Rács

bodri.elte.hu/Racs/

motivációk:

1. QFT definíciója
   ált: kanonikus kvantálás → ∞ sok szab. fok
   szabad esetben ok
   kesh már gáz, mert H operátor nem jól definiált
   perturbációszám. (kcsh. op. szerinti sor)
   magasabb rendben divergenciák (sok hurok miatt)
   regularizáció szükséges ←
   divergencia nem perturbatív sajátosság
   → nem az eredeti elméletet oldjuk meg, hanem egy másikat & a végén limeszt kell venni
   paraméterek renormálása (pert. szám rendjétől függ)
   rendről rendre determináljuk az elméletet
   DE perturb. szám nem konvergens (asszimptotikus sor) (konverg. sugár = 0)

rácstérelm.: ez is egy regularizáció
   ||
   szabadsági fokokat lecsökkentjük

nem perturbatív regularizáció
   funkcionálintegrál segítségével
   ↳ regularizáljuk

→ QFT nem perturbatív definíciója
   renormálás is nem perturbatív

(2.1) nem perturbatív megoldási módszer

vannak esetek (pl QCD alacsony energián)

amikor g nagy $\rightarrow$ PT nem működik

rácstérelm sorfejtés nélküli mo-t ad

numerikusan kiszámíthatunk pl. Green-fv-eket

<u>néhány példa</u>

$\rightarrow$ skalár elmélet trivialitásának vizsgálata
sorfejtés szempontjából

$\rightarrow$ QED trivialitása

$\rightarrow$ QCD vizsgálata

$\rightarrow$ hadrontömegek meghatározása a kvark-gluon terekből felépített $\mathcal{L}$-fvből

$\rightarrow$ véges hőmérséklet vizsgálata
QGP kialakulása

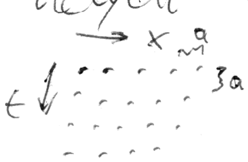
<u>rácstérelmélet alapgondolata</u>

$$Z = \int [d\phi]\, e^{iS[\phi]}$$

folytonos mezőn ez ???

$[d\phi]$-t át kell írni
mértéket

$\rightarrow$ regularizáció $\phi(\underline{x},t)$ helyett $\phi_{\underline{x},t}$



$$[d\phi] \rightarrow \prod_{\underline{x},t} d\phi_{\underline{x},t}$$

kontinuum limesz $a \rightarrow 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\phi_{\underline{x},t}\, e^{+iS} \qquad e^{+iS} = \cos + i \sin$$

1 rácspont

nagyon oszcillál

nem túl jól definiált 3

→ bevezetjük Euklideszi időt

formálisan: $t = i\tau \qquad \tau \in \mathbb{R}$

$e^{iS} \to e^{-S_E} > 0$

lesz $\int d\phi_{x,t}\, e^{-S_E}$

akkor, h ennek lgn értelme, kell h analitikus f-ek lgnek

<u>pályaintegrál a kvantummechanikában</u>

Részecske $t=0$-ban y helyen

Annak valószínűsége, hogy t idő múlva x helyen van:

$A = \langle x | e^{-iHt} | y \rangle$

$|A|^2$ ← időfejlesztő operátor

szabad esetben: $\hat{H} = \hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m}$

$A = \langle x | e^{-i\frac{p^2}{2m}t} | y \rangle = \int dp \langle x | p \rangle e^{-i\frac{p^2}{2m}t} \langle p | y \rangle$

$|p\rangle\langle p|$

$\int dp\, |p\rangle\langle p| = \mathbb{1}$

$\langle x | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx} \qquad \langle p | y \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ipy}$

$A = \int \frac{dp}{2\pi} e^{ip(x-y)} e^{-i\frac{p^2}{2m}t} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i t}} \exp\left\{ i \frac{m}{2t}(x-y)^2 \right\}$

Ksh: $H = H_0 + V$

kis $t = \varepsilon$-ra

$U_\varepsilon = e^{-iH\varepsilon}$

$W_\varepsilon = e^{-iV\frac{\varepsilon}{2}} e^{-iH_0\varepsilon} e^{-iV\frac{\varepsilon}{2}}$

