$\mathcal{L} = \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_{ct}$ → ellentagok $Z_1, Z_2, Z_3, \delta m$

↳ renormált Lagrange
csak renormált mennyiségek

0. rendben | $Z_i = 1 + \mathcal{O}(e^2)$ (($Z_i - 1$) tagok in $\mathcal{L}_{ct}$)

$\delta m = 0 + \mathcal{O}(e^2)$

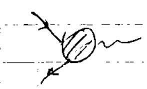
renormálási feltételek

$\Sigma_R(\not p = m) = 0$ rögzíti δm-t

$\left.\frac{\partial \Sigma_R}{\partial \not p}\right|_{\not p = m} = 0$ rögzíti Z_2-t

$\Pi_R(p^2 = 0) = 0$ fotonnak nincs tömege, mértékinvariancia

$\left.\frac{\partial \Pi_R}{\partial p^2}\right|_{p^2 = 0} = 0$ rögzíti Z_3-t

$\Gamma^\mu(p,p)|_{\not p = m} = \gamma^\mu$ → Z_1 vertex 

1 hurok szinten meghatározzuk δm-t, Z_i-ket

2 hurok szinten $\mathcal{L}_R + \mathcal{L}_{ct}$(1 hurok)

meghatározzuk e^4-rendű korrekciókat $\mathcal{L}_{ct}$-hez

és így tovább sokadik rendig

a konvergenciatétel miatt az aldivergenciák mindig kiesnek és az overall divergenciát kell minden szinten renormálni

a mértékinvarianciát kell garantálni

$\Pi_R(p^2 = 0) = 0$ feltételhez nincs renormálási konstans

a fotontömeg rendről rendre nulla → bizonyítani kell

mértékinvariancia garantálja azt, hogy nem keletkeznek longitudinális fotonok, stb...

Kell:
A renormálás eljárása rendről rendre megőrzi a mértékinvarianciát

áram megmaradás $\Rightarrow$ Ward-Takahashi azonosságok

$\Psi(x) \to e^{i\alpha}\Psi(x)$ globális szimmetriát használjuk

$\to$ $j_\varsigma^{em}(x) = e :\bar\Psi(x)\gamma_\varsigma\Psi(x):$ áram

$\partial^\varsigma j_\varsigma^{em} = 0$ megmarad

CCR $\Rightarrow$ $[j_0(x), \Psi(x')]\delta(x^0 - x^{0\prime}) = -e\Psi(x)\delta^{(4)}(x-x')$

$\Psi + \Psi$

$[j_0(x), \bar\Psi(x')]\delta(x^0 - x^{0\prime}) = e\bar\Psi(x)\delta^4(x-x')$

$[j_0(x), A_\mu(x')]\delta(x^0 - x^{0\prime}) = 0$

$$\partial_x^\varsigma \langle 0|T j^\mu(x)\Psi(x_1)\bar\Psi(y_1)\ldots\Psi(x_n)\bar\Psi(y_n)A_{\varsigma_1}(z_1)\ldots A_{\varsigma_\ell}(z_\ell)|0\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^n \langle 0|T\{[j_0(x), \Psi(x_i)]\delta(x^0 - x_i^0)\bar\Psi(y_i) + \Psi(x_i)[j_0(x), \bar\Psi(y_i)]\delta(x^0 - y_i^0)\} \times$$

$$\times \Psi(x_1)\ldots \cancel{\Psi(x_i)\bar\Psi(y_i)}\ldots\Psi(x_n)\bar\Psi(y_n)A_{\varsigma_1}(z_1)\ldots A_{\varsigma_\ell}(z_\ell)|0\rangle$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\partial_x^\varsigma \langle 0|T j_\varsigma(x)\Psi(x_1)\bar\Psi(y_1)\ldots A_{\varsigma_\ell}(z_\ell)|0\rangle = \\ &= e\langle 0|T\Psi(x_1)\bar\Psi(y_1)\ldots A_{\varsigma_\ell}(z_\ell)|0\rangle\left(\sum_{i=1}^n \delta^{(4)}(x-y_i) - \sum_{i=1}^n \delta^{(4)}(x-x_i)\right)\end{aligned}}$$

