartama és tömege

Oszcilláló ritkaság $K^0\bar{K}^0$ kvantummecha alapjait demonstráljuk

lineáris tér, gondolatkísérletek

$\begin{pmatrix} K^0 \\ \bar{K}^0 \end{pmatrix}$ 2 dim állapottér



Időben CP sajátállapotként fejlődnek (stac. állapot) energiával fejlődik a fázis

nyugalomban: tömeg

$$|K_i^0(t)\rangle = \exp\Big(-i\big(m_i - \underbrace{\tfrac{i}{2}\Gamma_i}_{\text{bomlás}}\big)t\Big)|K_i^0(0)\rangle$$

$i = 1,2$

m_1 K_1^0, m_2 K_2^0 tömege

$\Gamma_i \sim \frac{1}{\tau_i}$ (szélessége) bomlás

Keltés: $\pi^- p \to \Lambda K^0$ erős foly.

tisztán K^0-ként! ez hogy fejlődik időben

K^0-t írjuk fel K_1^0 és K_2^0 lineárkombinációjaként és ez fejlődik időben.

$$|K^0\rangle\Big|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K_1^0\rangle + |K_2^0\rangle\right)\Big|_{t=0}$$

$t>0$ tud $\bar{K}^0$-ként viselkedni

ennek valószínűsége:

$$\left|\langle_t \bar{K}^0 | \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|K_1^0\rangle + |K_2^0\rangle\right)(t)\rangle\right|^2 = \left(e^{-\Gamma_1 t} + e^{-\Gamma_2 t} + 2e^{-(\Gamma_1+\Gamma_2)t/2}\underbrace{\cos\left([m_1-m_2]t\right)}_{\text{itt van az oszcilláló ritkaság}}\right)$$

kifejezhető $K_1^0(t)$ és $K_2^0(0)$-val

$|K_1^0(t)\rangle = \exp(-i(m_1 - \frac{i}{2}\Gamma_1)t)\,|K_1^0(0)\rangle$

$K_2^0(t)\rangle = \exp(-i(m_2 - \frac{i}{2}$

Mérhető: különbséget lehet tenni K^0 és $\bar{K}^0$ között

$\bar{K}^0 p \to \Lambda \pi^+$ $K^0 p \not\to \Lambda \pi^+$ szórás

$\bar{K}^0 \longrightarrow e^- \nu_e \pi^+$ $K^0 \to e^+ \nu_e \pi^-$ bomlás

$\pi^+ \Rightarrow \bar{K}^0$-ra következtethetünk

Ezzel ellenőriztük a kvantummecha alapjait laborban

CP sértés

1964 Fitch–Cronin

$CP=-1$ $\to CP=+1$

K_2^0 is bomlik 2π-re

CP sértés gyenge

bomlási ráták aránya

$$\frac{\Gamma(K_2^0 \to \pi^+\pi^-)}{\underbrace{\Gamma(K_2^0)}_{\to \text{összes bomlás}}} = 2\cdot 10^{-3} \qquad \frac{\Gamma(K_2^0 \to \pi^0\pi^0)}{\Gamma(K_2^0)} = 10^{-3}$$

CP sértő folyamat a gyenge folyamatokhoz képest is gyenge

$K_2^0 \to \pi^\pm \ell^\mp \nu_e$ $\ell = \mu, e$

$\hookrightarrow$ vagy $\bar{\nu}_e$ megfelelően

$$m_n = \tilde{m}_0 + \delta m_1 + \delta m_2 \overbrace{\left(\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4}\right)}^{1/2}$$

$$m_{\Xi} = \tilde{m}_0 - \delta m_1 + \delta m_2 \underbrace{\left(\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4}\right)}_{\frac{1}{2}}$$

$$m_{\Lambda} = \tilde{m}_0$$

$$m_{\Sigma} = \tilde{m}_0 + \delta m_2 2$$

$$m_n + m_{\Xi} = 2\tilde{m}_0 + \delta m_2$$

$$\frac{3}{2} m_{\Lambda} + \frac{1}{2} m_{\Sigma} = 2\tilde{m}_0 + \delta m_2$$

$$|K_i^0(t)\rangle = e^{-i(m_i - \frac{i}{2}\Gamma_i)t}\, |K_i^0(0)\rangle \qquad |\bar{K}^0\rangle = \left(|K_2^0(0)\rangle - |K_1^0(0)\rangle\right)\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left|\langle \bar{K}^0 | \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|K_1^0\rangle + |K_2^0\rangle\right)(t)\rangle\right|^2 = \left| \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle K_2^0(0)| - \langle K_1^0(0)|\right) \Big| \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|K_1^0\rangle + |K_2^0\rangle\right)(t)\rangle\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left|\left(\langle K_2^0(0)| - \langle K_1^0(0)|\right)\left(e^{-i(m_1 - \frac{i}{2}\Gamma_1)t}|K_1^0(0)\rangle + e^{-i(m_2 - \frac{i}{2}\Gamma_2)t}|K_2^0(0)\rangle\right)\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left| - e^{-i(m_1 - \frac{i}{2}\Gamma_1)t} + e^{-i(m_2 - \frac{i}{2}\Gamma_2)t}\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-e^{-i(m_1 - \frac{i}{2}\Gamma_1)t} + e^{-i(m_2 - \frac{i}{2}\Gamma_2)t}\right)\left(-e^{i(m_1 + \frac{i}{2}\Gamma_1)t} + e^{i(m_2 + \frac{i}{2}\Gamma_2)t}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{-\Gamma_1 t} - e^{i(-m_1 + m_2)t}\, e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2)t} - e^{-i(-m_1 + m_2)t}\, e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2)t} + e^{-\Gamma_2 t}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{-\Gamma_1 t} + e^{-\Gamma_2 t} - e^{-(\Gamma_1 + \Gamma_2)\frac{t}{2}}\, 2\cos\left[(m_2 - m_1)t\right]\right)$$

ha CP invariancia fennáll:

$$\Gamma(K_2^0 \to \pi^+ e^- \bar{\nu}_e) = \Gamma(K_2^0 \to \pi^- e^+ \nu_e)$$

CP mennyire sérül?

$$\delta = \frac{\Gamma(K_2^0 \to \pi^- e^+ \nu_e) - \Gamma(K_2^0 \to \pi^+ e^- \bar{\nu}_e)}{\Gamma(K_2^0 \to \pi^- e^+ \nu_e) + \Gamma(K_2^0 \to \pi^+ e^- \bar{\nu}_e)}\Bigg|_{exp} = (0{,}33 \pm 0{,}01)\cdot 10^{-2}$$

kísérlet

Van olyan kh., mely az erős, gyenge kh mellett sérti a CP-t.

A hadronrezonanciák és a Breit-Wigner-formulák

A diszkrét elemei közül vannak erősen bomló részecskék. Élettartamuk $\tau \sim 10^{-23}$ s

$\Downarrow$

Ennyi idő alatt nem hagy akkora nyomot, hogy észre lehetne venni buborékkamrában v. emulzióban

Honnan tudjuk, h. vannak?

Szórási kísérletekben a hkm jellegzetes viselkedéséből. pion-nukleon szórás (legjellemzőbb folyamat)

$\pi^- + p \to \pi^- + p$

$\pi^+ + p \to \pi^+ + p + \pi^0$

$\pi^+ + p \to X$

$\pi^- + p \to \Lambda + K^0$

hkm itt a teljes hkm (legegyszerűbb mérni): $\sigma_{tot} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$

LAP

Mérési eredmények

hkm. tipikus értéke: $30-100\,mb = 3-10\cdot 10^{-26}\,cm^2$

erős kh. hatótávolsága: $1\,fm = 10^{-13}\,cm$ ilyen sugarú gömb felülete kb. ennyi

hkm nagyából a geometriai km.

nagy s-re unalmas

kisebb s-re (alacsonyenergiás) csúcsok: rezonanciák

értelmezés: instabil bomló részecskék

↳ tömeg: csúcs helye

↳ élettartam: csúcs szélessége

Álló p^+-nak ütköztetünk egy

$$\pi^+(p_2) + p(p_1) \to X \quad \left(\begin{pmatrix} m_p \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_\pi \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix}\right)^2 = (m_p + E_\pi)^2 - \vec{p}_2^{\,2} =$$

$$= m_p^2 + m_\pi^2 + 2m_p\sqrt{\vec{p}_2^{\,2} + m_\pi^2}$$

$\sqrt{s}$ p_1, p_2 kapcsolata:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = 2m_p\sqrt{\vec{p}_2^{\,2} + m_\pi^2} + m_p^2 + m_\pi^2$$

$$\max \sqrt{s} \simeq 1{,}23\ GeV \longleftrightarrow \Delta(1232)^{++}$$

1. csúcs

LAP 198 ábra:

Valószínűség (vég-kezdeti áll.)

$$S_{fi} = \delta_{fi} + (2\pi)^4 \delta^4\underbrace{(p_f - p_i)}_{\Downarrow\; p_x - p_1 - p_2} \underbrace{T_{fi}}_{\text{reakciómátrix}}$$

Reakciómátrix

$$T \sim \frac{1}{s - m_\Delta^2}$$

Bomlás: m_Δ komplex

$$m_\Delta \to m_\Delta - i\frac{\Gamma_\Delta}{2} \quad \Gamma_\Delta > 0$$

σ_{tot} hkm

$\pi^+ p \to X$

$\pi^- p \to X$

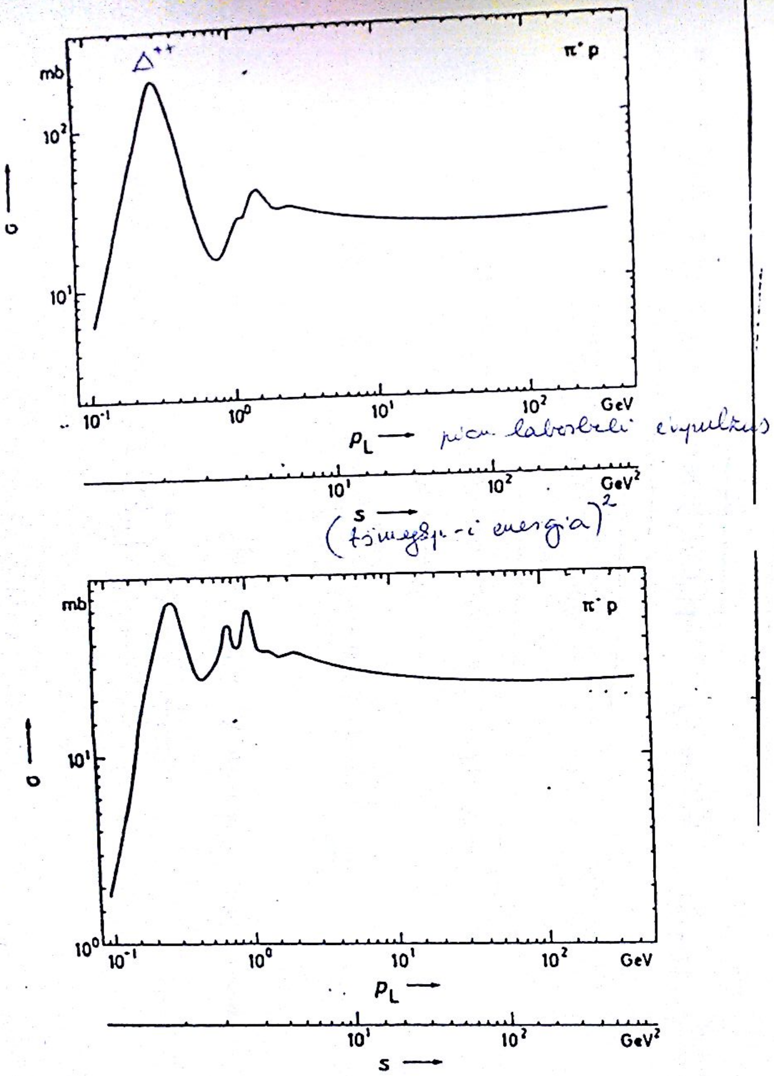


Figure 16.1 The total $\pi^+ p$ and $\pi^- p$ cross-sections (after Particle Data Group 1984).

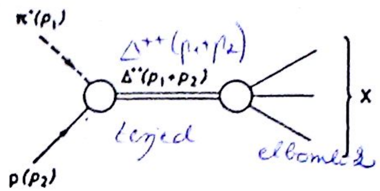


Figure 16.2 Diagram for the production and decay of the Δ^{++} resonance in $\pi^+ p$ scattering. The final state X consists to nearly 100% of $\pi^+ p$ again.

hipotetikus Feynmann diagram csúcs környékén:

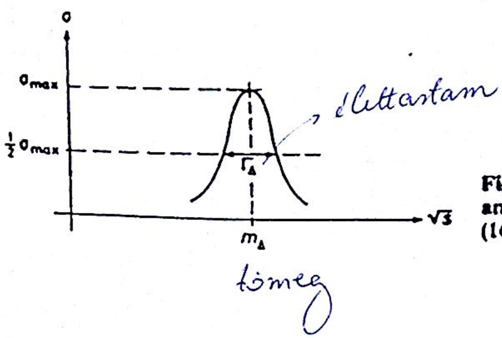


Figure 16.3 Resonance curve and width Γ_Δ corresponding to (16.7) (schematic).

Betöltési szám reprezentáció

A harmonikus oszcillátor és a keltő-eltüntető operátorok

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \quad \text{kvantumosan} \quad p \to \hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx} \quad x \to \hat{x} = x\cdot$$

$$\text{definiáljuk} \quad a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right), \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right), \quad N = a^\dagger a$$

egymás hermitikus konjugáltjai

betöltési szám operátor

$$\text{a kanonikus} \quad [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \text{ -ból} \quad \boxed{[a, a^\dagger] = 1,} \quad [N, a] = -a, \quad [N, a^\dagger] = a^\dagger$$

$$\text{inverz összefüggések} \quad \hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a + a^\dagger\right), \quad \hat{p} = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(a^\dagger - a\right),$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2}\hbar\omega(aa^\dagger + a^\dagger a) = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}) = \hbar\omega(N + \frac{1}{2})}$$

$$\text{alapállapot} \quad \boxed{|\Phi_0\rangle, \quad a|\Phi_0\rangle = 0,} \quad N|\Phi_0\rangle = 0$$

$$n - \text{szer gerjesztett} \quad \boxed{|\Phi_n\rangle \to |n\rangle = C_n(a^\dagger)^n|\Phi_0\rangle} \quad C_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \qquad |n+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}}a^\dagger|n\rangle$$

$$N|n\rangle = n|n\rangle, \qquad \boxed{H|n\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})|n\rangle}$$

feltétel:
$m_\Delta^2 \gg \Gamma_\Delta^2$: a csúcs azonosítható!
$\downarrow$
elhanyagolható

$m_\Delta \to m_\Delta - i\frac{\Gamma_\Delta}{2}$

$s - m_\Delta^2 \Rightarrow s - m_\Delta^2 + 2i\, m_\Delta \frac{\Gamma_\Delta}{2} + \underbrace{\frac{\Gamma_\Delta^2}{4}}_{\text{pici}}$

$$\boxed{\begin{aligned} T_{fi} &\sim \frac{1}{s - m_\Delta^2 + i m_\Delta \Gamma_\Delta} \\ \sigma &\sim |T_{fi}|^2 \sim \frac{1}{(s-m_\Delta^2)^2 + m_\Delta^2 \Gamma_\Delta^2} \end{aligned} \Bigg\} \text{ Breit-Wigner formulák}}$$

$\sqrt{s}$ legyen m_Δ körül

$$\sqrt{s} \sim m_\Delta + \delta \Rightarrow s = m_\Delta^2 + 2m_\Delta \delta + \delta^2 \simeq m_\Delta^2 + 2m_\Delta \delta =$$
$$= m_\Delta^2 + 2m_\Delta(\sqrt{s} - m_\Delta)$$
$$(s - m_\Delta^2)^2 = 4m_\Delta^2(\sqrt{s} - m_\Delta)^2$$

$$\sigma = \frac{1}{4m_\Delta^2\left[(\underset{\uparrow E_{TK}}{\sqrt{s}} - m_\Delta)^2 + \frac{1}{4}\Gamma_\Delta^2\right]} \Longleftarrow s - m_\Delta^2 = 2m_\Delta(\sqrt{s} - m_\Delta)$$

$$\Delta E \sim \Gamma_\Delta \Rightarrow \Delta E \Delta t \sim 1$$

$$\tau \sim \Delta t \sim \frac{1}{\Gamma_\Delta}$$

$m_\Delta = 1232\ \text{MeV}$
$\Gamma_\Delta \sim 115\ \text{MeV}$ $\Big\}$ ezek teljesül $m_\Delta^2 \gg \Gamma_\Delta^2$
$\tau_\Delta \sim 0{,}56 \cdot 10^{-23}\,s$, a várt nagyságrendbe esik.

