RÉSZECSKEFIZIKA 09.13.

Elemi részecske: nincs szubstruktúrája → nincs belső töltéseloszlása

jellemzője: tömeg (m), spin (s), töltéset, mágneses momentum

Részecskefizikában a $\boxed{\hbar = c = 1}$ egységrendszert használjük ⇒ ∀ mennyiség tömegben vagy energiában kifejezhető

pl.: $\lambda = \frac{\hbar}{mc} = \frac{1}{m}$, $t = \frac{\lambda}{c} = \frac{\hbar}{mc^2} = \frac{1}{m}$ ⇒ x^μ

$\mu = 0,1,2,3$ 4esvektor ∀ komponense kifejezhető $\frac{1}{m}$-ben $E = mc^2 \Rightarrow E = m$ → tömeget energia egységekben mérjük!

pl: $m_e \cong 0{,}5$ MeV, $m_p \cong 930-940$ MeV ≈ 1 GeV

XX. sz. eleje: $p, e, \gamma, \dots, n, e^+, \dots$ gyorsítók sok új részecske

Mai elemi részecskék:

kvarkok és leptonok → anyagi részecskék

→ fermionok (1/2 spin)

$\gamma, g, Z^0, W^\pm$ → kölcsönhatást közvetítő részecskék

↳ bozonok

γ, g tömege ∅, $Z^0, W^\pm$ nagy tömegű

Hadronok: kvark kötött állapotok

barionok → 3 kvark

mezonok → kvark-antikvark állapotok

→ ∀ kvark, lepton[redacted] van antirészecskéje → tömeg, spin ugyanaz, töltés (-1)-szerese

$p\,(u,u,d)$, $n\,(u,d,d)$, $\Lambda\,(u,d,s)$, $\pi^+(u,\bar{d})$

~~xx~~ $K^0\,(\bar{s}, d)$

$\pi^- + p \to K^0 + \Lambda$ egy megfigyelhető reakció

$(\bar{u}, d) + (u, u, d) \to (\bar{s}, d) + (u, d, s)$

d, u, d : spektátorok

$\bar{u}u \to \bar{s}s$

hadronok közötti folyamatokat kvark szinten lezajló folyamatokra vezetjük vissza

$m_p \approx 1\ GeV$ → nem jön ki a kvark tömegéből

+ gluonok adják

$m_\tau \approx 1{,}77\ GeV$ és mégis a könnyű részecskék közé soroljuk

Pauli elv azonos részecskék hullámfüggvénye:

$\frac{1}{2}$ spinűek ⇒ antiszimmetrikus

1 spinűek ⇒ szimmetrikus

$\psi = \alpha(\ )\beta(\text{spin})$ → β szimmetrikus v. antiszimm.

↳ relatív koordináta, $\vartheta, \varphi \to Y_l^m(\vartheta, \varphi)$

$\Rightarrow \varphi = \varphi + 2\pi$ és $\vartheta = \vartheta + \pi$

$\Rightarrow Y_l^m(\vartheta, \varphi) \to (-1)^l Y_l^m(\vartheta, \varphi)$

$\alpha = (-1)^l \alpha$

azonos bozonok : $\begin{cases} \alpha \text{ és } \beta \text{ szimmetrikus} \\ \alpha \text{ és } \beta \text{ antiszimmetrikus} \end{cases}$

azonos fermionok : $\begin{cases} \alpha \text{ szimmetrikus, } \beta \text{ antiszimm.} \\ \alpha \text{ antiszimm., } \beta \text{ szimm.} \end{cases}$

pl: $\rho^0 \not\to 2\pi^0$

spin 1 0 impulzusmomentum megmarad

ha β szimmetrikus és azonos bozonok ⇒ α is szimm.

⇒ l páros ⇒ ami nem OK, mert kezdetben $l = 1$ volt ⇒ nincs ilyen bomlás

Leptonok: → nem létesítenek kötött állapotot

→ leptonszámok megmaradása

$(e^- \mu^- \tau^-)(\nu_e\ \nu_\mu\ \nu_\tau)$ → balkezesek → $-\frac{1}{2}$ spinimpulzusirányú vetülete

$(e^+ \mu^+ \tau^+)(\bar{\nu}_e\ \bar{\nu}_\mu\ \bar{\nu}_\tau)$ → jobbkezesek → $+\frac{1}{2}$ a spin-impulzus irányú vetülete

spin impulzus vetületük Lorentz invariáns

neutrinóknak van tömege → nincs benne a SM-ben

leptonszámok: L_e, L_μ, L_τ

összes bomlásban megmaradnak külön-külön és nincs olyan bomlás ahol sérült volna

		+1	−1	0
elektronikus leptonszám	L_e	e^-, ν_e	$e^+, \bar{\nu}_e$	más
müonikus	L_μ	μ^-, ν_μ	$\mu^+, \bar{\nu}_\mu$	más
tauikus	L_τ	τ^-, ν_τ	$\tau^+, \bar{\nu}_\tau$	más

pl: $\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$ helicitás mérések

L_μ −1 0 0 −1

L_e 0 −1 +1 0

$\mu^+ \not\to e^+ + \gamma$ ilyen nincs

töltött leptonok: em, gyenge kölcsönhatásban

semleges –"– : gyenge –"–

↳ felső korlát: $\Gamma(\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu) < 10^{-9}$

kvarkok 3 színben léteznek: (QQQ) és $(Q\bar{Q})$

09. 20.

kvarkok barionszáma $1/3$

antikvarkok barionszáma $-1/3$

barionszám mindig megmarad $p \not\to \pi^+ \pi^0$

barion: (QQQ) $B = 1$

mezon: $(Q\bar{Q})$ $B = 0$

antibarion: $(\bar{Q}\bar{Q}\bar{Q})$ $B = -1$

RÉSZECSKEFIZIKA

09.20

Kölcsönhatások:

közvetítő részecskék cseréje

hatótávolság, erősség jellemzi

EM, gyenge, erős (gravitáció)

hatótávolság: ∞, 10^{-15} m, 10^{-15} m $= 1$ fm $= 1$ fermi

hatótávolság ~ közvetítő tömege:

a) $\Delta E \Delta t \sim \hbar$ $\quad E \approx mc^2$ $\quad \Rightarrow \Delta t \sim \frac{\hbar}{mc^2}$

hatótáv $R \sim c\Delta t \sim \frac{\hbar}{mc} = \lambda$ Compton-hullámhossz

b) $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ (tömeghéjfeltétel)

$E \to i\hbar\partial_t \qquad \vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \Delta\psi - \frac{mc^2}{\hbar^2}\psi = 0$$ ($m = 0$ hullámegyenlet)

sztatikus megoldás $\psi(\vec{x}, t) \to u(\vec{x})$

$\Delta u = \frac{mc^2}{\hbar^2} u$ gömbszimmetrikus az origóban pontszerű forrással

$u(r) = \frac{g}{4\pi r} e^{-r/R}$ „árnyékolt Coulomb potenciál"

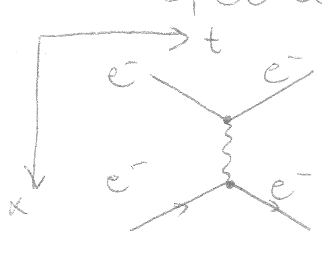
g: pontszerű forrás erőssége → csatolási áll.

ha $R \sim 10^{-15}$ m $\Rightarrow m \sim 100$ MeV ($m_\pi \sim 135-140$ MeV)

e.m. k.h. $m = 0$, $g \to e$ $\quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \sim \frac{1}{137}$ finomszerkezeti állandó $\Rightarrow$ perturbációszámítás

Feynman diagramok segítségével lehet ábrázolni a perturbációszámítás különböző rendjeit

pont (vertex)	belső vonalak	külső vonalak
kölcsönhatás keltés, eltűnés	részecskék propagátorai	kezdő és végállapoti részecskék



$e^-e^- \to e^-e^-$

szórás

gyenge kölcsönhatás: (ν-t a folyamatban)

↳ a kvarkízek megváltoznak

↳ $W^\pm$ és Z^0 cseréjével képzeljük el

↳ töltés változik

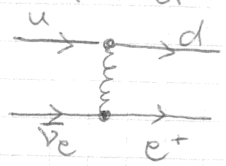
töltés nem változik

} össztöltés megmarad

$\bar{\nu}_e p \to n e^+$

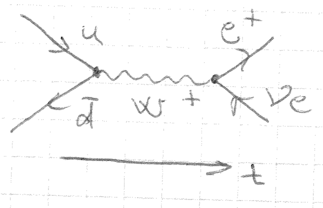
$uud \to udd$

$u \to d$

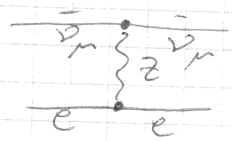


$\pi^+ \to e^+ \nu_e$

$u\bar{d} \to e^+ \nu_e$



$\bar{\nu}_\mu e \to \bar{\nu}_\mu e$



kölcsönhatások erősségének aránya:

$$\frac{\text{gyenge}}{\text{EM}} \sim \frac{g^2}{\alpha} \sim \sqrt{\frac{\tau_\gamma}{\tau_{gyenge}}}$$

$\Sigma^0 \to \Lambda \gamma \qquad \tau_\gamma \sim 10^{-19}\,s$

$\Sigma^- \to n \pi^- \qquad \tau_{gyenge} \sim 10^{-10}\,s$

$$\frac{\text{gyenge}}{\text{EM}} \sim \left(\frac{10^{-19}}{10^{-10}}\right)^{1/2} \sim 10^{-5}$$ → lehet perturbatíve számolni

alacsony energián G_F = Fermi-féle csatolási állandó

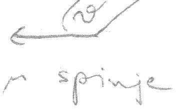
$$f_{W^+}(q) \sim \frac{1}{q^2 + M_W^2}$$ propagátor

$$q^2 << M_W^2 \Rightarrow f_{W^+}(q) \sim \frac{1}{M_{W^+}}$$

$$\Rightarrow G_F \sim \frac{g^2}{M_W^2} \sim 10^{-5}\,(GeV)^{-2}$$

gyenge kölcsönhatásban sérül a szimmetria

$\mu^- \to e \bar{\nu}_e \nu_\mu$



e impulzusa (vektor)

μ spinje (axiálvektor)

} tükrözésre ellentétes lesz

$$d\Gamma(\cos\vartheta) \sim \left(1 - \frac{1}{3}\cos\vartheta\right) d(\cos\vartheta)$$

$\vartheta \to \pi - \vartheta$ paritás $\Rightarrow$ nem szimmetrikus eloszlás
paritás általában sérül

Erős kölcsönhatás:

$$\frac{\text{erős}}{\text{EM}} \sim \sqrt{\frac{\tau_\gamma}{\tau_{erős}}} \sim \left(\frac{10^{-19}}{10^{-23}}\right)^{1/2} \sim 10^2 \qquad \frac{\alpha_s}{\alpha} \sim 100$$

$$\alpha_s \sim \frac{g_s^2}{4\pi} \sim 1$$

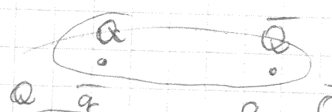
$\Sigma^0 \to \Lambda\gamma \Rightarrow \tau_\gamma \sim 10^{-19}\,s$

$K^- p \to \Sigma^0\,(1385\text{ MeV}) \to \Lambda\pi^0 \qquad \tau_{erős} \sim 10^{-23}\,s$

$\alpha_s \Rightarrow$ nem lehet perturbatíve számolni
$\forall$ kvark 3 színben van (SU(3))
gluon: G^a_μ szín-antiszín kvantumszámot hordoz (8 db gluon)
színszimmetria exakt: csak színszinglett állapotok figyelhetők meg (színtelen)
kvarkbezárás: $Q\bar{Q}$ kölcsönhatási potenciál
r távolság

$$V_s(r) = -\frac{4}{3}\frac{\alpha_s}{r} + kr$$

$\downarrow$
Coulomb-szerű



energetikailag kedvezőbb

α_s, k kimérhetőek

Szimmetriák és megmaradási tételek:
szimmetriaművelet, amely a rendszert invariánsan hagyja
folytonos paraméter $\to$ eltolás, forgatás
diszkrét $\to$ paritás

RÉSZECSKEFIZIKA

09. 27.

Szimmetriák és megmaradási tételek

Minden szimmetriához tartozik egy operáció mely a rendszert invariánsan hagyja

- folytonos → additív
- diszkrét → multiplikatív

megmaradó mennyiség tartozik hozzá

Heisenberg képben $[\mathcal{H}, Q] = 0$

↳ szimmetria operátor

Paritás: $\vec{r} \to -\vec{r}$

$$(x, y, z) \to (-x, -y, -z)$$

$P\,\Psi(\vec{r}, t) \to \Psi(-\vec{r}, t)$

$P^2 = 1 \Rightarrow$ sajátértékei: ± 1 → állapot paritása

Ψ nem feltétlen paritás sajátállapot

$\hat{P}$ megmarad, ha $[\mathcal{H}, P] = 0$

$\mathcal{H} \Rightarrow V(\vec{r}) = V(-\vec{r})$ teljesül pl ha $V(r)$

kötött állapotok határozott paritásúak

$\Psi(r, \vartheta, \varphi) = \chi(r)\, Y^{lm}(\vartheta, \varphi)$

$$\vartheta \to -\vartheta + \pi$$

$$\varphi \to \varphi + \pi$$

$$Y^{lm}(\vartheta, \varphi) \to (-1)^l\, Y^{lm}(\vartheta, \varphi)$$

paritás multiplikatív ⇒ 2 részrendszer paritását összeszorozva a teljes rendszer paritása

Pl: kísérletileg $\pi^{\pm,0}$ paritása (−) ⇒ pszeudoskalár részecskék

$$\boxed{\pi^- + d \to n + n}$$

- π^- 0 spinű
- π^- s pályáról fogódik be $(l=0)$ | tudjuk
- deutérium spinje $= 1$

kezdőállapot $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} = 1$ $\Rightarrow$ impulzusmomentum megmarad $\Rightarrow$ végállapot $\vec{J} = 1$

2n végállapot: L pálya S spin

$S = 0$ vagy $S = 1$ (neutron spinje 1/2)

antiszimmetrikus, szimmetrikus 2 neutron cserére

Pauli elv szerint 2n állapot antiszimmetrikus

$$(-1) = (-1)^{L}(-1)^{S+1} \Rightarrow L+S \text{ páros}$$

$$J = 1 \quad \left.\begin{array}{ll} L = 0 & S = 1 \\ L = 1 & S = 1, 0 \\ L = 2 & S = 1 \end{array}\right\}$$

lehetőségektől $L = 1$ $S = 1$ $\Rightarrow L + S$ páros

$\Rightarrow$ 2n ~~végállapot~~ $^3P_1$ állapotban van

(-1) paritással

$$(-1) P_n P_n = P_\pi P_d = P_\pi P_p P_n$$

barionok (fermionok) sajátparitását a Dirac-egyenlet nem határozza meg, konvenció $P_n = P_p = 1$

