

Képletek a részecskefizika vizsgára
vázlat:20110127020900

Szabó Áron
Eötvös Loránd Tudományegyetem
fizikus MSc. I. évfolyam

2011. január 27.

Tartalomjegyzék

1. Elemi részecskék, kölcsönhatások, nagyságrendek	4
1.1. Kvarkok, leptonok, közvetítő bozonok, barionok, mezonok	4
1.2. A három kölcsönhatás hatótávolsága, tipikus élettartama és hatáskeresztmetszete	4
2. Relativisztikus kinematika	5
2.1. Energia–impulzus négyesvektor	5
2.2. Részecskék ütközése, tömegközépponti energia	5
2.3. Ütköző nyalábok és fix céltárgyas kísérletek	5
2.4. A Mandelstram-változók	6
3. Az S mátrix és a szórási hatáskeresztmetszet	7
4. Megmaradó és sérülő szimmetriák	8
4.1. Paritás	8
4.2. Szín (colour)	8
4.3. C paritás	8
4.4. Izospin	8
4.5. Ritkaság	8
5. A hadronok kvarkmodellje és az $SU(3)$ szimmetria	9
5.1. A bariondekuplet és -oktet hullámfüggvény, pszeudoskalár mezonok	9
5.2. Az $SU(3)$ csoport és szimmetriaelemei	10
6. A Gell-Mann–Okubo-tömegformula	11
6.1. Az $SU(3)$ sérülése, a tömegformula levezetése és alkalmazásai	11
6.2. A kvarkmodell paradoxonai és a színszimmetria	11
7. A semleges K^0-k és a CP sértés	12
7.1. A rövid és hosszú élettartamú K^0	12
7.2. Az oszcilláló ritkaság	12
7.3. A CP sérülése	12
8. Hadronrezonanciák és a Breit–Wigner-formula	13
8.1. Hadronrezonanciák	13
8.2. A Breit–Wigner-formula	13
9. A térelméleti Lagrange–Hamilton-formalizmus	14
9.1. Mezők, hatás, mozgásegyenlet	14
9.2. Az energia–impulzus-tenzor	14
9.3. A Noether-tétel globális belső szimmetriára	15
10. A kanonikus kvantálás alapjai (skalármezőre)	16
10.1. Kanonikus csererelációk	16
10.2. A Heisenberg-egyenlet és kapcsolata a klasszikus egyenlettel	16
10.3. Szabad valós és komplex skalármezők kvantálása	16
10.4. Normálrendezés	17

11.A Feynman-propagátor skalármezőre	18
11.1. Az időrendezett szorzatra vonatkozó egyenlet és megoldása	18
11.2. Az integrálreprezentáció analízise és kapcsolata a közvetlen számolás eredményével	18
12.A kölcsönhatási kép és a perturbációszámítás	19
12.1. Schrödinger-, Heisenberg- és kölcsönhatási kép	19
12.2. Az időfejlesztő operátor és mozgásegyenlete, az egyenlet megoldása	19
13.Aszimptotikus állapotok és a szórási mátrix (skalármezőre)	21
13.1. Aszimptotikus állapotok	21
13.2. A szórási folyamat perturbatív leírása és az időfejlesztő operátor	21
13.3. Feynman-gráfszabályok	21
14.Az elektromágneses mező kovariáns kvantálása	22
14.1. A $\partial_\mu A^\mu = 0$ mérték problematikája	22
14.2. Kanonikus kvantálás	22
14.3. Negatív normájú állapotok, a fizikai altér definíciója és szerkezete	23
14.4. A fizikai mennyiségek várható értéke	24
14.5. A fotonpropagátor	24
15.1/2 spinű mezők kvantumelmélete, a kvantált elektronmező	25
15.1. A Dirac-egyenlet síkhullám megoldása	25
15.2. A Fourier-együtthatók kvantálása	25
15.3. Normálrendezés, energia és impulzus, töltés és antirészecske-állapot	26
15.4. A fermionmezők propagátora	27
16.Relativisztikus elektron/pozitron rendszer és az elektromágneses mező (QED)	28
16.1. A szabad és kölcsönhatási Lagrange- és Hamilton-függvény	28
16.2. Propagátorok és vertexek	29

1. **Elemi részecskék, kölcsönhatások, nagyságrendek**

1.1. **Kvarkok, leptonok, közvetítő bozonok, barionok, mezonok**

1.2. **A három kölcsönhatás hatótávolsága, tipikus élettartama és hatáskeresztmetszete**

2. Relativisztikus kinematika

2.1. Energia–impulzus négyesvektor

Négyes sebesség: $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, négyzete: $u_\mu g^{\mu\nu} u_\nu = 1$. Négyes impulzus: $p^\mu = m u^\mu = \begin{bmatrix} E \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}$.
Tömegéjfeltétel a klasszikus pályán mozgó részecskékre:

$$(p^\mu)^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$$

2.2. Részecskék ütközése, tömegközépponti energia

2.3. Ütköző nyalábok és fix céltárgyas kísérletek

Fix céltárgyra a céltárgy energia–impulzus négyesvektora a laborrendszerben:

$$p_{1,L}^\mu = \begin{bmatrix} m \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

a nyaláb energiája ugyanebben a rendszerben:

$$p_{2,L}^\mu = \begin{bmatrix} E_L \\ \mathbf{p}_L \end{bmatrix},$$

így az összegük

$$p_L^\mu = \begin{bmatrix} E_L + m \\ \mathbf{p}_L \end{bmatrix}.$$

A tömegközépponti rendszerben a rendszer teljes energia–impulzusa:

$$p_M^\mu = \begin{bmatrix} E_M \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Mivel a négyesimpulzus négyzete Lorentz-skalár, ezért

$$E_M^2 = (p_M^\mu)^2 = (p_L^\mu)^2 = (E_L + m)^2 - \mathbf{p}_L^2 = (E_L^2 - \mathbf{p}_L^2) + m^2 + 2mE_L = m^2 + m^2 + 2mE_L \approx 2mE_L.$$

Tehát ekkor $E_M \sim \sqrt{E_L}$.

Ütköző részecskés kísérletre ezzel szemben:

$$p_{1,L}^\mu = \begin{bmatrix} E_L \\ \mathbf{p}_L \end{bmatrix},$$

a nyaláb energiája ugyanebben a rendszerben:

$$p_{2,L}^\mu = \begin{bmatrix} E_L \\ -\mathbf{p}_L \end{bmatrix},$$

így az összegük

$$p_L^\mu = \begin{bmatrix} 2E_L \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

A tömegközépponti rendszerben a rendszer teljes energia–impulzusa:

$$p_M^\mu = \begin{bmatrix} E_M \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Mivel a négyesimpulzus négyzete Lorentz-skalár, ezért

$$E_M^2 = (p_M^\mu)^2 = (p_L^\mu)^2 = (2E_L)^2 = 4E_L^2.$$

Tehát ekkor $E_M \sim E_L$. Az ütköző nyalábos kísérletekkel azonos laborrendszerben mérhető energiával nagyobb tömegközépponti energiát lehet elérni.

2.4. A Mandelstram-változók

A Mandelstram-változók az $ab \rightarrow cd$ folyamatra a következők:

$$s := (p_a + p_b)^2$$

$$t := (p_a - p_c)^2$$

$$u := (p_a - p_d)^2$$

Ezek mind Lorentz-invariáns skalárok, hiszen egy-egy négyesvektor négyzeteként állnak elő. Az előző részben az s Mandelstram-változóval számoltunk. Összefüggés a Mandelstram-változók között:

$$s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2.$$

Ha s jóval nagyobb, mint bármelyik tömeg négyzete, akkor nagy energiás szórásról beszélünk, és a következő közelítések igazak:

$$t = -\frac{s}{2}(1 - \cos \theta^*),$$

$$u = -\frac{s}{2}(1 + \cos \theta^*),$$

ahol θ^* a tömegközépponti rendszerben mért eltérülési szög. AZ előző képletek feltételei:

$$s \geq m_a + m_b,$$

$$s \geq m_c + m_d,$$

$$0 \geq t \geq -s,$$

$$0 \geq u \geq -s.$$

A keresztező folyamatok $\dots s, t, u$ csatorna.