Spin, paritás, ... meghatározásához σ_{tot} nem elég, $\frac{d\sigma}{d\Omega}$-t kell vizsgálni.

FENOMENOLÓGIA VÉGE

A KVANTUMTÉRELMÉLET (QFT) ALAPJAI

Cél: Elemi részecskék kh-inak leírása

↳ Igaz rájuk a kvantummecha (QM) (interferencia, ...)

↳ Relativisztikusan mozognak

Kh. alatt a részecskék száma változhat

QFT: Relativisztikus sokrészecske QM, ahol a részecskeszám nem állandó.

Részecskék keltése és eltüntetése

LAP (1)

$\forall \vec{p}$ tartozik egy $a(\vec{p})$ és $a^+(\vec{p})$

$\vec{p} \to E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

Fock-vákuum $|0\rangle \Rightarrow \forall \vec{p}\ a(\vec{p})|0\rangle = 0$

$a^+(\vec{p})|0\rangle \neq 0 \Rightarrow a^+(\vec{p})|0\rangle = |\vec{p}\rangle$

1 db. $\vec{p}$ impulzusú, $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ energiájú, m nyugalmi tömegű szabad részecske

$a^+(\vec{p}_1)a^+(\vec{p}_2)|0\rangle \Rightarrow$ 2 részecske hasonlóan

Összimpulzus: $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$

Összenergia: $E = E_1 + E_2$

Oszcillátornál: $\hat{x} \sim a + a^+$ $\quad \hat{p} \sim a^+ - a$

QFT megfelelője: mező (pl. eldin $\vec{E}$ és $\vec{B}$) $\to (\hat{\vec{E}}, \hat{\vec{B}})$ operátorok

$\hat{\vec{E}} \sim a - a^+ \quad \hat{\vec{B}} \sim a^+ + a$

Határozott részecskeszámú állapotok <u>nem</u> sajátállapotai a mezőknek.

Mező absztrakt jelölése: $\phi^a(\vec{x},t) \to \phi^a_{\vec{x}}(t)$

címke (melyik helyen melyik dinamikai változó)

operátor

$\hat{\phi}^a(x) \sim a + a^+$

x: $\vec{x}$ és t

Hamilton-operátorban: $(\phi^a)^3$ és $(\phi^a)^4 \to$ kölcsönhatás (itt most éppen ...)

pl.: $a^+aa \Rightarrow$ részecskeszám csökkentés

<u>Lagrange-Hamilton formalizmus kiterjesztése végtelen sok szabadsági fokra</u>

Alapvető dinamikai változó: mező

$\phi^a(x) \equiv \phi^a(\vec{x},t) \equiv \phi^a_{\vec{x}}(t) \longleftarrow q_i(t)$

$\vec{x}, a \quad \leftarrow \quad i$

dinamikai változót meghatározó címke

- Skalármezők $\quad a = 1, \dots, N$
- $\phi^a(x) \to A_\mu^a(x)$ négyesvektor-mező

pl. elektrodinamika

- Dirac spinor-mező $\quad \psi(x) \to \frac{1}{2}$ spinű részecskék

nüansznyi különbségek, de először nézzük a közös tul-kat.

<u>Jelölés:</u>

- $x^\mu = (t, \vec{x}) \equiv (x^0, \vec{x}) \qquad \hbar = c = 1$
- $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_t, \vec{\nabla}) \quad \to \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\partial_0, -\vec{\nabla})$

Indexek húzogatása

$$\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

Hatás és Lagrange-fv

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi^a, \partial_\mu \phi^a)$$

nincs magasabbrendű derivált => másodrendű

magasabbrendű lenne a téregyenlet => kauzalitássértés

$$S = \int d^4x \, \mathcal{L}(\phi^a, \partial_\mu \phi^a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx^0 d^3x \, \mathcal{L}(\phi^a, \partial_\mu \phi^a)$$

$\downarrow$

Lorentz-skalár -> extrémumok

$\int d^4x$ Lorentz-invariáns $\Big\}$ => $\mathcal{L}(\phi^a, \partial_\mu \phi^a)$ is Lorentz-skalár

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} dt \, L \qquad L = \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \, \mathcal{L}(\phi^a, \partial_\mu \phi^a)$$

Lokális Lag.-sűr. teljes térre vett integrálja a Lag.-fv.

$\mathcal{L}(\phi^a, \partial_\mu \phi^a)$ legyen Lorentz-skalár

Klasszikus mozg. e.:

S-nek Euler-Lagrange egyenletei

$$\partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \phi^a} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} \qquad a = 1, \dots$$

$\mathcal{L}$ Lorentz-skalár -> fenti egyenlet kovariáns (minden vonatkoztatási rendszerben ugyanaz)

Feltétel:

$\mathcal{L}(\partial_\mu \phi^a, \phi^a)$ invariáns $x^\mu \to x^\mu + a^\mu$ eltolásra

Nincs explicit koordinátafüggés $\mathcal{L}$-ben definiálható a kanonikus energia impulzus tenzor

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^a)} \partial^\nu \varphi^a - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}$$ a dl egyenlet

Einstein konvenció 2 szer előforduló indexekre összegzés

invariancia fennállásakor $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$

2012. 11. 06.

Térelméleti Lagrange-Hamilton formalizmus

dinamikai változók: mezők $\phi^a(\vec{x},t) \leftrightarrow \phi^a_{\vec{x}}(t)$

hatás: $S=\int dt\, L = \int dt\, d^3x\, \mathcal{L}(\phi^a, \partial^\mu \phi^a)$

mozgásegyenlet:

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \phi^a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} \quad a=1,\dots$$

$x^\mu \to x^\mu + a^\mu$ szimmetria

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^a} \partial^\nu \phi^a - g^{\mu\nu}\mathcal{L} \quad \text{megmarad}$$

Def!!

$$P^\nu = (E, \vec{P}) = \int d^3x\, T^{0\nu} \quad \text{megmarad}$$

össz. energia, össz. impulzus

Kanonikus impulzus

kinematikai impulzus: $(E,\vec{P})$
→ más fogalom

$q_i(t)$. $\quad L=L(q_i, \dot{q}_i) \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

Általánosítás végtelen sok szab. fokra:

$$\Pi^a(\vec{x},t) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}^a_x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi^a_x}$$

tér minden pontjában van egy dinamikai vált.

Hamilton-fv

értéke a megvalósuló mozgásban az energia

$$E = \int d^3x\, T^{00} \overset{\text{def.}}{=} \int d^3x \Big(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi^a}}_{\Pi^a} \partial^0 \phi^a - \mathcal{L}\Big) = \int d^3x \left(\Pi^a \partial^0 \phi^a - \mathcal{L}\right) = \int d^3x\, \mathcal{H}(\Pi^a, \phi^a)$$

$\mathcal{H}(\pi^a, \phi^a)$ Hamilton-sűrűség

$$H[\pi^a, \phi^a] = \int d^3x \underbrace{(\pi^a \partial^0 \phi^a - \mathcal{L})}_{\mathcal{H}(\pi^a, \phi^a)} \quad \text{Hamilton-fv.}$$

Analógia az eddig ismerettel

$$H = p_i \dot{q}_i - L$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Rightarrow \dot{q}_i = \dot{q}_i(p_i, q_i)$$

$$\pi^a(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi^a} \Rightarrow \partial_0 \phi^a \to \partial^0 \phi^a [\pi^a, \phi^b]$$

Több kölcsönható skalármező pl-ja

$$\mathcal{L} = \sum_{a=1}^{N} \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi^a)^2 + \frac{1}{2} m_a^2 \phi_a^2 \right) - V(\phi^a)$$

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi^a)} = \partial^\mu \partial_\mu \phi^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} = m_a^2 \phi_a - V'(\phi^a)$$

$$(\Box - m_a^2)\phi_a = -V'(\phi_a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi_a)} = \pi^a = \partial^0 \phi^a$$

$$H = \int d^3x \left\{ \sum_{a=1}^{N} \left[\frac{1}{2} (\pi^a(\vec{x}, t))^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi^a(\vec{x}, t))^2 - \frac{1}{2} m_a^2 (\phi^a)^2 \right] + V(\phi^a) \right\}$$

$$(\partial^0 \phi^a)^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^a)^2 - \frac{1}{2} m_a^2 \phi_a^2) + V(\phi^a)$$

Noether-tétel

Ha $\mathcal{L}$ invariáns folytonos szimmetriára $\Rightarrow J$ megmaradó áram / töltés ($\forall$ folyt. szim.-ra J)

Spec. eset: „belső szimmetria" (téridő pontokat nem transzformálja)

megmaradó áram: $J^\mu = (J^0, \vec{J})$

$$J_\mu = (J^0, -\vec{J}) \quad \partial_\mu J^\mu = 0 \to \partial_0 J^0 + \operatorname{div} \vec{J} = 0$$

$$Q = \int d^3x \, J^0(\vec{x}, t) \quad \text{megmarad}$$

$$\frac{dQ}{dt} \overset{t = \text{áll.}}{=} \int d^3x \, \partial_0 J^0 = -\int d^3x \operatorname{div} \vec{J} = -\int_F d\vec{F} \vec{J} \xrightarrow[\text{rendszerre}]{\text{zárt}} 0$$

„belső szimmetria"

- $\phi_i(\vec{x},t) \quad i=1,\dots,N$
- ezek a szim-k ábrázolásai a részecskéken.
- Szim.-k halmaza: csoportot alkotnak

$$t^a_{ij}: \quad N\times N \text{ mátrixok} \qquad a=1,\dots,G \ (\text{szim. csop. dim.})$$

$$[t^a, t^b] = i\underbrace{c^{abc}}\, t^c$$

Lie algebra, csoportstruktúra állandók

- infinitezimális transzformáció:

$$\phi_i(\vec{x},t) \longrightarrow \phi_i'(\vec{x},t) = \phi_i(\vec{x},t) + i\varepsilon^a t^a_{ij}\phi_j(\vec{x},t)$$

ε^a konstans infinitezimális paraméterek

egyenletben a párban levő mezőkkel keveri össze

$(t^a)^{-1} = t^a$

Ha a Lagrange-fv. erre invariáns, akkor $\exists$ G db megmaradó áram.

$$\delta\phi_i = i\varepsilon^a t^a_{ij}\phi_j(\vec{x},t)$$

$$\phi_i \to \phi_i + \delta\phi_i$$

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}\delta\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi_i)}\delta(\partial^\mu\phi^i) \overset{\text{mozgás-egyenlet}}{=}$$

$\delta\phi_i$ def. ε^a konst.:

$$= \partial^\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^i)}\delta\phi^i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^i)}\partial^\mu(\delta\phi^i) =$$

$$= \partial^\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^i)}\delta\phi^i\right] = 0 = \partial^\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^i)} i\varepsilon^a t^a_{ij}\phi_j(\vec{x},t)\right]$$

$\Uparrow$ $\mathcal{L}$ invariáns a szim-ra

$\forall\varepsilon^a$ (független egyparaméteres transzf-kok) $\exists$

$$J^a_\mu := -i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^i)} t^a_{ij}\phi_j \qquad \partial^\mu J^a_\mu = 0$$

$$Q^a = \int d^3x\, J_0^a(\vec{x},t) = -i\int d^3x \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi_i)}}_{\pi^i} t_{ij}^a \phi_j = -i\int d^3x\, \pi^i t_{ij}^a \phi_j$$

Megjegyzés: időnként $\mathcal{L}$ nem invariáns, hanem

$\delta\mathcal{L} = \partial^\mu(\text{vmi})_\mu \Rightarrow$ akkor is van megmaradó mennyiség

$$\partial^\mu \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi_i)}\, i\varepsilon^a t_{ij}^a \phi_j(\vec{x},t) - \text{vmi}_\mu\right]}_{} = 0$$

ez lesz akkor a megmaradó mennyiség.

Kanonikus kvantálás

$\phi^a(\vec{x},t)$ $a=1,\dots,N$ Lorentz-skalár mező

$\phi^a(\vec{x},t)$ $\pi^a(\vec{x},t) = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^a)}$

Operátorok: kirójuk az $\underbrace{\text{egyidejű kommutációs relációt}}_{\boxed{\text{EKR}}}$

$$[\phi^a(\vec{x},t),\phi^b(\vec{y},t)] = 0 = [\pi^a(\vec{x},t),\pi^b(\vec{y},t)]$$

$$[\phi^a(\vec{x},t),\pi^b(\vec{y},t)] = i\,\delta^{ab}\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) \qquad \hbar = c = 1$$

$\hbar$-t visszaírva $[\phi^a(\vec{x},t),\pi^b(\vec{y},t)] = i\hbar\,\delta^{ab}\,\delta(\vec{x}-\vec{y})$

klasszikus limesz $\hbar \to 0$ óvatosan! $[\hbar] \neq 1$ $\Big\} \Rightarrow \phi^a, \pi^b$ számok lesznek

Ettől ϕ^a és π^b-k operátorok lettek

Hamilton-fv-ből is operátor lesz.

Hamilton - operátor

$$H = \int_{t=\text{áll}} d^3x \left[\frac{1}{2}\left(\pi^a(\vec{x},t)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\phi^a(\vec{x},t)\right)^2 + \frac{1}{2} m_a^2 \phi_a^2(\vec{x},t) + V(\phi^a) \right]$$

így jó, mert egyidőben ϕ-k egymással kommutálnak

különböző időben ki kell számolni

Energia megmarad → t bármi lehet

(Térelméletben Heisenberg-kép ⇒ op.-k ME-ei.

$$\partial_0 \phi^a(\vec{x},t) = i\left[H, \phi^a(\vec{x},t)\right]$$
$$\partial_0 \pi^a(\vec{x},t) = i\left[H, \pi^a(\vec{x},t)\right]$$

Heisenberg-egyenletek (nem mondanak semmit a rsz. állapotáról)

$\forall$ O operátor-ra igaz: $\partial_0 O^a(\vec{x},t) = i\left[H, O^a(\vec{x},t)\right]$

t legyen az ami a ME-ben szerepel

A Heisenberg-egyenletek következménye:

$$(\Box + m_a^2)\phi^a = -\frac{\partial V}{\partial \phi^a}$$

ϕ^a op. mező kielégíti a klasszikus me-t.