$\Rightarrow P_\pi = -1$

pionra $J^P = 0^-$ pszeudoskalárok

barionok $J^P = 1/2^+$

több ilyen pszeudoskalár mezon van

0^+ skalár részecske nincs a hadronok között

1^- vektormezonok

1^+ axiálvektor

Dirac egyenlet egyértelműen meghatározza a $\psi\bar{\psi}$ (fermion-antifermion) relatív paritás $= -1$

$p\bar{p} \to p\bar{p}(p\bar{p})$

-1 kísérletileg ok

pion paritás meg tudtuk határozni, mert egyedül keletkezett ritka részek párban keletkeznek

$$pp \to p + \underbrace{\Lambda + K^+}_{(-1)} \leftarrow \text{kísérlet}$$

$(-1) = P_\Lambda P_K = P_K \Rightarrow K$ is 0^- pszeudoskalár

$\Lambda\left(\frac{1}{2}\right)^+$ mert barion

erős és em megtartja, gyenge sérti a paritást

<u>C paritás</u>: töltéskonjugáció az operáció

∀ töltést (−1)-szeresére változtatja

↳ (em töltés, barionszám, leptonszám ...)

részecske ⟷ antirészecske

$C|\pi^+\rangle = |\pi^-\rangle$, $C|\pi^-\rangle = |\pi^+\rangle$, $C|\pi^0\rangle = \eta|\pi^0\rangle$

semleges részecskék a priori lehetnek C sajátállapotok

$C^2 = 1$, $\eta^2_{\pi_0} = 1$, $\eta_{\pi_0} = \pm 1$

Maxwell-egyenletek $\to (\rho, \vec{j}) \xrightarrow{C} (-\rho, -\vec{j})$

↳ invariánsak, ha $(\vec{E}, \vec{B}) \xrightarrow{C} (-\vec{E}, -\vec{B})$

⇒ a foton C paritása (-1), n db foton $(-1)^n$

$\pi^0 \to \gamma\gamma$ megfigyelt folyamat $\Rightarrow \eta_{\pi^0} = +1$

$\pi^0 \not\to 3\gamma$ nem lehet ilyen folyamat

<u>Izospin</u>: Heisenberg → magerők töltésfüggetlenségeinek magyarázatára vezette be

erős kölcsönhatás szempontjából proton és neutron „egyforma"

p és n az N (nukleon) kétféle állapota

$|p\rangle = |N\rangle_1$ $|n\rangle = |N\rangle_2$

fizikailag $|N\rangle_a = U_{ab}|N\rangle_b$

U_{ab} : (2×2), unitér, $\mathrm{Det}(U_{ab}) = 1$ mátrix

(k db $\rightarrow$ U_{ab} $(k\times k)$ unitér $\mathrm{Det}\,U = 1$ mátrix)

$U \in SU(2)$ csoport

$U = \exp(i\varepsilon^a I_a)$ $\quad a = 1, 2, 3$

ε^a paraméterek

$[I_a, I_b] = i\varepsilon_{abc} I_c$ (ε_{abc} Levi-Civita)

$\boxed{I_a = \frac{1}{2}\sigma^a}$ $\quad \sigma^a$ Pauli mátrixok

$|p\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\quad I_3|p\rangle = \frac{1}{2}|p\rangle$

$|n\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\quad I_3|n\rangle = -\frac{1}{2}|n\rangle$

$I^2 := I_1^2 + I_2^2 + I_3^2$ $\quad [I^2, I_a] = 0$

sajátértékei $I(I+1)$ $\quad I = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$

$|N\rangle$ ábrázolásra $I = \frac{1}{2}$ $\quad \hookrightarrow$ ábrázolás dimenziója $(2I+1)$

protonra és neutronra $Q = I_3 + \frac{1}{2}$

elektromos töltés

az erős kölcsönhatás izospin szimmetrikus : $[\mathcal{H}_s, I_a] = 0$

$\Rightarrow$ $[\mathcal{H}_s, I^2] = 0$, $[\mathcal{H}_s, I_3] = 0$

erős bomlás, szórás I_3-tól nem függ, csak I-től függ (milyen teljes izospinű állapotban vagyunk)

kiterjeszthető egyéb hadronokra is !

neutron és proton nem egyforma tömegű :

$$\frac{m_n - m_p}{m_n + m_n} = \text{néhány ezrelék!}$$ $\leftarrow$ ez nem az erős kölcsönhatás eredménye (elektromos kölcsönhatás nem tartja az izospint tiszteletben)

kiterjesztés közeli tömegű hadronokra:

pionok $\rightarrow$ 3 töltésállapot $\pi^\pm, \pi^0$ $\quad \frac{\Delta m_\pi}{m_\pi} \sim \frac{5}{140}$ kicsi

$I = 1 \rightarrow 2I+1 = 3$ állapot

$I_3 |\pi^\pm\rangle = \pm |\pi^\pm\rangle \qquad I_3|\pi^0\rangle = 0$

$Q = I_3 \Rightarrow Q = I_3 + \frac{B}{2}$

H^s izospin invarianciája:

$$\left.\begin{array}{l} \pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \\ \pi^- n \rightarrow \pi^- n \end{array}\right\} \text{két különböző folyamat} \quad \begin{array}{l} I_3 = \frac{3}{2} \\ I_3 = -\frac{3}{2} \end{array}$$

πN rendszer izospinje $1 \otimes \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2} \longrightarrow I = \frac{3}{2}$

teljes izospin megegyezik $\Rightarrow$ a két folyamat hatáskeresztmetszete megegyezik (kísérletileg OK)

Izospin és ritkaság

$\pi^- p \rightarrow \Lambda K^0$ · gyakran lejátszódnak

$\pi^0 p \rightarrow \Lambda K^+$ · nagy számban keletkeznek párban

· hatáskeresztmetszet erős folyamat

· Λ és K^+, K^0 is hosszú élettartamú, lassan bomlik $\Rightarrow$ gyenge folyamat $\Lambda \rightarrow p\pi^-$

· új kvantumszámot hordoznak ritkaság (s) az erős folyamatban megmarad a gyengében nem

Λ semleges, egy töltésállapot, izoszinglet $I = 0 \quad I_3 = 0$

	π^-	p	$\rightarrow \Lambda$	K^0
I	1	1/2	0	1/2
I_3	-1	1/2	0	-1/2
S	0	0	-1	1

izospin megmarad

$\Delta S = 0$

konvenció

	$\Lambda \rightarrow$	p	π^-
I	0	1/2	1
I_3	0	1/2	-1
S	-1	0	0

$\Delta S \neq 0$

bomlásban a ritkaság és az izospin nem marad meg

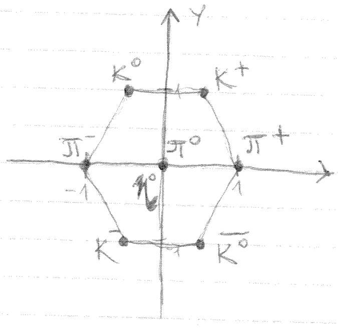
RÉSZECSKEFIZIKA

K^+, K^0 $I = \frac{1}{2}$ $S = 1$ izodublet

$$\boxed{Q = I_3 + \frac{1}{2}\underbrace{(B+S)}_{Y}}$$ Gell-Mann - Nishijima

Y hipertöltés

hadron állapotokat I_3-Y síkon ábrázolni:



0^- pszeudoskalár mezonok

(498; 494 MeV) $\underbrace{\pi^\pm, \pi^0}_{I=1}$, $\underbrace{K^+, K^0}_{I=\frac{1}{2}}$, $(\overline{K^0}, K^-)$

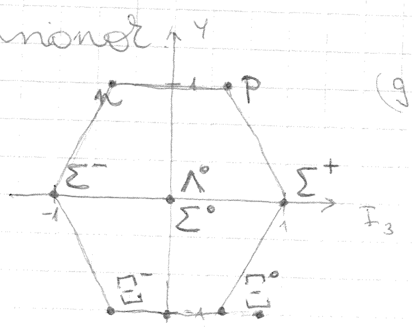
(140; 135 MeV) triplett $S=+1$ $I=\frac{1}{2}$ $S=-1$

(494; 498 MeV)

$(m_{\eta^0} = 540\text{ MeV})$

mezon oktett

$1/2^+$ barionok



(939 MeV) p, n $I = \frac{1}{2}$

Λ^0 $I = 0$ $S = -1$ 1116 MeV

$\Sigma^\pm, \Sigma^0$ $I = 1$ $S = -1$ 1193 MeV

Ξ^-, Ξ^0 $I = \frac{1}{2}$ $S = -2$

izospin és ritkaság kiterjesztése kvarkokra

u, d, s kvarkok

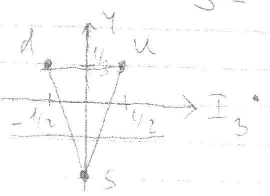
$\binom{u}{d}$ $I = \frac{1}{2}$ duplett $I_3 u = \frac{1}{2} u$ $I_3 d = -\frac{1}{2} d$

$S = 0$ $B = \frac{1}{3}$

$Q = I_3 + \frac{1}{2} Y$ = fennáll itt is

(s) $I = 0$

$S = -1$ $B = \frac{1}{3}$



$[I_i, I_j] = i\varepsilon_{ijk} I_k$ $i,j,k = 1,2,3$

$I_\pm = I_1 \pm i I_2$ $[I_3, I_\pm] = \pm I_\pm$ $[I_+, I_-] = 2I_3$

↳ léptető operátorok

$I_+|u\rangle = 0$ $I_-|u\rangle = |d\rangle$

$I_+|d\rangle = |u\rangle$ $I_-|d\rangle = 0$

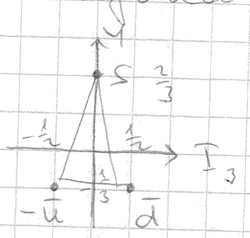
töltéskonjugáció:

C	u	$\to \bar u$	d	$\to \bar d$	s	$\to \bar s$
Q	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
B	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
S	0	0	0	0	-1	1

megköveteljük, hogy Gell-Mann - Nishijima antikvarkokra is igaz legyen

$$C\begin{pmatrix}u\\d\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\bar d\\ -\bar u\end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} = i\sigma_2$$

↳ fáziskonvenció



A hadronok kvarkmodellje és az $SU_F(3)$ (flavour) szimm.

Gell-Mann, Zweig (u, d, s) egy Q kvark 3 lehetséges állapota

$SU_F(3)$ transzformációk fizikailag ekvivalens állapotokat adnak

barion hullámfv-ek: $\Psi = \alpha(\text{tér})\beta(\text{spin})\gamma(\text{flavour})$

(QQQ) Pauli-elv miatt Ψ-nek antiszimmetrikusnak kell lenni

(I) hadron hullámfv. kvarkszerkezete

SU(3) nem egzakt

(II) $SU_F(3)$ flavour szimmetria és a tömegfelhasadás

(III) A kvarkmodell paradoxonai és a színszimmetria

(I) flavourben szimmetrikus γ esete:

uuu $I_3 = \frac{3}{2}$ maximális $Q = 2$ $B = 1$ $Y = 1$

szimmetrikus u-k cseréjére

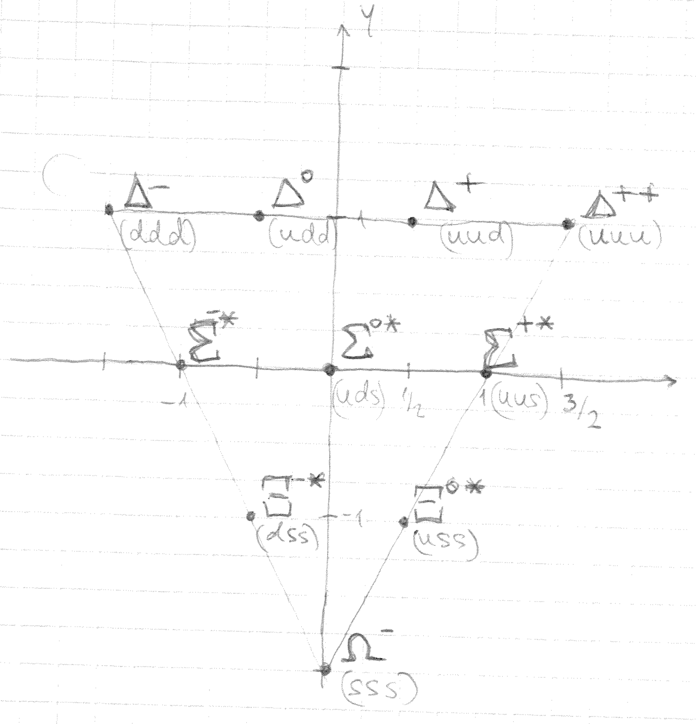
$$I_- = I_- \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes I_- \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes I_-$$

$\frac{1}{\sqrt{3}}(duu + udu + uud)$ szimmetrikus

jelöljük uud $I_3 = \frac{1}{2}$ $Q = 1$ $B = 1$ $Y = 1$

udd $I_3 = -\frac{1}{2}$ $Q = 0$ $B = 1$ $Y = 1$

ddd $I_3 = -\frac{3}{2}$ $Q = -1$ $B = 1$ $Y = 1$



$\left(\frac{3}{2}\right)^+$ barion dekuplet

$I = \frac{3}{2}$ Δ-rezonanciák (1232 MeV)

$I = 1$ 1384 MeV

$I = \frac{1}{2}$ 1539 MeV

$I = 0$ 1672 MeV

$\frac{1}{\sqrt{3}}(uus + usu + suu)$	$I_3 = 1$	$Q = 1$	$S = -1$	$Y = 0$
$\downarrow I_-$				
uds	$I_3 = 0$	$Q = 0$	$S = -1$	$Y = 0$
$\downarrow I_-$				
dds	$I_3 = -1$	$Q = -1$	$S = 1$	$Y = 0$
$\frac{1}{\sqrt{3}}(uss + sus + ssu)$	$I = \frac{1}{2}$	$Q = 0$	$S = -2$	$Y = -1$
$\downarrow I_-$				
dss	$I = -\frac{1}{2}$	$Q = -1$	$S = -2$	$Y = -1$
sss	$I = 0$	$Q = -1$	$S = -3$	$Y = -2$

barion oktett ?