Áll: ha ε kicsi ⇒ ez megtehető

$W_\varepsilon = U_\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$

W_ε mátrixeleme felírható:

$$\langle x|W_\varepsilon|y\rangle = e^{-iV(x)\frac{\varepsilon}{2}} e^{-iV(y)\frac{\varepsilon}{2}} \langle x|e^{-iH_0\varepsilon}|y\rangle =$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i t}} \exp\left\{ i\frac{m}{2\varepsilon}(x-y)^2 - i\frac{\varepsilon}{2}\left[V(x)+V(y)\right]\right\}$$

$\varepsilon = \frac{t}{N} \quad N\to\infty$

belátható, h $\exp\{-i(H_0+V)t\} = \lim\limits_{N\to\infty} W_\varepsilon^N$

$$\langle x|e^{-iHt}|y\rangle = \lim_{N\to\infty} \langle x|W_\varepsilon^N|y\rangle$$

$$\left(1 - iV\frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2}V^2\frac{\varepsilon^2}{4}\right)\left(1 - iH_0\varepsilon - \frac{1}{2}H_0^2\varepsilon^2\right)\left(1 - iV\frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2}V^2\frac{\varepsilon^2}{4}\right) =$$

$$= 1 - i(H_0+V)\varepsilon - \frac{1}{2}(H_0+V)^2\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$A = \lim_{N\to\infty} \langle x|\underbrace{W_\varepsilon W_\varepsilon \dots W_\varepsilon}_{N \text{ db}}|y\rangle$$

$|x_1\rangle\langle x_1|$ $\quad$ $|x_{N-1}\rangle\langle x_{N-1}|$

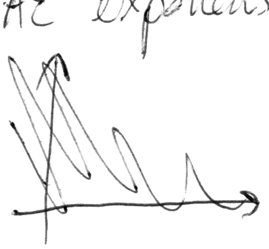
$$\lim_{N\to\infty} \int dx_1 dx_2 \dots dx_{N-1} \langle x|W_\varepsilon|x_1\rangle\langle x_1|W_\varepsilon|x_2\rangle\dots$$

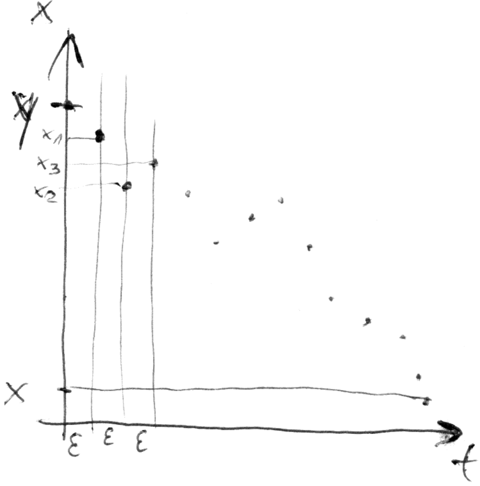
$$\dots\langle x_{N-1}|W_\varepsilon|y\rangle = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi i\varepsilon}\right)^{\frac{N}{2}} \cdot$$

$$\cdot \int dx_1 \dots dx_{N-1} \exp\left\{ i\frac{m}{2\varepsilon}\left[(x-x_1)^2 + (x_1-x_2)^2 + \dots + (x_{N-1}-y)^2\right] - \right.$$

$$\left. - i\varepsilon\left[\frac{1}{2}V(x) + V(x_1) + \dots + V(x_{N-1}) + \frac{1}{2}V(y)\right]\right\}$$

Az exponens a klasszikus hatást közelíti:





$$S=\int_0^t dt'\left[\frac{m}{2}\dot{x}^2-V(x)\right]=\varepsilon\left\{\frac{m}{2}\left[\left(\frac{x_1-x}{\varepsilon}\right)^2+\left(\frac{x_2-x_1}{\varepsilon}\right)^2+\dots+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{x_{N-1}-y}{\varepsilon}\right)^2-\left[\frac{1}{2}V(x)+V(x_1)+\dots+V(x_{N-1})+\frac{1}{2}V(y)\right]\right]\right\}$$

$$A=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi i\varepsilon}\right)^{\frac{N}{2}}\int dx_1\dots dx_{N-1}e^{iS}=:\int[Dx]e^{iS}$$

ahol $[Dx]=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi i\varepsilon}\right)^{\frac{N}{2}}dx_1\dots dx_{N-1}$

formálisan OK, de az oszcilláló exp miatt már

az $\int$ létezése is kérdés

írjunk t helyébe $t=-i\tau$ $\tau>0$

2011. ~~febr~~ márc. 1.

