2011. márc. 29.

$$(\Delta_\mu^f)^+ = -\Delta_\mu^b$$

$$\propto (\Delta_\mu^f f, \Delta_\mu^f f) = -(f, \Delta_\mu^b \Delta_\mu^f f) = +(f, \Box f)$$

$\Box = -\Delta_\mu^b \Delta_\mu^f$ rács D'Alambert operátor önadjungált

$$(\Box f)(x) = \sum_{\mu=1}^{4} \frac{1}{a^2}\left(2f(x) - f(x+a\hat{\mu}) - f(x-a\hat{\mu})\right)$$

Szabad tér diszkrét rácson (nem egyértelmű)

2. deriváltat sokféle képpen lehet „~~becsülni~~ definiálni"

pl: szimmetrikus derivált:

$$\Delta_\mu^s = \frac{1}{2}(\Delta_\mu^f + \Delta_\mu^b) \quad \text{(antihermitikus)}$$

$$(\Delta_\mu^s)^+ = -\Delta_\mu^s$$

$$S_0[\phi; a] = \frac{1}{2}(\phi, (\Box + m^2)\phi) = \frac{1}{2}\sum_{x,y} a^8 \phi(x) (\Box + m^2)_{x,y} \phi(y)$$

mátrixelem:

$$(\Box + m^2)_{xy} = a^{-4}(\Box + m^2)\delta_{xy} = \sum_{\mu=1}^{4} \frac{1}{a^6}\left[2\delta_{xy} - \delta_{x+a\hat{\mu},y} - \delta_{x-a\hat{\mu},y}\right] + \frac{1}{a^4} m^2 \delta_{xy}$$

bekdefiniáljuk

$$\delta^{(4)}(x-y) \to a^{-4}\delta_{xy}$$

propagátor $G(x,y;a)$ $a(\Box + m^2)$ operátor inverze

$$\sum_y a^4 (\Box + m^2)_{xy}\, G(y,z;a) = a^{-4}\delta_{xz}$$

Megoldás Fourier-trafóval:

$$G(y,z;a) =: G(y-z;a) = \int_{-\frac{\pi}{a}}^{+\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip(y-z)} \tilde{G}(p;a)$$

„Brillouin-zóna"
mert rácsunk van

$$a^{-4}\delta_{xy} = \int_{-\frac{\pi}{a}}^{+\frac{\pi}{a}} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} = \begin{cases} a^{-4} & \text{ha } x=y \\ 0 & \text{ha } x\neq y \end{cases}$$

beírva:

$$\int_{-\frac{\pi}{a}}^{+\frac{\pi}{a}} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{G}(p;a) \sum_y a^4(\Box + m^2)_{xy} e^{ip(y-z)} =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{a}}^{+\frac{\pi}{a}} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \cancel{e^{ip(x-z)}} \tilde{G}(p;a)\frac{1}{a^2}\sum_\mu \Big[2e^{ip(x-z)} - e^{ip(x+a\hat\mu-z)} -$$

$$- e^{ip(x-a\hat\mu-z)}\Big] + \tilde{G}(p;a)\, m^2 e^{ip(x-z)} = e^{ip(x-z)}$$

$$\tilde{G}(p;a)\Big\{\frac{1}{a^2}\sum_\mu \underbrace{\big(2-2\cos(ap_\mu)\big)}_{4\sin^2\frac{ap_\mu}{2}} + m^2\Big\} = 1$$

$$\tilde{G}(p;a) = \Big\{\sum_\mu 4a^{-2}\sin^2\frac{ap_\mu}{2} + m^2\Big\}^{-1} \qquad \tilde{G}(p;a) = \frac{1}{p^2+m^2}$$

kontinuum limesz

$$\sin\frac{ap_\mu}{2} \to \frac{ap_\mu}{2} \Rightarrow 4a^{-2}\sin^2\frac{ap_\mu}{2} \to p_\mu^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{a\to 0}\tilde{G}(p;a) = \frac{1}{p^2+m^2}$$

1 minimum van

Funkcionál integrál

$D\phi = \prod_x d\phi(x)$ véges térfogat $\to$ véges $\int$

$V\to\infty$ limesz egyszerű (fix a)

$$Z_0(J;a) = \frac{1}{Z_0(a)} \int \prod_x d\phi(x) \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\phi,(\Box+m^2)\phi\right) + (J,\phi)\right\}$$

ahol $Z_0(a) = \int \prod_x d\phi(x) \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\phi,(\Box+m^2)\phi\right)\right\}$

Gauss-integrál

$$Z_0[J;a] = \exp\left(\frac{1}{2}(J,GJ)\right) := \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{xy} a^8 J(x) G(x,y,a) J(y)\right)$$

impulzus térben:

$$J(x) = \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{J}(k) e^{ikx}$$

$$\lim_{a\to 0} \sum_{x,y} a^8 J(x) G(x,y,a) J(y) = \lim_{a\to 0} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{+\frac{\pi}{a}} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{J}(k)\tilde{J}(-k) \cdot G(k,a) =$$

kihasználtuk, h G csak $x-y$-tól függ

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{J}(k)\tilde{J}(-k)\tilde{G}(k) = \int d^4x\, d^4y\, J(x) G(x,y) J(y)$$

$$\lim_{a\to 0} Z_0[J;a] = Z_0[J]$$

A funkc. $\int$ $a\to 0$ limesze értelmes és a jó eredményt adja

Kölcsönható elmélet ugyanígy:

$$Z(J;a) = \frac{1}{Z(a)} \int \prod_x d\phi(x)\, e^{-S(\phi,a) + (J,\phi)}$$

$$S(\phi,a) = \frac{1}{2}\left(\phi,(\Box+m^2)\phi\right) + S_I(\phi)$$

pl $\sum_x a^4 \frac{g}{4!}\phi(x)^4$

Baj: $\lim_{a\to 0}$ nem lesz jó!

Transzfermátrix $(a=1)$

$$\Phi_t := \{\phi(\underline{x}) \mid x_4 = t\}$$

konfiguráció

$$S = \sum_t L\,[\Phi_{t+1}, \Phi_t]$$

$$L[\Phi_{t+1}, \Phi_t] = \sum_{\underline{x}} \frac{1}{2}\left(\phi(\underline{x}, t+1) - \phi(\underline{x}, t)\right)^2 + \frac{1}{2} L_1(\Phi_t) + \frac{1}{2} L_1(\Phi_{t+1})$$

$\underline{x}$: 3-as vektor

$$L_1(\Phi_t) = \sum_{\underline{x}} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} \left(\phi(\underline{x}, t) - \phi(\underline{x} + \hat{\underline{k}}, t)\right)^2 + \frac{m^2}{2}\phi(\underline{x}, t)^2 + \frac{1}{4!} g \phi(\underline{x}, t)^4$$

ez az L-nek olyan része, ami a különböző t-ket nem köti össze

Transzfermátrix:

$$T[\Phi_{t+1}, \Phi_t] = \exp\{-L(\Phi_{t+1}, \Phi_t)\}$$

T a Ψ_t hullámfunkcionálon hat

$$\Psi_t : \Phi_t \to \mathbb{C}$$

általában

$$\Psi : \Phi \to \mathbb{C} \quad \Phi = \{\phi(\underline{x}) \mid \underline{x} \in \mathbb{Z}^3\}$$

$$|\Psi_{t+1}\rangle = T |\Psi_t\rangle$$

$$\Psi_{t+1}(\Phi) = \int \prod_{\underline{x}} d\phi'(\underline{x}, t)\, T[\phi, \phi']\, \Psi_t(\phi')$$

2 pont fv. T-vel felírva:

Lgn $\hat{\phi}(\underline{x})$ szorzásoperátor

$$\hat{\phi}(\underline{x})\,\Psi(\phi) = \phi(x)\,\Psi(\Phi)$$

2 pont fv.