Biz.:

Lemmák:

1) Ha van egy a mezőkből előállított függvény

$$\left[f(\phi^a(\vec{x},t)), \pi^b(\vec{y},t)\right] = i\frac{\partial f}{\partial \phi^a}\delta^{ab}\delta(\vec{x}-\vec{y})$$
$$\left[\phi^a(\vec{x},t), g(\pi^b(\vec{y},t))\right] = i\frac{\partial g}{\partial \pi^b}\delta^{ab}\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

2) $\left[\vec{\nabla}_i \phi^a(\vec{x},t), \pi^b(\vec{y},t)\right] = i\delta^{ab}\nabla_i^x \delta(\vec{x}-\vec{y})$

$$\partial_0\phi^a(\vec{x},t) = i\int d^3x' \left[\frac{1}{2}\left(\pi^b(\vec{x}',t)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\phi^b(\vec{x}',t)\right)^2 + \frac{1}{2}m_b^2\phi_b^2(\vec{x}',t) + V(\phi^b(\vec{x}',t)), \phi^a(\vec{x},t)\right]$$

Mivel H megmarad ugyanabban a t-ben veszem, mint mellette $\phi^a(\vec{x},t)$-t.

Kommutátorok összege, összegek kommutátora.

Az utolsó 3 taggal ϕ^a kommutál.

Részecskefizika

2012. 11. 06.

$$\partial_0 \phi^a(\vec{x},t) = i\int d^3x' (-i)\, \pi^a(\vec{x}',t)\, \delta(\vec{x}-\vec{x}') = \pi^a(\vec{x},t)$$

„Ennek örülünk, ennek van értelme :)"

$$\partial_0 \pi^a(\vec{x},t) = i\left[H, \pi^a(\vec{x},t)\right] = i\int d^3x' \Big[\tfrac{1}{2}\left(\vec{\nabla}^{x'}\phi^b(\vec{x}',t)\right)^2 + \tfrac{1}{2} m_b^2 \phi_b^2(\vec{x}',t) +$$

1. taggal kommutál

$$+ V(\phi^b(\vec{x}',t)), \pi^a(\vec{x},t)\Big] = i\int d^3x'\, i \left(m_a^2 \phi_a(\vec{x}',t) + \frac{\partial V}{\partial \phi^a}\right)\delta(\vec{x}-\vec{x}') +$$

$$+ \int d^3x' \left[\tfrac{1}{2}\left(\vec{\nabla}^{x'}\phi^b(\vec{x}',t)\right)^2, \pi^a(\vec{x},t)\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\left[\vec{\nabla}^{x'}\phi^b(\vec{x}',t), \pi^a(\vec{x},t)\right]\vec{\nabla}^{x'}\phi^b(\vec{x}',t) + \vec{\nabla}^{x'}\phi^b(\vec{x}',t)\left[\vec{\nabla}^{x'}\phi^b(\vec{x}',t), \pi^a(\vec{x},t)\right]\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(i\, \vec{\nabla}^{x'}\phi^a(\vec{x}',t)\, \underline{\delta(\vec{x}-\vec{x}')} + \vec{\nabla}^{x'}\phi^a(\vec{x}',t)\, i\vec{\nabla}^{x}\delta(\vec{x}-\vec{x}')\right) =$$

parciális integrálás

$$i\, \partial_i^{x'}\phi^a(\vec{x}',t)\, \partial_i^{x'}\delta(\vec{x}'-\vec{x})$$

felületi tagot eldobjuk.

$$= i\left(-\Delta\phi^a(\vec{x},t)\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')\right) = -i\Delta\phi^a(\vec{x},t)\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$\partial_0 \pi^a(\vec{x},t) = -m_a^2 \phi_a(\vec{x},t) - \frac{\partial V}{\partial \phi^a} + \Delta\phi^a(\vec{x},t)$$

$$\pi^a = \partial_0 \phi^a$$

$$\partial_0^2 \phi^a = -m_a^2 \phi_a - \frac{\partial V}{\partial \phi^a} + \Delta\phi^a$$

$$\underbrace{(\partial_0^2 - \Delta)}_{\Box}\phi^a + m_a^2 \phi_a = -\frac{\partial V}{\partial \phi^a}$$

kész a bizonyítás

Hol hatnak az operátorok?

Egyszerűbb eset: 1 db valós, $\underbrace{\text{szabad}}_{V(\phi)=0}$ skalármező: $\phi(\vec{x},t)$

Heisenberg-egyenlet

$$(\Box + m^2)\,\phi(\vec{x},t) = 0$$

Lineáris egyenlet => $\underbrace{\text{meg tudjuk oldani}}_{\text{megoldjuk az egyenletet}}$ => síkhullámok szuperpozíciója => síkhullámos együtthatói lesznek operátorok => ettől lesz operátor.

$(\Box + m^2)\phi = 0$

$\Box = (\partial_0^2 - \Delta)$

e^{ikx}

$kx = k^0 x^0 - \vec{k}\vec{x}$ megoldja, ha $k_0^2 = \vec{k}^2 + m^2$ → tömeg

$-k^{0\,2} + \vec{k}^2 + m^2 = 0$

$k_0 = E(\vec{k}) = \omega(\vec{k})$

valós operátor hermitikus

$\phi(\vec{x}, t) = \phi^+(\vec{x}, t)$

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} 2\pi\, \delta(p^2 - m^2) \cancel{\phi(p)} \frac{1}{2p^0} \left[a(\vec{p}) e^{-ipx} + a^+(\vec{p}) e^{ipx} \right]$$

↓ kovariáns alak

$a(\vec{p})$ és $a^+(\vec{p})$ operátorok

$p = (p^0, \vec{p})$ $\qquad \delta(p_0^{\,2} - \vec{p}^{\,2} - m^2)$

$\int dp_0^0$ elvégezve

$\int dp_0\, \delta(p_0^2 - \vec{p}^{\,2} - m^2)\, \Theta(p^0)$

$p^0 \to \omega(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$

Def.: $\widetilde{dp} \equiv \dfrac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\omega(\vec{p})}$ és p_0 helyére $\omega(\vec{p})$

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \widetilde{dp} \left(a(\vec{p}) e^{-ipx} + a^+(\vec{p}) e^{ipx} \right)$$

itt már igaz a $k_0^2 = \vec{k}^2 + m^2 = \omega^2$
diszperziós reláció

$$\pi(\vec{x}, t) = \partial_0 \phi(\vec{x}, t) = -i \int \widetilde{dp}\, \omega(\vec{p}) \left(a(\vec{p}) e^{-ipx} - a^+(\vec{p}) e^{ipx} \right)$$

$$\left[\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)\right] = \left[\int \widetilde{dp} \left(a e^{-ipx} + a^+(\vec{p}) e^{ipx}\right), -i \int \widetilde{dp}\, \omega(\vec{p}) \left(a e^{-ipx} - a^+ e^{ipx}\right)\right] =$$

$= i\delta(\vec{x} - \vec{y})$ nincs időfüggés

$[a(\vec{p}), a(\vec{p}\,')] = 0 = [a^+(\vec{p}), a^+(\vec{p}\,')]$ hogy ne legyen időfüggés

$$[a(\vec{p}), a^+(\vec{p}\,')] = (2\pi)^3 2\omega(\vec{p})\, \delta(\vec{p} - \vec{p}\,')$$

∀ $\vec{p}$-hez $a(\vec{p})$, $a^+(\vec{p})$ egy oszcillátor (együtthatókkal be lehetne definiálni megfelelő normálással ugyanaz, mint korábban)

olyan mint a betöltési szám op. (kommutációs relációból)

Állapottér: Fock vákuum: $|0\rangle$ $\qquad a(\vec{p})|0\rangle = 0$ $\forall \vec{p}$-re

$|k\rangle$ $\qquad a^+(\vec{p})|0\rangle = |\vec{p}\rangle$

$|\vec{p}\rangle$ értelmezése:

$$\langle \vec{k}'|\vec{k}\rangle = \langle 0|a(\vec{k}')\,a^+(\vec{k})|0\rangle = \langle 0|[a(\vec{k}'),a^+(\vec{k})]|0\rangle +$$

$$+\langle 0|a^+(\vec{k})\,a(\vec{k}')|0\rangle = \langle 0|(2\pi)^3 2\omega(\vec{k})\,\delta(\vec{k}-\vec{k}')|0\rangle =$$

$$= (2\pi)^3 2\omega(\vec{k})\,\delta(\vec{k}-\vec{k}')\,\langle 0|0\rangle = (2\pi)^3 2\omega(\vec{k})\,\delta(\vec{k}-\vec{k}')$$

ha $\langle 0|0\rangle = 1$

pozitív definit relativisztikusan invariáns skálaszorzat.

$$[\Phi(\vec{x},t),\pi(\vec{y},t)] = \left[\int d\tilde{p}\,(a e^{-ipx} + a^+ e^{ipx}),\ -i\int d\tilde{p}'\,\omega(\vec{p}')(a e^{-ip'y} - a^+ e^{ip'y})\right] =$$

$$= -i\int d\tilde{p}\int d\tilde{p}'\left(-e^{-i(px-p'y)}(2\pi)^3 2\omega(\vec{p})\,\delta(\vec{p}-\vec{p}') + e^{i(px-p'y)}(-1)(2\pi)^3 2\omega(\vec{p})\,\delta(\vec{p}-\vec{p}')\right) =$$

$$= +i\int d\tilde{p}\,\left(e^{-ip(x-y)} + e^{ip(x-y)}\right) = i\,\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

2012. II. 13.

Szabad valós skalármező kanonikus kvantálás

Fock vákuum $|0\rangle$

$a(\vec{p})|0\rangle = 0$

$a^+(\vec{p})|0\rangle = |\vec{p}\rangle$

$:P^\mu:$ $\qquad$ $: \;:$ normálrendezés

$\leftarrow a^+ \quad a \rightarrow$

$:P^\mu: = \int d\tilde{p}\, p^\mu a^+(\vec{p}) a(\vec{p}) \qquad :P^\mu:|0\rangle = 0$

vákuum energiája 0. energia nullpontjának választását mutatja

$:P^\mu:|\vec{k}\rangle = k^\mu |\vec{k}\rangle$ $\qquad$ $\vec{k}$ impulzussal, $\omega(\vec{k})$

$k^0 = \omega(\vec{k}) = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ $\qquad$ energiával mozgó egyrészecske állapot

Fock tér: $\phi(x)$ hat

$|0\rangle, \quad |\vec{k}\rangle \quad |\vec{k}_1 \vec{k}_2\rangle$

$\omega(\vec{k}_1) + \omega(\vec{k}_2)$ energiájú

$\vec{k}_1 + \vec{k}_2$ impulzusú szabad

kétrészecskeállapot

Alulról igen, fölülről nem korlátos az energia.

Szabad komplex skalármező

$\phi(x) \quad \phi^*(x)$ függetlenek

$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \quad \phi_1, \phi_2$ valós

$\phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2) \qquad \mathcal{L} = \partial_\mu \phi\, \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi^* \phi$

$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi^* \phi$

ϕ_1, ϕ_2 tömegtagja ugyanak

Van egy globális szimmetriája

$\phi \to e^{i\alpha}\phi \qquad \phi^* \to e^{-i\alpha}\phi^*$ α tetszőleges valós

↳ $\mathcal{L}$-t invariánsan hagyja ⇒ szimmetria

⇒ Noether-tétel: létezik megmaradó töltés

Kanonikus kvantálás

$$\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi^*$$

$$\Pi^*(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi^*)} = \partial_0 \phi$$

EKR-eket kirója:

$$[\phi(t,\vec{x}), \Pi(t,\vec{y})] = i\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

$$[\phi^*(t,\vec{x}), \Pi^*(t,\vec{y})] = i\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

$\forall$ egyéb egyidős kommutátor: 0

pl.: $[\phi(t,\vec{x}), \Pi^*(t,\vec{y})] = 0$

Mozgásegyenlet:

$(\Box + m^2)\phi = 0 \qquad (\Box + m^2)\phi^* = 0$

Operátorokra is ez a mozgásegyenlete (Klein-Gordon) Síkhullámok szuperpozíciójaként keressük a megoldást, melyek megoldják az egyenletet, együtthatók operátorok.

$\phi^* \to \phi^+ \qquad (\Box + m^2)\phi = 0 \quad (\Box + m^2)\phi^+ = 0$

$$\phi(x) = \int d\tilde{p} \left(a(\vec{p}) e^{-ipx} + b^+(\vec{p}) e^{ipx} \right)$$

$$\phi^+(x) = \int d\tilde{p} \left(a^+(\vec{p}) e^{ipx} + b(\vec{p}) e^{-ipx} \right)$$

a és b, mert $\phi \neq \phi^+$

EKR (a, a^+, b, b^+)

$$[a(\vec{p}), a^+(\vec{p}')] = (2\pi)^3 2\omega(\vec{p}) \delta(\vec{p} - \vec{p}') = [b(\vec{p}), b^+(\vec{p}')]$$

$\forall$ egyéb kommutátor: 0

Bevezethető itt is a Fock-vákuum: $|0\rangle$

$$a(\vec{p})|0\rangle = 0 = b(\vec{p})|0\rangle$$

$$a^+(\vec{p})|0\rangle = |\vec{p},1\rangle \qquad b^+(\vec{p})|0\rangle = |\vec{p},2\rangle$$

$$:P^\mu: = \int d\tilde{p}\, p^\mu \left(a^+(\vec{p}) a(\vec{p}) + b^+(\vec{p}) b(\vec{p}) \right)$$

$$P^\mu |\vec{p},1\rangle = p^\mu |\vec{p},1\rangle$$

$$P^\mu |\vec{p},2\rangle = p^\mu |\vec{p},2\rangle \qquad p^0 = \omega(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

Miért van ez a duplázódás?