γ és β együtt szimmetrikus

kvarkflavour és spin egyidejű cseréjére szimmetrikus

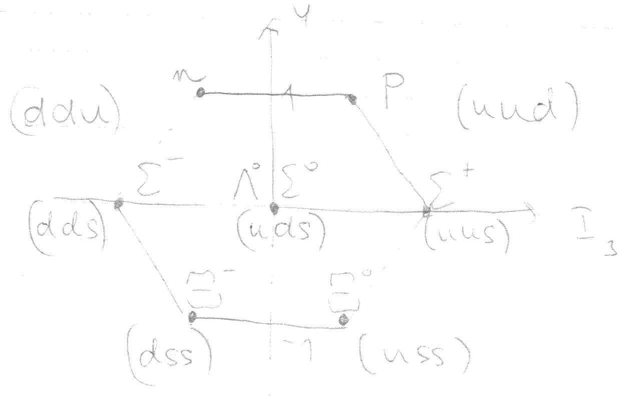
↑n

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u\rangle|d\rangle - |d\rangle|u\rangle\right) =$$

spin szinglett   izospin szinglett

$$= \frac{1}{2}\left(\uparrow u\downarrow d - \uparrow d\downarrow u - \downarrow u\uparrow d + \downarrow d\uparrow u\right)$$

↑n = ↑d szorzás és ciklikusan permutáljuk

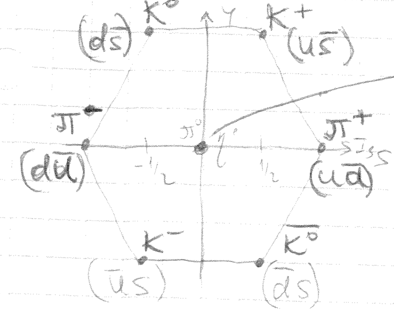


$I = \frac{1}{2}$ $I_3 = -\frac{1}{2}$ ↑ spin

$\left(\frac{1}{2}\right)^+$ barionok

8 db ilyen állapot

0^- mezonok $|Q\bar{Q}\rangle$ nem kell szimmetrizálni



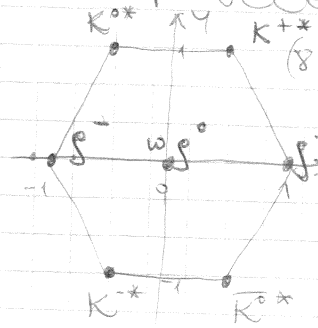
$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} \pm d\bar{d})$ π^0 η^0

0 spin kvarkspinekkel: $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$

1 spinű mezonok $\to$ kvark spinek „egyirányúak"

$\uparrow\uparrow$ $\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow)$ $\downarrow\downarrow$

$\Rightarrow$ 1^- vektormezonokat jósol a modell



(898 MeV) ω: izoszinglett (783 MeV)

(770 MeV)

kísérletileg látható

II $(u, d, s) \to |Q^a\rangle$ $a = 1, 2, 3$

10. 11.

$|Q^a\rangle \to U^{ab}|Q^b\rangle$ $\forall U^{ab} \in SU(3)$ -ra fizikailag ugyanaz

3×3 unitér $\det U = 1$ mátrixok csoportja $SU(3)$

komplex 3D a fundamentális ábrázolás

$U = \exp\left[\frac{1}{2}\lambda^a i \varepsilon^a\right]$ $a = 1, \dots, 8$, ε^a valós

λ^a: hermitikus, spurtalan, 3×3 Gell-Mann mátrixok a szokásos bázis

f_{ijk} struktúr állandók

$\frac{\lambda_1}{2}$ $\frac{\lambda_2}{2}$ $\frac{\lambda_3}{2}$ zárt $SU(2)$ alcsoport

$Q^i = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$ egy részecske 3 állapota

$\left(\begin{array}{c|c} SU(2) & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \to$ izospin

λ_8 diagonális és izospinnel kommutál

$Y = \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_8$ hipertöltés $= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\lambda_8}{2}$

kvarkokból és antikvarkokból készíthető ábrázolások

$\bar{Q}^i = (\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$ $\quad U^* = \exp\left[-\frac{i}{2}\varepsilon^a \lambda_a^+\right]$

(SU(2)-ben $q\ \bar{q}$ ekvivalens)

$Q\bar{Q}$

$\boxed{3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8}$ $\quad$ singlett $\oplus$ 8 dimenziós ábrázolás

$3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3}$

$3 \otimes 6 = 8 \oplus 10$

(QQQ) $\quad \boxed{3 \otimes 3 \otimes 3} = (6 \oplus \bar{3}) \otimes 3 = \boxed{1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10}$

olyan részecske, melynek 10 belső állapota van $\to$ dekuplet

$U \to D(U)$ $\quad N \times N$ mátrix $\quad N = 8 \quad N = 10$

$D(U_1) D(U_2) = D(U_1 U_2)$

$D(U) = \exp(i\varepsilon^a F_a)$

$F_a \quad a = 1 \ldots 8 \quad N \times N \quad [F_a, F_b] = i f_{abc} F_c$

egységelem környékén $\quad U \approx 1 + i\varepsilon^a \frac{\lambda_a}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$

(infitezimális transzformáció)

8-as ábrázolás (adjungált ábrázolás)

M $\quad 3 \times 3$ spurtalan, hermitikus mátrixok

$M = \sum_a c^a \frac{\lambda_a}{2} \quad c_a \in \mathbb{R}$

$\langle M' | M \rangle = 2\,\mathrm{tr}\left((M')^+ M\right)$

$U \to D(U) \quad M \to U M U^+$ $\quad$ (HF megmutatni, hogy valóban ábrázolás)

infitezimális $\quad M \to \left(1 + i\varepsilon^a \frac{\lambda_a}{2}\right) M \left(1 - i\varepsilon^b \frac{\lambda_b}{2}\right) = M + i\varepsilon^a \left[\frac{\lambda_a}{2}, M\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$

F_a 8×8 mátrix $\to$ generátorok ábrázolása

ha báziselem $M = \frac{\lambda_c}{2}$ $\quad F_a \quad M \to \left[\frac{\lambda_a}{2}, M\right] \to \left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_c}{2}\right] =$

$= i f_{abc} \frac{\lambda_b}{2}$

$$F_a \left| \frac{\lambda_c}{2} \right\rangle = \left| \frac{\lambda_b}{2} \right\rangle (F_a)_{bc} = i f_{abc} \left| \frac{\lambda_b}{2} \right\rangle = \frac{1}{i} f_{abc} \left| \frac{\lambda_b}{2} \right\rangle$$

$$\boxed{(F_a)_{bc} = \frac{1}{i} f_{abc}}$$

a 8 ábrázoláson a generátorokra a struktúr állandókkal lehet ábrázolni

hadronvilág: erős k.h. SU(3) invariáns

$$[H_s, D(u)] = 0$$

$$[H_s, F_a] = 0 \quad \Rightarrow \text{ dekuplett, oktett}$$

ugyanolyan tömegűek

Gell-Mann, Okubo: SU(3) sérül a különböző kvarktömeget miatt $m_u = m_d < m_s$ (csak ez a sértés van!)

nyugvó kvarkok $\langle Q^i | H_s | Q^j \rangle = \langle Q^i | 2 \frac{m_u + m_s}{3} \mathbb{1} + \frac{m_u - m_s}{\sqrt{3}} \lambda_8 | Q^j \rangle$

$H_s = H_0 + H_8$ (ezt mondták)

H_0: SU(3) invariáns

H_8: 8 as generátorként transzformálódik

H_8 "kicsi" lehet perturbatíven kezelni, elsőrendű perturbációszámítás elég lesz

$|h\rangle$ hadronállapot vmilyen SU(3) ábrázolásban

$$m_h = \langle h | (H_0 + H_8) | h \rangle = m_0 + \langle h | H_8 | h \rangle$$

$$m_0 = \langle h | H_0 | h \rangle$$

$H_8 \to F_8 \sim Y$ $\qquad Y = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\lambda_8}{2} \qquad Q = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$

$d_{8ab} F_a F_b$ is 8-asként transzformálódik $\qquad Y = \frac{2}{\sqrt{3}} F_8$ tetszőleges ábrázolás

$(\Rightarrow \{\lambda_i, \lambda_j\} = \frac{4}{3} \delta_{ij} + 2 d_{ijk} \lambda_k)$

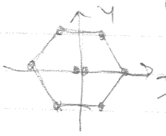
$$= -\frac{1}{2\sqrt{3}} \underbrace{F_a F_a}_{} + \frac{\sqrt{3}}{2} \underbrace{(F_1^2 + F_2^2 + F_3^2)}_{} - \frac{1}{2\sqrt{3}} F_8^2$$

generátorok négyzetösszege $= \text{const} \cdot \mathbb{1} \Rightarrow$ SU(3) inv.

$I(I+1)$ izospin $\qquad \sim Y^2 \qquad \tilde{m}_0 \triangleq$ ba

$$\boxed{m_h = \tilde{m}_0 + \delta m_1 Y + \delta m_2 \left(I(I+1) - \frac{Y^2}{4} \right)}$$

egy multipleten belül a hadrontömeget felhasadnak
$\tilde{m}_0$, δm_1, δm_2 SU(3) ábrázolás függőek
legáltalánosabb tömegformula volt
következményei? alkalmazzuk az $\left(\frac{1}{2}\right)^+$ barion-oktettre



4 különböző tömeg, de 3 paraméter

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(m_N + m_\Xi\right) = \frac{1}{4}\left(3m_\Lambda + m_\Sigma\right)$$

1129 MeV   1135 MeV

néhány ‰ eltérés

$\left(\frac{3}{2}\right)^+$ dekuplet F_8 és $d_{8ab}F_aF_b$ nem függetlenek

$I(I+1) - \frac{Y^2}{4}$ Y-nak lineáris fv-e

$m_h = \tilde{\tilde{m}}_0 + \tilde{\delta m}_1 Y$

$m_{\Sigma^*} - m_\Delta = 152$ MeV   erről még nem volt
$m_{\Xi^*} - m_{\Sigma^*} = 149$ MeV Ω^- ⇒ hol kell keresni
$m_{\Omega^-} - m_{\Xi^*} = 139$ MeV   ⇒ felfedezték

mezonok

0^- $4m_K^2 = 3m_\eta^2 + m_\pi^2$

$0{,}98\,(\mathrm{GeV})^2$ $0{,}92\,(\mathrm{GeV})^2$

III A kvarkmodell paradoxonai és a szín szimmetria

(1) tört töltést szabadon nem figyeltek meg
(2) (qqq) $(q\bar{q})$ vannak de (qq) $(qqqq)$ ... stb. állapot nincs
(3) Δ^{++} $\underbrace{uuu}_{\text{szimmetrikus}}$ $\frac{3}{2}$ spin kísérletileg ⇒ szimmetrikus
legalacsonyabb tömegű ⇒ térben is szimmetrikus
Pauli-elv???

(2)-(3) (1) feloldása színszimmetria

$\xrightarrow{\text{szín}}$

$u_\alpha = (u_1 \ u_2 \ u_3)$
$d_\alpha = (d_1 \ d_2 \ d_3)$ $SU(3)_C$
$\vdots$
flavour ↓

$SU(3)_c$ egzakt szimmetria (nem sérül) posztulátum → csak szinglett állapotok figyelhetők meg

$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8 \Rightarrow$ van szinglet $(q\bar{q})$ ✓

$3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3} \Rightarrow$ nincs –"– $\cancel{(qq)}$

$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \Rightarrow$ van (qqq) ✓ stb.

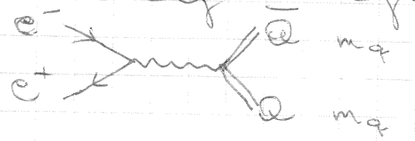
$u_\alpha u_\beta u_\gamma \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ antiszimmetrikus ⇒ Pauli-elvnek eleget tesz

Miért 3 szín van? 2 kísérleti igazolása a 3 db színnek ① $R = \frac{\sigma(e^+e^- \to hadron)}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)}(s) =$

$Q_q \to$ kvarktöltés (e) $\quad = N \sum Q_q^2$

színek száma

$\sum \to$ kinematikailag megengedett kvarkokra



először $s \ll 4m_c^2$ $\quad u, d, s$

$s > 4m_c^2$ $\quad u, d, s, c$ kvark $\quad$ ↕ ugrás

ugrás $\sim NQ_c^2 = N\frac{4}{9} = \frac{4}{3} \Rightarrow N = 3$

kísérlet

10.18.

CP invariancia és sérülése a $K^0\,\bar{K}^0$ rendszerben

- 1956-57 a gyenge kölcsönhatás sérti C-t és P-t, de a CP invariáns
- CPT invariancia elméletileg és kísérletileg nagyon pontosan igazolva
- ha CP invariáns, akkor T is
- 1964. semleges K^0 2π bomlásában CP sérül

⇒ T invariancia mikroszkópikus szinten sérül

RÉSZECSKEFIZIKA

10.18.

CPT invariancia:

$CPT|a\rangle = |\bar{a}\rangle$

$\langle b|H|a\rangle^* = \langle \bar{b}|H|\bar{a}\rangle$

következménye: - stabil részecskére $m_a = m_{anti\,a}$

- bomló -"- $\tau_a = \tau_{anti\,a}$

kísérletben:

$$\frac{2(m_p - m_{antip})}{m_p + m_{antip}} = (7 \pm 4) \times 10^{-5}$$

$$\frac{2(\tau_{\pi^+} - \tau_{\pi^-})}{\tau_{\pi^+} + \tau_{\pi^-}} = (1{,}2 \pm 0{,}9) \times 10^{-3}$$

$K^0, \bar{K^0}$ rendszer:

rövid és hosszú élettartamú rendszer

$K^0 \sim (\bar{s}d)$ $\bar{K^0} \sim (s\bar{d})$

$S = +1$ $S = -1$

gyenge kölcsönhatás CP invariáns, S nem marad meg, tekintsük

$K^0 \to \pi^0\pi^0$
$\pi^+\pi^-$ bomlást úgy, hogy CP megmarad

$P|K^0\rangle = -|K^0\rangle$ $C|K^0\rangle = |\bar{K^0}\rangle$

$P|\bar{K^0}\rangle = -|\bar{K^0}\rangle$ $C|\bar{K^0}\rangle = |K^0\rangle$

$|K^0\rangle$ és $|\bar{K^0}\rangle$ nem CP sajátállapot, de

$|K_1^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K^0}\rangle)$ $|K_2^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K^0}\rangle)$

$CP|K_1^0\rangle = |K_1^0\rangle$ $CP|K_2^0\rangle = -|K_2^0\rangle$

két sajátállapot különböző sajátértékkel

$CP|\pi^0\rangle = -|\pi^0\rangle$

$CP|\pi^0\pi^0\rangle = |\pi^0\pi^0\rangle$

$\pi^+\pi^-$ relatív imp. mom.

$CP|\pi^+\pi^-\rangle = C|\pi^+\pi^-\rangle \cdot P|\pi^+\pi^-\rangle = (-1)^l(-1)^l|\pi^+\pi^-\rangle = |\pi^+\pi^-\rangle$

2π-re csak K_1^0 tud bomlani

3 pionos végállapotok

$CP|\pi^0\pi^0\pi^0\rangle = -|\pi^0\pi^0\pi^0\rangle \to K_2^0$ tud így bomlani

$CP|\pi^+\pi^-\pi^0\rangle = (-1)^{l+1}|\pi^+\pi^-\pi^0\rangle \to$ l páros K_2^0 $\to l = 0$
l páratlan K_1^0

$\ell=0$ esetén a hullámfv. az origóban nagy $(\neq 0)$

$$|M(K_1^0 \to \pi^+\pi^-\pi^0)| \ll |M(K_2^0 \to \pi^+\pi^-\pi^0)|$$

$K_1^0 \to 2\pi$ P sértő $\tau_1 \sim 10^{-10}\,s$ rövid

$K_2^0 \to 3\pi$ P őrző $\tau_2 \sim 5\cdot 10^{-8}\,s$ hosszú

} élettartam

Cronin és munkatársai megmutatták, hogy K_2^0 is bomlik 2π-re, de kevéssé

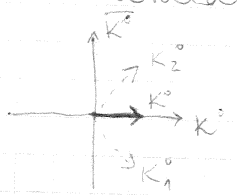
$$\frac{\Gamma(K_2^0 \to \pi^+\pi^-)}{\Gamma(K_2^0)} = 2\times 10^{-3} \qquad \frac{\Gamma(K_2^0 \to \pi^0\pi^0)}{\Gamma(K_2^0)} = 10^{-3}$$

CP sérül !!!