$$\langle x|e^{iHt}|y\rangle=\int_{y\to x}[Dx]e^{iS}$$

$$[Dx]=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi i\varepsilon}\right)^{\frac{N}{2}}dx_1\dots dx_{N-1}$$

írjunk formálisan $t=i\tau$ $\tau>0$

$$\varepsilon=\frac{\tau}{N}$$

$$\langle x|e^{-H\tau}|y\rangle=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi\varepsilon}\right)^{\frac{N}{2}}\int dx_1\dots dx_{N-1}\cdot\exp\{$$

$$\left\{-\frac{m}{2\varepsilon}\left[(x-x_1)^2+\dots+(x_{N-1}-y)^2\right]-\varepsilon\left[\frac{1}{2}V(x)+V(x_1)+\dots+\right.\right.$$

$$\left.\left.+V(x_{N-1})+\frac{1}{2}V(y)\right]\right\}$$

$$\langle x|e^{-H\tau}|y\rangle=\int[Dx]e^{-S_E}$$

$[Dx]$ picit más (nincs benne i)

$$S_E=\int_0^\tau d\tau'\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2+V(x)\right)$$

ezt felírhatjuk, de felesleges, mert csak ezt kell használni

Mi a kapcsolat S és S_E között?

$$S=\int_0^t dt'\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2-V(x)\right)$$

$$S=-i\int_0^\tau d\tau'\left(\frac{m}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial(i\tau)^2}-V(x)\right)=i\int_0^\tau d\tau'\left(\frac{m}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial\tau^2}+V(x)\right)=$$

$$\underset{iS_E}{\parallel}$$

$$S=iS_E$$

Transzfermátrix

Időléptető op. az euklid. időben

Ha nem végezzük el a limeszt, véges „rácsállandó”

Az ε képzetes idővel léptető operátor (W_ε euklid-i megfelelője)

$$T=\exp\left(-V\frac{\varepsilon}{2}\right)\exp(-H_0\varepsilon)\exp\left(-V\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

mátrixelemei $(T_{xy}=)$ $\langle x|T|y\rangle=\sqrt{\frac{m}{2\pi\varepsilon}}\exp\left(-\frac{m}{2\varepsilon}(x-y)^2-\frac{\varepsilon}{2}\left(V(x)+V(y)\right)\right)$

T^N lesz

A diszkrét rácshoz tartozó Ham. op. (H_ε)

$T = \exp(-\varepsilon H_\varepsilon)$ ($\leftarrow$ korlátos, van legkisebb sé-e H_ε-nak)

$\lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon = H$

Legyenek H_ε sá-ai $|0\rangle, |1\rangle \dots$

sé-ei $E_0, E_1, \dots$

sokszor kell egy A operátor vákuum várható értéke:

$\langle 0|A|0\rangle$

Ez így megy:

$$\mathrm{Tr}\left(e^{-H\tau} A\right) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-E_n \tau} \langle n|A|n\rangle$$

$$Z(\tau) = \mathrm{Tr}\, e^{-H\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-E_n\tau}$$

Ha $\tau \to \infty$ mindkét helyen $e^{-E_0\tau}$ tag dominál

$$\langle 0|A|0\rangle = \lim_{\tau \to \infty} \frac{\mathrm{Tr}(e^{-H\tau} A)}{Z(\tau)}$$

pl. korr. fv-ekre:

$\langle \hat{x}(t_1) \dots \hat{x}(t_n)\rangle = \langle 0|\hat{x}(t_1) \dots \hat{x}(t_n)|0\rangle$