3. Az S mátrix és a szórási hatáskeresztmetszet

Az S mátrixot lehet az elméletekből számolni, a hatáskeresztmetszetet lehet megmérni a laborban. Az átmeneti valószínűség amplitúdója:

$$S_{fi} = \langle f | S | i \rangle \approx \delta_{fi} + (2\pi)^4 \delta(p_f - p_i) \langle f | T | i \rangle,$$

az első tag az előreszórás, a második tagban a Dirac-delta az energia-impulzus megmaradását jelzi, T a reakciómátrix, elméletileg számolható. Az átmeneti valószínűség:

$$dW_{fi} = ((2\pi)^4 \delta(p_f - p_i))^2 |T_{fi}|^2.$$

Kiintegrálva V térfogatra és T időtartamra az egyik Dirac-delta eltűnik, és helyette bejön egy VT szorzó (ha $p^f - p^i = 0$, de ezt a másik Dirac-delta biztosítja). Az átmeneti valószínűség időegységre vonatkoztatva:

$$\frac{W_{fi}}{T} = V(2\pi)^4 \delta(p^f - p^i) |T_{fi}|^2.$$

Ha $V \rightarrow \infty$ és $T \rightarrow \infty$, akkor folytonos eloszlást kapunk az impulzusban, aminek sűrűsége

$$\frac{dW_{fi}}{T} = V(2\pi)^4 \delta(p^f - p^i) |T_{fi}|^2 \frac{\prod_{k=1}^m \frac{d^3 \mathbf{p}_k^f}{(2\pi\hbar)^3} V}{\prod_{l=1}^m (2p_l^0 V) \prod_{m=1}^2 (p_i^0 V)},$$

ha m részecske keletkezett. A normálás abból fakad, hogy a határozott impulzusú síkhullámok valószínűsége $\rho_k = 2p_k^0$. A differenciális hatáskeresztmetszet és az átmeneti valószínűség kapcsolata fix céltárgy esetén:

$$d\sigma = \frac{dW_{fi}}{T} \frac{2}{j_{be}}.$$

Minden rendszerre érvényes formában:

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta(p^f - p^i) |T_{fi}|^2 \frac{1}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 p_a^2 p_b^2}} \prod_{k=1}^m \frac{d^3 \mathbf{p}_k^f}{(2\pi)^3 2p_k^0}$$

4. Megmaradó és sérülő szimmetriák

4.1. Paritás

A részecskék J^π osztályozása: 0^+ skalár (nincs), 0^- pszeudoskalár, 1^- vektormezon, 1^+ axiálvektormezon. Konvenció szerint a fermionok (pl. barionok) paritása pozitív, ez azért kell, mert általában csak a relatív paritást tudjuk meghatározni. Fermion–antifermion relatív paritás: -1 .

4.2. Szín (colour)

4.3. C paritás

A π^0 C paritása $+1$, foton C paritása -1 , ezért nincs $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma\gamma$.

4.4. Izospin

$SU(2)$ szimmetria

4.5. Ritkaság

mennyiség	erős	elektromágéses	gyenge
energia	✓	✓	✓
töltés	✓	✓	✓
barionszám	✓	✓	✓
leptonszámok	✓	✓	✓
CPT	✓	✓	✓
izospin	✓	–	–
ritkaság	✓	✓	–
paritás	✓	✓	–
C paritás	✓	✓	–

1. táblázat. Megmaradó mennyiségek

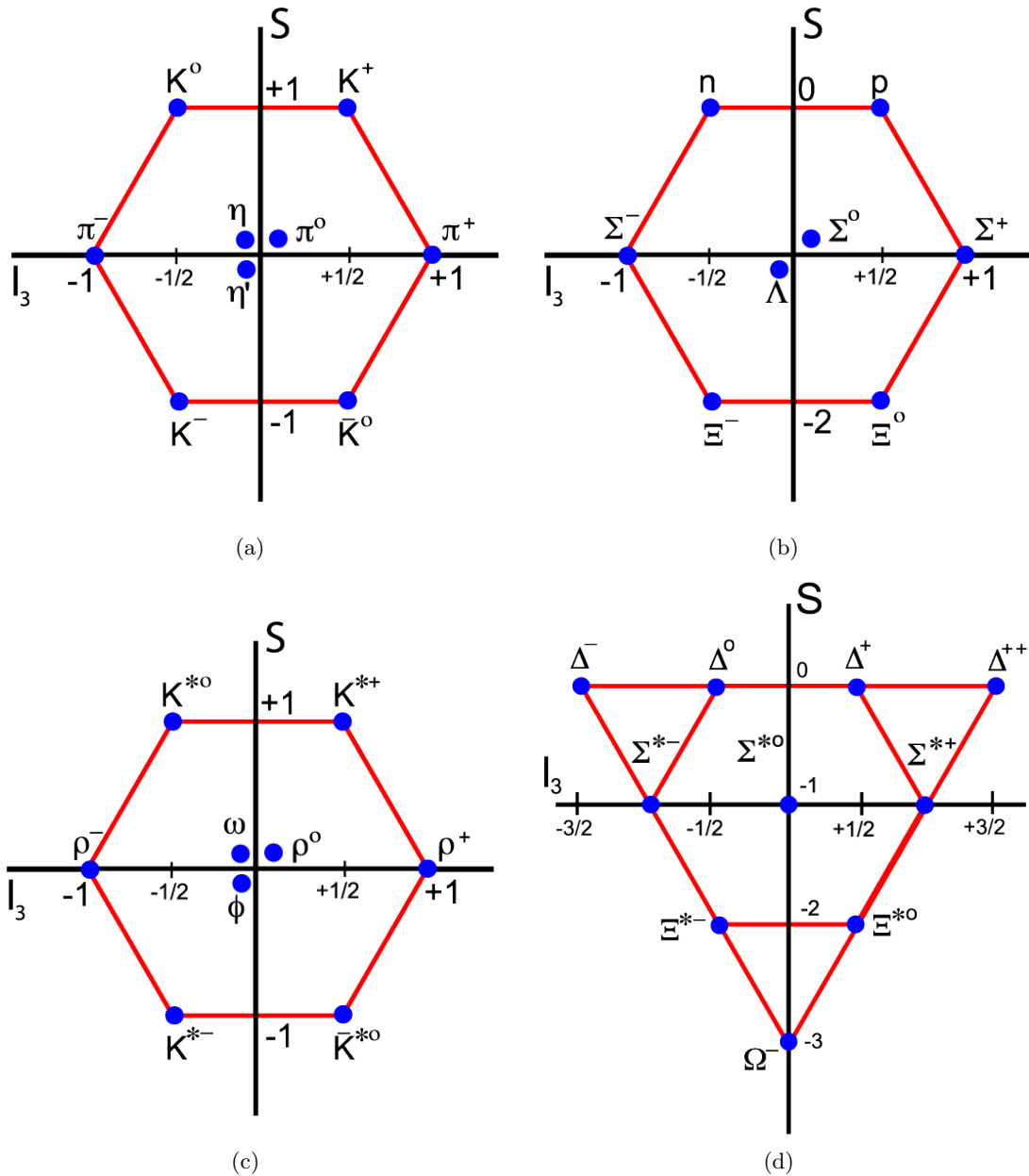
Gell-Mann–Nisidzsima-összefüggés:

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(B + S) = I_3 + \frac{1}{2}Y,$$

ahol B a barionszám, S a ritkaság, I_3 az izospin és $Y := B + S$ a hipertöltés.