$K^0\bar{K}^0$ rendszer labor a kvantummechanika gondolat-kísérleteihez:

$$\Psi = \begin{pmatrix} K^0 \\ \bar{K}^0 \end{pmatrix} \qquad \pi^- p \to \Lambda K^0 \qquad S \text{ megmarad}$$

bomlani K_1^0 K_2^0 -ként tud



$$|K_j^0(t)\rangle = e^{-i(m_j - i\frac{\Gamma_j}{2})t}\,|K_j^0(0)\rangle$$

mi annak a valószínűsége, hogy t-ben $|\bar{K}^0\rangle$ legyen? $\quad |K^0\rangle\big|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K_1^0(0)\rangle + |K_2^0(0)\rangle\right)$

$$\left|\langle \bar{K}^0 | \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(K_1^0(t) + K_2^0(t)\right)\rangle\right|^2 = \frac{1}{4}\left(e^{-\Gamma_1 t} + e^{-\Gamma_2 t} + 2e^{-\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2}t}\cos\left[(m_1-m_2)t\right]\right)$$

$\Downarrow$ oszcilláló ritkaság

$\bar{K}^0 p \to \Lambda\pi^+ \qquad \bar{K}^0 \to e^-\bar{\nu}_e\pi^+$

$K^0 p \not\to \Lambda\pi^+ \qquad K^0 \to e^+\nu_e\pi^- \quad \Rightarrow K^0$-ból nem lesz π^+

mérjük meg $\to$ K^0-ként keletkezett mellett a π^+-kat

Hadronrezonanciák

Erősen bomló részecskéket nem lehet emulzióban vagy buborékkamrában megfigyelni $\tau \sim 10^{-23}$ s

Szórási kísérletekben figyeljük meg

leggyakoribb pion - nukleon szórás

$\pi^- p \to \pi^- p$ $\qquad \pi^- p \to K^0 \Lambda$

$\pi^+ p \to \pi^+ p\, \pi^0$ $\qquad \pi^+ p \to X$

teljes hatáskeresztmetszet (legegyszerűbb mennyiség)

aszimptotikus konstans $30-100$ mbarn $\simeq 3-10 \cdot 10^{-26}$ cm^2

(geometriai keresztmetszettel esik egybe körülbelül)

alacsony energiás csúcsok rezonanciák $\to$ erősen bomló részecskék

csúcs helye ~ a részecske tömege

szélessége ~ élettartam $\qquad \Delta E \Delta \tau \sim 1$

$\pi^+(p_1) + p(p_2) \to X$

↳ álló proton

$s = (p_1+p_2)^2 = 2m_p\sqrt{p_1^2 + m_\pi^2} + m_p^2 + m_\pi^2$

maximum helye $\sqrt{s} \simeq 1{,}23$ GeV $\longleftrightarrow$ $\Delta^{++}(1232)$

$S_{fi} = \delta_{fi} + (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i)\, T_{fi}$

$T_{fi} \sim \dfrac{1}{s - m_\Delta^2}$ (majd QFT-nél)

bomló részecske $\qquad m_\Delta = m_\Delta - i\dfrac{\Gamma_\Delta}{2} \qquad \Gamma_\Delta > 0 \qquad m_\Delta^2 \gg \Gamma_\Delta^2$

$$\left[T_{fi} \sim \frac{1}{s - m_\Delta^2 + i m_\Delta \Gamma_\Delta}\right] \qquad \left[\sigma \sim |T_{fi}|^2 = \frac{1}{(s-m_\Delta^2)^2 + m_\Delta \Gamma_\Delta^2}\right]$$

Breit-Wigner formulák

Γ_Δ félértékszélesség $\qquad \sqrt{s} = m_\Delta + \delta \qquad \delta$ kicsi

$s = m_\Delta^2 + 2m_\Delta(\sqrt{s} - m_\Delta)$

$$\sigma = \frac{1}{4m_\Delta^2\left[(\sqrt{s}-m_\Delta)^2+\frac{1}{4}\Gamma_\Delta^2\right]}$$

ábráról $m_\Delta = 1232$ MeV

$\Gamma_\Delta = 115$ MeV $\rightarrow \tau_\Delta \approx \frac{1}{\Gamma_\Delta} \sim 0{,}57 \cdot 10^{-23}$

$\pi^+ p$ kvantumszámai Δ^{++} kvantumszámait meghatározzák $I_3 = \frac{3}{2}$ csak az $I = \frac{3}{2}$-ben

Δ^{++} spinjéhez nem elég a σ^{TOT} $\rightarrow$ differenciális szórási hatáskeresztmetszet vizsgálata

$\pi^- p \rightarrow \Delta^0$ rezonancia

A kvantumtérelmélet alapjai: (QFT)

relativisztikus sokrészecske kvantummechanika, ahol a részecskeszám változhat

részecskék száma változik $\rightarrow$ részecske keltés és eltüntetés

analógia: QM harmonikus oszcillátor

a, a^+ a gerjesztések számát változtatják

$N = a^+ a$

QFT-ben minden $\vec{p}$-hez $a(\vec{p})$ és $a^+(\vec{p})$

$E^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2$ $\qquad E(\vec{p}) = \omega(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$

CM $x \longrightarrow$ QM $\hat{x} \sim a + a^+$

CFT (eldin) $\vec{E}, \vec{B} \longrightarrow$ QFT $\hat{\vec{E}}, \hat{\vec{B}}$ $\qquad \hat{\vec{E}} \sim a(\vec{p}) + a^+(\vec{p})$

határozott számú részecskét tartalmazó állapotok nem mező sajátállapotok

$\phi^a(\vec{x}, t)$ mező $\qquad \phi^a_{\vec{x}}(t) \Rightarrow$ minden $\vec{x}$ pontban néhány dinamikai változó $\quad a = \ldots$

RÉSZECSKEFIZIKA

11. 08

A térelméleti Lagrange Hamilton formalizmus

(Noether tétel) $\boxed{\hbar = c = 1}$

mező $\phi^a(t, \vec{x})$

$$q_i(t) \to \phi^a_{\vec{x}}(t) \qquad a = 1 \dots N$$

$\phi^a(\underbrace{\vec{x}, t}_{x^\mu})$ komplex v. valós skalármező

$A_\mu(x)$ Lorentz-vektormező $\quad \mu = 0, 1, 2, 3$

$\psi(x)$ Dirac spinormező

$x^\mu = (t, \vec{x})$, $x_\mu = (t, -\vec{x})$

$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \vec{\nabla})$, $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\partial_0, -\vec{\nabla})$

hatás(integrál) $\quad L[\phi^a, \partial_\mu \phi^a]$ funkcionál

$$S = \int d^4x \, \mathcal{L}(\phi^a, \partial_\mu \phi^a) = \int dt \, L = \int dt \int d^3x \, \mathcal{L}(\phi^a, \partial_\mu \phi^a)$$

Lagrange-sűrűség (fv.)

S legyen Lorentz skalár

$\mathcal{L}$ is Lorentz skalár

↳ meghatározza a klasszikus mozgásegyenleteket

$$\boxed{\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \phi^a} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a}} \qquad a = 1 \dots N \quad \text{téregyenletek}$$

↳ konjugált impulzusok definiálhatók

$$\left(q_i \to p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \Rightarrow \phi^a \to \pi^a(\vec{x}, t) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}^a_{\vec{x}}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi^a}$$

$\mathcal{L}(\phi^a, \partial_\mu \phi^a)$ $\quad x^\mu \to x^\mu + a^\mu$ invariáns

kanonikus energia-impulzus tenzor

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^a} \partial^\nu \phi^a - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

$\boxed{\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0}$ megmarad, ha a mozgásegyenletek fennállnak

$\nu = 0, 1, 2, 3$

$$P^\nu(t) := \int_{t=\text{áll}} d^3x \, T^{0\nu} \qquad \partial_t P^\nu = 0$$

biz: $\partial_t P^\nu = \int d^3x \, \partial_t T^{0\nu} = \int d^3x \, (-\partial_i T^{i\nu}) = 0$ Gauss tétel zárt rendszer

P^ν t független → értelmezés: mechanikai impulzus $P^\nu = (E, \vec{P})$

$$P^0 = \int_{t=\text{áll}} d^3x\, T^{00} = \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0\phi^a}\partial^0\phi^a - \mathcal{L}\right) = \int_{t=\text{áll}} d^3x \left(\pi^a(\vec{x},t)\partial_0\phi^a - \mathcal{L}\right) =$$

$\left(H = p_i \dot{q}_i - L \text{ volt a Hamilton-fv}\right)$ $$= \int_{t=\text{áll}} d^3x\, \mathcal{H}(\pi^a, \phi^a)$$

Hamilton-sűrűség: $\mathcal{H}$ $$= H$$

$P^0 = H =$ Hamilton-fv $= E$ (energia)

példák: $\phi(\vec{x},t)$ egy darab önkölcsönható, valós skalármező

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \underbrace{V(\phi)}_{\text{polinom}}$$

$$(\partial_\mu\phi)^2 = (\partial_0\phi)^2 - (\vec{\nabla}\phi)^2 = \partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi$$

mozgásegyenlet

$$\partial^\mu\partial_\mu\phi = -m^2\phi - \frac{\partial V}{\partial\phi}$$

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi = \partial^\mu\partial_\mu\phi = (\partial_0^2 - \Delta)\phi = \Box\phi$$

$$(\Box + m^2)\phi = -\frac{\partial V}{\partial\phi}$$

ha $V(\phi) = 0$ "szabad" elmélet

többkomponensű valós skalármező:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi^a)^2 - \frac{m_a^2}{2}(\phi^a)^2 - V(\phi^a)$$

$$(\Box + m_a^2)\phi^a = -\frac{\partial V}{\partial\phi^a} \qquad a = 1, \dots N$$

<u>Noether tétel:</u> minden folytonos szimmetriához tartozik megmaradó mennyiség

"belső szimmetriák"

létezik $J^\mu = (J^0, \vec{J})$ áram, amire $\partial_\mu J^\mu = \partial_0 J^0 + \operatorname{div}\vec{J} = 0$

megmaradó mennyiség $Q = \int d^3x\, J^0(\vec{x},t)$, időfüggetlen

transzformáció $\phi_i(\vec{x},t)$ $\quad i = 1, \dots N$

t^a $\quad N \times N$ mátrixok

$$[t^a, t^b] = i\,C^{abc}\,t_c \qquad a = 1, \dots \dim G$$

C^{abc} → teljesen antiszimmetrikus konstansok

$$\phi_i(\vec{x},t) \to \phi_i'(\vec{x},t) = \phi_i(\vec{x},t) + i\,\varepsilon_a (t^a)_{ij}\,\phi_j(\vec{x},t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

ε_a infitezimális konstansok

$\mathcal{O}(\varepsilon^2)$-et elhanyagoljuk

$i\varepsilon_a (t^a)_{ij}\,\phi_j(\vec{x},t) = \delta\phi_i(\vec{x},t)$ megváltozás

$$\delta\mathcal{L} = \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}}_{\downarrow \text{ mozg. egy.}}\delta\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_i}\delta(\partial_\mu\phi_i) =$$

$$= \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_i}\delta\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_i}\partial_\mu(\delta\phi_i) =$$

$$= \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_i}\delta\phi_i\right)$$

ha szimmetria, akkor $\delta\mathcal{L} = 0$

$$\varepsilon_a\,\partial_\mu\left(i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_i}(t^a)_{ij}\,\phi_j\right) = 0$$

$$J_\mu^a = -i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_i}(t^a)_{ij}\,\phi_j$$

$$Q^a = -i\int d^3x\, J_0^a(\vec{x},t) = -i\int d^3x\,\pi_i(\vec{x},t)(t^a)_{ij}\,\phi_j(\vec{x},t)$$

<u>Kanonikus kvantálás</u>:

$\phi^a(\vec{x},t)$ skalármezők

$\phi^a(\vec{x},t)$ és $\pi^a(\vec{x},t)$ operátorok lesznek

egyidejű kommutációs relációkat írójuk:

mezők, impulzusok kommutálnak egyidőben:

$$[\phi^a(t,\vec{x}_1),\phi^b(t,\vec{x}_2)] = 0$$

$$[\pi^a(t,\vec{x}_1),\pi^b(t,\vec{x}_2)] = 0$$

de $$[\phi^a(t,\vec{x}),\pi^b(t,\vec{y})] = i\,\delta^{ab}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$$

(ha $\hbar \neq 1$ $\delta^{ab} \to \hbar\,\delta^{ab}$)

operátorok időfüggése (Heisenberg képben)

$$\left.\begin{aligned}\partial_0\phi^a(t,\vec{x}) &= i[\mathbb{H},\phi^a(t,\vec{x})]\\ \partial_0\pi^a(t,\vec{x}) &= i[\mathbb{H},\pi^a(t,\vec{x})]\end{aligned}\right\}\ \text{Heisenberg-féle mozgásegyenletek}$$

$$H = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} \left(\pi^a(t,\vec{x}) \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \phi^a(t,\vec{x}) \right)^2 + \frac{m_a^2}{2} \phi_a^2 + V(\phi_a) \right\}$$

H időfüggetlen (Hamilton-operátor)

nem mond semmit a rendszer állapotáról

Á'll: $(\Box + m_a^2)\phi_a = -\frac{\partial V}{\partial \phi^a}$ Heisenberg mozgásegyenletekből

kijönnek a klasszikus mozgásegyenletek az operátorokra

Lemma: $[f(\phi), \pi] = i f'(\phi)\delta$

$[\phi, g(\pi)] = i g'(\pi)\delta$

$\partial_0 \phi^a(t,\vec{x}) = i[H, \phi^a(t,\vec{x})] =$

erre a $t=$áll.-ra integrálunk így a H-ból a ϕ-függő tagok nem számítanak

$= i\int d^3x' \frac{1}{2}[\pi_a^2(t,\vec{x}'), \phi^a(t,\vec{x})] =$

$= i\int d^3x'(-i)\,\delta^{(3)}(\vec{x}'-\vec{x})\,\pi^a(t,\vec{x}') =$

$= \pi^a(t,\vec{x})$

$\partial_0 \pi^a(t,\vec{x}) = i[H, \pi^a(t,\vec{x})] =$

$= i\left\{ \int d^3x' \left(m_a^2 \phi^a(t,\vec{x}') + \frac{\partial V}{\partial \phi^a}(\vec{x}') \right) \delta^{(3)}(\vec{x}'-\vec{x}) + \right.$

$\left. + \int d^3x'\, i\, \partial_{\vec{x}}^j \phi^a(\vec{x}',t)\, \partial_j^{x'} \delta^{(3)}(\vec{x}'-\vec{x}) \right\} =$

$= -m_a^2\phi^a(t,\vec{x}) - \frac{\partial V}{\partial \phi^a} + \Delta\phi^a(t,\vec{x})$

$\partial_0\partial_0 \phi^a(t,\vec{x}) \Rightarrow \left((\partial_0^2 - \Delta) + m_a^2 \right)\phi(t,\vec{x}) = -\frac{\partial V}{\partial \phi^a}$

skalármezőkre bizonyítottuk, de ez teljesen ált.