$$\langle \phi(x_1)\,\phi(x_2)\rangle = \frac{1}{Z}\int \prod_x d\phi(x)\, e^{-S[\phi]}\, \phi(x_1)\phi(x_2)$$

$$e^{-S} = \prod_t T(\Phi_{t+1}, \Phi_t)$$

$$\langle \phi(x_1)\,\phi(x_2)\rangle = \frac{1}{Z}\int \prod_x d\phi(x)\, \phi(x_1)\,\phi(x_2) \prod_t T[\Phi_{t+1}, \Phi_t]$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{\mathrm{Tr}\left(T^{N-k}\,\hat{\phi}(\underline{x}_1)\,T^k\,\hat{\phi}(\underline{x}_2)\right)}{\mathrm{Tr}\,T^N} \qquad k = t_1 - t_2 > 0$$

$$Z = \lim_{N\to\infty}\mathrm{Tr}\,T^N = \lim_{N\to\infty}\mathrm{Tr}\,\underbrace{T\cdots T}_{N} = \lim_{N\to\infty}\int \prod_{\underline{x}} d\phi(\underline{x},0)\,\cdot$$

$$\cdot\int \prod_{\underline{x}} d\phi(\underline{x},1)\cdots\int \prod_{\underline{x}} d\phi(\underline{x},N-1) = T(\phi_0,\phi_{N-1})\cdot T(\phi_{N-1},\phi_{N-2})\cdot\ldots$$

$$\underbrace{\cdot\ldots T(\phi_1,\phi_0)}_{e^{-S}\ \text{periodikus határfeltétellel}} =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int_{\text{per. hf.}} \prod_x d\phi(x)\, e^{-S}$$

Ha N véges: $\mathrm{Tr}\,T^N = \int \prod_x d\phi(x)\, e^{-S}$ per. hf.

$$\phi(\underline{x},0) = \phi(\underline{x}, N\cdot a)$$

$T = e^{-Ha}$ ← Rács Hamilton-op.

Egyelőre tfh. T pozitív önadjungált, korlátos

$\Rightarrow H$ önadj. és $\exists$ legkisebb sértéke (E_0) $\quad H|0\rangle = E_0|0\rangle$

Legyen $\underline{x}_1 = \underline{x}_2 = 0 \quad t_1 \neq t_2$

$$\langle \phi(x_1), \phi(x_2)\rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{Tr\left(T^{N-k}\hat{\phi}(0)\, T^k \hat{\phi}(0)\right)}{Tr\, T^N}$$

$$Tr\, T^N = \sum_n e^{-E_n N\cdot a} \to \lim_{N\to\infty} Tr\,(T^N) = e^{-E_0\cdot N\cdot a}$$

$$Tr\left(T^{N-k}\hat{\phi}(0)\, T^k \hat{\phi}(0)\right) = \sum_n \langle n|T^{N-k}\hat{\phi}(0)\, T^k \hat{\phi}(0)|n\rangle =$$

$$= \sum_n e^{-(N-k)E_n\cdot a} \langle n|\hat{\phi}(0)\, T^k \hat{\phi}(0)|n\rangle =$$

$$\underset{N\to\infty}{=} e^{-(N-k)E_0 a}\langle 0|\hat{\phi}(0) \underset{|n\rangle\langle n|}{T^k} \hat{\phi}(0)|0\rangle =$$

$$= e^{-(N-k)E_0 a}\sum_n \langle 0|\hat{\phi}(0)|n\rangle\langle n|\hat{\phi}(0)|0\rangle e^{-E_n k a} =$$

$$= e^{-N E_0 a}\sum_n |\langle n|\hat{\phi}(0)|0\rangle|^2 e^{-(E_n - E_0)ka}$$

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\rangle = \sum_n |\langle n|\hat{\phi}(0)|0\rangle|^2 e^{-(E_n-E_0)ka}$$

öf rész:

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\rangle_c = \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\rangle - \underbrace{\langle\phi(x_1)\rangle\langle\phi(x_2)\rangle}_{n=0 \text{ tag}} =$$

$$= \sum_{n>0} |\langle n|\hat{\phi}(0)|0\rangle|^2 e^{-(E_n-E_0)ka} =$$

$$\underset{k\to\infty}{=} |\langle 1|\hat{\phi}(0)|0\rangle|^2 e^{-(E_1-E_0)ka} \sim e^{-\frac{k}{\xi}} \qquad k\in\mathbb{Z}$$

ξ korrelációs hossz rács egységben $\quad \xi = \dfrac{1}{(E_1-E_0)a}$

Kontinuum limesz

$a \to 0$

$E_1 - E_0$ véges (m)

$\Downarrow$

$\xi \to \infty \Rightarrow$ kont. limesz $\to$ végt. korr.-hossz

másodrendű fázisátmenet

2011. ápr. 12.

$a \to 0$ esetben véges darab paramétert kell ~~beállítani~~ behangolni

ez jó, miért van így?

statfiz & 2 rendű fázisátalakulás adott választ

Kadanoff-Wilson féle renormálási csoport

S hatás $a \sim \frac{1}{\Lambda}$ mellett

$S = \sum_i k_i S_i$ $\quad k_i$ csatolások, pl g lehet más is

$S_i = \sum_x \mathcal{L}_i$ lokális operátorok véges sok térmennyiséget tartalmaz

pl $\phi, \phi^2, \partial\phi, \dots$

renormálási csop. transzformáció

$R_\lambda : S \to S^{(\lambda)}$

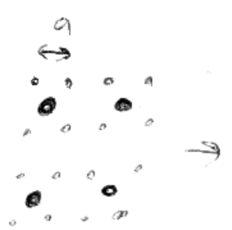
$\Lambda \to \frac{\Lambda}{\lambda}$ & közben a nagy távolsági fizika ne változzon

$a \to \lambda a$

$\Updownarrow$

$\frac{\Lambda}{\lambda}$ és Λ közötti szab. fokokat „kiintegráljuk" (eltüntetjük)

pl $a \to \lambda a$, $\lambda = 2$



$R_\lambda : K_i \to K_i^{(\lambda)}$

$$S^{(\lambda)} = \sum_i K_i^{(\lambda)} S_i$$

$d \gg a$ esetén korrelációk ugyanazok

úgy kell megválasztani $K_i^{(\lambda)}$ új csatolásokat, h korrelációk ne változzanak

$$\langle \phi_1 \phi_2 \rangle - \langle \phi_1 \rangle \langle \phi_2 \rangle = \langle \phi_1' \phi_2' \rangle - \langle \phi_1' \rangle \langle \phi_2' \rangle$$

pl: 1D Ising modellben megoldható
szabad tér (Gauss-modell)

konkrétan, ha λ egész $\to$ λ^d blokkot helyettesítünk 1 változóval

új tér: pl. átlag $\phi'(x') = \frac{1}{\lambda^d} \sum_{x \in V_{x'}} \phi(x)$

$\uparrow$ új rácson van értelmezve

$V_{x'}$: x' pont környezete

λ^d térfogatban

$$Z = \int \prod_x d\phi(x)\, e^{-S[\phi]} = \int \prod_x d\phi(x) \prod_{x'} d\phi'(x') \prod_{x'} \delta\Big(\phi'(x') - \frac{1}{\lambda^d} \sum_{x \in V_{x'}} \phi(x)\Big) \cdot$$

$$\cdot\, e^{-S[\phi]}$$

$$Z = \int \prod_{x'} d\phi'(x')\, e^{-S'[\phi']}$$

ahol

$$e^{-S'[\phi']} = \int \prod_x d\phi(x) \prod_{x'} \delta\Big(\phi'(x') - \frac{1}{\lambda^d} \sum_{x \in V_{x'}} \phi(x)\Big)\, e^{-S[\phi]}$$

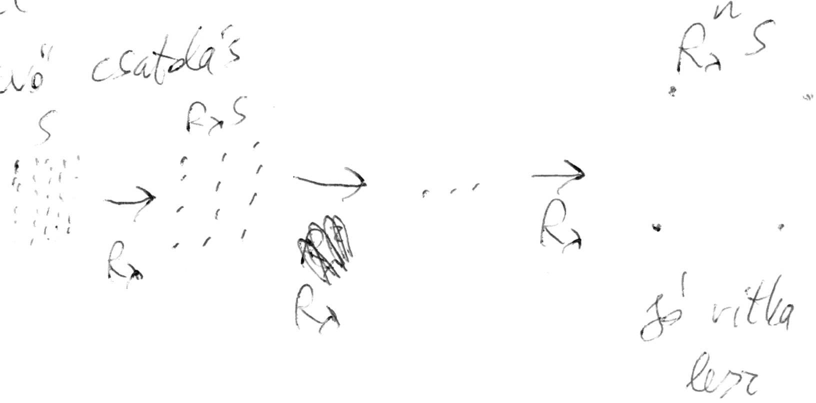
implicit módon a renorm csop trafóját S-re ezt lehet elvégezni 1D Ising-modellre

$R_\lambda S = S'$

Tfh. ismerjük a fundamentális elméletet nagyon kicsi a-nál

nagy távolsági viselkedés leírható effektív hatással, amit úgy kapunk meg, h R_λ-t alkalmazzuk sokszor

ha annyira blokkosítok, h a = fél méter & engem a korreláció fél méterre érdekelt, akkor az már pont a hatásban levő csatolás



ha az eredeti hatásban levő $\neq 0$ csatolás van

$R_\lambda S$-ben sokkal több lesz (∞ sok)

↳ kezdeti hatásban is ott voltak csak 0 volt az értékük

fontosak a fixpontok

$R_\lambda S^* = S^*$

lehet, h R_λ levisz egy fixpontba

tfh. $\exists$ fixpont

R_λ csökkenti ξ-t (korr. hossz) $\frac{\xi}{\lambda}$-ra

fixpontban $\xi = \frac{\xi}{\lambda}$ kell

$\xi = 0 \rightarrow$ nincs korr.