5. A hadronok kvarkmodellje és az $SU(3)$ szimmetria

5.1. A bariondekuplet és -oktet hullámfüggvény, pszeudoskalár mezonok



1. ábra. Hadronok az $I_3 - Y$ síkon. (a) Mezonoktett 0^- , pszeudoskalár (b) Barionoktett $(1/2)^+$ (c) Mezonoktett 1^- , vektormezon (d) Bariondekuplett $(3/2)^+$ (forrás: <http://jazz.physik.unibas.ch/krusche/>)

5.2. Az $SU(3)$ csoport és szimmetriaelemei

$U = \exp(\frac{1}{2}\epsilon_a \lambda_a)$, λ_a a Gell-Mann-mátrixok ($a = 1, \dots, 8$). λ_1, λ_2 és λ_3 az $SU(2) \oplus id$ rész csoportot alkotják. λ_8 kommutál λ_3 -mal (az izospinnel!), és a hipertöltést megadja:

$$Y = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Tr}(\lambda_k \lambda_l) = 2\delta_{kl},$$

$$[\lambda_k, \lambda_l] = 2if_{klm}\lambda_m,$$

ahol f_{klm} a struktúraállandók (antiszim.). Az $SU(3)$ szimmetria sérül a kvarktömegek miatt.

6. A Gell-Mann–Okubo-tömegformula

6.1. Az $SU(3)$ sérülése, a tömegformula levezetése és alkalmazásai

Legyen F_a olyan, hogy $(F_a)_{bc} = -if_{abc}$, azaz amellyel:

$$[\lambda_a, \lambda_b] = (F_a)_{bc} \lambda_c.$$

Nyugvbó kvarkokat feltételezve a tömeg:

$$m = \langle Q^i | H | Q^j \rangle = \langle Q^i | (H_0 + H_8) | Q^j \rangle.$$

Ebből levezethető a Gell-Mann–Okubo-tömegformula:

$$m = \tilde{m}_0 + \delta m_1 Y + \delta m_2 (I(I+1)) - \frac{Y^2}{4},$$

ahol \tilde{m}_0 , δm_1 és δm_2 ábrázolásfüggő, $I(I+1)$ pedig az $F^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2$ operátor sajátértéke.

Alkalmazás: $(\frac{1}{2})^+$ barionoktett. ?

6.2. A kvarkmodell paradoxonai és a színszimmetria

- tört töltést nem figyeltek meg szabadon
- miért nincs (qq) vagy (qqq) állapot?
- $\Delta^{++} = (uuu)$ térben és spinben is szimmetrikus, pedig fermion

Feloldás: kvarkbezárás, és színszimmetria. A színszimmetria $SU(3)$ szimmetria, egzakt. csak szinglett állapot figyelhető meg. Minden ízhez tartozik három szín. Csak „színtelen” állapotok vannak.

7. A semleges K^0 -k és a CP sértés

7.1. A rövid és hosszú élettartamú K^0

A semleges kaonok: $|K^0\rangle = |\bar{s}d\rangle$ és az antirészecskéje: $|\bar{K}^0\rangle = |s\bar{d}\rangle$. Ezekre a töltéskonzerválás és a tértükrözés hatása:

$$P |K^0\rangle = - |K^0\rangle \quad C |K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle,$$

$$P |\bar{K}^0\rangle = - |\bar{K}^0\rangle \quad C |\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle.$$

Magyarul ezen a bázison $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, míg $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Áttérve a

$$|K_{\pm}^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle \mp |\bar{K}^0\rangle)$$

bázisra

$$CP |K_{\pm}^0\rangle = \pm |K_{\pm}^0\rangle.$$

A pionokra:

$$CP |\bar{\pi}^0\pi^0\rangle = |\bar{\pi}^0\pi^0\rangle$$

$$CP |\pi^+\pi^-\rangle = |\pi^+\pi^-\rangle$$

A hárompionos végállapotokra:

$$CP |\pi^0\pi^0\pi^0\rangle = - |\pi^0\pi^0\pi^0\rangle$$

$$CP |\pi^+\pi^-\pi^0\rangle = (-1)^l |\pi^+\pi^-\pi^0\rangle$$

A kísérletekből $l = 0$. Tegyük fel, hogy CP invariancia van. Ekkor a lehetséges folyamatokat a 2. táblázat mutatja.

	$\bar{\pi}^0\pi^0$	$\pi^+\pi^-$	$\pi^0\pi^0\pi^0$	$\pi^+\pi^-\pi^0$
CP	+1	+1	-1	$(-1)^l = 1$
K_+	✓, P sérül	✓, P sérül	-	-
K_-	-	-	✓, P megmarad	✓, P megmarad

2. táblázat. Kaonok bomlása pionokra. A K_- részecske bomlásakor a paritás megmarad, ami kb. százszor hosszabb élettartamot biztosít a K_- -nak a K_+ -hoz képest

7.2. Az oszcilláló ritkaság

Egy tiszta K^0 nyaláb oda-vissza alakul \bar{K}^0 -ba. Ennek következményeként tudták kimérni a K_{\pm} tömegek közötti eltérést (ami 10^{-15} nagyságrendű).

7.3. A CP sérülése

Crontu és társai: a CP sérül, ezért – mivel a CPT invariancia megvan – mikroszopikusan az időtükrözési invariancia se teljesül. A CPT invariancia következménye az, hogy a részecskéknek és az antirészecskéknek ugyanakkora a tömege (illetve bomló részecskék esetén az élettartama). A CP invariancia sérülése miatt van az anyag–antianyag aszimmetria az univerzumban. Szintén emiatt lehetséges (kis valószínűséggel) a K_- bomlása két pionra.

8. Hadronrezonanciák és a Breit–Wigner-formula

8.1. Hadronrezonanciák

Hadronrezonancia: erős kölcsönhatással bomló, nagyon rövid élettartamú részecske. Nem lehet buborékkamrában vizsgálni, szórás kísérletek kellenek. Leggyakoribb: pion–nukleon szórás:

$$\pi + p \rightarrow X$$

A spektrumban magas energiás csúcsként jelentkeznek. A csúcs helye a tömeggel arányos, a szélessége pedig az élettartammal. Például

$$\pi^+ + p^+ \rightarrow \Delta^{++}$$

Onnen tudjuk, hogy éppen ez keletkezik, hogy az $s = (p_\pi + p_p)^2$ Mandelstram-változó gyökét tudjuk mérni (ezt ábrázoljuk a spektrumon). A mérési adatból a $\Delta^{++} = (uuu)$ részecskére következtetünk. Egyébként a

$$\pi^- + p^+ \rightarrow \Delta^0$$

reakciót is hasonló módon lehet meghatározni.