Hol hat az operátor?

egy valós skalármező, szabad $(V(\phi)=0)$

$(\Box + m^2)\phi(t,\vec{x}) = 0$

síkhullám megoldást keresünk e^{ikx} $(kx = k^0x^0 - \vec{k}\vec{x})$

$E(k) = \omega(k) = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ (pozitív gyök) $\quad k_0^2 = \vec{k}^2 + m^2$

$k^0 = E(\vec{k}) = \omega(\vec{k})$

$$\phi(t,\vec{x}) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, 2\pi\, \underbrace{\delta(p^2-m^2)}_{\text{disp. rel.}}\, \underbrace{\Theta(p_0)}_{\text{pozitív gyök}} \left(a(\vec{p})e^{-ipx} + a^+(\vec{p})e^{ipx} \right)$$

$\Rightarrow$ kovariáns

$a(\vec{p})$, $a^+(\vec{p})$ operátorot

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega(\vec{p})} \left(a(\vec{p}) e^{-i(\omega(\vec{p})x^0 - \vec{p}\vec{x})} + a^+(\vec{p}) e^{i(\omega(\vec{p})x^0 - \vec{p}\vec{x})} \right) \equiv$$

$\Phi = \int \widetilde{d^3p} \left(a(\vec{p}) e^{-ipx} + a^+(\vec{p}) e^{ipx} \right)$ új jelöléssel szép

$\pi = \partial_0 \Phi = \ldots$

behelyettesítjük az egyidejű kommutációs relációba

$\Rightarrow$ a, a^+ kommutációs relációi

$[a(\vec{p}), a(\vec{p}\,')] = 0$, $[a^+(\vec{p}), a^+(\vec{p}\,')] = 0$ (időfüggő tagok kiesésből)

$[a(\vec{p}), a^+(\vec{p}\,')] = (2\pi)^3 2\omega(\vec{p}) \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}\,')$

(időfüggetlen tagok reprodukálják $\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$-t)

Fock vákuum $|0\rangle$ def: $\forall \vec{p}$-re $a(\vec{p})|0\rangle = 0$

$a^+(\vec{p})|0\rangle \neq 0$

$|\vec{p}\rangle := a^+(\vec{p})|0\rangle$ egyrészecskeállapot

11. 15.

$\pi = \partial_0 \Phi = -i \int \widetilde{d^3p}\, \omega(\vec{p}) \left(a(\vec{p}) e^{-ipx} - a^+(\vec{p}) e^{ipx} \right)$

$\langle \vec{p}\,' | \vec{p} \rangle = (2\pi)^3 2\omega(\vec{p}) \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}\,') \underbrace{\langle 0|0 \rangle}_{1}$ kovariáns egyrészecske normálás

értelmezése

P^μ operátor? $P^\mu = \int\limits_{t=\text{áll.}} d^3x\, T^{0\mu} = (E, \vec{P}) =$

$$= \int d^3x \left(\pi(x) \partial^\mu \phi(x) - g^{0\mu} \mathcal{L} \right) = \ldots$$

$$= \int \widetilde{dp}\, p^\mu \frac{1}{2} \left(a(\vec{p}) a^+(\vec{p}) + a^+(\vec{p}) a(\vec{p}) \right) = *$$

$N(\vec{p}) = a^+(\vec{p}) a(\vec{p})$ $\vec{p}$ impulzusú gerjesztések számoperátora

$$N(\vec{p})|\vec{k}\rangle = N(\vec{p}) a^+(\vec{k})|0\rangle = a^+(\vec{p}) a(\vec{p}) a^+(\vec{k})|0\rangle =$$

$$= a^+(\vec{p}) [a(\vec{p}), a^+(\vec{k})] |0\rangle = a^+(\vec{p}) \left((2\pi)^3 2\omega(\vec{p}) \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{p}) \right) |0\rangle$$

$$= (2\pi)^3 2\omega(\vec{p}) \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{p}) |\vec{k}\rangle$$

$$= \int \widetilde{dp}\, p^\mu a^+(\vec{p}) a(\vec{p}) + \frac{1}{2} g^{0\mu} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}\,') \int d^3p\, \omega(\vec{p})$$

divergens konstans

normálrendezés: $: \; :$

a és a^+ normálrendezett szorzata: $\forall$ eltüntető operátort jobbra írunk a keltőktől (előzőben az összes kommutátort nullának vesszük)

$$:P^\mu: = \int \widetilde{dp}\; p^\mu a^+(\vec{p}) a(\vec{p})$$

az alapállapoti energiát nullának vesszük

$:P^\mu: |\vec{k}\rangle = k^\mu |\vec{k}\rangle \qquad k^\mu = (\omega(\vec{k}), \vec{k}) \qquad \omega(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$

$|\vec{k}\rangle$ egyrészecske állapot $\omega(\vec{k})$ energiával és $\vec{k}$ impulzussal

$\phi(x), \pi(x)$ operátor a Fock-téren hat.

Fock-tér bázisa: $|0\rangle$, $a^+(\vec{p})|0\rangle$, $a^+(\vec{p}_1) a^+(\vec{p}_2)|0\rangle$, ...,

$a^+(\vec{p}_1) \dots a^+(\vec{p}_n)|0\rangle$, ...

$a^+(\vec{p})|0\rangle$: egyrészecske állapot

$a^+(\vec{p}_1) a^+(\vec{p}_2)|0\rangle$: kétrészecske állapot $\omega(\vec{p}_1) + \omega(\vec{p}_2)$ energiával

$a^+(\vec{p}_1) \dots a^+(\vec{p}_n)|0\rangle$: n-részecske állapot

$\sum_i \omega(\vec{p}_i) = E \qquad \sum_i \vec{p}_i = \vec{P}$

Komplex szabad skalármező:

$\phi_1(x) \quad \phi_2(x)$ két valós mező

$\phi_1(x) + i\phi_2(x) = \phi(x)$ komplex mező

$\phi^*(x) = \phi_1(x) - i\phi_2(x)$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^* \phi$$

ϕ, ϕ^* független szabadsági fokok

mozgásegyenlet ϕ-re és ϕ^*-ra is a szabad Klein-Gordon egyenlet

$\pi(x) = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi(x)} = \dfrac{1}{2} \partial_0 \phi^*(x) \qquad \pi^*(x) = \dfrac{1}{2} \partial_0 \phi(x)$

$[\pi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] \neq 0 = -i\delta(\vec{x} - \vec{y})$?

$[\pi^*(\vec{x}, t), \phi^*(\vec{y}, t)] = -i\delta(\vec{x} - \vec{y})$

$$\phi(x) = \int \widetilde{dp} \left[a(\vec{p}) e^{-ipx} + b^+(\vec{p}) e^{ipx} \right]$$

$$\phi^*(x) = \int \widetilde{dp} \left[a^+(\vec{p}) e^{ipx} + b(\vec{p}) e^{-ipx} \right]$$

$[a(\vec{p}), a^+(\vec{p}\,')] = (2\pi)^3\, 2\omega(\vec{p})\, \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}\,')$

$[b(\vec{p}), b^+(\vec{p}\,')] = (2\pi)^3\, 2\omega(\vec{p})\, \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}\,')$

$$:P^\mu: = \dots = \int d\tilde{p} \left(a^+(\vec{p})a(\vec{p}) + b^+(\vec{p})b(\vec{p}) \right) p^\mu$$

$|a\rangle = a^+(\vec{p})|0\rangle \to \omega(\vec{p})$ energia, $\vec{p}$ impulzus

$|b\rangle = b^+(\vec{p})|0\rangle \to$ — " —

a Lagrange-fv-nek van belső szimmetriája

$$\phi \to \phi e^{i\alpha} \approx \underbrace{1 + i\alpha\phi}_{i\delta\phi} \qquad \phi^* \to \phi^* e^{-i\alpha} \approx \underbrace{1 - i\alpha\phi^*}_{i\delta\phi^*} + \dots$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} = \frac{1}{2}\partial^\mu \phi \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^*} = \frac{1}{2}\partial^\mu \phi$$

megmaradó áram

$$j_\mu = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{konvenció}}}{-i}\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi^* \phi - \phi^* \partial_\mu \phi\right)$$

$$:Q: = \int d^3x\, j_0(\vec{x}, t) = \int d^3x \frac{1}{2i}\left(\partial_0 \phi^* \phi - \phi^* \partial_0 \phi\right) = \dots =$$

$$= \int d\tilde{p} \left(a^+(\vec{p})a(\vec{p}) - b^+(\vec{p})b(\vec{p}) \right)$$

$$\left.\begin{array}{l} Q|a\rangle = |a\rangle \\ Q|b\rangle = -|b\rangle \end{array}\right\} \text{ebben különbözik a két állapot}$$

<u>Feynman-propagátor:</u>

a T szorzat vákuum várható értéke

$\phi(x)$ valós egykomponensű skalármező, szabad

$T(\phi(x)\phi(y)) =$ T szorzat / időrendezett szorzat =

$$= \underset{\hookrightarrow \text{lépcsőfv.}}{\Theta(x^0 - y^0)}\phi(x)\phi(y) + \Theta(y^0 - x^0)\phi(y)\phi(x)$$

$(\Box_x + m^2)\, iT\,\phi(y)\phi(y)) = \delta^{(4)}(x-y)$ lássuk be!

$$\partial^2_{x^0} T(\phi(x)\phi(y)) = \partial_{x^0}\{\Theta(x^0-y^0)\partial_{x^0}\phi(x)\phi(y) + \Theta(y^0-x^0)\phi(y)\phi(x) + \delta(x^0-y^0)\underbrace{[\phi(x),\phi(y)]}_{\text{EKR} \Rightarrow \emptyset}\} =$$

$$\partial^2_{x^0} T(\phi(x)\phi(y)) = \Theta(x^0-y^0)\partial^2_{x^0}\phi(x)\phi(y) + \Theta(y^0-x^0)\phi(y)\partial_{x^0}\phi(x) + \delta(x^0-y^0)[\partial_0\phi(x), \phi(y)] =$$

$$= T(\phi(x)\phi(y)) + \underbrace{[\pi(\vec{x}, x^0), \phi(y, x^0)]}_{-i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})}\delta(x^0-y^0) = T(\phi(x)\phi(y)) - i\delta^{(4)}(x-y)$$

szabad mozgásegyenlet : $(\partial_0^2 - \Delta)\phi + m^2\phi = 0$

$$\partial_{x^0}^2 T(\phi(x)\phi(y)) = T(\phi(x)\phi(y)) - i\delta^{(4)}(x-y) = T((\Delta_x - m^2)\phi(x)\phi(y))$$

$$-i\delta^{(4)}(x-y) = (+\Delta_x - m^2)T(\phi(x)\phi(y)) - i\delta^{(4)}(x-y)$$

$$(\Box_x + m^2)\, iT(\phi(x)\phi(y)) = \delta^{(4)}(x-y)$$

vegyük a vákuum-várható értékét

$$i\langle 0|T(\phi(x)\phi(y))|0\rangle = iG(x,y)$$

$$(\Box_x + m^2)\underbrace{i\langle 0|T(\phi(x)\phi(y))|0\rangle}_{iG(x,y)} = \delta^{(4)}(x-y)$$

ha $x^0 > y^0$ $\langle 0|T(\phi(x)\phi(y))|0\rangle = \theta(x^0-y^0)\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle$

$\phi(y)|0\rangle$ y-ban kelt egy (tetszőleges impulzusú) részecskét

$\langle 0|\phi(x)$ x-ben elnyelődik a részecske

$(\Box_x + m^2)\, iG(x,y) = \delta^{(4)}(x-y)$

$G(x,y)$ csak $(x-y)$-tól függ

Fourier-transzformáció, $m^2 \to m^2 + i\varepsilon$ ahol $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \to 0$

$\Rightarrow$ G-nek van inverze impulzustérben $+i\varepsilon$-nal

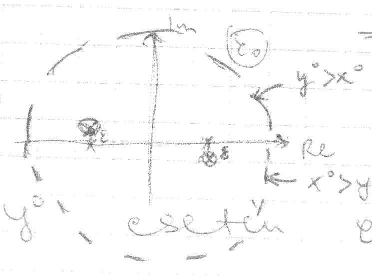
$$\boxed{G(x,y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}e^{-ik(x-y)}} \qquad k^2 = k_\mu k^\mu = k_0^2 - \vec{k}^2$$

$$k(x-y) = k_\mu (x-y)^\mu$$

$x^0 > y^0$ v. $y^0 > x^0$ nem ugyanazt adja

k_0 integrál $k^2 - m^2 + i\varepsilon = k_0^2 - \vec{k}^2 - m^2 + i\varepsilon =$

$$= \left(k_0 - \sqrt{\vec{k}^2 + m^2 - i\varepsilon}\right)\left(k_0 + \sqrt{\vec{k}^2 + m^2 - i\varepsilon}\right)$$



pólusok

$x^0 > y^0$ esetén $e^{-ik_0(x^0-y^0)}$ integrált alul lehet bezárni, hogy a félkör járuléka 0

Kölcsönhatási kép és perturbációszámítás:

$\phi(\vec{x},t)$ valós, önkölcsönható, skalármező

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4$$

EKR-t fenntarthat $\phi(x)$, $\Pi(x)$ operátorok

Heisenberg egyenlet: $(\Box + m^2)\phi = -\lambda\phi^3$ operátoregyenlet

áttérünk kölcsönhatási képbe, ha λ kicsi, akkor perturbációszámítás

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}'$ $\quad \mathcal{H}_0$ a szabad Hamiltoni

$$\mathcal{H} = \underbrace{\int d^3x \left\{ \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\phi^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 \right\}}_{\mathcal{H}_0} + \underbrace{\int d^3x \frac{\lambda}{4}\phi^4}_{\mathcal{H}'}$$

Képek: Heisenberg, Schrödinger, kölcsönhatási

$\partial_t \phi = i[\mathcal{H}, \phi(x)]$

$\phi(\vec{x},t) = e^{i\mathcal{H}t}\phi(\vec{x},0)e^{-i\mathcal{H}t}$

állapot $|a\rangle$ időfüggetlen

ϕ időfüggetlen $\phi^S(\vec{x}) = \phi(\vec{x},0) = e^{-i\mathcal{H}t}\phi(\vec{x},t)e^{i\mathcal{H}t}$

$|a\rangle^S = e^{-i\mathcal{H}t}|a\rangle$ időfüggés

$i\partial_t |a\rangle^S = \mathcal{H}|a\rangle^S$

kölcsönhatási kép:

11.22.