$\xi = \infty \rightarrow$ ez lesz jó

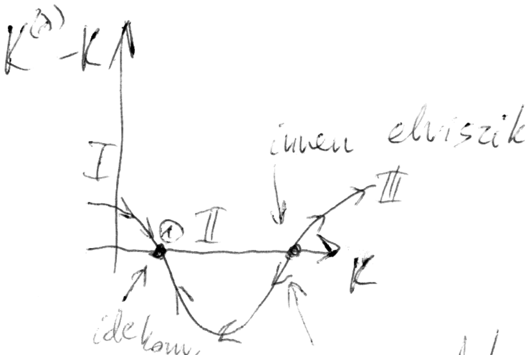
$S, R_\lambda S, R_\lambda R_\lambda S, \ldots R_\lambda^n S \ldots$ csak akkor konvergálhat fixpontba, ha már kezdetben is ∞ volt a korrelációs hossz.

$\{K_i\}$ ahol $\xi = \infty$

↳ kritikus felület

felület K_i térben

1. példa: 1 csatolás (K) $\neq 0$ és R_λ után is 1 marad



fixpontok ahol K nem volt.

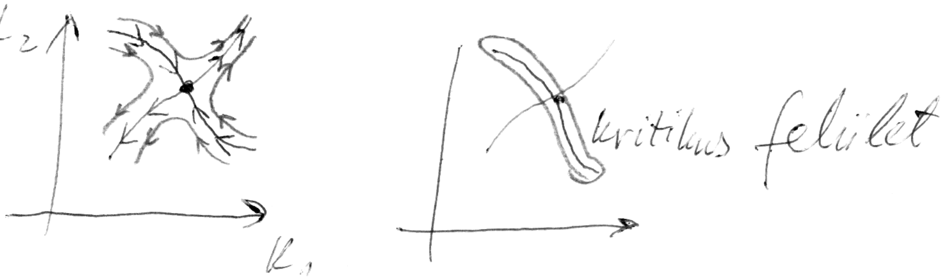
I, II-ből indítva ① fixpontba megy

III-ból indítva $K \to \infty$

② instabil fixpont

2. példa: 2 csatolás K_1, K_2

1 fixpont 1 taszító & 1 vonzó iránnyal



Min múlik a vonzás/taszítás?

FP-ban $R_\lambda S^* = S^*$

$K_i^{*(\lambda)} = K_i^*$ e körül linearizálunk

$$K_i^{(\lambda)} = K_i^* + M_{ij}^{(\lambda)} \delta K_j + \mathcal{O}(\delta K^2)$$

$$M_{ij} = \left.\frac{\partial K_i^{(\lambda)}}{\partial K_j}\right|_{K=K^*}$$

$M_{ij} \neq M_{ji}$, mégis valósak sé-ei & sv-ai

$$M^{(\lambda)} e_i^{(\lambda)} = \varrho_i^{(\lambda)} e_i^{(\lambda)}$$

λ_1, λ_2 trafókra $R(\lambda_1) R(\lambda_2) = R(\lambda_1 \lambda_2) \Rightarrow R^{(\lambda)}$ félcsoportot alkotnak

(nincs inverzük)

$$M^{(\lambda_1)} M^{(\lambda_2)} = M^{(\lambda_1 \lambda_2)}$$

e_i nem változik $e_i^{(\lambda)} = e_i$

$\varrho_i^{(\lambda_1 \lambda_2)} = \varrho_i^{(\lambda_1)} \varrho_i^{(\lambda_2)} \rightarrow \varrho_i = \lambda^{y_i}$ alakú

e_i irányokban csak skálázódnak a csatolások

eredeti $K_i \rightarrow \tilde{K}_i$ e_i irányokhoz tartozó csatolások
áttérünk

$y_i > 0 \Longrightarrow \delta \tilde{K}_i \rightarrow \infty$ eltávolodik fixponttól

δK_i ilyen irányú komponense megnő

ez a releváns irány / csatolás / operátor
$\tilde{\mathcal{O}}_i$

$y_i < 0 \Longrightarrow \delta \tilde{K}_i \rightarrow 0$ ilyen irányból érkezve bemegyünk a fixpontba

δK_i ilyen irányú komponense eltűnik

$y_i = 0 \to$ marginális

$\delta \tilde{K}_i$ vezető rendben nem változik

magasabb rendet kell megnézni

3D példa 2 irrelev. irány
1 irrelev. irány

renom csop. trajektória v. renormált trajektória

tapasztalat: véges sok releváns + marginális irány van & nagyon (1–2)
sok irrelev. $\mathcal{O}(10^{23})$

univerzalitás (tfh. ∅ marginális irányok)
(vagy ha van is → csak vezető rendben)

N csat., n_R db releváns, $N - n_R$ irrelev.

$n_R \ll N$

kritikus felület $N - n_R$ dimenziós

Ennek (bármely) pontjából indulva a fixpontba jutunk.
(fixpont közelében)
(vonzáskörzeten belül)

univerzalitási osztály: egy fp-hoz tartozó felület

egy univ. oszt-ba tartozó modellek: egy fp-hoz tartozó krit felület pontjainak felelnek meg

egy univ oszt-ba tartozó rendszerek csak irrel. operátorokban térnek el

kritikus exponensek releváns y_i-től d-től függenek

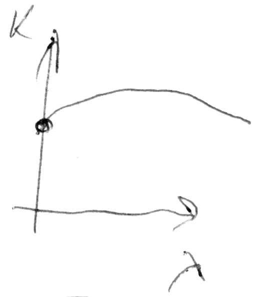
Ha 2db y_i van → 2 független exponens lesz

releváns irányok fp-tól függenek
d (dimenziótól), szabadsági fokoktól (szimmetriák)

tipikusan a fp olyan helyen van, ahol a releváns, magasabb (ϕ^4) csatolás 0

skalár elméletben $K = \frac{1}{8}$ $\lambda = 0$, K releváns
λ marginális (marginálisan irreleváns)
összes többi irreleváns

$g_K \to 0$ a konst. líneasz felé



triv fixpont 0 csatolást ad nagy távolságra

2011.05.03.

univerzalitás: a síkról ∀ az irreleváns trajektóriába tart hosszútávú fizika az univ-osztályban azonos

mégis érdemes irrelev. paramétereket használni, mert (operátorokat)

ha nem tudok a síkra ráménni, akkor javítható hatáson

S_0 a-nál csak rel. operátorokkal

$R_\lambda S_0$ (pl $\lambda=2$)

2a-nál „ugyanolyan jó" mint S_0 az a-nál

az ilyen neve renormcsop javított hatás
RG
vagy fixponthatás

$a \to 0$ limesz $\Longrightarrow$ rámegyek a krit. felületre
Hogy hol megyek rá, mert irrelevánsok úgyis kihalnak

$S = K_r \cdot S_r$
$K_r \to K_{r\,krit}$ $\to$ ilyenkor nincs paraméter az elméletben
ezt a K_r-t használom, h rámenjek a krit felületre

{ tiszta mértékelmélet $\to$ QCD kvarkok nélkül, csak gluonok
{ királis mértékelmélet $\to$ QCD 0 tömegű kvarkokkal
$\to$ ezek 1 paraméteres elméletek

$SU(3)$, N_f, $d=4$
$\downarrow$ dimszám
flavourök száma $\to$ ezeket rögzítem, már csak 1 param.