úgy kell érteni, hogy Pauli-Villars regularizált elméletből számoljuk

az azonosság fennáll a Pauli-Villars regularizált n-pont fv-ekre

a Pauli-Villars regularizált elméletben is megmarad az áram, tehát ez így működik

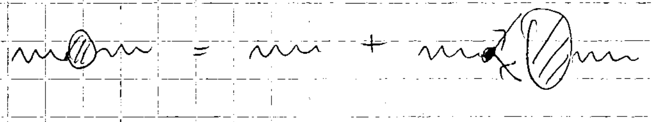
P-V eltávolítjuk ($\Lambda \to \infty$)

divergens gráfokhoz ellentagok

meg kell nézni, hogy az ellentagok is megőrzik a mértékinvarianciát rekurzíven dolgozunk: feltesszük, hogy $L-1$ hurok rendig minden oké (renormáltuk, végesítettük, megmarad a mértékinvariancia)

csak overall divergenciákkal kell foglalkozni (konvergencia tétel miatt)

$N_B = 2 \quad \omega = 2$
$N_F = 0$



egzakt foton propagátor

$$G_{\rho\sigma}(x) = G^{(0)}_{\rho\sigma}(x) - ie\int d^4x'\, G^{(0)}_{\rho\sigma'}(x-x')\langle 0|T\, j^{\sigma'}(x')\, A_\sigma(0)|0\rangle$$

$$\partial^\rho_x G_{\rho\sigma}(x) = \partial^\rho_x G^{(0)}_{\rho\sigma}(x) + 0 \leftarrow \text{Ward-Takahashi miatt}$$

↑ nem renormálódik az egzakt fotonpropagátor divergenciája

impulzustérben $k^\rho G_{\rho\sigma}(k) = k^\rho G^{(0)}_{\rho\sigma}(k) =$

$$= -i\left(\frac{\eta_{\rho\sigma} - k_\rho k_\sigma/\mu^2}{k^2-\mu^2} + \frac{k_\rho k_\sigma/\mu^2}{k^2-\mu^2/\lambda}\right) - (\mu \to \mu_1)$$

$G^{-1}_{\rho\sigma} := -i\Gamma_{\rho\sigma}$

$\to k_\sigma k_\rho \sim \eta_{\sigma\rho} = \frac{k_\sigma k_\rho}{k^2}$

$$k_\rho = \frac{-\mu^2/\lambda}{\mu^2(k^2-\mu^2/\lambda)}\, k^\sigma \Gamma_{\sigma\rho}(k)$$

$$\Gamma_{\rho\sigma}(k) = A(k^2)\left(\eta_{\rho\sigma}k^2 - k_\rho k_\sigma\right) + B(k^2)\, k_\rho k_\sigma$$

behelyettesítve $B(k^2) = \lambda\,\frac{k^2-\mu^2/\lambda}{k^2}$

λ mértékrögzítő param.

μ^2 infravörös regulátor   nem kap korrekciót

$A(k^2) = 1 + \Pi(k^2)$
↖ korrekció

$(\eta k^2 - kk)\,\Pi_{\rho\sigma}(k^2)$

↑ teljesen transzverz

$\delta m_\gamma^2 = 0$ fotontömeg nem ~~[illegible]~~ generálódik

Z_3 log divergens $\delta = 2$

μ-vel simán 0-hoz lehet tartani, mert nincs korrekció

λ-tól semmi nem függ a végén, és ő sem renormálódik

univerzális töltésrenormálás:

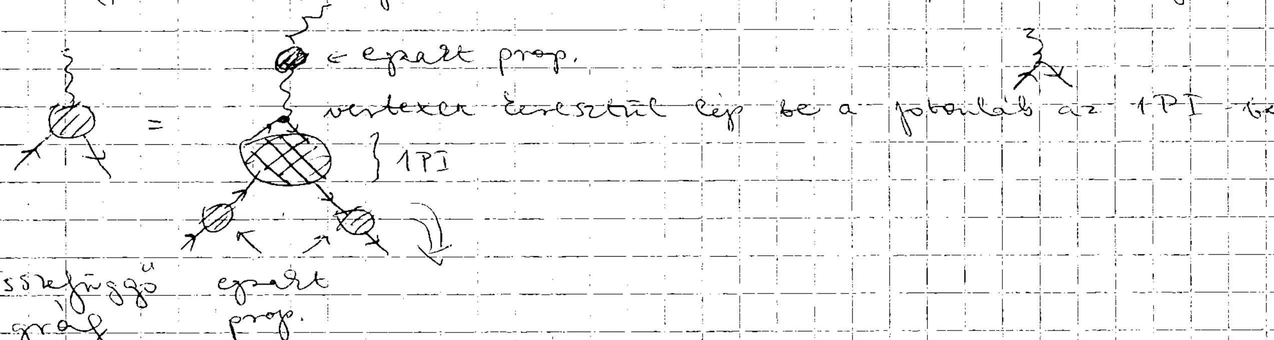
elektronpropagátor $\Sigma(p) \longleftrightarrow \Gamma_\mu$ vertex