operátorok a szabad Hamiltoni szerint fejlődnek, és az állapotok is függnek az időtől

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}'$

$$\mathcal{H}_0 = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2}:\pi^2: + \frac{1}{2}:(\nabla\phi)^2: + \frac{m^2}{2}:\phi^2: \right\} \quad \text{szabad}$$

$$\mathcal{H}' = \int d^3x \frac{\lambda}{4!}:\phi^4(x): \quad \text{önkölcsönhatás}$$

$$\phi^I(\vec{x},t) = e^{i\mathcal{H}_0 t}\phi^S(\vec{x})e^{-i\mathcal{H}_0 t} = \underbrace{e^{i\mathcal{H}_0 t}e^{-i\mathcal{H}t}}_{U(t,0)}\phi(\vec{x},t)\underbrace{e^{i\mathcal{H}t}e^{-i\mathcal{H}_0 t}}_{U^{-1}(t,0)}$$

$\mathcal{H}, \mathcal{H}_0$ nem felcserélhető

$|a,t\rangle^I = e^{i\mathcal{H}_0 t}|a,t\rangle^S = U(t,0)|a\rangle$

$U(t,0)$ időfejlesztő op. a kérdés

eddig a képeket a $t=0$-ban illesztettük $U(0,0)=1$

t_0-ban is illeszthetünk: $U(t_0,t_0)=1$, $U(t,t')U(t',t_0) = U(t,t_0)$

$\Rightarrow U(t,0)U(0,t_0) = U(t,0)U^{-1}(t_0,0) = U(t,t_0)$

$U(t,t_0)$ kielégíti a következő egyenletet:

$$\boxed{i\partial_t U(t,t_0) = \mathcal{H}'^I(t)U(t,t_0)} \qquad U(t_0,t_0) = 0$$

RÉSZECSKEFIZIKA

11.22.

$$i\partial_t U(t,t_0) = i\partial_t\big(U(t,0)\big)U^{-1}(t_0,0) = i\left\{e^{i\mathcal{H}_0 t}\, i\mathcal{H}_0\, e^{-i\mathcal{H}t} - e^{i\mathcal{H}_0 t}\, i\mathcal{H}\, e^{-i\mathcal{H}t}\right\}\times$$

$$\times U^{-1}(t_0,0) =$$

$$= (i^2)\, e^{i\mathcal{H}_0 t}(\mathcal{H}_0 - \mathcal{H})e^{-i\mathcal{H}t}\, U^{-1}(t_0,0) = e^{i\mathcal{H}_0 t}\, \underset{e^{-i\mathcal{H}_0 t}e^{i\mathcal{H}_0 t}}{\mathcal{H}'}\, e^{-i\mathcal{H}t}\, U^{-1}(t_0,0) =$$

$$= \overbrace{e^{i\mathcal{H}_0 t}\mathcal{H}' e^{-i\mathcal{H}_0 t}}^{\mathcal{H}'^{I}(t)}\; \overbrace{e^{i\mathcal{H}_0 t} e^{-i\mathcal{H}t}}^{U(t,0)}\, U^{-1}(t_0,0) = \mathcal{H}'^{I}(t)\, U(t,t_0)$$

átírjuk integrálegyenletté

$$U(t,t_0) = I - i\int_{t_0}^{t} dt'\, \mathcal{H}'^{I}(t')\, U(t',t_0)$$

tfh. $\lambda \ll 1$ $\Rightarrow$ perturbációszámítás, iterativ megoldás

$$\boxed{U(t,t_0)} = I - i\int_{t_0}^{t} dt'\, \mathcal{H}'^{I}(t') + \frac{(i)^2}{2}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2\, \mathcal{H}'^{I}(t_1)\mathcal{H}'^{I}(t_2) + \ldots$$

$$+ \frac{(-i)^n}{n!}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n\, \mathcal{H}'^{I}(t_1)\mathcal{H}'^{I}(t_2)\ldots\mathcal{H}'^{I}(t_n) = *$$

$$t_1 \geq t_2 \geq \ldots \geq t_n$$

$$T[A_1(t_1)\ldots A_n(t_n)] = \sum_{P} \Theta(t_{p_1} \ldots t_{p_n})\, A_{p_1}(t_{p_1}) \ldots A_{p_n}(t_{p_n})$$

$t_{p_1} \geq t_{p_2} \geq \ldots$

P: összes permutáció

$$* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!}\int_{t_0}^{t} dt_1 \ldots dt_n\, T\left(\mathcal{H}'^{I}(t_1)\ldots\mathcal{H}'^{I}(t_n)\right) = T\left(\exp\left(-i\int_{t_0}^{t} dt'\, \mathcal{H}'^{I}(t)\right)\right)$$

(*) $$T\left(\exp\left(-i\int_{t_1}^{t_2} dt'\, \mathcal{H}'^{I}(t')\right)\right) = T\left(\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} dt'\, \mathcal{H}'^{I}\right)\left(\int_{t_2}^{t_3} dt'\, \mathcal{H}'^{I}\right)\right)$$

Texp

(**) $\forall$ elméletben, ahol $\mathcal{L}'(x)$ -ben nincs derivált

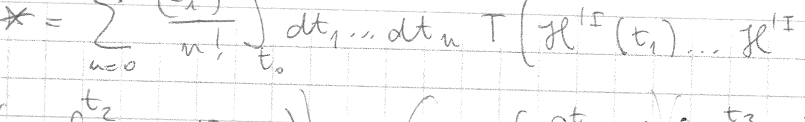
$$-\int d^3x\, \mathcal{L}'^{I}(\vec{x},t) = \mathcal{H}'^{I}(t) \rightarrow \int_{t_0}^{t} dt'\, \mathcal{H}'^{I}(t') = \int_{t_0}^{t} \underbrace{dx^0 d^3x}_{d^4x}\, \mathcal{L}'^{I}(\vec{x},t)$$

(***) S mátrix $U(+\infty,-\infty)$ $\quad T\exp\left(-i\int_{-\infty}^{\infty} dt'\, \mathcal{H}'^{I}(t')\right) = T\exp\left(i\int d^4x\, \mathcal{L}'^{I}(x)\right)$

<u>aszimptotikus állapotok és a szórásmátrix:</u>

szórási folyamatok:

2 → N részecske



szórás előtt (nyaláb előkészítés) és szórás után (detektorban) szabad részecskék

ehhez véges hatótáv kell

szabad állapotok elemei → szabad téroperátorokkal keltjük $\Rightarrow \phi_i(x), \phi_f(x)$ $\quad (\Box + m^2)\phi_{i,f}(x) = 0$

$$\phi(x,t) \xrightarrow{t \to \pm\infty} \begin{matrix}\phi_i(x) \\ \phi_f(x)\end{matrix} \quad \text{feltétel}$$

$\vec{p}_1 \vec{p}_2 \to \vec{q}_1 \vec{q}_2$ kétrészecske szórást tekintjük

$$|i\rangle = |\vec{p}_1 \vec{p}_2\rangle = a^+(\vec{p}_1)\, a^+(\vec{p}_2)\, |0\rangle$$

$$\langle f| = \langle \vec{q}_1 \vec{q}_2| = \langle 0| a(\vec{q}_1)\, a(\vec{q}_2)) |$$

$$|i,t\rangle = U(t,-\infty)|i\rangle \xrightarrow{t \to +\infty} U(\infty,-\infty)|i\rangle$$

λ kicsi

$$S_{fi} = \langle f| U(\infty,-\infty)|i\rangle = \langle f| T \exp\left(-i\int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathcal{H}^I(t')\right)|i\rangle =$$

$$= \delta_{fi} - i\int_{-\infty}^{+\infty} dt' \langle f|\mathcal{H}^I(t')|i\rangle - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \langle f|\mathcal{H}^I(t_1)\mathcal{H}^I(t_2)|i\rangle + \dots$$

Feynman gráf szabályok:

$\mathcal{L}' = \frac{\lambda}{4!} :\phi^4(x):$ elméletre λ rendjeiben S_{fi}-ben adódó járulékok

$$|i\rangle = \int d^3x_1\, d^3x_2\, e^{-ip_1x_1} e^{-ip_2x_2}\, \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x_1)\, \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x_2)|0\rangle$$

$$+\overleftarrow{\partial}_0 - \overrightarrow{\partial}_0 \qquad x_1^0, x_2^0 \to -\infty$$

$$\langle f| = \langle 0| \int d^3y_1\, d^3y_2\, e^{iq_1y_1} e^{iq_2y_2} \dots \qquad y_1^0\, y_2^0 \to +\infty$$

$\mathcal{L}' \sim :(a + a^+)^4: \quad \to$ 16 tagból melyik $\neq 0$ járulékú

$\langle 0| a_f a_f :(a+a^+)^4: a_i^+ a_i^+ |0\rangle \qquad \downarrow$

a^+a^+aa alakúak

különböző számú a^+, a tagok 0-t adnak

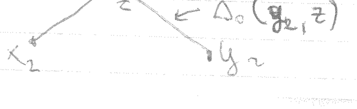
a-k és a^+-k cserélgetésével a propagátor egy részét kapjuk

$$S_{fi} = \delta_{if} - i\frac{\lambda}{4!}\int d^4z \langle f| :\phi^4(z): |i\rangle + \dots = \dots$$

$$= \delta_{if} - i\lambda \int d^3x_1\, d^3x_2\, d^3y_1\, d^3y_2\, d^4x\, e^{iq_1y_1} e^{iq_2y_2} e^{-ip_1x_1} e^{-ip_2x_2} \times$$

$$\times \Delta_0(x_1,z)\,\Delta_0(x_2,z)\,\Delta_0(y_1,z)\,\Delta_0(y_2,z) + \dots$$

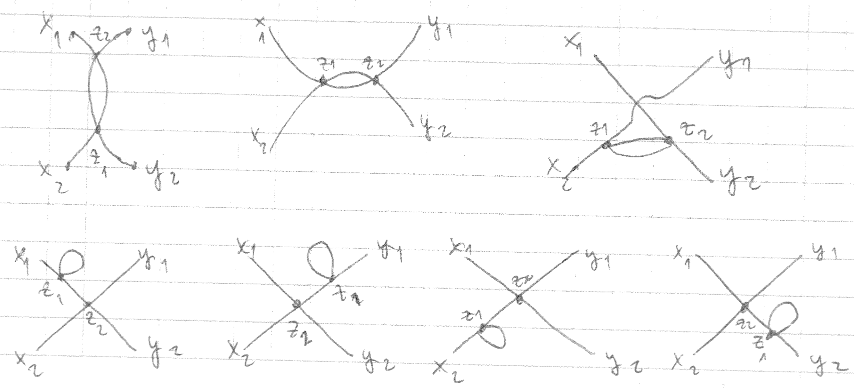
↳ Feynman-gráffal ábrázolható



$x_1^0, x_2^0 \to -\infty$

$y_1^0, y_2^0 \to +\infty$

λ^2 rendben



$$\langle 0 | T\left(a_f a_f :(a+a^+)^4: :(a+a^+)^4: a_i^+ a_i^+ |0\right\rangle$$

Wick-tételen alapul

$p_1 \dots p_n \to q_1 \dots q_m$ λ^N rendben

1) lépés: $\underset{1 \text{ láb}}{n} + m + \underset{4 \text{ láb}}{N}$ db pont

2) lépés az összes összefüggő gráfot lerajzoljuk

3) minden vonalhoz $\Delta_0(x,y)$, + vertexhez $-i\lambda$

4) vertexek meg pontok helyével integrálni kell

5) szimmetriafaktorok (osztani kell)

Wick-tétel: szabad téroperátorok időrendezett szorzatát fejezi ki a normálrendezett szorzat és Δ_0 segítségével (párosítás)

legegyszerűbb: $T\left(\phi(x)\phi(y)\right) = :\phi(x)\phi(y): + i\Delta_0(x,y)$

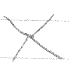
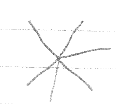
$\langle 0 | :\phi(x)\phi(y): |0\rangle = 0$

tetszőleges számú operátorra általánosítható

<u>Más elméletek</u>

először szabad elmélet → Feynman propagátorok

kölcsönhatásból vertexek

ϕ^4  ϕ^3  ϕ^6 

Wick tétel segítségével Feynman szabályok

Elektromágneses mező kvantálása:

$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$$

$\vec{E}, \vec{B} \rightarrow A^\mu = (\phi, \vec{A})$ $\quad \vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A} \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi$

relativisztikusan kovariánsan

kovariáns kvantálás !!! (ehhez nem kovariáns Coulomb-mértékkel)

térerősség tenzor $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = -F^{\nu\mu}$ antiszimm.

$F^{i0} = E^i$ és $F^{ij} = \epsilon^{ijk} B^k$

11.29.

Lagrange: $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sim (\vec{E}^2 - \vec{B}^2)$ $\quad (\hbar = c = 1)$

kvantálás: • 4 komponenst egyformán kezeljük

→ nem mind fizikai (mértéktrafóra $\vec{E}, \vec{B}$ nem változik, de $\phi, \vec{A}$ igen)

→ $\partial^\mu A_\mu = 0$ Lorentz mértékben számolunk (kovariáns)

Klasszikus:

kanonikus impulzus bevezetése (Hamilton–Lagrange formalizmust követhessük)

$$\pi^\mu := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)}$$

↳ kis gondolkodás után látjuk, hogy baj van

1) $\partial^0 A^0 \sim F^{00} = 0 \leftarrow A^0$ nem dinamikai szabadsági fok, nincs kanonikus impulzus

$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial^\nu A_\nu)^2$ ahol λ valós állandó

↳ $\pi^\mu = F^{\mu 0} - g^{\mu 0} \lambda (\partial^\nu A_\nu) = \begin{cases} \pi^i = F^{i0} = E^i \\ \pi^0 = -\lambda(\partial^\nu A_\nu) \end{cases}$ így van

$g^{\mu 0} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$

↳ Euler–Lagrange egyenlet

$$\Box A_\mu - (1-\lambda)\, \partial_\mu (\partial^\nu A_\nu) = 0$$

$$\lambda \Box \partial^\nu A_\nu = 0$$

$$\Box \partial^\nu A_\nu = 0 \quad \text{ha } \lambda \neq 0$$

RÉSZECSKEFIZIKA

11.29.