2 releváns csatolás

2D altérben megyünk a krit felületre
ahonnan bemegyek, az határozza meg, h milyen irányban jövök ki

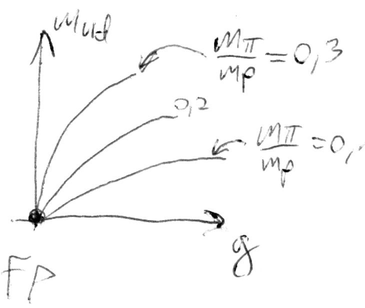
$\leftarrow$ renorm trajektóriák „különböző" fizikát írnak le
1 paraméter szabályozza (nem univerzális)

pl: QCD $m_q \neq 0$ $N_f = 2$ $m_u = m_d$

2vel. csat:

g mértékcsatolás (marg. vel.)

m_{ud}



kontinuum limesz

$g, m_{ud} \to 0$, úgy hogy közben $\frac{m_\pi}{m_\rho}$ = kon...

ha n_R relev. irányom van: $n_R - 1$ db feltételt ki lehet szabni & ki is kell szabni
($n_R - 1$ paraméter van)

Térelméleti renormálási csoport

véges sok ~~[illegible]~~ paraméter értéke fix

a változik
(rácsáll)

2 lehetőség:

1) → renormált mennyiségek fixek, csupasz változók változnak
(fizikai)

~~M~~ K, λ

$K(\lambda)$ → LCP line of constant physics (e mentén állandó egy paraméter)

$a(\lambda), a(K)$ → skála fv.

2) csupasz paraméterek fixek, a csökken, renorm. param. változnak

— — — — —

1) volt: $\Phi_R = Z_R^{-1/2} \Phi_0$

$\Gamma_R^{(n)} = Z_R^{n/2} \Gamma_0^{(n)}$

Z_R definíciója 2 pont fv-ből

$$\frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_R^{(1)}(0) = -1$$

m_R renorm tömeg $\quad m_R^2 = -\Gamma_R^{(2)}(0) \qquad g_R = -\Gamma_R^{(4)}(0,0,0,0)$

$m_R a \to a$

két paraméter: m_R, g_R

2 releváns irányom van → g_R elég feltételnek rögzítése

m_R-t is megadhatom mert csak $m_R \cdot a$ számít

(dimenziós) $\qquad$ (dimenziótlan)

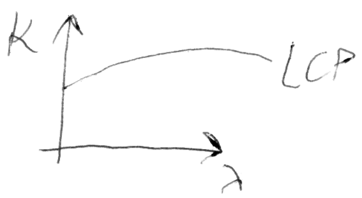
levágás (cutoff)

$$m_R \cdot a \approx \frac{m_R}{\Lambda}$$

Jó a felbontás, ha $m_R \cdot a = \frac{m_R}{\Lambda} \ll \Lambda$

kérdés:

fix g_R, adott $m_R \cdot a$-hoz milyen $m_0 \cdot a, g_0$ tartozik?



pert. szám → $\forall \Gamma_R$ csak $\mathcal{O}(a^2)$-ben függ a-tól

$$\Gamma_R^{(n)}(p_i ; g_R, m_R, m_R \cdot a) = \Gamma_R^{(n)}(p_i, g_R, m_R, 0) + \mathcal{O}(a^2 (ma)^k)$$

$a \to 0$ limeszben $\forall \Gamma_R$ véges

$$a \frac{d}{da} \Gamma_R^{(n)}(p_i, g_R, m_R, m_R a) = \mathcal{O}(a^2 (ma)^k)$$

$a \to 0$

$$\Gamma_R^{(n)} = Z_R^{n/2}(g_0, m_0 a) \; \Gamma_0^{(n)}(g_0, m_R, m_R \cdot a)$$

$$\left\{ a \frac{\partial}{\partial a} - \beta_{lat} \frac{\partial}{\partial g_0} + n \chi_{LAT} \right\} \Gamma_0^{(n)} = 0$$

$$\beta_{lat} = (g_0, m_R \cdot a) = -a \frac{\partial g_0}{\partial a}\Big|_{g_R}$$

$$\gamma_{lat}(g_0, m_R a) = \frac{1}{2} a \frac{\partial \ln Z_R}{\partial a}\Big|_{g_R}$$

$\Rightarrow$ a $(m_R a)$ változtatása kompenzálható g_0 és Z_R változtatásával

$\gamma_{lat}, \beta_{lat}$ nem függenek p_i-től és n-től $\Rightarrow g_0(a)$ $Z_R(a)$ globálisan érvényesek

Áll: $\beta_{lat}, \gamma_{lat}$ a-tól független (csak $O(a^2)$ van)

$a \to 0$ közelében $\beta_{lat}(g_0)$ $\gamma_{lat}(g_0)$

2, Callan - Symanzik -egyenletek

g_0 fix $m_R a$ változik
g_R változik

2 interpretáció $\to m_R$ fix, a változik
$\to a$ fix, m_R változik

$\Gamma^{(n)}(p_i, \dots)$ csak $\frac{p_i}{m_R}$-n keresztül függ p_i-től

nagy $p_i \Leftrightarrow$ kis m_R

hogyan függenek $\Gamma_R^{(n)}$-k az impulzusoktól

$$(m_R a) \frac{d}{d(m_R a)} \Gamma_R^{(n)}\Big|_{g_0} = (m_R a) \frac{\partial}{\partial(m_R a)} + (m_R a) \frac{\partial g_R}{\partial(m_R a)}\Big|_{g_0} \frac{\partial}{\partial g_R} \Gamma_R^{(n)}$$

$$(m_R a) \frac{d}{d(m_R a)} \Gamma_R^{(n)}\Big|_{g_0} = (m_R a) \frac{d}{d(m_R a)} \left(Z_R^{n/2} \Gamma_0^{(n)} \right)\Big|_{g_0} =$$

$$= \frac{n}{2} (m_R a) \frac{\partial \ln Z_R}{\partial(m_R a)}\Big|_{g_0} \Gamma_R^{(n)} + Z_R^{n/2} (m_R a) \frac{\partial}{\partial(m_R a)} \Gamma_0^{(n)}\Big|_{g_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ (m_R a) \frac{\partial}{\partial (m_R a)} + \beta \frac{\partial}{\partial g_R} - n\gamma \right\} \Gamma_R^{(n)} = \Delta \Gamma_R^{(n)}$$

$$\beta(g_R, m_R a) = (m_R \cdot a) \frac{\partial g_R}{\partial (m_R \cdot a)} \Big|_{g_0}$$

$$\gamma(g_R, m_R a) = \frac{1}{2} (m_R a) \frac{\partial \ln Z_R}{\partial (m_R a)} \Big|_{g_0}$$

$$\Delta \Gamma_R^{(n)} = Z_R^{n/2} (m_R a) \frac{\partial}{\partial (m_R a)} \Gamma_0^{(n)} \Big|_{g_0}$$

megmutatható, h $\Delta \Gamma_R^{(n)}$ véges

$g_R(a)$, $Z_R(a)$ globálisan érvényesek

$\beta(g_R)$ $\gamma(g_R)$ a függés $\mathcal{O}(a^2)$

β és β_{lat} nem függetlenek

fix g_R esetén

$$0 = a \frac{d}{da} g_R = \left\{ a \frac{\partial}{\partial a} - \beta_{lat}(g_0) \frac{\partial}{\partial g_0} \right\} g_R(g_0, m_R a)$$

másrészt:

$$a \frac{\partial}{\partial a} g_R(g_0, m_R a) = (m_R a) \frac{\partial}{\partial (m_R a)} g_R(g_0, m_R a)$$

$$\beta_{lat}(g_0) \frac{\partial g_R(g_0, m_R a)}{\partial g_0} = \beta(g_0)$$

β sorfejtése

$$\beta(g_R) = \beta_1 g_R^2 + \beta_2 g_R^3 \qquad \beta_1 = \frac{3}{16\pi^2} \qquad \beta_2 = -\frac{17}{768\pi^4}$$

valamint $g_R = g_0 + \mathcal{O}(g_0^2)$

$$\beta_{lat}(g_0) = \hat{\beta}_1 g_0^2 + \hat{\beta}_2 g_0^3 + \dots \qquad \hat{\beta}_1 = \beta_1,\ \hat{\beta}_2 = \beta_2 \text{ de } \hat{\beta}_3 \neq \beta_3$$

első 2 elő univerzális

fixpontok:

hogyan viselkedik g_0, g_R a kontinuum limesz felé haladva

$(m_R \cdot a \to 0)$

$\to g_R$

$(m_R \cdot a)$ $\left.\frac{\partial g_R}{\partial(m_R \cdot a)}\right|_{g_0} = \beta(g_R)$