Szimmetriára vissza: infinitezimális transzformáció.

$$\phi \simeq e^{i\alpha}\phi \simeq \phi + i\alpha\phi \qquad \delta\phi = \phi\, i\alpha$$

$$\phi^* \simeq e^{-i\alpha}\phi^* \simeq \phi^* - i\alpha\phi^* \qquad \delta\phi^* = -\phi^* i\alpha$$

$U(1)$ transzformáció

nincs kommutációs reláció, mely a generátorokat normálja. $\mathcal{L} = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - m^2\phi^*\phi$

$$Q = \frac{1}{2i}\int d^3x \left(\phi^*\partial^0\phi - \phi\partial^0\phi^* \right) = \int d\tilde{p} \left(a^+(\vec{p})a(\vec{p}) - b^+(\vec{p})b(\vec{p}) \right)$$

konvenció: $\frac{1}{2}$

behelyettesítve a síkhullám kifejtést

$$j_\mu^\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}\delta\phi^i = \left((\partial_\mu\phi^*) i\phi - (\partial_\mu\phi) i\phi^* \right) = \frac{1}{i}\left(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^* \right)$$

$Q|\vec{p},1\rangle = |\vec{p},1\rangle$
$Q|\vec{p},2\rangle = -|\vec{p},2\rangle$

A megmaradó töltésből ellentétes előjelűt hordoznak.
Ez az egyetlen különbség a 2 állapot között

Konvenció $\frac{1}{2}$ miatt ± 1

Összes bonyolultabb szimmetria is így jelenik meg.
pl. izospin

Feynmann - propagátor

$\Phi(x)$ szabad valós skalármező

$\Phi(x)\ \Phi(y)$ kvantált

T szorzatuk def: $T(\Phi(x)\Phi(y)) =$
(időrendezett)

$= \underbrace{\Theta(x^0-y^0)}_{\text{lépcsőfv. Heaviside-féle}}\Phi(x)\Phi(y) + \Theta(y^0-x^0)\Phi(y)\Phi(x)$

Tétel: $(\Box_x + m^2)\, i\, T(\Phi(x)\Phi(y)) = \underset{\text{egységop.}}{\delta^{(4)}(x-y)}$

igaz akkor is, ha rendvárhatjuk a Fock vákuummal

$(\Box_x + m^2)\, i \langle 0|T(\Phi(x)\Phi(y))|0\rangle = \delta^4(x-y)$

(Biz.: $\partial_{x_0}^2 T(\Phi(x)\Phi(y)) = \partial_{x_0}\{\Theta(x^0-y^0)\partial_{x_0}\Phi(x)\Phi(y) +$
$+\Theta(y^0-x^0)\Phi(y)\partial_{x_0}\Phi(x) + \underbrace{\delta(x^0-y^0)}_{\Theta\text{-k deriváltja}}\underbrace{[\Phi(x),\Phi(y)]}_{\text{kommutátor}}\} =$

x^0 egyszer +, egyszer −
$\Downarrow$
időkoordináta ua $\Rightarrow$ EKR $\Rightarrow 0$

$= \Theta(x^0-y^0)\partial_{x_0}^2\Phi(x)\Phi(y) + \Theta(y^0-x^0)\Phi(y)\partial_{x_0}^2\Phi(x) +$
$+\delta(x^0-y^0)\underbrace{[\partial_{x_0}\Phi(x),\Phi(y)]}$
$\underset{\text{egyidejű}}{\delta(x^0-y^0)}\,[\Pi(x),\Phi(y)] \overset{EKR}{=} \delta(x^0-y^0)(-i)\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$

$$\partial_{x_0}^2 T(\phi(x)\phi(y)) = \Theta(x^0-y^0)\, \partial_{x_0}^2 \phi(x)\,\phi(y) + \Theta(y^0-x^0)\, \phi(y)\, \partial_{x_0}^2 \phi(x) -$$
$$- i\, \delta^{(4)}(x-y)$$

$$\partial_{x_0}^2 T(\phi(x)\phi(y)) = T(\partial_{x_0}^2 \phi(x)\phi(y)) - i\delta^{(4)}(x-y) =$$

Szabad valós skalár ME

$$(\partial_{x_0}^2 - \Delta_x)\phi + m^2\phi = 0$$

$$\partial_{x_0}^2 \phi = \Delta_x \phi - m^2 \phi$$

$$= T([\Delta_x \phi - m^2\phi], \phi(y)) - i\delta^{(4)}(x-y) =$$

idő deriválás benne van a T szorzatban, Δ_x és m^2 már nincs => kivihető

$$= [\Delta_x - m^2]\, T(\phi(x), \phi(y)) - i\delta^{(4)}(x-y)$$

$$(\underbrace{\partial_{x_0}^2 - \Delta_x}_{\Box_x} + m^2)\, T(\phi(x), \phi(y)) = -i\delta^{(4)}(x-y)$$

Ezt az egyenletet meg lehet oldani

(I) $i\,T(\phi(x)\phi(y))$ c-szám, nem operátor

(II) megoldás: Fourier-transzformáció

$(\Box_x + m^2)$ legyen inverze => Feynman előírás (feltétel)

$m^2 \to m^2 - i\varepsilon \quad \varepsilon > 0$

$$iT(\phi(x)\phi(y)) = \frac{1}{\Box_x + m^2 - i\varepsilon}\, \underbrace{\delta^{(4)}(x-y)}_{\text{vákuum várható értéke: } 1}$$

$$\langle 0| T(\phi(x)\phi(y)) |0\rangle = G(x,y)$$

$$G(x,y) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 + m^2 - i\varepsilon}\, e^{-iq(x-y)}$$

Részecskefizika 2012. 11. 13.

① Értelmezés:

$G(x,y) = \langle 0|\, T(\phi(x)\phi(y))\,|0\rangle = \Theta(x^0-y^0)\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle + \Theta(y^0-x^0)\langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle$

$\phi(x) = \int d\tilde{p}\, [a(\vec{p})\, e^{-ipx} + a^{+}(\vec{p})\, e^{ipx}]$

$\phi(y)|0\rangle = \int d\tilde{p}\; e^{ipy} a^{+}(\vec{p})|0\rangle$

y-ban kelt egy részecskét

$\langle 0|\phi(x)\underbrace{\phi(y)|0\rangle}_{\text{y-ban részecske}}$

Annak a valószínűségi amplitúdója, hogy az y-ban keltett részecske x-ben van. $\Theta(x-y)$ garantálja, hogy előre megy az időkülönbség pozitív

$G(x,y)$ Feynman propagátor.

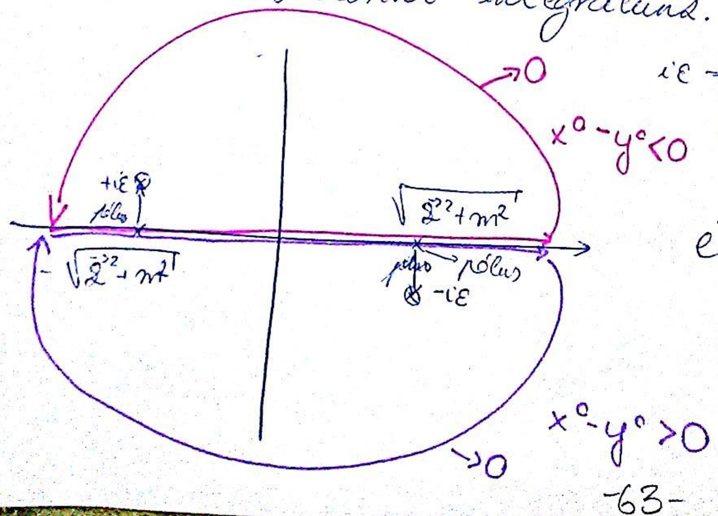
② $G(x,y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2-m^2+i\varepsilon} e^{-ik(x-y)}$ integrálreprezentáció analízise

$k^2-m^2+i\varepsilon = k^{0\,2} - \vec{k}^2 - m^2 + i\varepsilon =$

$= \left(k_0 - \sqrt{\vec{k}^2+m^2+i\varepsilon}\right)\left(k_0 + \sqrt{\vec{k}^2+m^2-i\varepsilon}\right)$

$k_0 = \sqrt{\vec{k}^2+m^2}$ $\qquad k_0 = -\sqrt{\vec{k}^2+m^2}$

Először k_0 szerint integrálunk.



$i\varepsilon \to$ nem lesz más pólus a valós tengelyen.

$e^{-ik^0(x_0-y_0)}$

$x^0>y^0$ is ad $\xrightarrow{\text{ua.}}$ mint amit

$y^0>x^0$ is ad $\xrightarrow{\text{ua.}}$ a direkt kif. ad.

$\phi(x) \to$ síkhullám kifejtés

lásd: gyakorlat

(11.) $G(x,y) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-iq(x-y)}$

~~A kölcsönhatási kép és a perturbációszámítás~~

$\phi(x)$ valós skalármező, de legyen önkölcsönható

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

EKR $[\phi(t,\vec{x}), \pi(t,\vec{y})] = i\delta(\vec{x}-\vec{y})$

$\phi(x)$ operátor

ME: $(\Box + m^2)\phi = -\frac{\lambda}{3!}\phi^3$ nemlineáris.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$$ nem tudjuk megoldani.

Kell áttérés kölcsönhatási képbe és perturbációszámítás

Hamilton-op:

$H = H_0 + H'$

$H_0 = \int d^3x \left(\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi\right)$ => olyan mint a szabad eset

$H' = \frac{\lambda}{4!}\int d^3_x \phi^4$ => ez írja le a kölcsönhatást. itt van a nemlinearitás

kölcsönhatási kép: operátorok időfejlődése H_0-lal, ~~hullámfv-ek~~ állapotok időfejlődése H'-vel.

Képek összefoglalása

Heisenberg, Schrödinger, kölcsönhatási
(1.) (2.) (3.)

(1.) $\partial_t \phi = i[H, \phi]$ mezők időfejlődését a Heisenberg-egyenlet határozza meg

$\phi(t,\vec{x}) = e^{iHt}\phi(0,\vec{x})e^{-iHt}$

Állapot $|a\rangle$ ettől független időfüggetlen.

(2.) $\phi^s(\vec{x})$ időfüggetlen

$\phi^s(\vec{x}) = \phi(0,\vec{x})$ $t=0$-ban

$\phi^s(\vec{x}) = e^{-iHt}\phi(t,\vec{x})e^{iHt}$

$|a\rangle^s = e^{-iHt}|a\rangle$ függ az időtől: $i\partial_t|a\rangle^s = H|a\rangle^s$

Schrödinger-egyenlet

(3.) Operátorok időfejlődése H_0-lal

$\phi^I(t,\vec{x}) = e^{iH_0t}\phi^s(\vec{x})e^{-iH_0t} =$

$$= \underbrace{e^{iH_0t}e^{-iHt}}_{U(t,0)}\phi(t,\vec{x})\underbrace{e^{iHt}e^{-iH_0t}}_{U^{-1}(t,0)} = U(t,0)\phi(t,\vec{x})U^{-1}(t,0)$$

nem lehet 1 exponensbe írni, mert nem kommutál H és H_0 általában

Állapotok a időfejlődése H'-vel

$$|a,t\rangle^I = e^{iH_0t}|a\rangle^s = e^{iH_0t}e^{-iHt}\underbrace{|a\rangle}_{\text{Heisenberg kép időfüggetlen}} = U(t,0)|a\rangle$$

Állapot időfüggése: $U(t,0)$ időfejlesztő operátorral

$U(0,0) = 1$, mert $t=0$-ban illesztettük össze a képeket

$U(t,t_0)$ $t=t_0$-ban illesztve $U(t_0,t_0) = 1$

$U(t,t')U(t',t_0) = U(t,t_0)$

$U(t,t_0) = U(t,0)U^{-1}(t_0,0)$

Tétel:
$$i\partial_t U(t,t_0) = H'(t)^I U(t,t_0)$$
$$U(t_0t_0) = 1 = U(t_0,0)\cdot U^{-1}(t_0,0)$$

Biz.: $i\partial_t U(t,t_0) = i\overbrace{\partial_t U(t,0)}^{\partial_t\left(e^{iH_0t}e^{-iHt}\right)}\underbrace{U^{-1}(t_0,0)}_{\text{nem függ az időtől}} =$

$= \cancel{i\left(e^{iH_0t}(iH_0 - iH)e^{-iHt}\right)} = i\left(e^{iH_0t}iH_0e^{-iHt} - ie^{iH_0t}He^{-iHt}\right)U^{-1}(t,0)$

$$i\partial_t U(t,t_0) = i\left(e^{iH_0 t} iH_0 e^{-iHt} - ie^{-iH_0 t} H e^{-iHt}\right) U^{-1}(t_0,0) =$$

$$= (i)^2 e^{iH_0 t} \underbrace{(H_0 - H)}_{-H'} e^{-iHt} U^{-1}(t_0,0) =$$

$$= e^{iH_0 t} \underbrace{H'}_{e^{-iH_0 t} e^{iH_0 t}} e^{-iHt} U^{-1}(t_0,0) = \underbrace{\left(e^{iH_0 t} H' e^{-iH_0 t}\right)}_{H'(t)^I} \underbrace{e^{iH_0 t} e^{-iHt} U^{-1}(t_0,0)}_{U(t,0)} =$$

$$= H'(t)^I U(t,t_0)$$

Írjuk át integrálegyenletté:

$$U(t,t_0) - U(t_0,t_0) = \frac{1}{i}\int_{t_0}^{t} H'(t')^I U(t',t_0)\,dt'$$

$$U(t,t_0) = I - i\int_{t_0}^{t} dt'\, H'(t')^I U(t',t_0)$$

benne van az $U(t_0,t_0) = 1$ peremfeltétel.

λ kicsi $\Rightarrow$ iteratív megoldás. $\qquad H' = \lambda\Phi^4$
konvergens

0. $U(t,t_0) = I$

1. $U(t,t_0) = I - i\int_{t_0}^{t} dt_1\, H^I(t_1)$

2. $U(t,t_0) = I - i\int_{t_0}^{t} dt_1\, H^I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2\, H^I(t_1) H^I(t_2) + \dots \qquad t_1 \geq t_2$

$$\dots + (-i)^n \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n\, H^I(t_1) \dots H^I(t_n) + \dots$$

$$t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \dots \geq t_n$$

$$T(A(t_1)\dots A(t_n)) = \sum_{P} \underbrace{\Theta(t_{P_1} \dots t_{P_n})}_{} A(t_{P_1}) \dots A(t_{P_n})$$

összes permutáció

csak akkor 1, ha $t_{P_1} \geq t_{P_2} \geq \dots \geq t_{P_n}$ egyébként 0

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^{t} dt_1 \dots \int_{t_0}^{t} dt_n\, T\left(H^I(t_1) \dots H^I(t_n)\right)$$

Kölcsönhatási kép

időfejlesztő operátor ⇒ diff. egyenlet ⇒ int. egyenlet ⇒
⇒ iteráció $H^I(t')$-ben kis paraméter ⇒ konvergál

$$U(t,t_0) = I - i\int_{t_0}^{t} dt_1\, H^I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^{t} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1\, H^I(t_2) H^I(t_1) +$$
$$+ \dots + (-i)^n \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n\, H^I(t_1) \dots H^I(t_n) =$$

időrendezett szorzat

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^{t} dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n\, T\left(H^I(t_1) \dots H^I(t_n)\right) =$$
$$= T\exp\left(-i\int_{t_0}^{t} dt'\, H^I(t')\right) \text{ szimbolikus felírás}$$

Megjegyzés

I.) $T\exp\left(\int_{t_1}^{t_3} O(t)dt\right) = T\exp\left(\int_{t_2}^{t_3} O(t)dt\right) T\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} O(t)dt\right)$

bizonyítható

II. ∀ elméletben, ahol ∄ derivált csatolás: $H^I(t) = -\int\limits_{t=\text{áll}} d^3x\, \mathcal{L}^I(x)$

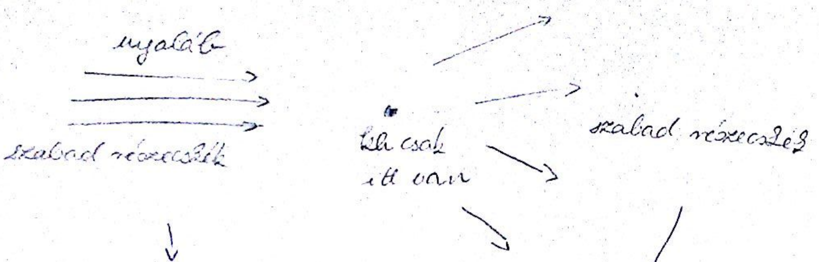
$$T\exp\Big(i \underbrace{\int d^4x\, \mathcal{L}^I(x)}_{\text{skalár}}\Big)$$ ha nincs derivált függés, csak mezők szorzata

skalár
Lorentz-invariáns kif.
nem függ a vonatkoztatási rendszertől

III. Vajon érdekes, mert a szórásmátrix:

$$S = \lim_{t\to\infty} \lim_{t_0\to-\infty} U(t,t_0) = U(\infty,-\infty)$$

Aszimptotikus állapotok és a szórásmátrix (S-mátrix)



Rövid hatótávolságú kh-ok esetén érvényes ez a közelítés

Kölcsönhatás karakterisztikus ideje: τ

Ehhez képest $t \to -\infty$ készítettük el a nyalábot és $t \to \infty$-ben detektáljuk.