általmas peremfeltételek mellett a ∞-ben (Green tétel)
ennek csak a $\partial^\nu A_\nu = 0$ a megoldása
(téregyenletből Lorentz mérték)

tehát az új $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\nu\mu} F^{\nu\mu} - \frac{\lambda}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2$

így van π^0 is csak $-\lambda(\partial^\nu A_\nu) = 0$

↳ Dirac - kényszer

kvantumos:

nem működik az ami klasszikusan → nem lehet
$\partial^\mu A_\mu = 0$ -t operátorosan kiírni
állapottér $A \supset A_{fizikai}$

$A_{fizikai}$ altenet bizonyos feltételekkel választjuk ki

miért nem lehet $\partial^\mu A_\mu = 0$ feltételt kiírni?

kanonikus kvantálás

EKR

$$[A_\mu(\vec{x},t), A_\nu(\vec{y},t)] = 0 = [\pi^\mu(\vec{x},t), \pi^\nu(\vec{y},t)]$$

$$[A_\varrho(\vec{x},t), \pi^\nu(\vec{y},t)] = i\,\delta_\varrho{}^\nu \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$$

$\varrho, \nu = 0$ $[A_0, \pi^0] \neq 0$ ha $\partial^\nu A_\nu = 0$ így ellentmond
ha π-be visszahelyettesítünk

tehát akkor ne rójuk ki: $\lambda = 1$, $\Box A_\mu = 0$ → új
mérték → Feynman-mérték, megtartjuk $A_\varrho(\vec{x},t)$
minden komponensét

$$[A_\varrho(\vec{x},t), \pi^\nu(\vec{y},t)] = i\,\delta_\varrho{}^\nu \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \to \text{EKR}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{dA_\varrho(\vec{x},t)}{dt}, A_\nu(\vec{y},t)\right] = i g_{\varrho\nu}\,\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

(skalármező esetén azt láttuk
térszerű komponensekre $[\phi(\vec{x},t), \dot\phi(\vec{y},t)] = i\delta(\vec{x}-\vec{y})$
időszerű komponensekre $[\dot\phi(\vec{x},t), \phi(\vec{y},t)] = i\delta(\vec{x}-\vec{y})$

$\Box A_\mu = 0$ → síkhullám megoldást keresünk ≡
≡ Fourier - komponens keresés

$e^{\pm ikx}$ $\quad k^0 = \omega(k) = |k|$ $\quad k^\mu =$ fényszerű

megoldás:

$$A_\mu(x) = \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=0}^{3} \left(a^\lambda(\vec{k}) \varepsilon_\mu^\lambda(\vec{k}) e^{-ikx} + e^{ikx} \varepsilon_\mu^\lambda(\vec{k})^* a^+(\vec{k}) \right)$$

$$d\tilde{k} = \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega(\vec{k})} = \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2|\vec{k}|}$$

$\varepsilon_\mu^{(\lambda)} - k$ Lorentz-vektorok

$\lambda = 0,1,2,3$ -ra $\equiv$ polarizációs vektorok

n^μ: időszerű egységvektor

$n^0 > 0 \qquad n_\nu n^\nu = 1$

↳ nem lehet úgy megforgatni, hogy < 0

$\lambda = 1,2 \Rightarrow i \quad \varepsilon_\mu^{(i)}(k) k^\mu = 0 = \varepsilon_\mu^i n^\mu$ és $\varepsilon_\mu^{(i)} \varepsilon^{(j)\mu} = -\delta^{ij}$

↳ transzverzális polarizációs vektorok

$\lambda = 3 \quad \varepsilon_\mu^{(3)}$ a (k, n) síkjában van $\quad \varepsilon_\mu^{(3)} n^\mu := 0$ és

$\varepsilon_\mu^{(3)} \varepsilon^{(3)\mu} := -1$

↳ longitudinális polarizációs vektor

$\lambda = 0$ skalár polarizáció $\varepsilon_\mu^{(0)} := n_\mu$

tulajdonságaik

$$\varepsilon_\mu^{(\lambda)} \cdot (\varepsilon^{(\lambda')\mu})^* = g^{\lambda\lambda'}$$

$$\sum_\lambda \frac{\varepsilon_\mu^{(\lambda)} (\varepsilon_\nu^{(\lambda)})^*}{\varepsilon_\varsigma^{(\lambda)} \varepsilon^{(\lambda)\varsigma}} = g_{\mu\nu}$$

pl. spec. választás

$n^\mu = (1, 0) \qquad k^\mu = (|\vec{k}|, 0, 0, |\vec{k}|)$

ekkor a polarizáció vektorok

$$\underbrace{\varepsilon^0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}_{\text{skalár}} \qquad \underbrace{\varepsilon^1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \varepsilon^2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{\substack{\text{transzverzális}\\ \perp \vec{k}}} \qquad \underbrace{\varepsilon^3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\substack{\text{longitudinális}\\ \parallel \vec{k}}}$$

EKR-ből

$$[a^{(\lambda)}(\vec{k}), a^{(\lambda')+}(\vec{k}')] = -g^{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 2\omega(\vec{k}) \delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

$\forall$ egyéb kommutátor $= 0$

legyen a Fock vákuum $|0\rangle$

$a^{(\lambda)}(\vec{k})|0\rangle = 0 \quad \forall \lambda, \vec{k}$ (nem tüntetjük ki egyik komponenst sem)

$a^{(\lambda)+}(\vec{k})|0\rangle \neq 0$ keltő operátor

- $|1\rangle^{(0)}$ = skalár foton a térben $:= \int d\tilde{k}\, f(k)\, a^{(0)+}(\vec{k})|0\rangle \rightarrow$

$\rightarrow$ szét van kenve valamilyen eloszlás szerint

$^{(0)}\langle 1|1\rangle^{(0)} = -\langle 0|0\rangle \int d\tilde{k}\, |f(k)|^2$

valamelyik normája negatív $\Leftrightarrow$ valószínűségi értelmezés

- $|1\rangle^{(i)} = \int d\tilde{k}\, f(k)\, a^{(i)+}(\vec{k})|0\rangle$

$^{(i)}\langle 1|1\rangle^{(i)} > 0 \quad i = 1,2,3$ (itt oké)

$\mathcal{H} \equiv a|0\rangle$-ból az összes $a^{(\lambda)+}(k)$-val generált Fock-tér $\rightarrow$ ez az állapottér

$\mathcal{H}_{\text{fizikai}} \equiv$ az előzőben vannak negatív normájú terek $\Rightarrow$ ezért ha ebben ügyeskedünk ...

Gupta-Bleuler: $\Psi \in \mathcal{H}_{\text{fizikai}}$, ahol $\langle \Psi | \partial^\mu A_\mu | \Psi \rangle = 0$

(nem operátorosan 0, hanem az adott altérben)

$\Rightarrow \partial^\mu A_\mu = 0$ „gyengén teljesül"

tehát az altérre olyan megszorítást teszünk, h a Lorentz-mérték várható értéke legyen 0

$$A_\mu(x) = \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=0}^{3} a^\lambda(k)\, \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k})\, e^{-ikx} + e^{ikx} (\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k))^* a^{\lambda+}(\vec{k}) := A_\mu^{(+)}(x) + A_\mu^{(-)}(x)$$

pozitív frekvenciás tag

a gyengén teljesüléshez elég $\partial^\mu A_\mu^{(+)} |\Psi\rangle = 0$

$$i\partial^\mu A_\mu^{(+)} = \int d\tilde{k}\, e^{-ikx} \sum_{\lambda=0}^{3} a^{(\lambda)}(\vec{k})\, \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k})\, k^\mu =$$

transzverzálisakra $\varepsilon_\mu^{(i)}(k) k^\mu = 0$ miatt triviálisan teljesül

$$= \int d\tilde{k}\, e^{-ikx} \sum_{\lambda=0,3} a^\lambda(\vec{k})\, \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)\, k^\mu$$

$|\Psi\rangle$ szerkezete: $|\Psi\rangle = |\Psi_T\rangle \otimes |\Phi\rangle$

transzverzális — skalár + longitudinális

és $\forall\, k$-ra $\sum_{\lambda=0,3} \varepsilon_\mu^{(\lambda)} k^\mu a^{(\lambda)}(\vec{k})|\Phi\rangle = 0$

pl: $u^\mu = (1,0)$ és $k^\mu = (|k|, 0, 0, |\vec{k}|)$ rendszerben

$$\left(a^0(\vec{k}) - a^3(\vec{k})\right)|\Phi\rangle = 0$$

lemma: $|\Phi\rangle = c_0 |\Phi_0\rangle + c_1|\Phi_1\rangle + \dots + c_n|\Phi_n\rangle$ ált. m.o.

$|\Phi_0\rangle = |0\rangle$

ahol $|\Phi_n\rangle$: n db skalár + longitudinális gerjesztést tartalmaz ($c_0, c_1, \dots$ komplex állandó)

$\Rightarrow \langle\Phi|\Phi\rangle = |c_0|^2 \geq 0$

$\langle\Psi|\Psi\rangle = \langle\Psi_T|\Psi_T\rangle\langle\Phi|\Phi\rangle \geq 0$ → így van valószínűségi értelmezés

biz:

$$\hat{N} = \int d\tilde{k}\left(a^{(3)}(\vec{k})^+ a^{(3)}(\vec{k}) - a^{(0)+}(\vec{k})\, a^{(0)}(\vec{k})\right)$$

gerjesztések száma; $a^{(3)}$ gerjesztések; $a^{(0)}$ gerjesztések $\ominus$ hogy >0 szám

$\hat{N}|\Phi_n\rangle = n|\Phi_n\rangle$

Φ_n-re igaz, hogy $\left(a^{(0)}(\vec{k}) - a^{(3)}(\vec{k})\right)|\Phi\rangle = 0$

$a^{(0)}(\vec{k})|\Phi_n\rangle = a^{(3)}(\vec{k})|\Phi_n\rangle$ és $\langle\Phi_n|a^{(0)+}(\vec{k}) = \langle\Phi_n|a^{(3)+}(\vec{k})$

$$\langle\Phi_n|\hat{N}|\Phi_n\rangle = n\langle\Phi_n|\Phi_n\rangle = \int d\tilde{k}\Big\{\langle\Phi_n|a^{(3)+}(\vec{k})\,a^{(3)}(\vec{k})|\Phi_n\rangle - \underbrace{\langle\Phi_n|a^{(0)+}(\vec{k})\,a^{(0)}(\vec{k})|\Phi_n\rangle}_{\langle\Phi_n|a^{(3)+}(\vec{k})\,a^{(3)}(\vec{k})|\Phi_n\rangle}\Big\} = 0$$

tehát

$$n\langle\Phi_n|\Phi_n\rangle = 0$$

$$\langle\Phi_n|\Phi_n\rangle = \delta_{n,0} \to \langle\Phi_0|\Phi_0\rangle = 1$$

láttuk $\langle\Phi_n|\Phi_m\rangle = 0$, ha $n \neq m$

így $\langle\Phi|\Phi\rangle = |c_0|^2 \geq 0$ triviális áll.

megmutatjuk, hogy it fizikai téren a fizikai mennyiségek várható értéke a) csak transzverz fotonokból b) c_i tetszőleges → nem ad járulékot

$$\mathcal{H} = \int d^3x :(\pi_\mu \dot{A}^\mu - \mathcal{L}): = \frac{1}{2} : \int d^3x \left\{ \sum_{i=1}^{3} \dot{A}_i^2 + (\nabla A_i)^2 - \dot{A}_0^2 - (\nabla A_0)^2 \right\}: =$$

$$= \int d\tilde{k}\, \omega(k) \left(\sum_{i=1}^{3} a^{(i)+}(\vec{k}) a^{(i)}(\vec{k}) - a^{(0)+}(\vec{k})\, a^{(0)}(\vec{k}) \right)$$

$$\frac{\langle\psi|\mathcal{H}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{1}{\langle\psi|\psi\rangle} \Big\{ \langle\psi_T| \int d\tilde{k}\, \omega(k) \sum_{i=1,2} a^{(i)+}(\vec{k}) a^{(i)}(\vec{k}) |\psi_T\rangle \langle\Phi|\Phi\rangle +$$

$$+ \langle\psi_T|\psi_T\rangle \underbrace{\langle\Phi| \int d\tilde{k}\, \omega(k) \left(a^{(3)+}(\vec{k})\, a^{(3)}(\vec{k}) - a^{(0)+}(\vec{k})\, a^{(0)}(\vec{k}) \right) |\Phi\rangle}_{0,\ \text{ahogy}\ \langle | N | \rangle} \Big\} =$$

$$= \frac{1}{\langle\psi_T|\psi_T\rangle\langle\Phi|\Phi\rangle} \langle\psi_T| \int d\tilde{k}\, \omega(k) \sum_{i=1,2} a^{(i)+}(\vec{k}) a^{(i)}(\vec{k}) |\psi_T\rangle \langle\Phi|\Phi\rangle =$$

$$= \frac{1}{\langle\psi_T|\psi_T\rangle} \langle\psi_T| \int d\tilde{k}\, \omega(k) \sum_{i=1,2} a^{(i)+}(\vec{k})\, a^{(i)}(k) |\psi_T\rangle$$

A$_{\text{fizikai}}$ téren normál rendben a fizikai mennyiségek várható értékében csak ψ_T játszik szerepet. A-ra azért van ~~~~ mégis szükség, hogy a mennyiségek a lokális tulajdonságaikat is megtartsák.

A foton propagátor: időrendezett szorzat vákuumértéke ($\lambda = 1$ Feynman-mértékben) 12.06.

$$T[A_\mu(x) A_\nu(y)] = \Theta(x_0 - y_0) A_\mu(x) A_\nu(y) + \Theta(y_0 - x_0) A_\nu(y) A_\mu(x)$$

$\Box A_\mu = 0$ mozgásegyenlettel $T[A_\mu A_\nu]$ levezethető v. $A_\mu(x)$ kifejtésével, $[a^{(\lambda)}(\vec{k})\ a^{(\lambda)+}(\vec{k}')]$ kommutátorral

$$\langle 0| T[A_\mu(x) A_\nu(y)] |0\rangle = i g_{\mu\nu} D_F(x-y) = -i g_{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 + i\varepsilon}$$

($i\varepsilon$ ugyanolyan, mint skalármezőnél)

$$D_F(x) = \frac{1}{4\pi^2 i} \frac{1}{x^2 - i\varepsilon}$$

Az 1/2 spinű részecskék kvantumtérelmélete (a kvantált elektron mező)

Dirac-egyenlet

$\hbar = c = 1 \quad \rightarrow \quad \Delta x \Delta p \sim 1$

12.06.

ha Compton-hullámhossznál kisebb helyre lokalizáljuk a részecskét $\Delta x < \frac{1}{m}$ $\Rightarrow$ $\Delta E \sim \Delta p > m$ $\Rightarrow$ új részecske tud keletkezni $\Rightarrow$ ki kell lépni az egyrészecske kvantummechanikából $\to$ kvantumtérelmélet

$\psi(x) \leftrightarrow$ Dirac-egyenlet klasszikus téregyenlet és klasszikus mezőként tekintsük

$\psi(x)$ Lorentz-trafó alatt Dirac-bispinor

Dirac-egyenlet emlékeztető:

↳ $\psi(x)$ 4 komponensű (spinorindex, oszlopvektor)

↳ $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$

$$\left[i(\gamma^\mu)_{ij}\partial_\mu - m\,\mathbb{1}^{4\times4}_{ij}\right]\psi_i(x) = 0 \quad \forall j$$

↳ γ^μ Dirac mátrixok $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ $(= \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)$

↳ standard reprezentáció:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} +\mathbb{1}^{2\times2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}^{2\times2} \end{pmatrix} \quad \gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & +\sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix}$$ σ_j: Pauli reprezentáció

γ_0 hermitikus, γ_j antihermitikus

↳ síkhullám megoldások $\quad p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

$u(p)e^{-ipx}$ $\quad$ $v(p)e^{ipx}$

pozitív- $\quad$ negatív frekvenciás m.o.