$\Downarrow$

$\left.\frac{\partial g_R}{\partial \ln(m_R \cdot a)}\right|_{g_0}$

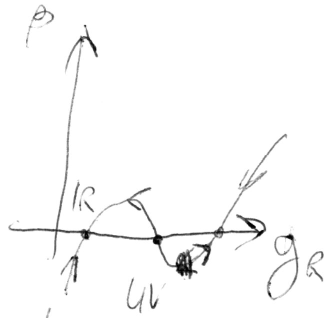
megoldás:

$$m_R \cdot a = C \cdot \exp \int^{g_R} \frac{dg}{\beta(g)}$$

g_0 konst. $m_R \cdot a \to 0$

Ha $\beta > 0 \to g_R$ csökken

$\beta < 0 \to g_R$ nő



$\frac{\partial \beta}{\partial g_R} > 0$ IR típusú vonzó fixpont

< 0 UV taszító

g_0 változása fix g_R esetén

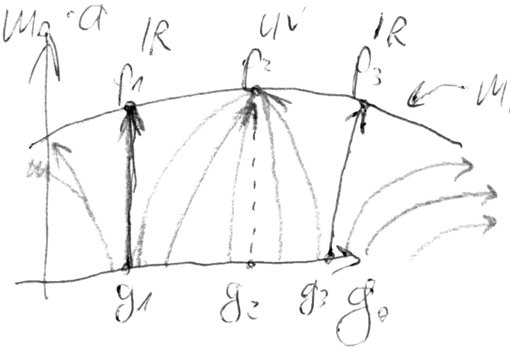
$$\left.\frac{\partial g_0}{\partial \ln(m_R \cdot a)}\right|_{g_R} = -\beta_{LAT}(g_0, \cancel{m_R \cdot a})$$

IR taszító (instabil)

UV vonzó

kontinuum limesz → ~~UV~~-be megy

~~IR~~ csak akkor lehet kont lim, ha onnan indulok



$g_0 < g_1$ → nincs kont. lim.

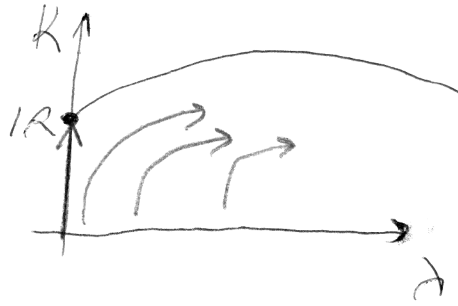
$g_0 = g_1$ → kont lim $\beta = 0$ g_0 nem függ $m_R \cdot a$-tól

konform elmélet = skálázási szimmetriája van: $2 \cdot a$ is épp olyan vácsáll.

$g_0 = g_3$ —//—

$g_1 < g_0 < g_3$ ⇒ kont. lim

skalár elmélet:



$g = 0$-ban IR fixpont

csak $g_0 = g_R = 0$ kontlimeszt tud adni

triv. kontlim, ∅ kcsh.

1 nyíl visz be IR-be: szabad eset

Kérdés: van-e UV fixpont?

→ perturb. szám. (g_0 v. g_R kicsi)

→ Hopping

QCD-ben $\beta_1 < 0$ $\quad g = 0 \to$ UV fixpont

QED-ben $\beta_1 > 0$ $\quad g < 0 \to$ IR fixpont

pert. szám:

fizikai tömeg

szabad esetben véges a

$a = 1$

2pont fv.:

$$\tilde{G}(p) = \frac{1}{2K}\tilde{\Delta}(p)$$

$$\tilde{\Delta}(p) = (m_0^2 + \hat{p}^2)^{-1}$$

$$\hat{p}_\mu = 2\sin\frac{p_\mu}{2}$$

fizikai tömeg: $\tilde{G}(p)$ pólusának helye a p_4 síkon

$p = 0$-nál

ez Minkowskiban igaz, nem Euklideszben

$$\tilde{\Delta}^{-1}(p, p_4) = 0 \implies p_4(p) \text{ diszprel lesz}$$

$$m_0^2 + \hat{p}^2 + \hat{p}_4^2 = 0$$

$$\hat{p}_4 = \pm i\sqrt{m_0^2 + \hat{p}^2}$$

ilyet szeretnénk: $\hat{p}_4 = \pm i\, \omega_0(p)$ ← ez a defje ω_0-nak

ezt téve

$$2\sinh\frac{\omega_0(p)}{2} = \sqrt{m_0^2 + \hat{p}^2}$$

$\cosh \omega_0(p) = 1 + \frac{1}{2}(m_0^2 + \hat{p}^2)$

diszprel

$\omega_0(p) = \mathrm{Arcosh}\left(1 + \frac{1}{2}(m_0^2 + \hat{p}^2)\right) =$

$= 2 \log \left\{ \sqrt{1 + \frac{1}{2}(m_0^2 + \hat{p}^2)} + \frac{1}{2}\sqrt{m_0^2 + \hat{p}^2} \right\}$

kifejtve p-ben:

$\omega_0(p) = \bar{m}_0 + \frac{1}{2m_0^*} p^2 + \dots$

fix tömeg:

$\bar{m}_0 = 2 \log \left\{ \sqrt{1 + \frac{m_0^2}{2}} + \frac{m_0}{2} \right\}$

dinamikus tömeg:

$m_0^* = m_0 \sqrt{1 + \frac{m_0^2}{2}} = \sinh \bar{m}_0$

Hf: $a \to 0$ esetén $\bar{m}_0 = m_0^* \to m_0$

<u>kcsh-á eset:</u>

$$S = \sum_x \left\{ \frac{1}{2} \Delta_\mu^+ \phi_0(x) \Delta_\mu^+ \phi_0(x) + \frac{m_0^2}{2} \phi_0(x)^2 + \frac{g_0}{4!} \phi_0(x)^4 \right\}$$

gráfszabályok:

1.) $\forall$ vonalnak megfelel egy csupasz propagátor $\tilde{\Delta}(q)$

2.) $\forall$ vertex $-g_0$  4 vonal fut be

3.) imp. megmaradás modulo 2π

4.) Hurkokra $\int_q = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\pi}^{+\pi} dq_1 \int_{-\pi}^{+\pi} dq_2 \dots \int_{-\pi}^{+\pi} dq_4$

$n=2$

$$\Gamma^{(2)}(p) = -\tilde{G}(p)^{-1} + \Delta^{-1}(p)\cdot 2K$$

$$\tilde{G}(p) = \frac{1}{2K}\Delta + \frac{1}{2K}(\Delta\Gamma\Delta) + \frac{1}{2K}(\Delta\Gamma\Delta\Gamma\Delta)$$

$$-\frac{1}{2K}\tilde{G}(p)^{-1} = -(p^2+m_0^2) + \frac{1}{2K}\Gamma^{(2)}(p)$$

$\Gamma^{(2)}$-höz a gráfok

$\frac{1}{2}$  $+ \frac{1}{4}$  $+ \frac{1}{6}$  $+ \ldots$

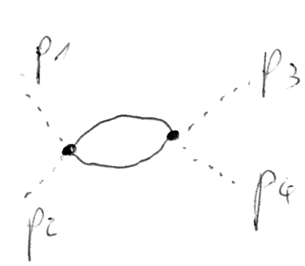
szimmetria faktorok

$-\frac{g_0}{2} J_1(m_0)$

$\frac{1}{4} g_0^2 J_1(m_0) J_2(m_0)$

$\frac{1}{6} g_0^2 I_3(m_0, p)$

$n=4$ esetén:

$\frac{1}{2}\cdot$ 

$+ 2\cdot$permutációk

$-g_0$

$\frac{1}{2} g_0^2 I_2(m_0, p_1+p_2)$ + perm.