$t \to \pm\infty$ szabad részecskék

pl. $\underbrace{\frac{\lambda}{4!}\phi^4}_{kh.}$ $\quad t \to \pm\infty$-ben kikapcsoljuk λ-t

$t \to -\infty \quad \mathcal{H}_i$

$t \to \infty \quad \mathcal{H}_f$ $\quad$ Hilbert teret alkotnak a részecskék, amiket szabad téroperátorokkal írjuk le:

$$(\Box + m^2)\phi_i = 0 = (\Box + m^2)\phi_f$$

$\phi(x) \xrightarrow{t\to-\infty} \phi_i$ $\quad$ kölcsönhatási képet a Heisenberg képhez illesztjük $t \to -\infty$-ben

$ \xrightarrow{t\to\infty} \phi_f$

Kétrészecske $\to$ kétrészecske

$2 \to 2$

impulzus: $\vec{p}_1 \vec{p}_2 \to \vec{q}_1 \vec{q}_2$ rugalmas szórás

$|i\rangle = |\vec{p}_1 \vec{p}_2\rangle = a^+(\vec{p}_1)\, a^+(\vec{p}_2)|0\rangle \quad t \to -\infty$

↓ ilyesmi duálisa

$|f\rangle = |\vec{q}_1 \vec{q}_2\rangle = \langle 0|\, a(\vec{q}_1)\, a(\vec{q}_2) \quad t \to \infty$

Részecskefizika 2012. 11. 20.

$|i(t)\rangle = \underbrace{U(t,-\infty)}_{\text{időfejlődés}}|i\rangle$ $\quad t\to\infty$

$|i(\infty)\rangle = U(\infty,-\infty)|i\rangle$

Szórás valószínűségi amplitúdója

$$\boxed{S_{fi} = \langle f|U(\infty,-\infty)|i\rangle = \langle f|i(\infty)\rangle}$$

Itt látszik az előző III. megjegyzés (időfejlődés határozza meg a szórást)

$$S_{fi} = \langle f|T\exp\left(-i\int_{-\infty}^{\infty}dt\, H^I(t)\right)|i\rangle \to \text{kovariáns}$$

$$\exp\left(i\int_{-\infty}^{\infty}d^4x\,\mathcal{L}^I(x)\right)$$

H^I v. $\mathcal{L}^I$ kis paramétere szerinti hatványsor alapján. Ennek tagjait ábrázoljuk a Feynman-diagramokkal.

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i\int_{-\infty}^{\infty}dt\,\langle f|H^I(t)|i\rangle - \int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{t_1}^{\infty}dt_2\,\langle f|H^I(t_2)H^I(t_1)|i\rangle + \ldots =$$

másik alak

$$= \delta_{fi} + i\int_{-\infty}^{\infty}d^4x\,\langle f|\mathcal{L}^I(t)|i\rangle + \frac{(i)^2}{2!}\int d^4x_1\int d^4x_2\,\langle f|T(\mathcal{L}^I(x_1)\mathcal{L}^I(x_2))|i\rangle \ldots$$

„elkészülés”

$|i\rangle = a^+(\vec p_1)\,a^+(\vec p_2)|0\rangle$ $\qquad -i\int d^3x\, e^{ipx}\left(\frac{ip_0}{\omega(\vec p)}\phi(x) + \partial_0\phi(x)\right)\Big|_{x_0=0} = a(\vec p)$

$$\phi(x) = \int d\tilde p\left(a(\vec p)\,e^{-ipx} + a^+(\vec p)\,e^{ipx}\right)_{p_0}$$

szabad terek

$$\pi(x) = \int\partial_0\phi = -i\int d\tilde p\,\omega(\vec p)\left(a(\vec p)\,e^{-ipx} - a^+(\vec p)\,e^{ipx}\right)$$

lineáris egyenletrendszer $\Rightarrow$ invertálható

$a(\phi(x),\pi(x))$ és $a^+(\phi(x),\pi(x))$

$$a(\vec p) = -i\int d^3x\, e^{ipx}\overleftrightarrow{\partial_0}\phi(x)\Big|_{x_0=0}$$

$$a\overleftrightarrow{\partial_0}b = (\partial_0 a)b + a\partial_0 b$$

$$a(\vec{p}) = -i \int d^3x \; e^{ipx} \, \partial_0 \phi(x) \Big|_{x_0=0}$$

$$a \overleftrightarrow{\partial_0} b = \partial_0 a b + a \partial_0 b$$

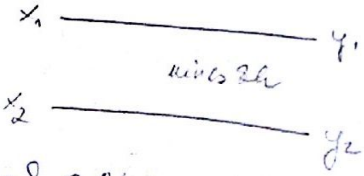
$$|i\rangle = -\int d^3x_1 \, d^3x_2 \left(e^{-ip_1x_1} \overleftrightarrow{\partial_0} \phi(x_1)\right)\left(e^{-ip_2x_2} \overleftrightarrow{\partial_0} \phi(x_2)\right)\Big|_{t\to-\infty} |0\rangle$$

$$|f\rangle = -\cancel{\int d^4x} \; \langle 0| a(\vec{q}_1) a(\vec{q}_2) =$$

$$= -\int d^3y_1 \int d^3y_2 \; \langle 0| \left(e^{iq_1y_1} \overleftrightarrow{\partial_0} \phi(y_1)\right)\left(e^{iq_2y_2} \overleftrightarrow{\partial_0} \phi(y_2)\right)\Big|_{t\to\infty}$$

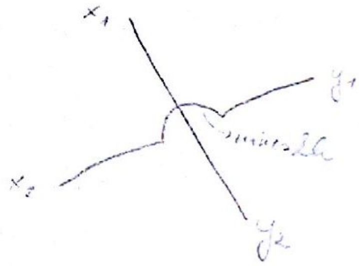
$$\vec{p}_1 \, \vec{p}_2 \to \vec{q}_1 \, \vec{q}_2$$

$\delta_{fi} \Rightarrow \vec{p}_1 = \vec{q}_1$ és $\vec{p}_2 = \vec{q}_2$



részecskék megkülönböztethetetlenek, lehet

$\Rightarrow \vec{p}_1 = \vec{q}_2$ és $\vec{p}_2 = \vec{q}_1$



Legyen a kh.: $\frac{\lambda}{4!} \phi^4 = \mathcal{L}^I(x)$ kis paraméter a dimenziótlan λ

$\mathcal{L}^I(x) \to \; :\mathcal{L}^I(x): \qquad H^I(t) = -\int d^3x \frac{\lambda}{4!} \phi^4(x)$

$$\Downarrow$$

$$:H^I(t):$$

$:\;: = a^+ a$

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i \int_{-\infty}^{\infty} dt \, \langle f | H^I(t) | i \rangle - \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \, \langle f | H^I(t_2) H^I(t_1) | i \rangle + \dots$$

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i \int d^4x \langle f | \mathcal{L}^I(x) | i \rangle - \frac{1}{2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \, \langle f | T\left(\mathcal{L}^I(x_1) \mathcal{L}^I(x_2)\right) | i \rangle + \dots$$

$$H^I(t) = \frac{\lambda}{4!} \left\{ \prod_{j=1}^{4} \int d\tilde{p}_j \; : \left(a(\vec{p}_j) e^{-i\omega(\vec{p}_j)t} + a^+(\vec{p}_j) e^{i\omega(\vec{p}_j)t} \right) : \right\} \cdot$$

$$\cdot \underbrace{\delta\left(\sum \vec{p}_j\right)}_{\text{impulzusmegmaradás}}$$

$\frac{\lambda}{4!} \phi^4(x)$

Részecskefizika

2012. 11. 20

Összesen 16 tag van, $\Leftarrow \underset{(a+a^+)^4}{\phi^4} \Rightarrow$ 4 él

$\boxed{\mathcal{O}(\lambda^1)}$ λ-ban elsőrendű járulék

$$\frac{i\lambda}{4!}\int d^4z \langle f| :\phi^4(z): |i\rangle =$$

$$\langle 0|T(a_{f_\infty} a_f \; : \underbrace{(a+a^+)^4}_{16\text{ tag}} : a_i^+ a_{i_{-\infty}}^+)|0\rangle$$

T sorral nem csak

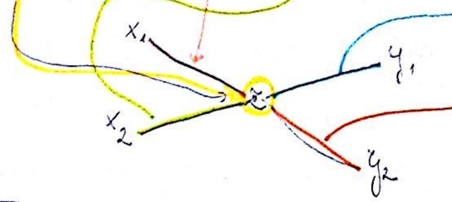
Csoportosítás: a^+-k és a-k száma alapján.

- $a\,a\,a\,a$
- a^+aaa
- $\boxed{a^+a^+aa}$ ⇒ csak ezek adnak 0-tól különböző járulékot, mert ha több a van → vákuum ⇒ 0, több a^+ van ⇒ bal vákuum ⇒ 0
- $a^+a^+a^+a$
- $a^+a^+a^+a^+$

$$\Delta_0(x,y) = \langle 0|T(\phi(x)\phi(y))|0\rangle$$ -hoz hasonló

$$= (i\lambda)\underbrace{\int d^3x_1\int d^3x_2\int d^3y_1\int d^3y_2}_{\text{kezdeti és végállapot hfv-ből jön}}\overbrace{\int d^4z}^{2k}\, e^{iy_1q_1}e^{iy_2q_2}e^{-ip_1x_1}e^{-ip_2x_2}\cdot$$

$$\cdot\,\Delta_0(x_1,z)\,\Delta_0(x_2,z)\,\Delta_0(z,y_1)\,\Delta_0(z,y_2)$$



hozzárendelések

z: kölcsönhatási hely

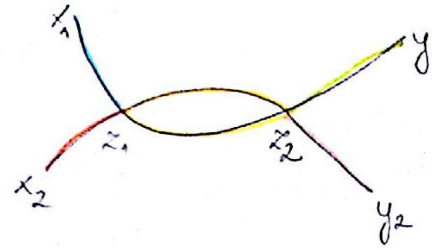
$\boxed{\mathcal{O}(\lambda^2)}$ λ-ban másodrendű járulék

$$\frac{(i)^2\lambda^2}{2!(4!)^2}\int d^4x_1\int d^4x_2 \langle f|T(:\phi^4(x_1)::\phi^4(x_2):)|i\rangle$$

$$\langle 0|T(a_f a_f \; \underbrace{:\underbrace{(a+a^+)^4}_{16\text{ tag}}: \; :\underbrace{(a+a^+)^4}_{16\text{ tag}}:}_{\text{egymással is lehet a tagokat kommutálni}} a_i^+ a_i^+|0\rangle$$

$$\frac{(i)^2\lambda^2}{2!\,(4!)^2}\int d^4z_1\int d^4z_2\,\langle f|T(:\phi^4(z_1):\ :\phi^4(z_2):)|i\rangle$$

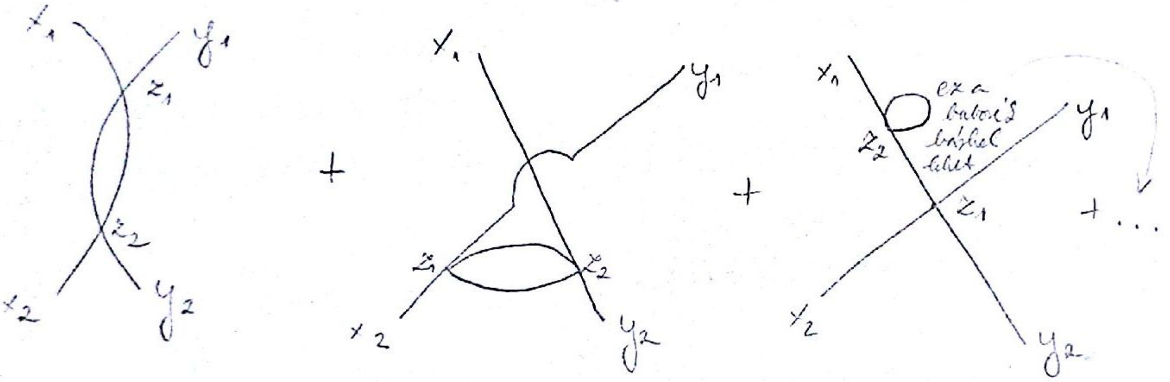
Nem 0 járulék több osztályba sorolható



$$(i\lambda)^2\int\prod_i d^3x_i\, d^3y_i\, e^{iq_iy_i}\, e^{ip_ix_i}\cdot$$
$$\cdot\, d^4z_i\,\Delta_0(x_1z_1)\Delta_0(x_2z_1)\cdot$$
$$\cdot\,\Delta_0^2(z_1z_2)\,\Delta_0(z_2y_1)\,\Delta_0(z_2y_2)$$

rendben vannak a vertexek, mert mind2-ből 4 vonal indul ki (ϕ^4 miatt

több:



$\frac{\lambda}{4!}\phi^4$ Feynman szabályai

n_i kezdőállapotbeli és n_f végállapotbeli részecske van λ^N rendben.

1. Olyan gráf, melyben n_i+n_f+N pont van úgy, hogy $\forall$ n_i és n_f pontból 1, $\forall N$ pontból 4 vonal indul ki.

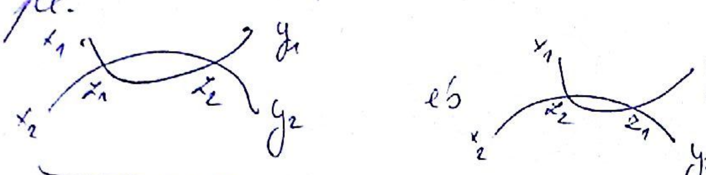
2. felsoroljuk az összes lehetséges összekapcsolását a vonalaknak (összefüggőek, connected graph)

3. A vonalakhoz Δ_0, a belső vertexekhez pedig az $i\lambda$ járul. Külső pontok a külső hfv járulékok. belső vertexek helyére integrálunk

(4) Minden gráfra megcsinálva => megvan a járulékuk
A gráfok járulékait esetleges szimmetriafaktorokat figyelembevéve összeadjuk.

Külső vonalak és belső vertexek olyan permutációja amikor minden vonal odamegy mint korábban

pl.