8.2. A Breit–Wigner-formula

A kvantumtérelméletből az jön, hogy a reakciómátrix

$$T_{fi} \sim \frac{1}{s - m_\Delta^2},$$

ahol s Mandelstram-változó ?. Ezt megbuheráljuk úgy, hogy figyelembe vegye a bomlást is:

$$T_{fi} \sim \frac{1}{s - m_\Delta^2 + im_\Delta \Gamma_\Delta},$$

ahol Γ_Δ a félértékszélesség. Innen a differenciális hatáskeresztmetszet:

$$d\sigma \sim |T_{fi}|^2 \sim \frac{1}{(s - m_\Delta)^2 + m_\Delta^2 \Gamma_\Delta^2}$$

9. A térelméleti Lagrange–Hamilton-formalizmus

9.1. Mezők, hatás, mozgásegyenlet

Mező: operátorosítjuk a klasszikus mennyiségeket

$$\begin{array}{lll} \Phi_{\mathbf{x}}^a(t) & \text{skalár (valós vagy komplex)} & S = 0 \\ \Psi_{\mathbf{x}}^a(t) & \text{spinor} & S = 1/2 \\ A_{\mu, \mathbf{x}}^a(t) & \text{vektor} & S = 1 \end{array}$$

Hatásintegrál funkcionál (\mathcal{L} a Lagrange-sűrűség, L a Lagrange-függvény):

$$S : \Phi \mapsto \int d^4x \mathcal{L}(\Phi^a, \partial_\mu \Phi^a) = \int dt L(\Phi^a, \partial_\mu \Phi^a)$$

Klasszikus mozgásegyenletek:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^a)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^a},$$

konjugált impulzus:

$$\pi^a(\mathbf{x}, t) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Phi^a)}$$

9.2. Az energia–impulzus-tenzor

Kanonikus energia–impulzus-tenzor:

$$T^{\mu\nu} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^a)} \partial^\nu \Phi^a - g^{\mu\nu} \mathcal{L},$$

a megmaradó energia–impulzus-vektor:

$$P^\mu = \int T^{0\mu} d^3\mathbf{x} = (E, \mathbf{P})$$

Példák: egyetlen önkölcsönható valós Lorentz-skalármező:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi - \frac{m^2}{2} \Phi^2 - V(\Phi),$$

mozgásegyenlete (Klein–Gordon-egyenlet):

$$(\square + m^2)\Phi = -\frac{\partial V}{\partial \Phi}.$$

Síkhullám megoldás esetén a diszperziós reláció:

$$-\omega^2 + \mathbf{k}^2 + m^2 = k_\mu g^{\mu\nu} k_\nu + m^2 = 0.$$

Több komponens esetén $\Phi \rightsquigarrow \Phi^a$ és $m \rightsquigarrow m_0$.

9.3. A Noether-tétel globális belső szimmetriára

Csak a klasszikus mozgásegyenletnek eleget tevő klasszikus megoldásra! Legyen a belső szimmetria $SU(n)$. Ekkor a

$$\Phi_k(t, \mathbf{x}) \mapsto \Psi_k(t, \mathbf{x}) + i\epsilon_a (t^a)_{kl} \Phi^k(t, \mathbf{x}) + \mathcal{O}(\epsilon_a^2)$$

infinitézimális transzformációra a Lagrange-sűrűség variációja nulla:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta\mathcal{L}(\Phi_k, \partial_\mu \Phi_k) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_k} \delta\Phi_k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_k)} \delta(\partial_\mu \Phi_k) = \\ &= \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_k)} \Phi_k \delta\Phi_k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_k)} \delta(\partial_\mu \Phi_k) = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_k)} \delta\Phi_k \right) = \\ &= \epsilon^a \partial_\mu \left(i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_k)} (t^a)_{kl} \Phi_l \right), \end{aligned}$$

ami (mivel ϵ^a tetszőleges) egy kontinuitási egyenlet a

$$j_\mu^a = -i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_k)} (t^a)_{kl} \Phi_l$$

Noether-áramra (a levezetés során az összetett függvény deriválási szabályát, a klasszikus mozgásegyenletet, a szorzatfüggvény deriválási szabályát és az infinitézimális transzformációból származó variációt használtuk fel).

10. A kanonikus kvantálás alapjai (skalármezőre)

10.1. Kanonikus csererelációk

Csak az egyidejű téroperátorokra!

$$\begin{aligned} [\Phi^a(t, \mathbf{x}), \Phi^b(t, \mathbf{y})] &= 0 \\ [\pi^a(t, \mathbf{x}), \pi^b(t, \mathbf{y})] &= 0 \\ [\Phi^a(t, \mathbf{x}), \pi^b(t, \mathbf{y})] &= i\delta^{ab}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned}$$

10.2. A Heisenberg-egyenlet és kapcsolata a klasszikus egyenlettel

Az operátorok mozgásegyenlete a Heisenberg-képben:

$$\partial_0 A(t, \mathbf{x}) = i[H, A(t, \mathbf{x})],$$

ahol

$$H = \int \mathcal{H}(\Phi^a, \pi^a) d^3\mathbf{x} = \int (\pi^a(t, \mathbf{x})\partial^0\Phi^a - \mathcal{L}) d^3\mathbf{x}$$

a Hamilton-operátor. Ha a Lagrange-sűrűség a szokásos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi^a g^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi^a - \frac{m_a^2}{2}(\Phi^a)^2 - V(\Phi^a),$$

akkor a Hamilton-operátor:

$$H = \int \left(\frac{1}{2}(\pi^a)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\Phi^a)^2 + \frac{m_a^2}{2}(\Phi^a)^2 + V(\Phi^a) \right) d^3\mathbf{x},$$

ahol a ∂_μ négyes gradiens helyett már csak a ∇ térbeli gradiens van. Ebből behelyettesítéssel kijön a Klein–Gordon-egyenlet is.

10.3. Szabad valós és komplex skalármezők kvantálása

A Klein–Gordon-egyenlet megoldását Fourier-transzformáltként keressük. Eredmény:

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = \int \left(a(\mathbf{p})e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} + a^+(\mathbf{p})e^{+i\mathbf{p}\mathbf{x}} \right) \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega(\mathbf{p})},$$

ahol az $a(\mathbf{p})$ operátorok kommutációs relációi (az operátorok a Fok-tér léptető operátorai):

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{p}), a(\mathbf{p}')] &= 0 \\ [a^+(\mathbf{p}), a^+(\mathbf{p}')] &= 0 \\ [a(\mathbf{p}), a^+(\mathbf{p}')] &= (2\pi)^3 2\omega(\mathbf{p})\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \end{aligned}$$

Részecskeszám-operátor:

$$\mathcal{N}(\mathbf{p}) = a^+(\mathbf{p})a(\mathbf{p})$$

Komplex mezőre ugyanez (a mezővel és a kongujáltjával), csak kétféle operátort kapunk ($a(\mathbf{p})$ és $b(\mathbf{p})$). Kiderül, hogy ez a megmaradó töltésnek ± 1 sajátértékhez tartozó sajátállapotai. Minden töltés jelegő megmaradó mennyiség (elektromos töltés, barionszám, hipertöltés stb.) ilyen fázistranszformációval szembeni invariancia van.

10.4. Normálrendezés

A normálrendezéssel az energia nullszintjét a vákuumbeli energiához rögzítjük (normálrendezés nélkül ez végtelen lenne). A többi energia *a vákuumenergiához képest* véges energián van. Egy szorzat normálrendezettjében az eltüntetőoperátorok vannak jobbra (a sorrend mindegy, mert kommutálnak). A részecskeszám-operátor például nem normálrendezett alakban divergens, mivel a végtelen sok részecske alapállapotú energiája végtelenre összegződik, ha nem mindegyik nulla.