$Z_1 = Z_2$ Ward azonosság volt

$n = 1,\ l = 0$ ← vertexfv. 0. rendben $= \Gamma_\varrho$

$$-ie(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p'-p-q)\, V_\varrho(p',p) =$$

$$* = \int d^4x\, d^4x_1\, d^4y_1\, e^{i(p'x_1 - py_1 - qx)} \langle 0|T A_\mu(x)\Psi(x_1)\bar{\Psi}(y_1)|0\rangle$$



$$V_\varrho(p',p) = G_{\varrho\sigma}(q)\, S(p')\, \Lambda^\sigma(p',p)\, S(p)$$

másrészt

$$* = -i\, G^{(0)}_{\varrho\sigma}(q) \int d^4x\, d^4x_1\, d^4y_1\, e^{i(p'x_1 - py_1 - qx)} \langle 0|T j^\sigma(x)\Psi(x_1)\bar{\Psi}(y_1)|0\rangle$$

$$e(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p'-p-q)\, \overbrace{q^\varrho G_{\varrho\sigma}(q)}^{\propto q_\sigma}\, S(p')\, \Lambda^\sigma(p',p)\, S(p)$$

$G^{(0)}$ volt előbb

$$= -i\, \underbrace{q^\varrho G^{(0)}_{\varrho\sigma}(q)}_{\propto q_\sigma} \int \ldots$$

bevisszük ⇒ differenciálás x szerint

$$= i\alpha \int d^4x\, d^4x_1\, d^4y_1\, e^{i(\,)}\, \partial_\sigma \langle 0|T j^\sigma(x)\Psi(x_1)\bar{\Psi}(y_1)|0\rangle$$

α e.h. kicsi, beírjuk a Ward-Takahashi azonosságot!

$$e(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'-p-q)\,S(p')q^\rho\Lambda_\rho(p',p)S(p) =$$
$$= ie\int d^4x\,d^4x_1\,d^4y_1\,e^{i(p'x_1-py_1-qx)}\underbrace{\langle 0|T\bar\psi(x_1)\psi(y_1)|0\rangle}_{iS}\left(\delta^{(4)}(x-y_1)-\delta^{(4)}(x-x_1)\right)$$

$$\boxed{S(p')q^\rho\Lambda_\rho(p',p)S(p) = S(p)-S(p')}$$

$$\boxed{q^\rho\Lambda_\rho(p',p) = S^{-1}(p')-S^{-1}(p)}$$

A Λ-ból kiszámolható S^{-1} ← propagátor ($|_{\not p=m}$ helyen)

Ez összefüggő diagrammokra volt igaz

Áttérhetünk 1PI részekre

$$S^{-1} = \not p - m - \Sigma(p)$$

buborékösszeg ← 1PI

$$q^\rho\Gamma_\rho(p',p) = \Sigma(p)-\Sigma(p') \quad \text{(1PI)}$$

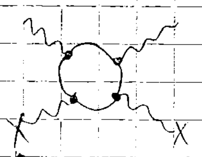
proper vertex

$p'\to p$, $q\to 0$ esetén

$$\Gamma_\rho(p,p) = -\frac{\partial}{\partial p^\rho}\Sigma(p) \Rightarrow Z_2 = Z_1 \quad \text{Ward azonosság}$$

ez minden rendben fennáll ez az azonosság e^2-~~ba~~

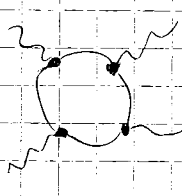
γ-γ szórás



→ pl. fotonok eltérülnek nagy mágneses térben

külső tér

vákuum kettőstörése



igazi γ-γ szórás nagyon erős lézerrel

(ma még nem értük el)