2 db => $\frac{1}{2}$ szimmetria-faktor

E szabályok levezetése a Wick-tétel segítségével történik

Wick-tétel:

Mezők időrendezett szorzatait kifejezi a normálrendezett szorzatokkal és Δ_0-lal párosítás

2 mező

$$T(\phi(x)\phi(y)) = :\phi(x)\phi(y): + \underbrace{\Delta_0(x,y)}$$

$$(\Box + m^2)\, iT(\phi(x),\phi(y)) = \delta^{(4)}(x-y) \quad \text{inhomogén tag}$$

$$(\Box + m^2)\, \underbrace{:\phi(x)\phi(y):}_{\text{homogén egyenlet mo-a}} = 0$$

3 mező

$$T(\phi(x)\phi(y)\phi(z)) = :\phi(x): \Delta_0(yz) + :\phi(y): \Delta_0(xz) + :\phi(z): \Delta_0(xy) \left(+ :\phi(x)\phi(y)\phi(z): ?\right)$$

4 mező

$$T(\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)) = :\prod_{i=1}^{4}\phi(x_i): + \Delta(x_1x_2):\phi(x_3)\phi(x_4): + \Delta(x_1x_3):\phi(x_2)\phi(x_4): + \ldots + \Delta(x_1x_2)\Delta(x_3x_4) + \Delta(x_1x_3)\Delta(x_2,x_4)$$

Más elméletek Feynman szabályai:

V mezőhöz kell a propagátor

2 mező időrendezett szorzatának vákuum várható értéke

vertex: milyen mezők milyen számban.

Sf. Szórásmátrixot a Feynman-diagramok segítségével ki tudjuk számolni $\Rightarrow$ kísérletileg megadható $\Rightarrow$ mérhető

Elektromágneses mező kovariáns leírása

$\boxed{\hbar = c = 1}$

EM mezőt $\vec{E}$-vel és $\vec{B}$-vel tudjuk jellemezni klasszikusan

itt amivel jellemezzük: $\boxed{A^\mu = (\phi, \vec{A})}$

skalárpot. vektorpot

ebből a térerősségek:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$$

A^μ Lorentz (4-es) vektor

$\vec{E}, \vec{B} \Rightarrow \boxed{F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu}$

$$\partial_\mu = (\partial_0, \vec{\nabla}) \qquad \partial^\mu = (\partial_0, -\vec{\nabla})$$

$$F^{i0} \leftrightarrow E^i \qquad \varepsilon^{ijk} F^{jk} \leftrightarrow B^i$$

szabad:

$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ dinamikai változó: A^μ

szabad elektromágneses mező kovariáns kvantálása

Dinamikai változók: négyesvektor potenciál komponensei

$$A^\mu(x) = (\Phi, \vec{A})$$

skalár-, vektorpotenciál

Térerősség tenzor

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$F^{\mu\nu} \to (\vec{E}, \vec{B})$$

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$$

Lagrange fv.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Problémák:

- Mértékszimmetria:

$$A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \underset{\text{fv.}}{\Lambda} = \tilde{A}^\mu \Rightarrow F^{\mu\nu} \text{ változatlan marad}$$

Φ és A nem teljesen fizikai.

Mértékfeltétel:

kovariáns: $\partial_\mu A^\mu = 0$ Lorentz-mérték

(nem kovariáns: $\Phi = 0$ $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ Coulomb-mérték)

- $A^0 \equiv \Phi$ nem dinamikai

ebben a Lagrange-fv-ben $\partial^0 A^0 = \partial^0 \Phi$ nem fordul elő

$F^{00} = 0$ mert antiszimmetrikus

↳ **Klasszikusan**

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial^\mu A_\mu)^2$$

λ tetszőleges valós

következmények: $\partial^0 \Phi$ megjelenik $\Rightarrow$ van π^0

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = F^{\mu 0} - \lambda g^{\mu 0} (\partial_\mu A^\mu) = \begin{cases} \pi^i = F^{i0} = E^i \\ \pi^0 = -\lambda \partial_\mu A^\mu \end{cases}$$

$\Pi^0 = -\lambda(\partial_\mu A^\mu)$ ez az amit a mértékfeltétellel el akarunk tüntetni.

Ez klasszikusan még megtehető, kvantumosan már nem

Operátoregyenletként nem lehet $\partial_\mu A^\mu = 0$

kanonikus kvantálás: EKR:

$$[A_\rho(\vec{x},t), \Pi^\nu(\vec{y},t)] = i g_\rho{}^\nu \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$$

$$[A_0(\vec{x},t), \Pi^0(\vec{y},t)] \neq 0$$

Operátorosan ↯

$$\Pi^0|_{operátor} = 0$$

$\Pi^0 = 0$ ellentmondó állítás => nem rójuk ki operátorosan a fizikai állapotokat válasszuk ki a segítségével.

~~Klasszikusan~~
Kvantumosan

Kovariánsan a A_μ $\forall$ 4 komponensét operátorosítjuk

$\mathcal{A}$ állapottér

$\mathcal{A}_{fiz} \subset \mathcal{A}$ fizikai altér egy része ennek az állapottérnek

$\mathcal{A}_{fiz}$-en teljesüljön várható értékben a Lorentz-mérték => fizikai állapot:

$$\Psi \in \mathcal{A}_{fiz} \Rightarrow \langle \Psi | \partial_\mu A^\mu | \Psi \rangle = 0$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2$$

Mozgásegyenlet: $\Box A_\mu = 0$

kanonikus kvantálás: EKR

$$[A_\mu(\vec{x},t), A_\nu(\vec{y},t)] = 0 = [\Pi^\mu(\vec{x},t), \Pi^\nu(\vec{y},t)]$$

$$[\dot{A}_\mu(\vec{x},t), \dot{A}_\nu(\vec{y},t)] = 0 \qquad \dot{} = \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_0}$$

$$[\dot{A}_\rho(\vec{x},t), A_\nu(\vec{y},t)] = i g_{\rho\nu} \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$$

$g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$

Hasonlót a skalármezőnél tanultakra.

$$[\phi(\vec{x},t), \dot{\phi}(\vec{y},t)] = i\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

De A^0-ra az előjel fordítva van

Szabad egyenlet: $\Box A_\mu = 0$

Operátor $A^\mu(x)$ ennek megoldása → síkhullámok szuperpozíciója és együtthatók lesznek operátorok

e^{-ikx} $\quad k\cdot x = k^0 x_0 - \vec{k}\vec{x}$ megoldja, ha $k^0 = \omega(\vec{k}) = |\vec{k}|$, $m=0$

A^μ-nek van Lorentz-vektor indexe

$A_\mu(x) = \int d\tilde{k}$

$d\tilde{k} = \frac{d^3k}{2\omega(k)(2\pi)^3}$ és k_0 helyére $|\vec{k}|$

$\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$ $\quad \lambda = 0,1,2,3$ Lorentz-vektor valós

↳ „Polarizációs vektor"

$$A_\mu(x) = \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=0}^{3} \left(a^{(\lambda)}(\vec{k})\, \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)\, e^{-ikx} + a^{(\lambda)}(k)^\dagger \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)\, e^{ikx}\right)$$

ME-t megoldja, $a^{(\lambda)}(\vec{k})$ és $a^{(\lambda)}(k)^\dagger$ operátorok

$\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$ miatt Lorentz-vektor, $A_\mu^\dagger = A_\mu$

Mik az $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$-k?

- n^μ $\underbrace{\text{időszerű}}_{n^0>0}$ $\underbrace{\text{egységvektor}}_{n^\mu n_\mu = 1}$
- $\lambda = 1,2$ $\quad \varepsilon_\mu^{(i)}(k) \Rightarrow \varepsilon_\mu^{(i)} n^\mu = 0 = \varepsilon_\mu^{(i)} k^\mu$ transzverzális pol.
  $\varepsilon_\mu^{(i)} \varepsilon_\nu^{(j)} g^{\mu\nu} = -\delta^{ij}$
- $\lambda = 3$ $\quad \varepsilon_\mu^{(3)}(k) \Rightarrow (k,n)$ síkban van $\varepsilon_\mu^{(3)} n^\mu = 0$ $\quad \varepsilon_\mu^{(3)} \varepsilon^{(3)\mu} = -1$
  longitudinális pol.

• $\lambda = 0$ $\quad \varepsilon_\mu^{(0)} = n_\mu$ $\quad$ skalár pol.

Spec. választás:

$$n^\mu = (1, \vec{0}) \qquad k^\mu = (|\vec{k}|, 0, 0, |\vec{k}|)$$

$$\underbrace{\varepsilon^{(0)} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}_{\text{skalár}} \quad \underbrace{\varepsilon^{(1)} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \varepsilon^{(2)} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{\text{transzverzális}} \quad \underbrace{\varepsilon^{(3)} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\text{longitudinális}}$$

Polarizációs vektorok tulajdonságai

• $$\sum_\lambda \frac{\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)\,\varepsilon_\nu^{(\lambda)}(k)}{\varepsilon_\rho^{(\lambda)}(k)\,\varepsilon^{(\lambda)}(k)^\rho} = g_{\mu\nu}$$

• $$\varepsilon^{(\lambda)}{}_\mu(k)\,\varepsilon^{(\lambda')}(k)^\mu = g^{\lambda\lambda'}$$

EKR-ba behelyettesítjük a követlezőt:

$$A_\mu(x) = \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=0}^{3} \left(a^{(\lambda)}(\vec{k})\,\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)\,e^{-ikx} + a^{(\lambda)}(\vec{k})^+\,\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)\,e^{ikx} \right)$$

EKR-ből leolvassuk $a^{(\lambda)}(\vec{k}), a^{(\lambda')}(\vec{k}')^+$ kommutációs relációit.

Mind 0 kivéve: $\left[a^{(\lambda)}(\vec{k}), a^{(\lambda')}(\vec{k}')^+\right] =$

$$= -g^{\lambda\lambda'}\,2k^0\,(2\pi)^3\,\delta(\vec{k}-\vec{k}')$$

$$\left.\begin{aligned} g^{00} &= 1 \\ g^{ii} &= -1 \end{aligned}\right\}$$

$$A_\mu(x) = \underbrace{A_\mu(x)^{(-)}}_{\text{pozitív frekv.}} + \underbrace{A_\mu^{(+)}(x)}_{\text{negatív frekv.}}$$

kovariancia ($\forall$ 4 komponens „ugyanolyan")

Fock-vákuum $\quad a^{(\lambda)}(\vec{k})|0\rangle = 0 \;\; \forall\, \lambda, k$-ra

$$a^{(\lambda)}(\vec{k})^+|0\rangle \neq 0$$

Lokális töltéssűrűség:

$\cdot\ |1\rangle^{0} := \int d\tilde{k}\ f(\vec{k})\, a^{(0)}(\vec{k})^{+}|0\rangle$

$\cdot\ {}^{0}\langle 1|1\rangle^{0} = -\langle 0|0\rangle \int d\tilde{k}\ |f(\vec{k})|^2$

vagy $\underbrace{\langle 0|0\rangle}_{\text{vákuum áll.}}$ vagy $\underbrace{{}^{0}\langle 1|1\rangle^{0}}_{\text{skalár áll.}}$ negatív

$\cdot\ {}^{i}\langle 1|1\rangle^{i} = \langle 0|0\rangle \int d\tilde{k}\ |f(\vec{k})|^2$

$i=1,2,3$ norma rendben, ha $\langle 0|0\rangle = 1$

Valószínűségi értelmezés ???

$\mathcal{H}$ legyen a teljes $\underbrace{\text{Fock-tér}}$ (Lorentz-feltétel nélkül)

$a^{(\lambda)}(\vec{k})^{+}$-okkal generált ($\forall$ a 4-gyel)

Ezen belül legyen $\mathcal{H}_{fiz}$, ahol a Lorentz-feltétel várható értékben teljesül (gyengén teljesül)

$\Psi \in \mathcal{H}_{fiz}$ $\quad \langle\Psi|\partial_\mu A^\mu|\Psi\rangle = 0$

Mutassuk meg, hogy:

① $\mathcal{H}_{fiz}$-ben a valószínűségi értelmezés rendben van

$\langle\Psi|\left(\partial_\mu (A^\mu)^{(-)} + \partial_\mu (A^\mu)^{(+)}\right)|\Psi\rangle = 0$

ehhez elég $\partial_\mu (A^\mu)^{(-)}|\Psi\rangle = 0$ $\left(\Rightarrow \langle\Psi|\partial_\mu (A^\mu)^{(+)} = 0\right)$

$i\partial_\mu A^{\mu(-)} = \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=0}^{3} a^{(\lambda)}(\vec{k})\, \underbrace{\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k})\, k^\mu}\, e^{-ikx}|\Psi\rangle = 0$

transzverzalitásnál 0 $(\lambda = 1,2)$

$i\partial_\mu A^{\mu(-)} = \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=0,3} a^{(\lambda)}(\vec{k})\, \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k})\, k^\mu\, e^{-ikx}|\Psi\rangle = 0$

$|\Psi\rangle = |\Psi_T\rangle \otimes |\Phi\rangle$

$$i\partial_\mu A^{\mu(-)} = \int d\tilde{q} \sum_{\lambda=0,3} \left[\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(q) k^\mu\right] e^{-iqx} |\Psi\rangle = 0$$

$$|\Psi\rangle = |\Psi_T\rangle \otimes |\phi\rangle$$

$|\phi\rangle \to$ longitudinális + skalár

$|\Psi_T\rangle \to a^{(i)}(q)^+ \quad i=1,2$ -vel generáljuk (transzverzális)

$$\sum_{\lambda=0,3} (\varepsilon_\mu^{(\lambda)} q^\mu)\, a^{(\lambda)}(\vec{q})|\phi\rangle = 0 \quad \forall\, q\text{-ra}$$

Spec. eset $\quad \varepsilon_\mu^{(0)} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \varepsilon_\mu^{(3)} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix} \quad k^\mu = \begin{pmatrix}|\vec{q}|\\0\\0\\|\vec{q}|\end{pmatrix}$

$$\left(a^{(0)}(\vec{q}) - a^{(3)}(\vec{q})\right)|\phi\rangle = 0$$

$$|\phi\rangle = c_0 \underset{|0\rangle}{|\phi_0\rangle} + c_1|\phi_1\rangle + c_2|\phi_2\rangle + \dots + c_n|\phi_n\rangle$$

$|\phi_n\rangle$ n db skalár + longitudinális fotont tartalmaz

c_i tetszőleges komplex

$$\left(a^{(0)}(\vec{q}) - a^{(3)}(\vec{q})\right)|\phi_n\rangle = 0$$

Számoperátor:

$$\tilde{N} = \int d\tilde{q} \left[a^{(3)}(\vec{q})^+ a^{(3)}(\vec{q}) - a^{(0)}(\vec{q})^+ a^{(0)}(\vec{q})\right]$$

$\tilde{N}|\phi_n\rangle = n|\phi_n\rangle \quad n$ nemnegatív egész

$$\langle\phi_n|\tilde{N}|\phi_n\rangle = n\langle\phi_n|\phi_n\rangle$$

$$a^{(0)}(\vec{q})|\phi_n\rangle = a^{(3)}(\vec{q})|\phi_n\rangle$$

$$\langle\phi_n|a^{(0)}(\vec{q})^+ = \langle\phi_n|a^{(3)}(\vec{q})^+$$

$$\int d\tilde{q}\, \langle\phi_n|\left[a^{(3)}(\vec{q})^+ a^{(3)}(\vec{q}) - a^{(0)}(\vec{q})^+ a^{(0)}(\vec{q})\right]|\phi_n\rangle =$$

$$= \int d\tilde{q} \left(\langle\phi_n|a^{(3)}(\vec{q})^+ a^{(3)}(\vec{q})|\phi_n\rangle - \langle\phi_n|a^{(0)}(\vec{q})^+ a^{(0)}(\vec{q})|\phi_n\rangle\right) =$$

$$= \int d\tilde{q} \left(\langle\phi_n|a^{(0)}(\vec{q})^+ a^{(0)}(\vec{q})|\phi_n\rangle - \langle\phi_n|a^{(0)}(\vec{q})^+ a^{(0)}(\vec{q})|\phi_n\rangle\right) = 0$$

$$\Rightarrow n\langle\phi_n|\phi_n\rangle = 0 \qquad \langle\phi_n|\phi_n\rangle = \delta_{n0} \qquad \langle\phi_n|\phi_m\rangle = 0 \quad n \neq m$$

Bihari ... 2012. 11. 27. (4)

Részecskefizika

$\langle \Psi|\Psi\rangle = |C_0|^2 \langle \Phi_0|\Phi_0\rangle = |C_0|^2 \geq 0$

$\mathcal{H}_{fiz}$-ben működik a valószínűségi értelmezés.