11. A Feynman-propagátor skalármezőre

11.1. Az időrendezett szorzatra vonatkozó egyenlet és megoldása

Időrendezett szorzat:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\Phi(x), \Phi(y)) &:= \Theta(x^0 - y^0)\Phi(x)\Phi(y) + (1 - \Theta(x^0 - y^0))\Phi(y)\Phi(x) = \\ &= \begin{cases} \Phi(x)\Phi(y) & \text{ha } y^0 \leq x^0 \\ \Phi(y)\Phi(x) & \text{ha } x^0 < y^0 \end{cases} \end{aligned}$$

Erre az alábbi egyenlet vonatkozik:

$$(\square_x + m^2)i\mathcal{T}(\Phi(x), \Phi(y)) = \delta(x - y),$$

ahol a jobb oldalon négyes Dirac-delta áll. Legyen

$$\mathcal{G}(x, y) := \langle 0 | \mathcal{T}(\Phi(x), \Phi(y)) | 0 \rangle$$

a differenciálegyenlet Green-függvénye. A megoldáshoz feltételezzük, hogy \mathcal{G} eltolásinvariáns, és Fourier-transzformálunk, aminek az elvégzéséhez $m \rightsquigarrow m - i\epsilon$ cserét hajtunk végre, ahol $\epsilon \searrow 0$ kicsi. Ekkor

$$\mathcal{G}(x, y) = \mathcal{G}(x - y) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)} d^4k.$$

Innen a komplex függvények körintegráljára vonatkozó Cauchy-tétel alapján számolunk tovább. Az integrálból először a k^0 szerinti komplex integrált végezzük el. Vigyázni kell, mert $x^0 < y^0$ és $y^0 < x^0$ esetén más-más körintegrált kell elvégezni (rendre felső vagy alsó félkör). Az eredmény

$$\mathcal{G}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-ik(x-y)} d^3\mathbf{k} & \text{ha } y^0 \leq x^0 \\ \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-ik(y-x)} d^3\mathbf{k} & \text{ha } x^0 < y^0 \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy \mathbf{k} szerint van térfogati integrál és az integrál előtt a $(2\pi)^3$ szerepel normálási konstansként (nem pedig a $(2\pi)^4$), mivel a komplex kontúrintegrállal egy integrált elvégeztünk.

A konstrukciónak azért propagátor a neve, mert $\mathcal{G}(x, y) := \langle 0 | \mathcal{T}(\Phi(x), \Phi(y)) | 0 \rangle$ kelt egy részecskét a vákuumból x -ben (y -ban), ami addig „terjed”, míg y -ban (x -ben) el nem nyelődik, a Heaviside-féle egységgrásfüggvény pedig azt biztosítja, hogy a „részecske” előbb legyen keltve, mint elnyelve.

11.2. Az integrálreprezentáció analízise és kapcsolata a közvetlen számolás eredményével

A közvetlen számolásból is ugyanezt kapjuk.

12. A kölcsönhatási kép és a perturbációszámítás

Legyen az önkölcsönható skalármezőre ható potenciál

$$V[\Psi] = -\frac{\lambda}{4}\Phi^4$$

alakú. Ekkor a Klein–Gordon-egyenlet:

$$(\square + m^2)\Phi(x) = -\lambda\Phi(x)^3,$$

a Lagrange-sűrűség pedig:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi)^2 - \frac{m^2}{2}\Phi^2 - \frac{\lambda}{4}\Phi^4.$$

Feltesszük, hogy λ kicsi, és perturbációszámítással kezeljük a problémát. A perturbálatlan eset a szabad részecske lesz.

12.1. Schrödinger-, Heisenberg- és kölcsönhatási kép

- *Schrödinger-kép*: időfüggetlen operátorok, a Schrödinger-egyenlet szerint fejlődő állapotok
- *Heisenberg-kép*: időfüggetlen állapot, az operátorok a Heisenberg-egyenlet szerint fejlődnek
- *Dirac-kép (kölcsönhatási kép)*: direkt a perturbációszámításra kitalálva. Az operátorok a perturbálatlan Hamilton-operátor által meghatározott egyenlet szerint fejlődnek és az állapotok pedig a perturbáló operátor szerint fejlődnek.

kép	fizikai mennyiség (operátor)	állapot
Schrödinger	$ a\rangle_S$ időfüggetlen	$\Phi_S(t, \mathbf{x}) = e^{iHt}\Phi(t_0, \mathbf{x})e^{-iHt}$
Heisenberg	$ a, t\rangle_H = e^{-iHt} a\rangle_S$	$\Phi_H(t, \mathbf{x}) = \Phi_S(t_0, \mathbf{x})$ időfüggetlen
Dirac	$ a, t\rangle_D = e^{-iH_0t} a\rangle_S$	$\Phi_D(t, \mathbf{x}) = e^{i\delta Ht}\Phi_S(t, \mathbf{x})e^{-i\delta Ht}$

3. táblázat. A kvantummechanika képei

12.2. Az időfejlesztő operátor és mozgásegyenlete, az egyenlet megoldása

Az állapot fejlődési a kölcsönhatási képben az időfejlesztő operátorral történik:

$$|a, t\rangle_D = e^{iH_0t}|a, t\rangle_S = U(t, t_0)|a, t\rangle_S,$$

ahol az U második paramétere arra utal, hogy t_0 -ban illesztjük a különböző képeket. Az időfejlesztő operátorra:

$$U(t, t_0) = U(t, t')U(t', t_0) = U(t, t')U^{-1}(t_0, t')$$

Az időfejlesztő operátor mozgásegyenlete

$$i\partial_t U(t, t_0) = \delta H_D(t)U(t, t_0), \quad U(t_0, t_0) = id,$$

ahol δH_D azt jelenti, hogy a perturbáló operátorokat a Dirac-képnek megfelelően fejlesztjük. Ennek bizonyítása:

$$\begin{aligned} i\partial_t U(t, t_0) &= i\partial_t U(t, 0)U^{-1}(t_0, 0) = i\partial_t \left(e^{iH_0 t} e^{-iHt} \right) U^{-1}(t_0, 0) = \\ &= i \left(e^{iH_0 t} iH_0 e^{-iHt} - e^{iH_0 t} iH e^{-iHt} \right) U^{-1}(t_0, 0) = e^{iH_0 t} \delta H e^{iHt} U^{-1}(t_0, 0) = \\ &= e^{iH_0 t} \delta H e^{-iH_0 t} e^{iH_0 t} e^{iHt} U^{-1}(t_0, 0) = \delta H_D(t) U(t, 0) U^{-1}(t_0, 0) = \\ &= \delta H_D(t) U(t, t_0) \end{aligned}$$

A megoldás integrálegyenletté való átírással és többszörös behelyettesítéssel történik (iteratív integrálás). A megoldás

$$U(t, t_0) = \mathcal{T} \left(\exp \left(-i \int_{t_0}^t \delta H_D(\tau) d\tau \right) \right),$$

ahol bevezettük az operátorok időrendezett szorzatát:

$$\mathcal{T}(A_1(t_1), \dots, A_n(t_n)) := \sum_{p \in S_n} \Theta(t_{p(1)}, \dots, t_{p(n)}) A_1(t_{p(1)}) \dots A_n(t_{p(n)}),$$

ahol

$$\Theta(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} 1 & \text{ha } a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Meg lehet mutatni, hogy ha a kölcsönhatási rész nem függ a mező deriváltjától, akkor az iterációs egyenletben formálisan el lehet végezni a $\delta H_D \rightsquigarrow \delta \mathcal{L}$ helyettesítést. A szórások leírásánál központi szerepet játszó S mátrix ekkor

$$S = U(-\infty, +\infty) = \mathcal{T} \left(\exp \left(-i \int_{-\infty}^{+\infty} \delta H_D(\tau) d\tau \right) \right)$$

13. Aszimptotikus állapotok és a szórási mátrix (skalármezőre)

13.1. Aszimptotikus állapotok

A detektóban észlelt részecskék jó közelítéssel szabadnak tekinthetők, ezért így fogunk számolni (véges hatótávolságot feltételezünk). A leírásban a vákuumból keltjük a Φ_i kezdeti ($t = -\infty$) és a Φ_f végállapotot ($t = +\infty$). A kettő között az előző tételben bevezetett időfejlesztő operátor teremti meg a kapcsolatot. Az egyszerűség kedvéért csak kétrészecske-szórást vizsgálunk:

$$|i\rangle := |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle \rightsquigarrow |\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\rangle =: |f\rangle.$$