$\hat{x}(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{x} e^{-i\hat{H}t}$

$$C_{t_1 \dots t_n} = \langle 0| e^{iE_0 t_1} \hat{x} e^{-i\hat{H}(t_1 - t_2)} \hat{x} e^{-i\hat{H}(t_2 - t_3)} \dots \hat{x} e^{-i\hat{H}(t_{n-1} - t_n)} \cdot$$

$$\cdot \hat{x} e^{-iE_0 t_n} |0\rangle$$

Euklideszibe elfolytatva

ha $\tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_n$

$$\langle x(\tau_1) x(\tau_2) \dots x(\tau_n)\rangle = \langle 0| \underbrace{e^{E_0\tau_1} \hat{x} e^{-H(\tau_1 - \tau_2)} \hat{x} \dots \hat{x} e^{-E_0\tau_n}}_{A} |0\rangle$$

$$C_{\tau_1 \dots \tau_n} = \langle x(\tau_1) \dots x(\tau_n) \rangle = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{Z(\tau)} \mathrm{tr}\left(e^{-H(\frac{\tau}{2} - \tau_1)} \hat{x} e^{-H(\tau_1 - \tau_2)} \dots \right.$$

$$\left. \dots \hat{x} e^{-H(\tau_n + \frac{\tau}{2})} \right)$$

$$\mathrm{tr} \to \int dx \langle x | \dots | x \rangle$$

$$C_{\tau_1 \dots \tau_n} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{Z(\tau)} \int dx \langle x | e^{-H(\frac{\tau}{2} - \tau_1)} \hat{x} \dots \hat{x} e^{-H(\tau_n + \frac{\tau}{2})} | x \rangle =$$

$$= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{Z(\tau)} \int_{\substack{\text{periodikus} \\ \text{pályákra}}} [Dx]\, x(\tau_1) \dots x(\tau_n) e^{-S_E} \quad \leftarrow \text{HF}$$

$$Z(\tau) = \int_{\text{per.p.}} [Dx] e^{-S_E} \qquad [Dx] = (\quad) dx\, dx_1 \dots dx_{N-1}$$

$$\int dx \langle x | e^{-H\tau} | x \rangle$$

Euklideszi térelmélet

$x^0 = -i x^4 \qquad x^4 \in \mathbb{R}$

de vajon mik ennek a feltételei?

Minkowski skalszorz: $a * b = a_0 b_0 - a_i b_i \qquad \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

<u>skalár térelmélet axiomatikus felépítése</u>

A1: $\exists\, \mathcal{H}$ Hilbert-tér, ebben $\exists\, |0\rangle$ vákuum

A2: $\exists\, \mathcal{H}$-n $U(a, \Lambda)$ ábrázolása a Poincaré csoportnak

és $|0\rangle$ invariáns $\forall U$-ra

A3: Spektrum feltétel:

$U(a_\mu, \mathbb{1})$ eltolás generátorai P_μ

$$e^{i a_\mu P^\mu} = U(a_\mu, \mathbb{1})$$

P_μ spektruma az előreemutató fénykúpban vannak (9)
(pozitív energiás)

$$\overline{V}_+ = \{ q \in \mathbb{R}^4 \mid q^0 \geq 0 \quad q^\mu q_\mu = q * q \geq 0 \}$$

$P^0 = H$ Hamilton op.

A4: A vákuum az egyetlen invariáns állapot $\forall U(a,\Lambda)$-ra

F1: $\exists\, \phi(x)$ operátorok $\mathcal{H}$-n (téroperátorok)

F2: $\phi(x)$ transzf. szabálya

$$U(a,\Lambda)\, \phi(x)\, U^{-1}(a,\Lambda) = \phi(\Lambda x + a) \quad \longleftarrow \text{ettől skalártér}$$

F3: (lokalitás) $[\phi(x), \phi(y)] = 0$ ha $(x-y)*(x-y) \leq 0$

térszerűen szeparált pontokban a mezők kommutálnak

Hf: $a, b \in \overline{V}_+ \Rightarrow a * b \geq 0$

<u>Wightman fv-ek</u>

$$W(x_1 \ldots x_n) = \langle 0 | \phi(x_1) \ldots \phi(x_n) | 0 \rangle$$

nincs időrendezés!