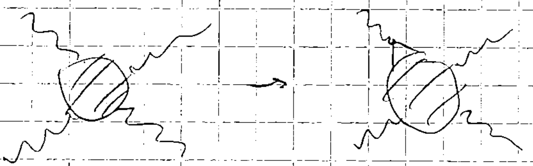
(Euler-Heisenberg effektív Lagrange-fv.)

logdivergens gráf → 4 propagátor $\sim \int \frac{d^4k}{k^4}$

kell A_μ^4 ellentag ? nem mértékinvariáns

valójában ez a gráf konvergens

nézzük az összes összefüggőt



$$\Gamma_{\varrho_1\varrho_2\varrho_3\varrho_4}(k_1,k_2,k_3,k_4) \sim G_{\varrho_1\sigma}(k_1)\langle 0|T j^\sigma(k_1) A_{\varrho_2}(k_2) A_{\varrho_3}(k_3) A_{\varrho_4}(k_4)|0\rangle$$

erre hatunk $k_1^{\varrho_1}$ -gyel

$$k_1^{\varrho} G_{\varrho_1\sigma} = k_1^{\varrho_1} G^{(0)}_{\varrho_1\sigma} \sim k_{1\sigma}$$

$$k_1^{\varrho_1}\Gamma_{\varrho_1\varrho_2\varrho_3\varrho_4}(k_1,k_2,k_3,k_4) = 0 \quad \text{fr. transzverz, mértékinvariancia}$$

$$\Gamma_{\varrho_1\varrho_2\varrho_3\varrho_4} = (k_1)^\sigma \Gamma_{1\underset{\sim}{\sigma\varrho_1}\varrho_2\varrho_3\varrho_4}$$
antiszimm.

$$= (k_1^{\sigma_1})\dots(k_4)^{\sigma_4}\Gamma_{4\,\sigma_1\varrho_1\sigma_2\varrho_2\sigma_3\varrho_3\sigma_4\varrho_4}$$ ebben van integrál

$k_i \to \lambda k_i \qquad \Gamma \to \lambda^0 \Gamma$

Γ_4-et kell nézni $\quad \Gamma_4 \to \lambda^{-4}\Gamma_4 \quad \omega = -4$ a divergencia foka $\Rightarrow$ konvergens

k-nak az antiszimmetrikus kombinációjától függ és A-nak

$\Rightarrow F_{\mu\nu}$-től függ $\Rightarrow F^4 \Rightarrow$ konvergens (soseм div.)

együtthatója konv. és mértékinvariáns is

$$F_{\mu\nu}(k) \sim k_\mu A_\nu(k) - k_\nu A_\mu(k)$$

L hurok rendig tfh. minden ellentag mértékinv.

+ PV regularizáció is mértékinv

$\downarrow$

$(L+1)$ hurok rendű gráfok $\to$ WT azonosság igaz

$\downarrow$

az új ellentagok is tudják a mértékinvarianciát, WT-t

$\downarrow$

(L+1) rendű $\mathcal{L}_R$ is tudja

↓

(L+1) rendben is fennállnak a renormálás után a WT azonosságok

⇓

QED a perturbációszámítás ∀ rendjében renormálható

QED renormálhatósága

a perturbációszámítás ∀ rendjében vannak olyan ellen-tagok, melyek ① kiejtik a divergenciákat

② megőrzik a mértékinvarianciát (WT)

⇒ Gupta - Bleuler működik renormálható elméletben is

⇒ a renormálás után az elmélet értelmes marad

∃ pozitív definit, megmaradó valószínűség, azaz unitér S-mátrix

① → nem „szőnyeg alá söprés"

∀ elmélet alapvetően $\Lambda < \infty$ mellett érvényes

∃ olyan (renormált) paraméterek, amelyekkel kifejezve a fizikai mennyiségek ($E \ll \Lambda$ skálákon) érzéketlenek lesznek a levágásra ("új fizika")

Nem renormálható elmélet: a pontos jóslatokhoz részleteket kell tudni a Λ körüli fizikáról