13.2. A szórási folyamat perturbatív leírása és az időfejlesztő operátor

Feltesszük, hogy a kölcsönhatás perturbatíván leírható, és sorfejtést alkalmazunk az $|i\rangle \rightsquigarrow |f\rangle$ folyamat valószínűségi amplitúdójára:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle f | U(-\infty, +\infty) | i \rangle = \langle f | \mathcal{T} \left(\exp \left(-i \int_{-\infty}^{+\infty} \delta H_D(\tau) d\tau \right) \right) | i \rangle \approx \\ &\approx \langle f | 1 - i \int_{-\infty}^{+\infty} \delta H(\tau) d\tau - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\tau_1) H(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 | i \rangle = \\ &= \delta_{fi} - i \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f | \delta H(\tau) | i \rangle d\tau - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f | \delta H(\tau_1) \delta H(\tau_2) | i \rangle d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned}$$

13.3. Feynman-gráfszabályok

A Feynman-gráfszabályok a szórási mátrixra kapott kifejezés tagjait adják meg különböző rendekben. Az egész eljárás a Wick-tételre alapul, és a statisztikus fizikában használt klasztorsorfejtéshez hasonló. ? A Wick-tétel lényege, hogy az időrendezett operátorszorzatokat a normálrendezés segítségével fejezi ki. Az eljárás lépései

1. felrajzolunk $n + m + N$ darab pontot (kezdetben n részecskéből a szórás után m darab lett, és λ^N rendben érdeklődünk) -úgy, hogy minden kezdeti és végső részecskéből egy-egy él indul ki, a kölcsönhatást reprezentáló csúcsokból pedig négy (mivel Φ^4 -es elméletben vagyunk),
2. felrajzoljuk az összes összefüggő gráfot, amelyben nincs hurokél,
3. minden élhez hozzárendelünk egy \mathcal{G} propagátort (párosítás), minden csúcshoz pedig $-i\lambda$ -t,
4. a csúcsok téridő-koordinátáira integrálunk,
5. a szimmetriafaktorral osztunk.

Más perturbációnál először meg kell oldani a szabad egyenletet, majd ebből meg kell határozni a Feynman-propagátorokat. Ezután a kölcsönhatásokból meg kell határozni a Feynman-gráf csúcsait, majd a Wick-tétel segítségével meg lehet határozni az adott perturbációhoz tartozó Feynman-gráfszabályokat.

14. Az elektromágneses mező kovariáns kvantálása

14.1. A $\partial_\mu A^\mu = 0$ mérték problematikája

Klasszikusan az elektromágneses mezőt az A^μ négyespotenciállal írjuk le. A vektorpotenciállal kapcsolatban mértékszabadságunk van. A felesleges szabadsági fokoktól Lorentz-mérték kiszabásával szabadulunk meg:

$$\partial^\mu A_\mu = 0,$$

ami egy kovariáns feltétel. Ebben a mértékben a vektorpotenciálra hullámegyenlet érvényes:

$$\square A_\mu := (\Delta - \partial_t^2) A_\mu = 0,$$

ezért A_μ terét a síkhullám megoldások szerint kifejtethetjük:

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= \int \left(e^{ikx} a_\mu^\dagger(k) + e^{-ikx} a_\mu(k) \right) \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega(k)} = \\ &= \int \sum_{\lambda=0}^3 \left(e^{ikx} a_\lambda^\dagger(k) \epsilon_\mu^{(\lambda)*}(k) + e^{-ikx} a_\lambda(k) \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \right) \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega(k)}, \end{aligned}$$

ahol $kx = \omega t - \mathbf{k}\mathbf{x}$, és $\omega = |\mathbf{k}|$ a diszperziós összefüggés miatt. Vegyük észre, hogy csak a térbeli változókat Fourier-transzformáltuk, az időbelit nem. A Fourier-együtthatókat *kvantáljuk*:

$$\begin{aligned} [a_\mu^\dagger(\mathbf{k}), a_\nu^\dagger(\mathbf{k}')] &= 0 \\ [a_\mu(\mathbf{k}), a_\nu(\mathbf{k}')] &= 0 \\ [a_\mu^\dagger(\mathbf{k}), a_\nu(\mathbf{k}')] &= Z_{\mu\nu} 2\omega(k) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \end{aligned}$$

14.2. Kanonikus kvantálás

Ezekre az egyenletekre jutnánk, ha a $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ Lagrange-sűrűséget kiegészítjük egy, a Lorentz-feltétel kielégítéséért felelős taggal (λ tetszőleges szám, m Lagrange-multiplikátor):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2,$$

ahol

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}, \quad F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

az elektromágneses tenzor (antiszimmetrikus). Innen a kanonikus impulzusra a következőt kapjuk:

$$\pi^\rho = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 A_\rho} = F^{\rho 0} - \lambda g^{0\rho} \partial_\mu A^\mu.$$

Ebből látszik, hogy ha nem vettük volna figyelembe a Lorentz-mértéket ($\lambda = 0$ lenne), akkor $\pi^0 = F^{00} = 0$ lenne, és nem lehetne végrehajtani a kvantálást (hiszen a nulla mindennel kommutál). Kirójuk az alábbi kommutációs relációkat az A_μ négyespotenciálra és a π_ρ hozzá kanonikusan kongjugált impulzusra:

$$[A_\mu^\dagger(t, \mathbf{x}), A_\nu^\dagger(t, \mathbf{y})] = 0$$

$$[\pi_\mu^\dagger(t, \mathbf{x}), \pi_\nu^\dagger(t, \mathbf{y})] = 0$$

$$[A_\mu^\dagger(t, \mathbf{x}), \pi_\nu^\dagger(t, \mathbf{y})] = ig_{\rho\nu}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

Ha $\lambda = 1$, akkor a

$$Z_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}$$

választással összehangolható a Fourier-együtthatók kanonikus kommutációs relációi a vektorpotenciál és a kanonikus impulzus kanonikus kommutációs relációival.

14.3. Negatív normájú állapotok, a fizikai altér definíciója és szerkezete

Könnyen ? belátható, hogy

$$\langle 0 | a_i a_i^\dagger | 0 \rangle > 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

míg

$$\langle 0 | a_0 a_0^\dagger | 0 \rangle < 0,$$

azaz az $a_0^\dagger | 0 \rangle$ állapot normája negatív!

Az egész állapottér nem hordoz fizikai tartalmat. Gubta és Blamer után az állapottér azon alterét tekintjük a fizikai állapotok terének (fizikai altér), amelynek $|fiz\rangle$ állapotaira igaz a Lorentz-feltétel:

$$0 = k^\mu a_\mu(\mathbf{k}) | fiz \rangle = (k_0 a_0 - k_3 a_3) | fiz \rangle,$$

ahol a második alaknál feltételezzük, hogy az impulzus a 3. tengely irányába áll (ez lesz a *longitudinális* irány, az 1. és a 2. tengely iránya pedig a *transzverzális* irány). A feltételnek nem operátorosan kell igaznak lenni, hanem csak az adott altéren, ami azzal egyenértékű, hogy az operátor várható értékének nullának kell lenni a fizikai altéren. Megmutatható, hogy a fizikai altér állapotain:

$$\langle fiz | \partial^\mu A_\mu | fiz \rangle = 0.$$

A kényelmesebb tárgyalás érdekében érdemes bevezetni a

$$b(\mathbf{k}) := \frac{1}{\sqrt{2}}(a_3(\mathbf{k}) - a_0(\mathbf{k})), \quad c(\mathbf{k}) := \frac{1}{\sqrt{2}}(a_3(\mathbf{k}) + a_0(\mathbf{k}))$$

kombinációkat az $a_1(\mathbf{k})$ és az $a_2(\mathbf{k})$ mellett. Az újonnan bevezetett mennyiségekre az alábbi kommutációs relációk teljesülnek:

Innen látszik, hogy a $b^\dagger(\mathbf{k})$ és a $c^\dagger(\mathbf{k})$ operátorok által keltett részecskék normája nulla. Ezen kívül a Lorentz-feltétel lecserélhető az S mátrixszal, ezért ez a végállapotra is érvényes. A $c^\dagger(\mathbf{k}) | 0 \rangle$ állapot nem része a fizikai altérnek. A fizikai állapottér legáltalánosabb elemét a

$$| fiz \rangle = b^\dagger(\mathbf{k}_1) \dots k^\dagger(\mathbf{k}_n) | t \rangle$$

alakban lehet írni, ahol $| t \rangle$ egy tisztán transzverzális állapot ($| t \rangle = d_1 a_1^\dagger | 0 \rangle + d_2 a_2^\dagger | 0 \rangle$). A fizikai altér direkt összegként áll elő:

$$\mathcal{V}_{fiz} = \mathcal{V}_t \oplus \mathcal{V}_b,$$

ahol \mathcal{V}_t a transzverzális állapotok altere, és \mathcal{V}_b pedig a legalább egy b -kvantumot tartalmazó állapotok halmaza.

14.4. A fizikai mennyiségek várható értéke

A fizikai állapottér direkt összegként való felírhatóságának megfelelően minden állapot felbontható egy transzverzális és egy b -kvantumot tartalmazó állapot összegére:

$$|f\rangle = |f_t\rangle + |f_b\rangle,$$

a fizikai mennyiségek várható értékének számolásakor csak a transzverzális részek adnak járulékot.

Összefoglalva:

1. Ha a c (ún. skalár foton) állapotokat kizárjuk az állapottérből, minden \mathbf{k} hullám-számhoz két pozitív ($a_1(\mathbf{k}), a_2(\mathbf{k})$) és egy nulla normájú ($b(\mathbf{k})$, longitudinális) egyrészecske-állapot tartozik.
2. Két állapot a mérések szempontjából ekvivalens, ha csak egy nulla normájú állapotban térnek el.
3. A fizikai folyamat végállapotainak valószínűségi amplitúdóinak kiszámításában a nem fizikai állapotok nem játszanak szerepet, ha a kiinduló állapotban nem fordultak elő.
4. A közbenső állapotbeli előfordulás ellenére a két nem fizikai állapot nem módosítja a számítások eredményét a fizikai értékfeltétel esetéhez képest, mivel a longitudinális és a zárus normájú állapot járuléka kompenzálja egymást.

14.5. A fotonpropagátor

A fotonpropagátor tárgyalásánál a

$$\mathcal{T}(A_\mu(x), A_\nu(y)) := \Theta(x^0 - y^0)A_\mu(x)A_\nu(y) + \Theta(y^0 - x^0)A_\nu(y)A_\mu(x)$$

időrendezett szorzat vákuumbeli várható értékének fontos szerepe lesz. A két indexet tenzorindexeknek tekintve azt állíthatjuk, hogy

$$\langle 0 | \mathcal{T}(A_\mu(x), A_\nu(y)) | 0 \rangle = ig_{\mu\nu}D_F(x, y),$$

ahol D_F a vákuum eltolásinvarianciája miatt csak a négyeskoordináták különbségétől függ. Megmutatható, hogy

$$D_F(x, y) = D_F(x - y) = - \int \frac{1}{(k^0)^2 - \mathbf{k}^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)} \frac{d^4k}{(2\pi)^4}.$$

Az ϵ paraméter a főértékintegrál értelmezéséhez szükséges. Az integrálást célszerű a k^0 szerinti integrálással kezdeni, és a Cauchy-tételt használni. Az alkalmazások során a D_F függvény Fourier-transzformáltjára lesz szükség, ez leolvasható az integrál magjából:

$$\tilde{D}_F(k) = \frac{1}{k^2 + i\epsilon}.$$

15. 1/2 spinű mezők kvantumelmélete, a kvantált elektronmező

15.1. A Dirac-egyenlet síkhullám megoldása

Az elektronteret (és általában az 1/2 spinű fermionok terét) a Dirac-egyenlet írja le. Most csak a szabad Dirac-egyenlettel foglalkozunk:

$$\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right) \Psi(x) = 0,$$

ahol $\Psi(x)$ egy négykomponensű oszlopvektor, a γ mátrixok pedig a Dirac-mátrixok:

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \sigma^k, \quad k = 1, 2, 3$$

A Dirac-mátrixok legfontosabb tulajdonságai:

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} id.$$

A Dirac-egyenlet síkhullám megoldásait az

$$\{e^{ipx} u(p), e^{-upx} v(p)\}$$

bázison keressük, ahol $u(p)$ és $v(p)$ két *különböző* helyfüggetlen négykomponensű függvény. Kezeljük az első kettő és a második kettő komponensét külön-külön. Kimutatható, hogy az

$$u_s(\mathbf{p}) = \sqrt{p^0 + m} \begin{bmatrix} \chi_s \\ \frac{\sigma \mathbf{p}}{p^0 + m} \chi_s \end{bmatrix}$$

normált megoldása a Dirac-egyenletnek (χ_s tetszőleges kétkomponensű vektor, a nem nulla tömegű fermion nyugalmi rendszerében levőspinje). A norma a Lorentz-invariáns

$$\bar{u}_s u_s = 2m$$

alakot ölti, ahol a Dirac-féle adjungálás:

$$\bar{u}_s(p) = u_s^\dagger(p) \gamma^0.$$

Az eljárás hasonló $v(p)$ esetén is.

15.2. A Fourier-együtthatók kvantálása

A Dirac-egyenlet megoldását az általános esetre a

$$\Psi(x) = \int \frac{1}{p^0} \sum_{s=\pm 1/2} \left(e^{ipx} v_s(p) \beta_s^*(\mathbf{p}) + e^{-ipx} u_s(p) \alpha_s(\mathbf{p}) \right) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}$$

Fourier-dekompozícióval határozzuk meg. Fontos megjegyezni, hogy itt az $\alpha_s(\mathbf{p})$ és a $\beta_s(\mathbf{p})$ két *független* együttható-sorozat, és ennek megfelelően a kanonikus kvantálást is mindkét sorozatra el kell végezni. Mivel most fermionokkal foglalkozunk, olyan kvantálást írunk elő, amelyben

$$(a^\dagger(\mathbf{p}))^2 = (b_s^\dagger(\mathbf{p}))^2 = 0,$$

ahol a megfelelő latin betűvel jelöltük a görög betűs mennyiséghez tartozó operátort (és nyilván a komplex konjugálás helyébe a Hermite-ikus adjungálás kerül). Ezt úgy írjuk fel, hogy

$$\{a_s(\mathbf{p}), a_{s'}(\mathbf{p}')\} = 0$$

antikommutáló operátorokat feltételezünk. Ezt általánosítjuk:

$$\{a_s(\mathbf{p}), b_{s'}(\mathbf{p}')\} = 0,$$

a keltő és eltüntető operátort is tartalmazó antikommutátorra pedig a

$$\{a_s(\mathbf{p}), a_{s'}^\dagger(\mathbf{p}')\} = \{b_s(\mathbf{p}), b_{s'}^\dagger(\mathbf{p}')\} = \delta_{ss'} 2p^0 (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

antikommutátor relációt írjuk elő. A kvantálás utáni Dirac-téropерátor:

$$\Psi(x) = \int \frac{1}{p^0} \sum_{s=\pm 1/2} \left(e^{ipx} v_s(p) b_s^\dagger(\mathbf{p}) + e^{-ipx} u_s(p) a_s(\mathbf{p}) \right) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}$$

Az operátorok mozgásegyenlete Hermite-ikus Hamilton-operátor esetén:

$$\partial_t b_s^\dagger(\mathbf{p}) = i[H, b_s^\dagger(\mathbf{p})] = ip^0 b_s^\dagger(\mathbf{p})$$

$$\partial_t b_s(\mathbf{p}) = i[H, b_s(\mathbf{p})] = -ip^0 b_s(\mathbf{p})$$

Az $a_s(\mathbf{p})$ operátorokra hasonlóan.