ebből $\forall t$ meg lehet kapni

Analitikus elfolytatás

$$\phi(x) = U(x, \mathbb{1})\, \phi(0)\, U^{-1}(x, \mathbb{1}) \qquad U(x, \mathbb{1}) = e^{iP_\mu x^\mu}$$

$$\phi(x) = e^{ip*x}\, \phi(0)\, e^{-ip*x}$$

$$W(x_1, \ldots x_n) = \langle 0 | \phi(0)\, e^{-ip*(x_1 - x_2)}\, \phi(0) \ldots e^{-ip*(x_{n-1} - x_n)}\, \phi(0) | 0 \rangle$$

Legyen x_k komplex

$$x_k = u_k - i y_k \qquad u_k, y_k \in \mathbb{R}^4$$

exp $\Rightarrow$ $e^{-ip^*(u_k-u_{k+1})}\, e^{-p^*(y_k-y_{k+1})}$

csak poz. sé-ei vannak

Ha $y_k - y_{k+1} \in \bar{V}_+$ akkor $e^{-p^*(y_k-y_{k+1})}$ korlátos $\Rightarrow$

$\Rightarrow W(x_1 \dots x_n)$ értelmes

Ha $y_k - y_{k+1} \in \bar{V}_+$, akkor az elfolytatás megy

Euklid. pontok

$y_k = (x_k^4, 0, 0, 0)$ $\quad u_k = (0, x_k^1, x_k^2, x_k^3)$

$$y_k - y_{k+1} \in \bar{V}_+ \Rightarrow x_k^4 - x_{k+1}^4 > 0$$

Schwinger-fv-ek:

$$S(\dots, \underline{x}_k, x_k^4, \dots) = W(\dots, -ix_k^4, \underline{x}_k, \dots)$$

csak $x_1^4 > x_2^4 > \dots x_n^4$-re értelmes

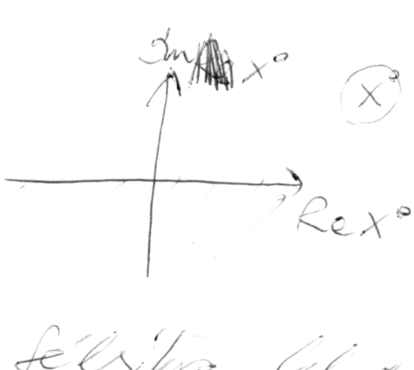
$$S(x_1 \dots x_n) = \langle 0|\phi(0,\underline{x}_1)\, e^{-H(x_1^4-x_2^4)}\, \phi(0,\underline{x}_2) \dots$$

$$\dots e^{-H(x_{n-1}^4 - x_n^4)}\, \phi(0,\underline{x}_n)|0\rangle$$

2pont fv:

$$W(x_1,x_2) = W(x_1 - x_2) = W(x)$$

$$-i(x_1^4 - x_2^4) = -ix^4$$

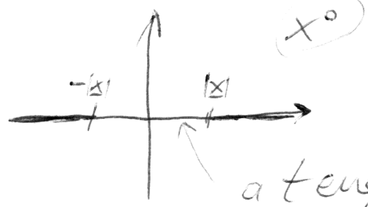


alsó félsíkra lehet elfolytatni

Ezt kiterjesztjük:

$W_H(x) := W(-x)$ a felső félsíkon analitikus

van egy kis rész, ahol a kettő megegyezik.



a tengelyen egy kis részen $W_\Pi(x) = W(x)$

összecsatolhatom egy fv-be

Ha $x = x_1 - x_2$ térszerű $\Rightarrow [\phi(x_1), \phi(x_2)] = 0 \Rightarrow W(x_1, x_2) = W(x_2, x_1)$

$\Downarrow$

$W(x) = W(-x) = W_\Pi(x)$

Valós x-re $x * x < 0 \Rightarrow |x^0| < |\underline{x}|$

$\Downarrow$

W kiterjeszthető a teljes komplex síkra, ~~kivéve~~

~~2 vastag vonalat~~

2 vágással

2011. márc. 8.