$$I_2(m_0,p) = \int_q \tilde{\Delta}(q)\tilde{\Delta}(p-q)$$

tehát

$$=\frac{1}{2K}\tilde{G}^{-1} = -(\hat{p}^2+m_0^2) - \frac{g_0}{2}J_1(m_0) + \mathcal{O}(g_0^2)$$

$$\frac{1}{(2K)^2}\Gamma^{(4)} = -g_0 + \frac{g_0^2}{2}\Big(I_2(m_0, p_1+p_2) + I_2(m_0, p_1+p_3) +$$

$$+ I_2(m_0, p_1+p_4)\Big\} + \mathcal{O}(g_0^3)$$

$p=0$

$$\frac{1}{(2K)^2}\Gamma^{(4)}(0,0,0,0) = -g_0 + \frac{3}{2}g_0^2 J_2(m_0) + \mathcal{O}(g_0^3)$$

renormálás 1 hurok rendben

$$G_R^{-1}(p) = \frac{Z_R}{2K}\tilde{G}(p)^{-1} = m_R^2 + \underset{\substack{\uparrow \\ Z_R}}{1}\cdot p^2 + \mathcal{O}(p^4)$$

$a\to 0 \quad \hat{p}\to p$

$$\frac{1}{2K}G^{-1} = p^2 + m_0^2 + \frac{g_0}{2}J_1(m_0) \Longrightarrow Z_R = 1$$

$$G_R^{-1}(p) = \frac{Z_R}{2K}\cdot G^{-1} = \underbrace{m_0^2 + \frac{g_0}{2}J_1(m_0)}_{m_R^2} + p^2$$

$$m_R^2 = m_0^2 + \frac{g_0}{2}J_1(m_0) \Longrightarrow G_R^{-1}(p) = m_R^2 + p^2$$

csatolás:

$$g_R = -\Gamma_R^{(4)}(0,0,0,0) = -\frac{Z_R^2}{(2K)^2}\Gamma_0^{(4)} = \underbrace{g_0 - \frac{3}{2}g_0^2 J_2(m_0)}_{\text{úgy kell } g_0\text{-t változtatni, h es állandó ma}} +$$

$$+\mathcal{O}(g_0^3)$$

→ m_0 a kontlimben?

→ mik J, I fv-ek?

$$m_R^2 = m_0^2 + \frac{g_0}{2}\frac{1}{a^2} J_1(m_0 \cdot a)$$

J-t 0 körül kifejtjük

$$J_1(0) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\left(4\sum_\mu \sin^2\frac{q_\mu}{2}\right)^{-1} = r_0 \approx 0{,}154933\ldots$$

$J_1(am_0)$ véges $a \to 0$ limeszben $\Rightarrow \frac{1}{a^2}J_1$ divergál

$J_1(y)$ kis y-ra

$$J_1(y) = r_0 + y^2\left\{\frac{1}{16\pi^2}\ln y^2 + r_1 + \mathcal{O}(y^2)\right\}$$

$$r_1 = -0{,}0303\ldots$$

$$m_R^2 = m_0^2 + \frac{g_0}{2}\frac{r_0}{a^2} + \frac{g_0}{32\pi^2} m_0^2 \ln(a^2 m_0^2) + \frac{g_0}{2} r_1 m_0^2 + \ldots$$

rács egységekben nincs

$$(am_R)^2 = (am_0)^2 + \frac{g_0 r_0}{K^2} + \frac{g_0}{32\pi^2}(am_0)^2 \cdot \ln((am_0)^2) +$$

$$+ \frac{g_0}{2} r_1 (am_0)^2$$

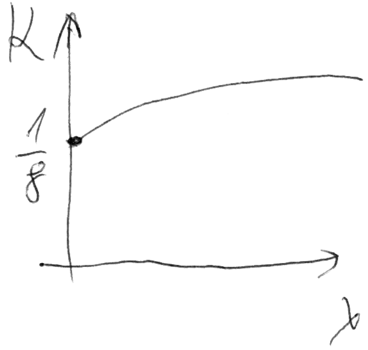
kont. lim:

$a \to 0$, m_R fix $\Rightarrow am_R \to 0$

$$(am_0)^2 \to -\frac{g_0}{2} r_0 + \mathcal{O}(g_0^2)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$K \qquad\qquad \lambda$$



$$K \to K_c = \frac{1}{8} + \left(3r_0 - \frac{1}{4}\right)\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

többi J-re rekurzió (HF):

$$J_{n+1}(y) = -\frac{1}{2}\frac{d}{d(y^2)} J_n(y)$$

$$J_2(y) = -r_1 - \frac{1}{16\pi^2}(1 + \ln y^2) + \mathcal{O}(y^2)$$

$$g_R = g_0 + \frac{3}{32\pi^2} g_0^2 \ln(a^2 m_0^2) + \frac{3}{2} g_0^2\left(\frac{1}{16\pi^2} + r_1\right)$$

van $a; g_0, m_0 \longrightarrow g_R, m_R$-t meg tudom adni

invertálható:

$$m_0^2 = m_R^2 - \frac{g_R}{2}\frac{1}{a^2} J_1(m_R \cdot a) + \mathcal{O}(g_R^2)$$

$$g_0^2 = g_R + \frac{3}{2} g_R^2 J_2(m_R \cdot a) + \mathcal{O}(g_R^3)$$

~~ezekkel~~

ezekkel: $\forall \Gamma^{(n)}$-t fel lehet írni m_R, g_R-rel

Áll: $a \to 0$ limeszben fix m_R, g_R-re $\forall$ véges

$\Longrightarrow$ ϕ^4 elmélet perturbatíven renormálható

β fv: $$\beta(g_R, m_R a) = (m_R a) \cdot \left.\frac{\partial g_R}{\partial (m_R a)}\right|_{g_0}$$

$$(m_0 a) \left.\frac{\partial g_R}{\partial (m_0 a)}\right|_{g_0} = -\frac{3}{2} g_0^2 (m_0 a) \frac{\partial J_2}{\partial (m_0 a)} + \mathcal{O}(y^3) = 6 g_0^2 (m_0 a)^2 \cdot J_3(m_0 a) + \mathcal{O}(g_0^3)$$

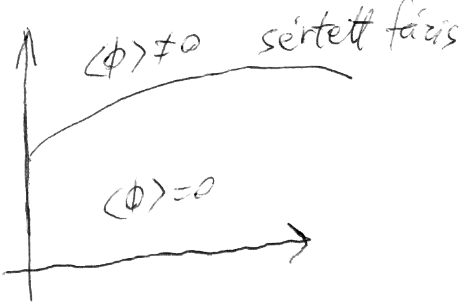
valamint

$$\frac{m_0}{m_R}\cdot\left.\frac{\partial(m_R\cdot a)}{\partial(m_0\cdot a)}\right|_{g_0} = 1+\mathcal{O}(g_0^2)$$

$$\beta(g_R, m_R a) = 6 g_0^2 (m_R a)^2 J_3(m_R a) + \mathcal{O}(g_0^3) =$$
$$= 6 g_R^2 (m_R a)^2 J_3(m_R a) + \mathcal{O}(g_R^3)$$

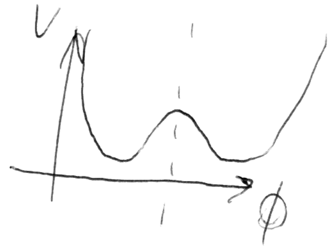
$$J_3(y) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y^2} J(y) = \frac{1}{32\pi^2}\ \frac{1}{y^2} + \mathcal{O}(1)$$

$$y^2 J_3(y) = \frac{1}{32\pi^2} + \mathcal{O}(y^2)$$



klasszikus minimum

$\langle\phi\rangle = \pm S_0 \qquad S_0^2 = \frac{1}{2\lambda}(8\kappa - 1 + 2\lambda)$



$$\frac{m_0^2}{2}\phi^2 + \frac{g_0}{4!}\phi^4$$

$m_0^2 < 0$

$$\varphi_0(x) = \sqrt{2\kappa}\,(\phi(x) - S_0)$$

hatásban: $S = \sum_x \Big\{ \frac{1}{2}\Delta_\mu^+ \varphi_0(x)\,\Delta_\mu^+\varphi_0(x) + \frac{m_0^2}{2}\varphi_0(x)^2 +$