(!!) A fizikai mennyiségek $\mathcal{H}_{fiz}$-beli várható értékeiből a lekerőleges c_i-k kiesnek.

Energia: Hamilton-operátor várható értéke:

$$H = \int d^3x : (\Pi^\mu A_\mu - \mathcal{L}) : \qquad :: \text{ normálrendezés}$$

$$H = \frac{1}{2}\int d^3x : \left\{ \sum_{i=1}^{3} \left[\dot{A}_i^2 + (\vec{\nabla} A_i)^2\right] - \dot{A}_0^2 - (\vec{\nabla} A_0)^2 \right\} : =$$

$$= \int d\tilde{k}\, \omega(\vec{k}) \left\{ \sum_{i=1}^{3} a^{(i)}(k)^+ a^{(i)}(k) - a^{(0)}(k)^+ a^{(0)}(k) \right\}$$

Nem igaz, hogy csak a transzverzális szerepel.

$$E = \frac{\langle\Psi|H|\Psi\rangle}{\langle\Psi|\Psi\rangle} = \Big\{ \langle\Psi_T| \int \frac{d\tilde{k}}{\omega(\vec{k})} \sum_{i=1}^{2} a^{(i)}(k)^+ a^{(i)}(k) |\Psi_T\rangle \langle\Phi|\Phi\rangle +$$

$|\Psi\rangle = |\Psi\rangle_T \otimes |\Phi\rangle$

$$+ \langle\Psi_T|\Psi_T\rangle \int d\tilde{k}\, \omega(\vec{k}) \underbrace{\langle\Phi| a^{(3)}(k)^+ a^{(3)}(k) - a^{(0)}(k)^+ a^{(0)}(k) |\Phi\rangle}_{0 \text{ előbbiek miatt}} \Big\} \cdot \frac{1}{\langle\Psi|\Psi\rangle}$$

$\langle\Psi|\Psi\rangle = \langle\Psi_T|\Psi_T\rangle \cdot \langle\Phi|\Phi\rangle$

$$E = \frac{\langle\Psi_T| \int d\tilde{k}\, \omega(\vec{k}) \sum_{i=1}^{2} a^{(i)}(k)^+ a^{(i)}(k) |\Psi_T\rangle}{\langle\Psi_T|\Psi_T\rangle}$$

ebben valóban csak a fizikai transzverzális kettő (eltűntető) operátorok (fotonok) adnak járulékot

Csak a fizikai altéren vett várható értékre igaz, hogy csak a transzverzálisok adnak járulékot, magára az operátorra NEM!

Kalibráció

- Ez se megszorítja a nemfizikai szabadsági eltávolítást teljesen. Ezután mennyiségekkel csak a kovariáns ... függvénnyel.
- Megmutatható, hogy a Lorenz feltétellel a feltételek teljesülésén lévő mértéktranszformációk lehetőségét adja.

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \qquad A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \Lambda$$

$$\left.\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu \Lambda = 0 \\ \Box \Lambda = 0 \end{aligned}\right\} \text{ egyenlő így}$$

- Az egész Λ-ra szükség van, hogy a ... modell tulajdonság teljesüléséhez.

Részecskefizika 2012. 12. 04.

12.21 8^30 vizsga!

A foton propagátora $\lambda = 1$ (Feynman mérték)

$$\Box A_\mu = 0 \quad \longrightarrow + \left[\dot{A}_\rho, A_\nu \right] = i g_{\mu\nu} \ldots$$

$$T A_\mu(x) A_\nu(y) = \Theta(x_0 - y_0) A_\mu(x) A_\nu(y) + $$
$$+ \Theta(y_0 - x_0) A_\nu(y) A_\mu(x)$$

$$\langle 0 | T(A_\mu(x) A_\nu(y)) | 0 \rangle = i g_{\mu\nu} D_F(x-y) = \overbrace{- i g_{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 + i\varepsilon}}^{\text{leggyakoribb alak}}$$

skalármezőhöz hasonlóan + az EKR a mozgásegyenlet

4-es vektor komponenseire különbözőt adnak

$\mu = \nu = 0 \Rightarrow g_{\mu\nu} = 1$

$\mu = \nu = i \Rightarrow g_{\mu\nu} = -1$

valós tengelyről kipiszkáli a szingularitással ($m = 0 \Rightarrow$ origó)

$$D_F(x) = -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i\varepsilon} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{i} \frac{1}{x^2 - i\varepsilon}$$

A kvantált elektron-proton mező, az $\frac{1}{2}$ spinű részecskék kvantumtérelmélete ($\hbar = c = 1$)

Dirac-egyenlet utánanézni!

Egyrészecskés Schrödinger-e kovariáns általánosítása

De a Dirac-egyenlet nem egy egyrészecske-probléma

Érvelés: $\Delta x \Delta p \sim 1$

ha $\Delta x \lesssim \frac{1}{m}$ Compton hullámhossznál kisebb tartományra szorítjuk össze a hullámfüggvényt

$\sim \Delta p \sim m$

$\downarrow$

relativisztikus

ha elég nagy $\Delta p \sim \Delta E$ $\Downarrow$ energiája a nyugalmi tömeg nagyságrendjében különbözik

Emiatt lehetnek elektron-pozitron párok

$\Downarrow$

kilépünk az egyrészecske kvantummechanikából

elektron hfo-e

$\psi(x) \longrightarrow$ Dirac-spinorként transzformálódó mező

Dirac-egyenlet: ennek a mezőnek a téregyenlete

kvantáljuk meg ezt az eddigiekhez hasonlóan.

$$\left.\begin{aligned} (\Box + m^2)\phi &= 0 \\ \Box A_\mu &= 0 \end{aligned}\right\}$$ ehhez hasonlóan (Klein-Gordon)

Transzformáció

$\psi_\alpha(x)$ α: spin index

4 komponensű

Lorentz-csoport 4D spinor ábrázolása

2 inekvivalens van ebből

más, mint a négyesvektoroké

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi(x) = 0$$

γ_μ $\mu = 0,1,2,3$ Dirac-mátrixok (4×4)

γ_μ definíciója: $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} := \gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}\mathbb{1}_{4\times4}$

Standard reprezentáció:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2\times2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{2\times2} \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

Pauli-mátrixok

$$(\gamma^0)^+ = \gamma^0 \qquad (\gamma^i)^+ = -\gamma^i$$

Részecskefizika 2012. 12. 04.

Síkhullám megoldás

e^{-ipx}, e^{ipx} hely- és időfüggés

pozitív energiás (frekvenciás)

$e^{-ipx}u(p)$

spinor amplitúdó

negatív energiás (frekvenciás)

$e^{ipx}v(p)$

$p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

$(\gamma_\mu p^\mu - m)u(p) = 0$ $(\gamma^\mu p_\mu + m)v(p) = 0$

$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = H_Q \Psi$ ← Dirac-egyenletet átírva kvantummechanikai

p_0 és $-p_0$ energiás megoldásai ennek a fentiek

nyugalmi rendszer:

Spinje: 2 szabadsági fok

$s: \pm\frac{1}{2}$

χ_s bázisai: $\binom{1}{0}, \binom{0}{1}$

2 komponensű spinor

$$u_s(p) = \sqrt{p^0 + m}\begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{p_0 + m}\chi_s \end{pmatrix}$$ } ez már pedig 4 komponensű

Dirac-konjugált:

$\bar{u}_s(p) = u_s(p)^+ \gamma^0$

$\bar{u}_s u_s = 2m$

$$v_s(p) = -\sqrt{p^0+m}\begin{pmatrix}\frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{p^0+m}\varepsilon\chi_s \\ \varepsilon\chi_s\end{pmatrix} \qquad \varepsilon = \begin{pmatrix}0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix} \qquad \bar{v}_s v_s = 2m$$

$$u_s(p) = \sqrt{p^0+m}\cdot\begin{pmatrix}\chi_s \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{p^0+m}\chi_s\end{pmatrix} \qquad \bar{u}_s u_s = 2m$$

Síkhullám megoldás → együtthatók operátorosítása

$$\Psi(x) = \underbrace{\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p_0}}_{dp}\sum_{s=\pm 1/2}\left[e^{ipx}v_s(p)\beta_s^*(\vec{p}) + e^{-ipx}u_s(p)\alpha_s(\vec{p})\right]$$

klasszikusan $\alpha_s(p)$, $\beta_s^*(p)$ függvények

$\alpha_s(p) \to a_s(\vec{p})$, $\beta_s^*(p) \to b_s^+(\vec{p})$: operátorosítás, kvantálás

ettől Ψ is operátor lesz

Kommutációs relációk

- Pauli-elv fixelelben tartása
  azonos ½ spinű részecskék hfv.-e antiszimmetrikus

  $a_s(\vec{p})$, $b_s^+(\vec{p})$, $a_s^+(\vec{p})$, $b_s(\vec{p})$ operátorokat antikommutátormal kvantáljuk

$$\{a_s(\vec{p}), a_{s'}(\vec{p}')\} = 0 = a_s(\vec{p})a_{s'}(\vec{p}') + a_{s'}(\vec{p}')a_s(\vec{p})$$

$$\{b_s^+(\vec{p}), b_{s'}^+(\vec{p}')\} = 0$$

$$b_s^+(\vec{p})\,b_{s'}^+(\vec{p}')|0\rangle = -b_{s'}^+(\vec{p}')\,b_s^+(\vec{p})|0\rangle$$

$\to 2\,b_s^+(\vec{p})\,b_s^+(\vec{p}) = 0$ nem lehet 2 ua részecske 1 állapotban

2012. 12. 04.

$$\{a_s(\vec{p}), b_{s'}(\vec{p}\,')\} = 0$$

Nem 0: $\{a_s(\vec{p}), a_{s'}^+(\vec{p}\,')\} = (2\pi)\, 2p^0 \delta(\vec{p}-\vec{p}\,')\, \delta_{s,s'} =$

$$= \{b_s(\vec{p}), b_{s'}^+(\vec{p}\,')\}$$

Vákuum (= részecskementes állapot): $a_s(\vec{p})|0\rangle = b_s(\vec{p})|0\rangle = 0$

$\forall s, \vec{p}$

a_s, b_s eltüntető

a_s^+, b_s^+ keltő operátor

Egyrészecske állapotok:

$a_s^+(\vec{p})|0\rangle$ és $b_s^+(\vec{p})|0\rangle$ ez 4 db

$s = \pm\frac{1}{2}$

Minden operátorra igaz a Heisenberg-egyenlet:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = i\,[\underset{\sim}{H}, \Psi]$$

$t = x^0$

ez nem H_Q => ez a térelméleti.

Ψ kifejtését behelyettesítve (linearitást kihasználva)

$$\int d\tilde{p} \sum_{s=\pm 1/2} \left[e^{ipx} v_s(\vec{p})\, ip^0 b_s^+(\vec{p}) - e^{-ipx} u_s(\vec{p})\, ip^0 a_s(\vec{p}) \right] =$$

$$= \int d\tilde{p} \sum_{s=\pm 1/2} \left[e^{ipx} v_s(\vec{p})\, i\, [H, b_s^+(\vec{p})] + e^{-ipx} u_s(\vec{p})\, i\, [H, a_s(\vec{p})] \right]$$

$\forall p, s$ (síkhullámok teljes rr-t alkotnak) <=> $[H, b_s^+(\vec{p})] = p^0 b_s^+(\vec{p})$

$H^+ = H$ => vegyük mindkettő adjungáltját: $[H, a_s(\vec{p})] = -p^0 a_s(\vec{p})$

$[H, b_s(\vec{p})] = -p^0 b_s(\vec{p})$ $\quad [H, a_s^+(\vec{p})] = p^0 a_s^+(\vec{p})$

$(AB)^+ = B^+A^+$

$[H, a_s^{(+)}(\vec{p})] = \mp p^0 a_s^{(+)}(\vec{p})$ $\qquad$ $[H, b_s^{(+)}(\vec{p})] = \mp p^0 b_s^{(+)}(\vec{p})$

$H|0\rangle = 0$ vákuum energia

egyrészecske állapotok: pozitív energiával a vákuum felett

$a_s^+(\vec{p})$ és $b_s^+(\vec{p})$ H sajátértékét p^0-lal növeli $\Rightarrow$ keltő op.
másik kettő ugyanennyivel csökkenti ($p^0 > 0$) $\Rightarrow$ eltüntető op.