15.3. Normálrendezés, energia és impulzus, töltés és antirészecske-állapot

A normálrendezésre azért van szükség, hogy az energia nullszintjét a vákuumhoz rögzítsük, azaz

$$H | 0 \rangle = 0$$

legyen. A megmaradó impulzus:

$$P^\mu = \int T^{0\mu} d^3 \mathbf{x} = \int p^\mu \sum_{s=\pm 1/2} \left(a_s^\dagger(\mathbf{p}) a_s(\mathbf{p}) + b_s(\mathbf{p}) b_s^\dagger(\mathbf{p}) \right) d^3 \tilde{\mathbf{p}}$$

Ebben az a gond, hogy a b^\dagger keltőoperátor benne van, és erre

$$: bb^\dagger := bb^\dagger - \{b, b^\dagger\} = -b^\dagger b,$$

vagyis így a vákuumnál kisebb energiát kapunk. Normálrendezés után a négyesimpulzus

$$: P^\mu := \int p^\mu \sum_{s=\pm 1/2} \left(a_s^\dagger(\mathbf{p}) a_s(\mathbf{p}) + b_s^\dagger(\mathbf{p}) b_s(\mathbf{p}) \right) d^3 \tilde{\mathbf{p}}.$$

A négyesimpulzus nulladik komponense az energia, a másik három pedig a hármasimpulzus.

Meg lehet mutatni, hogy a megmaradó elektromágneses töltés operátora (normálrendezve):

$$: Q := -e \int \sum_{s=\pm 1/2} \left(a_s^\dagger(\mathbf{p}) a_s(\mathbf{p}) + b_s^\dagger(\mathbf{p}) b_s(\mathbf{p}) \right) d^3 \tilde{\mathbf{p}}.$$

Sajátértékei ∓ 1 , ami rendre az elektronnak és a pozitronnak felel meg. Látható, hogy az elméletben az elektron és az antirészecskeje is benne van (az egyiket a^\dagger kelti, a másikat pedig b^\dagger).

15.4. A fermionmezők propagátora

Az időrendezett szorzatot kicsit másként értelmezzük, mint eddig, mert most antikommutálás van, eddig pedig kommutálás volt.

$$\mathcal{T}(\Psi_a(x), \bar{\Psi}_b(y)) := \Theta(x^0 - y^0) \Psi_a(x) \bar{\Psi}_b(y) - \Theta(y^0 - x^0) \bar{\Psi}_b(y) \Psi_a(x)$$

A propagátor (azaz az időrendezett szorzat vákuumbeli várható értéke):

$$\langle 0 | \mathcal{T}(\Psi_a(x), \bar{\Psi}_b(y)) | 0 \rangle = iS_{ab}(x, y),$$

ahol

$$S_{ab}(x, y) = S_{ab}(x - y) = \int \frac{k^\mu \gamma_\mu + m}{k^2 + m^2 + k\epsilon} e^{-ik(x-y)} \frac{d^4k}{(2\pi)^4}.$$

AZ időrendezett szorzat és a normálrendezés kapcsolata:

$$\mathcal{T}(\Psi_a(x), \bar{\Psi}_b(y)) = iS_{ab}(x - y) + : \Psi_a(x) \bar{\Psi}_b(y) :$$

16. Relativisztikus elektron/pozitron rendszer és az elektromágneses mező (QED)

16.1. A szabad és kölcsönhatási Lagrange- és Hamilton-függvény

A Lagrange-függvényt úgy írjuk föl, hogy vesszük az elektromágneses teret leíró Lagrange-sűrűséget (figyelembe vesszük a kovariáns Lorentz-feltételt), majd ehhez hozzáadjuk a szabad elektron és pozitron Lagrange-sűrűségét, és végül az összeghez hozzáadjuk a kölcsönhatási Lagrange-sűrűséget:

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_{\Psi/\bar{\Psi}} + \mathcal{L}_{kh}$$

A 14. tételben kifejtett módon vesszük fel az elektromágneses mező Lagrange-sűrűségét (az ún. Feynman-mértékben dolgozunk, ami azt jelenti, hogy a Lagrange-multiplikátort $\lambda = 1$ -nek választjuk). Így

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2,$$

$$\mathcal{L}_{\Psi/\bar{\Psi}} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi,$$

$$\mathcal{L}_{kh} = e : \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi : A_\mu.$$

A kanonikusan konjugált impulzusok a szokásos módon adódnak:

$$\pi_\Psi = -\frac{\partial\mathcal{L}_{QED}}{\partial(\partial_0\Psi)} = \frac{i}{2}\bar{\Psi}\gamma^0,$$

$$\pi_{\bar{\Psi}} = -\frac{\partial\mathcal{L}_{QED}}{\partial(\partial_0\bar{\Psi})} = -\frac{i}{2}\gamma^0\Psi,$$

$$\pi_{A_\mu} = -\frac{\partial\mathcal{L}_{QED}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = F^{\mu 0} - \gamma^{\mu 0}\partial^\nu A_\nu.$$

A Hamilton-operátor (normálrendezve):

$$\begin{aligned} : H_{QED} : &:= \int \left(\sum_k \pi_k \dot{\Phi}_k - \mathcal{L}_{QED} \right) d^3\mathbf{x} := \\ &= \left(: \int \left(-\frac{1}{2}(\nabla_k \mathbf{A}_k)^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{A}_k)^2 - \frac{1}{2}(\dot{A}_0)^2 + \frac{1}{2}(\nabla A_0)^2 - i\bar{\Psi}\gamma^k\nabla_k\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \right) d^3\mathbf{x} : \right) + \\ &+ (-e) \left(: \int \bar{\Psi}\gamma^\nu\Psi A_\nu d^3\mathbf{x} : \right) = \\ &= H_0 + \delta H \end{aligned}$$

A 12. tételben levezetett módon az S mátrix ebben az esetben (normálrendezés után):

$$\begin{aligned} : S_{fi} : &= \langle f | : U(-\infty, +\infty) : | i \rangle = \langle f | \mathcal{T} \left(: \exp \left(-i \int_{-\infty}^{+\infty} \delta H_D(\tau) d\tau \right) : \right) | i \rangle = \\ &= \langle f | \mathcal{T} \left(: \exp \left(-i \int_{-\infty}^{+\infty} \int (-e)\bar{\Psi}\gamma^\nu\Psi A_\nu d^3\mathbf{x} : d\tau \right) : \right) | i \rangle = \\ &= \langle f | \mathcal{T} \left(: \exp \left(+ie \int \bar{\Psi}\gamma^\nu\Psi A_\nu d^4x \right) : \right) | i \rangle \end{aligned}$$

Mivel e kicsi, ezért perturbációs számítást lehet végezni. δH az elektromos töltést megőrzi, mivel az elektromos töltés operátorával kommutál.

16.2. Propagátorok és vertexek

Az előző képletben az exponenciális függvényt sorbafejtve az e különböző rendjeiben megkapjuk az ún. vertexeket. Mivel δH a töltést megőrzi, a fermionoknak megfelelő propagátorok vagy „átfutnak” vagy pedig zárt hurkot (-1) alkotnak. A fermionikus propagátorok jele egyenes vonal, „értéke” iS_{if} . A fotonpropagátorok jele hullámos vonal, „értéke” $ig_{\mu\nu}D_F$.