$+ \frac{1}{3!}\sqrt{3g_0}\, m_0 \varphi_0^3 + \frac{g_0}{4!}\varphi_0^4 \Big\}$

$m_0^2 = 16 - \frac{2}{\kappa}(1-2\lambda) \qquad g_0 = \frac{6\lambda}{\kappa^2}$

van ϕ^3 kcsh → lesz új vertex

 $-\sqrt{3g_0}\, m_0$

pl. 2pont fv. $\frac{1}{2}$ ~~ …O… $+\frac{1}{2}$ …O… $+$
$+\frac{1}{2}$ …P…

$$g_0 = 3\frac{m_0^2}{v_0^2}$$

2011. máj. 17.

sértett fázis

képzetes tömeget teszek be:

$$m_0^2 < 0$$

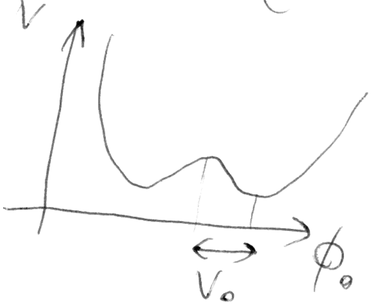
$$m_0 \to i m_*$$

$$S = \sum_x \left\{ \Delta_\mu^+ \phi_0 \Delta_\mu^+ \phi_0 - \frac{m_*^2}{2}\phi_0^2 + \frac{g_0}{4!}\phi_0^4 \right\} =$$

$$= \sum_x \{ (\qquad) + \frac{g_0}{4!}\left(\phi_0^2 - V_0^2\right)^2 + \text{const.} \}$$

$$\frac{2g_0}{4!} V_0^2 = \frac{m_*^2}{2}$$

$$v_0^2 = \frac{6m_*^2}{g_0}$$



⇓ $V_0 \pm \sqrt{V_0^2}$

$$\varphi_0 = \phi_0 - V_0$$

$$\phi_0 = \varphi_0 + V_0$$

$$S=\sum_x \Delta^+_\mu \varphi_0 \Delta^+_\mu \varphi_0 + \frac{g_0}{4!}\Big(\underbrace{(\varphi_0+v_0)^2}_{} + v_0^2\Big)^2$$

$$S=\sum_x \Delta^+_\mu \varphi_0 \Delta^+_\mu \varphi_0 + \frac{g_0}{4!}\left(\varphi_0^4 + 4 v_0\varphi_0^3 + 4\varphi_0^2 v_0^2\right) =$$

$\varphi_0^2 + 2v_0\varphi_0$

$$=\sum_x \Delta^+_\mu \varphi_0 \Delta^+_\mu \varphi_0 + \frac{m_0^2}{2}\varphi_0^2 + \frac{g_0}{3!} v_0 \varphi_0^3 + \frac{g_0}{4!}\varphi_0^4$$

$$\frac{m_0^2}{2} = 4\frac{v_0^2 g_0}{4!} \Rightarrow m_0 = 2m^*$$

$$g_0 = \frac{3m_0^2}{v_0^2} \qquad \boxed{g_R = \frac{3m_R^2}{v_R^2}} = g_0 + \mathcal{O}(g_0^2)$$

$$\boxed{v_0^2 = \frac{3m_0^2}{g_0}}$$

csatolást eddig 4 pont fv-ből definiáltuk, de most már elsőből is lehet

fontos: van $\varphi_0^3 \rightarrow$ $\begin{matrix}+\varphi_0\\ -\varphi_0\end{matrix}$ szimmetria elromlik

vákuum körüli kifejtésnél (Z_2 szimm ↯)

ez spontán sértés

eddig 2, 4, 6 ... pont fv-ek voltak nem0-k

1, 3, 5 ... pontfv. 0 volt

most már ez sem 0

$$v = \langle\phi_0\rangle = v_0 + \langle\varphi_0\rangle$$

$$v_R = \langle\phi_R\rangle = Z_R^{-1/2}\langle\phi_0\rangle$$

ez lesz a vertex:

$$Z_R \approx \mathcal{O}(g_0)$$

$$\langle\varphi_0\rangle \sim \mathcal{O}(g_0)$$

m_R, Z_R $\Gamma^{(2)}$-ből 

p függő

Hopping par. kifejtés

véges térfogat Ω rácspont per. hat.

$$S = -2K \sum_x \sum_{\mu=1}^{4} \phi(x)\phi(x+\hat{\mu}) + \sum_x U(\phi(x))$$

$$e^{-S} \Leftrightarrow e^{-\beta H}$$

K kicsi ⇔ β kicsi = magas hőmérsékletű sorfejtés

ahol most $U(\phi) = \phi^2 + \lambda(\phi^2 - 1)^2 - \lambda$

K = 0 limeszben

$$S = \sum_x U(\phi(x))$$

$$Z = \int \prod_x d\phi(x)\, e^{-S} = \prod_x Z_1 = Z_1^{\Omega}$$

$$Z_1 = \int d\phi\, e^{-U(\phi)}$$

$Z_1(\lambda)$ numerikusan meghatározható

K = 0 körül kifejtés

jelölés: $-2K \sum_x \sum_\mu \phi(x)\phi(x+\hat{\mu}) = -2K \sum_{\langle x,y\rangle} \phi(x)\phi(y)$

$\langle x,y\rangle$: x,y szomszé dok

$$Z = \int \prod_z \left\{ d\phi(z)\, e^{-U(\phi(z))} \right\} \prod_{\langle xy\rangle} e^{+2K\phi(x)\phi(y)} =$$

sorfejt

$$\prod_{\langle x,y\rangle} e^{2K\phi(x)\phi(y)} = \prod_{\langle x,y\rangle}\left\{1+2K\phi(x)\phi(y)+\frac{1}{2!}(2K)^2(\phi(x)\phi(y))^2+\dots\right\}$$

2K hatványai szerint kell rendezni

első pár tag:

$$\prod_{\langle x,y\rangle} e^{2K\phi(x)\phi(y)} = 1+(2K)\sum_{\langle x,y\rangle}\phi(x)\phi(y)+\frac{1}{2!}(2K)^2\sum_{\langle x,y\rangle}(\phi(x)\phi(y))^2+$$

$$+(2K)^2\sum_{\langle x_1,y_1\rangle\neq\langle x_2,y_2\rangle}\phi(x_1)\phi(y_1)\phi(x_2)\phi(y_2)+$$

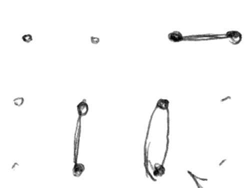
$$+(2K)^3\left\{\frac{1}{3!}\sum_{\langle x,y\rangle}(\phi(x)\phi(y))^3+\frac{1}{2!}\sum_{\langle x_1,y_1\rangle\neq\langle x_2,y_2\rangle}\phi(x_1)\phi(y_1)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot(\phi(x_2)\phi(y_2))^2+\sum_{\langle x_1y_1\rangle\neq\langle x_2y_2\rangle\neq\langle x_3y_3\rangle}\phi(x_1)\phi(y_1)\phi(x_2)\phi(y_2)\phi(x_3)\phi(y_3)\right\}$$

$$+\dots$$

$$=\sum_g (2K)^{l(g)}\,c(g)\prod_{b\in g}\big(\phi(i(b))\phi(f(b))\big)$$

g gráf v vertexből
b bondból áll



rácson vonalak a gráfok

2 vonal is lehet

$\forall$ b 2 darab vertexben végződik

i(b) f(b) a bond két vége (rácspontok)

$\langle x,y\rangle$ multiplicitása $m(\langle x,y\rangle)$

$$c = \prod_{\langle x,y\rangle} \frac{1}{m(\langle x,y\rangle)!}$$

L: összes bond száma (élek)

beazonosítjuk a tagokat a gráfokkal

$$2K \sum_{\langle x,y\rangle} \phi(x)\phi(y)$$

$\Omega \cdot d$ darab ilyen van

$d = \dim$

$$\frac{1}{2!}(2K)^2 \sum_{\langle x,y\rangle} (\phi(x)\phi(y))^2$$

$$(2K)^2 \sum_{\langle x_1,y_1\rangle \neq \langle x_2,y_2\rangle} \phi(x_1)\phi(y_1)\phi(x_2)\phi(y_2)$$

vagy

$$Z = \int \prod_z d\phi(z)\, e^{-U(\phi(z))} \sum_G (2K)^{L(G)} c(g) \prod_{b\in G} \phi(i(b))\,\phi(f(b)) =$$