<u>Miért van 4 db egyrészecske állapot?</u>

2-t a kétféle spinbeállás magyarázza
Ekkor energiában degeneráltak (vákuum felett p^0)

$a_s^+(\vec{p})|0\rangle = |\vec{p}, s\rangle$

$\langle \vec{p}', s' | \vec{p}, s\rangle = \langle 0| a_{s'}(\vec{p}') a_s^+(\vec{p})|0\rangle = \delta_{s,s'} 2p^0 (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{p}')$
antikom

<u>$b_s^+(\vec{p})$ értelmezése:</u>

Dirac-egyenlet egy téregyenlet $\Rightarrow$ Lagrange-fv.
(Lagrange-Hamilton formalizmus)

$\bar{\psi} = \psi^+ \gamma^0$

$\mathcal{L}(\bar{\psi}, \psi)$

Elvárások:

- ME: Dirac-egyenlet

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})}$$

egyrészt ① $\mathcal{L} = \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi$ parciálisan integrálva

② $\mathcal{L} = \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) - m\bar{\psi}\psi$

(2)

$$\frac{i}{2}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi - \partial^\mu\left(-\frac{i}{2}\gamma^\mu\psi\right)$$

átrendezve valóban a Dirac-egyenlet

• $\mathcal{L}$ szimmetriái:

nem függ explicite a koordinátáktól
eltolásra invariáns (•)

fázistolás szabadság: (••)

$$\psi \to e^{i\alpha}\psi \qquad \bar\psi \to e^{-i\alpha}\bar\psi \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$\mathcal{L}$ invariáns

infinitezimális: $(1+i\alpha)\psi$ $\quad (1-i\alpha)\bar\psi$

(•) Energia-impulzus tenzor:

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\partial^\nu\psi + \partial^\nu\bar\psi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_\mu\bar\psi} - g^{\mu\nu}\mathcal{L} =$$

$$= \frac{i}{2}\bar\psi\gamma^\mu\partial^\nu\psi$$

$P_\nu = \int d^3x\, \Theta^0{}_\nu$ megmaradó négyesimpulzus

(••) megmaradó áram: $j^\mu = \bar\psi\gamma^\mu\psi$

$Q = \int d^3x\, \bar\psi\gamma^0\psi = \int d^3x\, \psi^+\psi$ megmarad

fizikai mennyiséghez kötés:

Emlékeztető:

külső teres Dirac-egyenlet:

A_μ 4-es elektromágneses mező vektorpotenciálja

$$(i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m)\psi = 0$$

$$\mathcal{L}' = \bar\psi(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + e\underbrace{\bar\psi\gamma^\mu\psi}_{j^\mu}A_\mu$$

$j^{em} = -e\bar\psi\gamma^\mu\psi$
elektron áramsűrűség

$Q = -e\int d^3x\, \psi^+\psi$ em. töltés

$$P_\mu = \int d^3x\, \Theta^0_\mu = \int \tilde{dp}\, p_\mu \sum_{s=\pm 1/2} \left(a_s^+(\vec{p})\, a_s(\vec{p}) - b_s(\vec{p})\, b_s^+(\vec{p})\right)$$

$P_0 = H$ Hamilton-operátor $\Leftarrow$ energia

$\underbrace{H|0\rangle = 0}_{\text{betöltött Dirac-tenger}}$ ez még nem automatikus

$\Downarrow$

normálrendezés

$\Psi \sim (b^+ + a)$ $\Psi^+ \sim (b + a^+)$

$\Psi^+\Psi \sim bb^+ + a^+a + ba + a^+b^+$

$\langle 0|Q|0\rangle = 0$ $\Rightarrow a^+a,\ ba,\ a^+b^+$ $\Rightarrow$ melyikek tudják a következőt:

Csak bb^+ nem tudja

$\langle 0|bb^+|0\rangle = \langle 0|\{b, b^+\}|0\rangle \Rightarrow$ ezt kell levonni ahhoz, hogy $\langle 0|Q|0\rangle = 0$ legyen

$$\boxed{:b_s(\vec{p})\, b_s^+(\vec{p}):} = b_s(\vec{p})\, b_s^+(\vec{p}) - \{b_s(\vec{p}), b_s^+(\vec{p})\} = \boxed{-b_s^+(\vec{p})\, b_s(\vec{p})}$$

$$:P_\mu: = \int \tilde{dp}\, p_\mu \sum_{s=\pm 1/2} \left(a_s^+(\vec{p})\, a_s(\vec{p}) + b_s^+(\vec{p})\, b_s(\vec{p})\right)$$

P_0 az $a_s^+(\vec{p})$-vel és $b_s^+(\vec{p})$-vel tudja a:

$$[H, a_s^+(\vec{p})] = p_0\, a_s^+(\vec{p})$$
$$[H, b_s^+(\vec{p})] = p_0\, b_s^+(\vec{p})$$

$$:Q: = -e \int \tilde{dp} \sum_{s=\pm 1/2} \left(a_s^+(\vec{p})\, a_s(\vec{p}) - b_s^+(\vec{p})\, b_s(\vec{p})\right)$$

Mi a különbség az $\underbrace{a_s^+(\vec{p})|0\rangle}_{|\vec{p}, s\rangle^{(-)}}$ és $\underbrace{b_s^+(\vec{p})|0\rangle}_{|\vec{p}, s\rangle^{(+)}}$ között:

$:Q:|\vec{p}, s\rangle^{(-)} = -e|\vec{p}, s\rangle^{(-)}$ $:Q:|\vec{p}, s\rangle^{(+)} = e|\vec{p}, s\rangle^{(+)}$

elektront és pozitront ír le.

Dirac-elmélet: ellentétes töltésű részecskepárok

QED: A relativisztikus elektron / pozitron rendszer kölcsönhatása az elektromágneses mezővel

Szabad elektromágneses mező

$$\mathcal{L}_{ED} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial^\mu A_\mu)^2$$

($\lambda = 1$ Feynman-mérték)

Szabad e^-/e^+ rendszer

$$\mathcal{L}_{\bar{\Psi}\Psi} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi \to \frac{i}{2}(\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \partial_\mu \bar{\Psi} i \gamma^\mu \Psi) - m\bar{\Psi}\Psi$$

Kölcsönhatás, csatolás: minimális csatolás

$$\mathcal{L}_I = e : \bar{\Psi}\gamma^\mu \Psi : A_\mu$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ED} + \mathcal{L}_{\bar{\Psi}\Psi} + \mathcal{L}_I$$ modell Lagrange-függvénye

Klasszikusan $\mathcal{L}$-ből motiváció:

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} \equiv \Box A^\mu = -e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$$

$$(i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m)\Psi = 0$$ ⇒ ME külső teres Dirac-egyenlet

Olyan spektrumra vezet, melyet a laborban látunk.

impulzusok:

$$\pi_\Psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Psi)} = \frac{i}{2}\bar{\Psi}\gamma^0$$

$$\pi_{\bar{\Psi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \bar{\Psi})} = -\frac{i}{2}\gamma^0\Psi$$

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^\mu)} = F^{0\mu} - g^{0\mu}\partial^\nu A_\nu$$

$$:H: = \int d^3x :(\pi_i \dot{\phi}_i - \mathcal{L}): = \int d^3x :\Big\{ \underbrace{\tfrac{1}{2}\dot{A}_i^2 + \tfrac{1}{2}(\vec{\nabla}A_i)^2 - \tfrac{1}{2}\dot{A}_0^2 - \tfrac{1}{2}(\vec{\nabla}A_0)^2 - i\bar{\psi}\gamma^i\nabla_i\psi + m\bar{\psi}\psi}_{H_0 \text{ szabad mezők}} \underbrace{- e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu}_{H_I \text{ kh.}} \Big\}:$$

$:H: = H_0 + H_I$

Kölcsönhatási képben:

- $\forall$ operátor időfejlődése szabad $\Rightarrow$ az a síkhullám kifejtés igaz, amit eddig megbesz.
- Az operátorok időfejlődését a H_0-lal való kommutátor határozza meg $\Rightarrow U(t,t_0)$-lal

$H_I^{(I)}(t)$ → szabad operátor

$t \to -\infty \ |i\rangle \qquad t \to \infty \ \langle f|$

Átmeneti amplitúdó:

$$S_{fi} = T\langle f|\exp\Big(-i\int_{-\infty}^{\infty} H_I^I(t)\,dt\Big)|i\rangle =$$

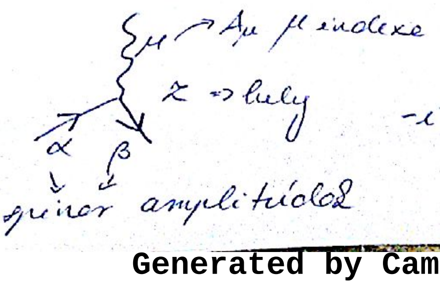
$$= T\langle f|\exp\Big(ie\int d^4x :\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu:\Big)|i\rangle$$

Kis paraméter, ami szerint iterálunk az e ⇒ ebből lesz

$$\alpha \approx \frac{1}{137} \text{ tényleg pici}$$

Perturbáció ezt lehet Feynman-diagramokkal ábrázolni:

. vertex (kh. húzása) H_I-ből:



$-ie(\gamma^\mu)_{\beta\alpha}$ a járuléka

Részecskefizika 2012. 12. 11.

foton propagátor $\sim\sim$ ismert fv.

e^+/e^- propagátor $\longrightarrow$

$\longleftarrow$ ismert fv.

H_I a töltést megőrzi.

$\Downarrow$

vagy átfutó fermion vonalak vannak vagy zárt fermion hurkok.

Alkalmazás: Rugalmas $e^-e^- \to e^-e^-$ szórás

$$e^-(r_1, p_1) + e^-(r_2, p_2) \longrightarrow e^-(r_3, p_3) + e^-(r_4, p_4)$$

r: spin, p: impulzus

$$p_i^2 = (p_i^0)^2 - \vec{p}_i^{\,2} = m^2$$

4-es impulzusmegmaradás

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4$$

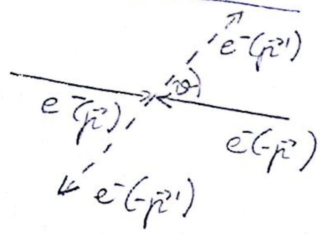
3 Lorentz-invariáns

$$s = (p_1 + p_2)^2$$

$$t = (p_1 - p_3)^2$$

$$u = (p_1 - p_4)^2$$

TKP rendszerben:



ϑ: TKP-beli szórási szög

$\Downarrow$

invariáns

$p_1 = (p_0, \vec{p}\,)$ $\quad p_2 = (p_0, -\vec{p}\,) \xrightarrow[\text{szórás}]{\text{rugalmas}} p_3 = (p_0, \vec{p}\,')$ $\quad p_4 = (p_0, -\vec{p}\,')$

rugalmas szórás:

$$|\vec{p}\,| = |\vec{p}\,'|$$

$s = 4p_0^2$ $\qquad t = -4\vec{p}^{\,2} \sin^2\frac{\vartheta}{2}$ $\qquad u = -4\vec{p}^{\,2} \cos^2\frac{\vartheta}{2}$

$s = 4p_0^2 \qquad t = -4\vec{p}^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2} \qquad u = -4\vec{p}^2 \cos^2\frac{\vartheta}{2}$

Klasszikusan

(Rutherford) klasszikus elektrodinamika szerint 2 ponttöltés szóródása egymáson megkülönböztethetőket kzm:

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{klasszikusan}} = \frac{\alpha^2 m^2}{16\,|\vec{p}|^4}\left(\frac{1}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}} + \frac{1}{\cos^4\frac{\vartheta}{2}}\right)$$

e^--k megkülönböztethetetlenek

$+ \quad \vartheta \to \pi - \vartheta$

Kvantummechanikailag van hozzá korrekció

Azonos részecskék miatt QFT-ből 2 Feynman-diagram van

Valószínűség: $\big|\underbrace{\sum \text{diagram}}_{\text{átmeneti amplitúdó}}\big|^2 \Rightarrow$ VAN interferencia lag

$t \to -\infty$ bejövő áll.: $|t \to -\infty\rangle = |i\rangle = a^+_{r_1}(p_1)\, a^+_{r_2}(p_2)|0\rangle$

kimenő áll.: $\langle t \to \infty| = \langle f| = \langle 0|\, a_{r_3}(p_3)\, a_{r_4}(p_4)$

Legalacsonyabb rendben S_{fi}:

$$\int d^4x : \bar{\psi}(x)\gamma^\mu \psi(x) : A_\mu(x)$$

1. rendben

$$\langle f| \int d^4x : \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) : A_\mu(x)|i\rangle$$

$$\langle 0| A_\mu |0\rangle = 0$$

nincs járulék

Részecskefizika

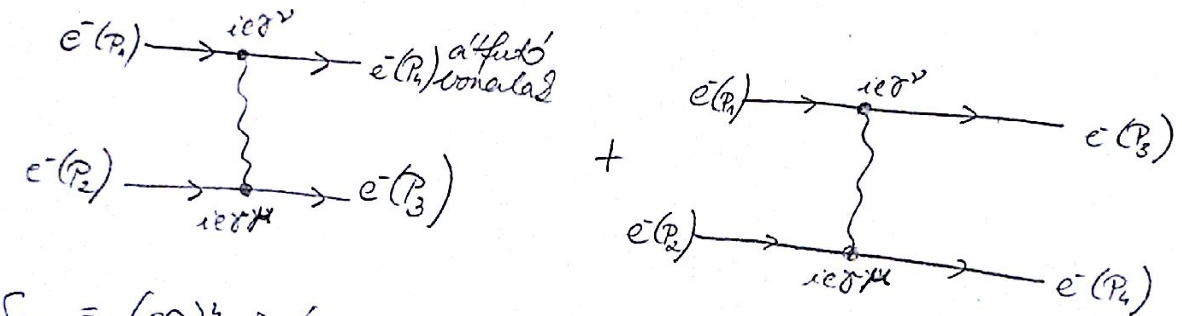
2. rendben

$$S_{fi} = \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \langle 0| a_{r_3}(P_3) a_{r_4}(P_4) T\Big(:\bar\psi(x_1)\gamma^\mu \psi(x_1): A_\mu(x_1) \cdot$$

$$\cdot :\bar\psi(x_2)\gamma^\nu\psi(x_2): A_\nu(x_2)\Big) a^+_{r_1}(P_1) a^+_{r_2}(P_2)|0\rangle$$

2 Feynman-diagram:

$\xrightarrow{t}$



$$S_{fi} = (2\pi)^4\, \delta(P_1+P_2-P_3-P_4)\, T_{fi}$$

$$T_{fi} = \frac{1}{i}\Big\{ \bar u_{r_4}(P_4)(ie\gamma^\mu) u_{r_1}(P_1) \frac{(-i)g_{\mu\nu}}{(P_4-P_1)^2} \cdot \bar u_{r_3}(P_3)(ie\gamma^\nu) u_{r_2}(P_2) -$$

$$- \bar u_{r_3}(P_3)(ie\gamma^\mu) u_{r_1}(P_1) \frac{(-ig_{\mu\nu})}{(P_3-P_1)^2} \cdot \bar u_{r_4}(P_4)(ie\gamma^\nu) u_{r_2}(P_2)\Big\}$$

azonos részecskék ⇒ Pauli-elv

antiszimmetrikus hullámfv.

Polarizálatlan hatáskeresztmetszet

Kezdő áll spinjeire átlagolás

Végáll-beli spinekre összegzünk

$d\sigma \sim \ldots |T_{fi}|^2$ összes spinre kiösszegezve

(Møller 1932)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{s t^2 u^2}\left\{(s-2m^2)^2(t^2+u^2) + ut(-4m^2 s + 12m^4 + ut)\right\}$$

$\alpha^2 \Rightarrow$ 2-d rend (diagram e^2-tel) fázistér tartománya: $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$

$$0 \geq t \geq -\frac{1}{2}(s-4m^2)$$

Nem relativisztikus limesz:

$$|\vec{p}| \ll m \qquad E^2 \approx m^2$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 m^2}{16|\vec{p}|^4}\left(\underbrace{\frac{1}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}} + \frac{1}{\cos^4\frac{\vartheta}{2}}}_{\text{Rutherford alapján}} \underbrace{- \frac{1}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}\cos^2\frac{\vartheta}{2}}}_{\text{korrekció az interferenciatagból}}\right)$$

fermion tulajdonság

QM-i interferencia a 2 diagram között

Ultrarelativisztikus limesz

$$|\vec{p}| \gg m$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{s}\frac{(3+\cos^2\vartheta)^2}{\sin^4\vartheta} \Rightarrow \underbrace{s\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big|_{\text{Møller}}}_{\text{dimenziótlan}} \text{ független } s\text{-től}$$

„skálázik"

Ha az elektron pontszerű voltára lehet ebből kísérletileg következtetni. Ha e^--nak van r mérete

$$r \sim 1/\Lambda \quad \text{(nem Compton hullámhossz hanem eldent töltés)}$$

$$\Downarrow$$

$$s\frac{d\sigma}{d\Omega} = f\left(s/\Lambda^2\right) \Rightarrow \text{nem lehetne } s\text{-független}$$