$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0 \qquad (\gamma^\mu p_\mu + m)v(p) = 0$

ha $m \neq 0$, nyugalmi rendszerben 2 spin beállási lehetőség $\quad \chi_{s=-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \chi_{s=\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$u_s(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}\begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}\,\chi_s}{p^0 + m} \end{pmatrix}, \qquad \overline{u_s} := u_s^+ \gamma^0$$

$\overline{u}_s u_s = 2m$ normálás

$$v_s(\vec{p}) = -\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}\begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{p^0 + m}\epsilon\chi_s \\ \epsilon\chi_s \end{pmatrix}, \quad \epsilon = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{v}_s v_s = 2m$$

↳ általános m.o.:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0}\sum_{s=\pm\frac{1}{2}}\left(e^{ipx}v_s(\vec{p})\beta_s^*(\vec{p}) + e^{-ipx}u_s(\vec{p})\alpha_s(\vec{p})\right)$$

$\alpha_s(\vec{p})$, $\beta_s(\vec{p})$ két db komplex fv.

most kvantálni szeretnénk → síkhullám együtthatók operátorosítása $\alpha_s(\vec{p}) \to a_s(\vec{p})$

$\beta_s^*(\vec{p}) \to b_s^+(\vec{p})$

$\psi(x)$ komplex mező ⇒ két különböző fv. / op.

$\bar{\psi}(x) = \psi^+(x)\gamma^0 = \ldots a_s^+(\vec{p}) + \ldots b_s(\vec{p})$ lesz benne

Pauli elv → azonos 1/2 spinű részecskék rendszerének hfv-e antiszimmetrikus

$\Rightarrow \{a_s(\vec{p}), a_{s'}(\vec{p}\,')\} = 0$

$\{b_s^+(\vec{p}), b_{s'}^+(\vec{p}\,')\} = 0$ $\quad b_s^+(\vec{p})\, b_s^+(\vec{p}\,')|0\rangle = -b_s^+(\vec{p}\,')\, b_s^+(\vec{p})|0\rangle$

$\Rightarrow = 0$ nem lehetnek egyforma állapotban

$\{a_s(\vec{p}), a_{s'}^+(\vec{p}\,')\} = \delta_{ss'}\,\delta(\vec{p}-\vec{p}\,')(2\pi)^3 2p^0$

$\{b_s(\vec{p}), b_{s'}^+(\vec{p}\,')\} = \delta_{ss'}\,\delta(\vec{p}-\vec{p}\,')(2\pi)^3 2p^0$

Fock vákuum $b_s(\vec{p})|0\rangle = a_s(\vec{p})|0\rangle = 0$

ez a választás konzisztens:

Heisenberg egyenlet $\frac{\partial\psi}{\partial t} = i[\mathcal{H}, \psi]$ igaz

$|0\rangle$ részecskementes állapot, $\mathcal{H}|0\rangle = 0$ legyen

egyrészecske állapotok energiája pozitív legyen

$\Rightarrow \int \tilde{dp} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \left(e^{ipx} v_s(\vec{p})\, ip^0 b_s^+(\vec{p}) - e^{-ipx} u_s(\vec{p})\, ip^0 a_s(\vec{p}) \right) =$

$= \int \tilde{dp} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \left[\left(e^{ipx} v_s(\vec{p})\, i[\mathcal{H}, b_s^+(\vec{p})] + e^{-ipx} u_s(\vec{p})\, i[\mathcal{H}, a_s(\vec{p})] \right) \right]$

$[\mathcal{H}, b_s^+(\vec{p})] = p^0 b_s^+(\vec{p})$ és $[\mathcal{H}, a_s(\vec{p})] = -p^0 a_s(\vec{p})$

$\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}$

$[\mathcal{H}, b_s(\vec{p})] = -p^0 b_s(\vec{p})$ $\quad [\mathcal{H}, a_s^+(\vec{p})] = p^0 a_s^+(\vec{p})$

$\left.\begin{array}{l} a_s^+(\vec{p})|0\rangle \\ b_s^+(\vec{p})|0\rangle \end{array}\right\}$ $p^0 = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$ $\mathcal{H}$ sajátértékű állapotok pozitív energiás.é.

$\| a_s(\vec p)^+ |0\rangle \| \Rightarrow \langle 0| a_s(\vec p)\, a_{s'}^+(\vec p\,')|0\rangle = \delta_{ss'}(2\pi)^3\, 2p^0\, \delta(\vec p - \vec p\,') \underbrace{\langle 0|0\rangle}_{1}$

$(2\pi)^3 2p^0 > 0$ kovariánsan normált egyrészecske állapot

$\{a_s^+(\vec p),\, b_s^+(\vec p)\}|0\rangle$ 4 db degenerált sajátállapota

$\mathcal{H}$-nak → 2 spinbeállás 2 állapotot magyaráz

Dirac egyenlet kvantálása kevésbé heurisztikusan:

Dirac egyenlet klasszikus téregyenlet → Lagrange

$\left[\mathcal{L} = \bar\psi i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar\psi\psi\right]$ $\qquad \bar\psi = \psi^+\gamma^0$

parc. int. $\left[\mathcal{L} = \frac{i}{2}(\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar\psi\gamma^\mu\psi) - m\bar\psi\psi\right]$ két ekvivalens alak

$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar\psi} = \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\bar\psi} \to \frac{i}{2}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = \partial_\mu(-i\gamma^\mu\psi) \to$ Dirac-e.

$\mathcal{L}$ nem függ a koordinátától $\Rightarrow \Theta^{\mu\nu}$ megmarad

$\Theta^{\mu\nu} = \partial^\nu\psi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\psi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\bar\psi}\partial^\nu\bar\psi$

$P^\mu = \int d^3x\, \Theta^{0\mu}$ megmaradó 4es impulzus

$P^0 = \mathcal{H}$

$P^\mu = \int d\tilde p\, p^\mu \sum_{s=\pm\frac12}\left(a_s^+(\vec p)\, a_s(\vec p) - b_s(\vec p)\, b_s^+(\vec p)\right)$

$\mathcal{H}|0\rangle = 0$ kellene $\Rightarrow$ normálrendezés kell

$:bb^+: = bb^+ - \{b, b^+\} = \boxed{-b^+b}$

fermionok miatt $-$ jel

$:P^\mu: = \int d\tilde p\, p^\mu \sum_{s=\pm\frac12}\left(a_s^+(\vec p)\, a_s(\vec p) + b_s^+(\vec p)\, b_s(\vec p)\right)$

$\mathcal{L}$ szimmetriája $\psi \to \psi e^{i\alpha}$ $\quad \bar\psi \to \bar\psi e^{-i\alpha}$ $\quad \alpha$ valós

infinitezimálisan $\psi \to \psi(1+i\alpha)$, $\bar\psi \to \bar\psi(1-i\alpha) = \bar\psi + \delta\bar\psi$

$J^\mu = \bar\psi\gamma^\mu\psi$ megmaradó áram

$Q = \int d^3x\, \bar\psi\gamma^0\psi = \int d^3x\, \psi^+ \underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{1}\psi$

$Q|0\rangle = 0$ legyen

$\psi^+\psi \sim (b + a^+)(b^+ + a) = bb^+ + a^+b^+ + a^+a + ba$

$\langle 0|Q|0\rangle = 0$ $\qquad \langle 0| \quad |0\rangle$

normálrendezünk

$:Q: = \int \tilde{dp} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \left(a_s^+(\vec{p})\, a_s(\vec{p}) - b_s^+(\vec{p})\, b_s(\vec{p}) \right)$

extra két állapot mivel a^+-tel és b^+-tel keltett részek ellentétes töltéssajátállapotok
sajátértékű

összefoglalva: Dirac egyenlet kvantálása

↳ antikommutátorok

↳ normálrendezés (csere ⇒ θ)

↳ Pauli elv működik

↳ vákuum fölött csak pozitív energiájú állapotok

↳ ellentétes megmaradó töltésű részecskepárok létezését írja le

elektront kvantálunk → Q-t elektromos töltéssel kapcsolatba lehet hozni → elektron töltése $-e$ → $:Q:$-ban $(-e)$

külső em térben felírt Dirac-egyenlet

$$\left[i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m \right]\psi = 0$$

↑ em vektorpot. 4esvektor

(ebből kijön nemrelativisztikusan a Pauli-egyenlet)

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

megj: $a_s(\vec{p})$, $b_s(\vec{p})$ ... antikommutátorokat át lehet fogalmazni

$$\{\psi_i(\vec{x},t), \bar{\psi}_j(\vec{y},t)\} = (\gamma^0)_{ij}\, \delta(\vec{x}-\vec{y})$$

$$\{\psi(\vec{x},t), \psi(\vec{y},t)\} = 0 = \{\bar{\psi}(\vec{x},t), \bar{\psi}(\vec{y},t)\}$$ (EKR-ek helyett)

$$\Pi_\psi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_0\psi} = \bar{\psi} i\gamma^0$$

$\gamma^0\gamma^0 = 1$

egyidejű antikommutátor: $\{\psi_i(\vec{x},t), \Pi_{\psi\, j}(\vec{y},t)\} = i\delta_{ij}\delta(\vec{x}-\vec{y})$

RÉSZECSKEFIZIKA

12.13

$\frac{1}{2}$ spinű mezők kvantumelmélete

$a_s(\vec{p})$, $a_s^+(\vec{p})$, $b_s(\vec{p})$, $b_s^+(\vec{p})$ antikommutátorokkal

$\Psi(\vec{x},t)_j$ komponensek antikommutációs tulajdonságaiba

$\{\Psi_i(\vec{x},t), \bar{\Psi}_j(\vec{y},t)\} = (\gamma_0)_{ij}\ \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$

i, j: spinorindexek

$\{\Psi(\vec{x},t), \Psi(\vec{y},t)\} = 0 = \{\bar{\Psi}(\vec{y},t), \bar{\Psi}(\vec{x},t)\}$ $\quad \forall\, i, j$

azonos kanonikus kvantálással, ha antikommutátorral kvantálunk

$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi$

$P_\Psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \Psi} = \bar{\Psi} i \gamma^0$ $\qquad \{\Psi_i(\vec{x},t), P_\Psi(\vec{y},t)_j\} = i\,\delta_{ij}\ \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$

és $\forall$ egyéb egyidejű antikommutátor $= 0$

$(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$ kihasználásával belátható

ha $\hbar$-t visszaírjuk $\{\quad\} = \hbar$ ______

klasszikus limesz: $\hbar \to 0$ $\quad \{\Psi_i(\vec{x},t), \bar{\Psi}_j(\vec{y},t)\} = 0$

$\Rightarrow$ nem c-számok v. függvények !!!

(Grassmann algebra

fermion mezők funkcionálintegrálját újra kell definiálni)

$a_s(\vec{p})|0\rangle = 0 \quad b_s(\vec{p})|0\rangle = 0$ $\qquad$ Fock-vákuum $|0\rangle$

(betöltött „Dirac-tenger")

mi történne, ha az 1/2 spinű mezőt kommutátorral kvantálnánk? $\rightarrow$ energia nem lenne alulról korlátos

$\rightarrow$ lokalitás nem teljesülne

$\frac{1}{2}$ spinű mezők időrendezett szorzata és propagátora

$T[\Psi_i(x)\bar{\Psi}_j(y)] = \Theta(x_0-y_0)\Psi_i(x)\bar{\Psi}_j(y) - \Theta(y_0-x_0)\bar{\Psi}_j(y)\Psi_i(x)$

!!!

propagátor $\langle 0|T(\Psi_i(x)\bar{\Psi}_j(y))|0\rangle = iS(x-y)_{ij}$

$S(x-y)_{ij}$ meghatározható

1. szabad téregyenlettel levezetjük az egyenletét

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)_{ij} \langle 0 | T(\psi_j(x)\bar{\psi}_k(y)) | 0 \rangle = i\delta_{ik}\delta^{(4)}(x-y)$$

megoldjuk az inhomogén diffegyenletet

2. $\psi, \bar{\psi}$ kifejtésével (a, b segítségével) és Wick-tétellel

$$T(\psi(x)\bar{\psi}(y)) = iS(x-y) + :\psi(x)\bar{\psi}(y):$$

eredmény:

$$S(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \frac{\not{k}+m}{k^2-m^2+i\varepsilon}$$

$$\not{k} = k^\mu \gamma_\mu$$

mint a skalárnál

<u>A relativisztikus kvantumelektrodinamika (QED) alapjai:</u>

elektromágneses mező | elektron/pozitron | kölcsönhatás

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{\psi/\bar{\psi}} + \mathcal{L}_I$$

$\lambda = 1$ Feynman-mérték

$$\mathcal{L}_F = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2$$

$$\mathcal{L}_{\bar{\psi}/\psi} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$$

$$\mathcal{L}_I = e:\bar{\psi}\gamma^\mu\psi:A_\mu$$

$\mathcal{L}_{QED}$ klasszikusan $\partial_\nu F^{\mu\nu} = \Box A^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ Maxwell egyenlet és $(i\gamma^\mu\partial_\mu - ieA_\mu)\psi - m\psi = 0$ külső teres Dirac egyenlet

impulzusor szokásos módon előállítható

$$:H: = :\int d^3x (\pi_i \dot{\phi}_i - \mathcal{L}): =$$

összes mező

$$= :\int d^3x \left\{ \frac{1}{2}\dot{A}_i^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}A_i)^2 - \frac{1}{2}(\dot{A}_0)^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}A_0)^2 - i\bar{\psi}\gamma^j\nabla_j\psi - \right.$$

$$\left. - m\bar{\psi}\psi \right\}: + :\int d^3x\, \bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu:$$

$$H_0 + H_I$$

kölcsönhatási képben

Ψ operátor $\mathcal{H}_0$-lal fejlődik

$|\Psi\rangle$ állapotok $\quad i\dfrac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t} = \mathcal{H}_I'\,|\Psi\rangle$

$\uparrow$ $\mathcal{H}_0$ szerint fejlődik

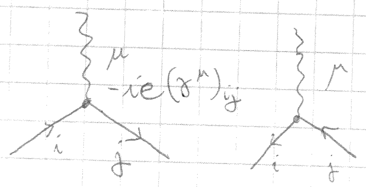
Szórásmátrix $\quad |i\rangle \longrightarrow |f\rangle$

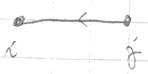
$$S_{if} = T\left(\langle f|:\exp\left(-i\int_{-\infty}^{\infty} dt'\,\mathcal{H}_{int}(t')\right):|i\rangle\right)$$

$$\int_{-t}^{t} dt'\,\mathcal{H}_I'(t') = -ei\int d^4x :\bar\Psi\gamma^\mu\Psi: A_\mu$$

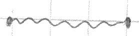
$\downarrow$ vertex(ek)

$\mathcal{H}_I$ töltést megőrzi $\rightarrow$ vertexekben is megmarad töltés





iS_{ij} (fermion propagátor)


$ig_{\mu\nu}D_F$ (fotonpropagátor)

vagy átfutó fermionvonalak v. zárt hurkok

$\downarrow$ (-1) szorzó