$g \equiv G$

$$= \sum_G (2K)^{L(G)} c(g) \int \prod_z d\phi(z)\, \phi^{N(z)} e^{-U(\phi(z))}$$

$N(z)$ a z rácspontból kiinduló élek száma
ahányszor $z = i(b)$ vagy $z = f(b)$

Lgn $\gamma_k = \langle \phi^k \rangle_{K=0} = \frac{1}{Z_1} \int d\phi\, \phi^k e^{-U(\phi)}$

→ csak páros k lesz nem 0, mert $U(\phi)$-b… ϕ^2, ϕ^4

$$Z = Z_1^{\Omega} \sum_g (2K)^{L(g)} c(g) \prod_z \gamma_{N(z)}$$

$\gamma_0 = 1 \Rightarrow \prod_z \gamma_{N(z)}$ -t csak arra kell venni, amelyik rácspontból jön ki él

$$\prod_z \to \prod_{v \in G}$$

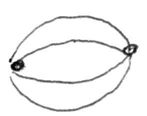
$$Z = Z_1^{\Omega} \sum_g (2K)^L C(g) \prod_{v \in G} \gamma_{N(v)}$$

$$\gamma_{2k+1} = 0$$

- $\forall$ pontból páros db. él fut ki
- $(2K)$ páros hatványai vannak csak

Z $(2K)^4$ rendig

$\frac{Z}{Z_1^{\Omega}}$

rend	gráf	járulék	kombin faktor
$(2K)^0$	üres rács	1	1
$(2K)^2$		$\frac{1}{2!}\gamma_2^2$	$d\Omega$
$(2K)^4$		$\frac{1}{4!}\gamma_4^2$	$d\Omega$
$(2K)^4$		$\left(\frac{1}{2!}\right)^2 \gamma_2^4$	$\frac{1}{2} d\Omega (d\Omega - 4d + 1)$
$(2K)^4$		$\left(\frac{1}{2!}\right)^2 \gamma_2^2 \gamma_4$	$\frac{1}{2} d \cdot \Omega \cdot 2 \cdot (2d-1)$
$(2K)^4$		γ_2^4	$\frac{1}{2} \Omega d (d-1)$

$$\frac{Z}{Z_1^{\Omega}} = 1 + (2K)^2 \frac{1}{2!} \gamma_2^2 \, d\Omega + (2K)^4 \left\{ \frac{1}{4!} \gamma_4^2 \, d\Omega + \left(\frac{1}{2!}\right)^2 \gamma_2^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot d\Omega \, (d\Omega - 4d + 1) + \left(\frac{1}{2!}\right)^2 \gamma_2^2 \gamma_4 \, d\Omega (2d-1) + \gamma_2^4 \, \frac{1}{2} d\Omega (d-1) \right\}$$

Z-ben van $\Omega^0, \Omega^1, \Omega^2$ is

$(2K)^6$-nál lenne Ω^3 is

$\log Z \sim \Omega$

<u>Áll:</u> $\frac{1}{\Omega} \log Z$ Ω fgtlen $\forall$ rendben

$$\frac{1}{\Omega} \langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\frac{1}{\Omega} \int \prod_x d\phi(x) \, \mathcal{O} \, e^{-S}}{Z}$$ ez is Ω fgtl.

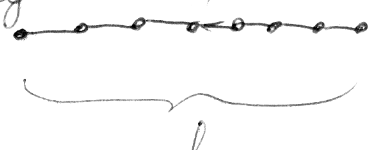
pl. Green f-nek

$$\langle \phi(x) \phi(y) \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_z d\phi(z) \, \phi(x) \phi(y) \, e^{-S}$$

uaz szabályok, de x, y-ben $\gamma_{N(x)+1}$-et $\gamma_{N(y)+1}$-et kell írni

$\Longrightarrow$ x, y-ból páratlan sz. élnek kell kiindulni

legalacsonyabb rend:

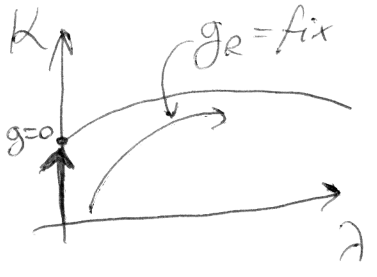


d

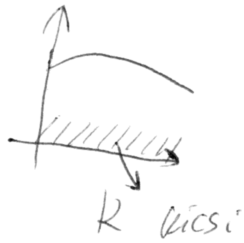
$(2K)^d$ exponenciálisan cseng le

járulék

Lüscher-Weisz-m.o.



kérdés:
ezen a krit. felületen, van-e
másik fixpont
(UV)
IR is jó



(1.) Hopping param. kifejtés

szuszcept 14. rendig
$$\chi_2 = \sum_x \langle \phi(x)\phi(y) \rangle$$
$$\chi_2 = \sum_i \chi_2^{(i)} K^i$$

$$K_c = \lim_{i\to\infty} \frac{\chi_2^{(i)}}{\chi_2^{(i+1)}} \quad \text{ha létezik}$$

a konvergenciasugár

$K_c(\lambda)$ lesz

(2.) $m_R, g_R, Z_R \rightarrow K$ kifejtésből

tapasztalat: jó konvergencia, ha $K \leq 0{,}95 \cdot K_c$

$m_R \cdot a \simeq 0{,}5$-nek felel meg

konst $m_R \cdot a \approx$ konst. $\frac{K}{K_c}$

Hogyan viselkedik g_R?

fix λ $K \to K_c$ $g_R \to 0$

fix $m_R \cdot a$ λ nő g_R nő $g_R \to g_{R\,max}$

ha $m_R \cdot a \simeq 0{,}5$ $g_{R\,max} = 61 \pm 6$ lényeg: $\frac{g_R}{16\pi^2}$

$\frac{R}{R_c} = 0{,}95$ Hopping kif. nem jó

de $\frac{g_R}{16\pi^2}$ kicsi p_T esetén

renom csop egy:

$$\beta = \beta_1 g_R^2 + \beta_2 g_R^3$$

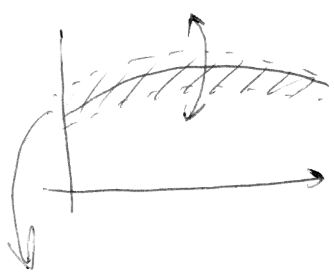
$$(m_R \cdot a) \frac{\partial g_R}{\partial (m_R \cdot a)} \Big|_{g_0} = \beta(g_R)$$

m.o.:

$$m_R \cdot a = C \cdot \exp\left(-\frac{1}{\beta_1 g_R}(\beta_1 g_R)^{-\beta_2/\beta_1^2} \left(1 + \mathcal{O}(g_R)\right)\right)$$

$$g_R = \frac{1}{\beta_1 \ln\left(\frac{C}{m_R \cdot a}\right)} + \ldots$$

$m_R \cdot a$ csökken $\Rightarrow$ g_R is csökken



van a két oldal közt megfeleltetés

$$C' = e^{1/6} \cdot C$$

$\hookrightarrow$ K_c fölött

tartományban nem tudjuk

eredmény:

$\forall\, m_R \cdot a$ -hoz $\exists$ egy $g_{R\,max}$ (trivialitási korlát)

$m_R \cdot a \to 0$ $g_{R\,max} \to 0$

$\Rightarrow$ fix $g_R > 0$ esetén nincs kontlim.

$m_R \cdot a \ll 1$ akkor ok

konkrétan $m_R \cdot a \approx 0{,}5$ $\frac{m_R}{\Lambda} \approx \frac{1}{2} \Rightarrow g_{R\,max} \approx 41$

$\to$ effektív elméletnek jó, amíg $m_R \cdot a \ll 1$

$g_R = \frac{3 m_R^2}{v_R^2}$ v_R ismert m_R nő $\to$ g_R nő $\Rightarrow \frac{m_R}{\Lambda}$ nő

SM: v_R ismert ≈ 25…

$\frac{m_R}{\Lambda} \lesssim \frac{1}{2} \Rightarrow g_R \leq 19$…

$m_{Higgs} \lesssim 630$ GeV…