$\Rightarrow$ kiterjeszthető n változóra

$\Rightarrow S$ is kiterjeszthető $x_j \neq x_k$

$\Rightarrow S$ szimmetrikus az argumentumaiban

Schwinger fv-ek tulajdonságai

$$S(x_1 \dots x_n) = S(\Lambda x_1 + a, \dots \Lambda x_n + a)$$

$\Lambda \in SO(4)$ Euklideszi forgatás

$\rightarrow$ reflexiós pozitivitás

$\rightarrow S$ szimm. a változóiban

elfolytatás visszafelé:

$$W(x_1 \dots x_n) = \lim_{\varepsilon_k \to 0} S(\dots, \underline{x}_k, i x_k^0 + \varepsilon_k, \dots)$$

$$\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1} > 0$$

bonyi, mert $\forall$ ε-nak rendezve kell lenni & együtt menni 0-ba

Másik 2pont fv:

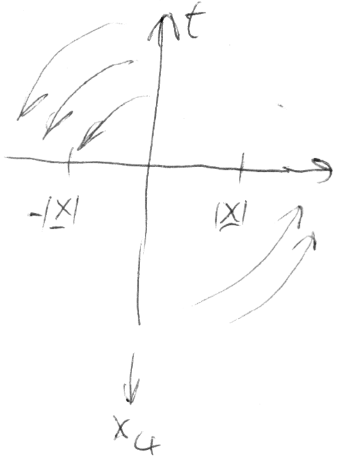
Green fv:

$$\tau(x_1 \dots x_n) = \langle 0 | T\,\phi(x_1) \dots \phi(x_n) | 0 \rangle$$

T időrendezés: $T\,\phi(x_1)\phi(x_2) = \Theta(x_1^0 - x_2^0)\,\phi(x_1)\phi(x_2) + \Theta(x_2^0 - x_1^0)\,\phi(x_2)\phi(x_1)$

$x_0 > 0 \quad \tau = w \rightarrow$ alulról

$x_0 < 0 \quad \tau = w_\pi \rightarrow$ felülről



Wick-forgatás

n változóra

$$\tau(x_1 \dots x_n) = \lim_{\varphi \to \frac{\pi}{2}} S(\dots; \underline{x}_k, e^{i\varphi} x_k^0; \dots)$$

Jelölés: Eukl. vektorok x_μ $(\mu = 1 \dots 4)$

x^μ nincs

$$xy := x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 + x^4 y^4 = x_\mu y_\mu$$

$$\eta = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix}$$

Szabad skalártér példája

$a(p)$ $a^+(p)$

$$[a(p), a^+(p')] = 2p_0 (2\pi)^3 \delta^3(\underline{p} - \underline{p}')$$

$$p_0 = \sqrt{\underline{p}^2 + m^2}$$

térоperátor

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 \underline{p}}{2p_0 (2\pi)^3} \left\{ a(\underline{p}) e^{-ip*x} + a^+(\underline{p}) e^{ip*x} \right\}$$

$$W(x) = \langle 0|\phi(x)\,\phi(0)|0\rangle = \int \frac{d^3 \underline{p}}{2p_0 (2\pi)^3} \int \frac{d^3 \underline{p}'}{2p_0' (2\pi)^3} \langle 0| a(p) e^{-ip*x} a^+(p')|0\rangle$$

többi tag 0

$$\langle 0|a(\underline{p})\, a^+(\underline{p}')|0\rangle = \langle 0|[a(\underline{p}), a^+(\underline{p}')]|0\rangle = [a(\underline{p}), a^+(\underline{p}')]$$

$$W(x) = \int \frac{d^3 \underline{p}}{2p_0 (2\pi)^3} e^{-ip*x} \int \frac{d^3 \underline{p}'}{2p_0' (2\pi)^3} 2p_0' (2\pi)^3 \delta^3(\underline{p} - \underline{p}') =$$

$$= \int \frac{d^3 \underline{p}}{2p_0 (2\pi)^3} e^{-ip*x}$$

Hasonlóan: $W_\pi(x) = W(-x) = \int \frac{d^3 \underline{p}}{2p_0 (2\pi)^3} e^{+ip*x}$

elfolytatás:

$$S(x) = W(-ix^4, \underline{x}) \overset{x^4>0}{=} \int \frac{d^3 \underline{p}}{2p_0 (2\pi)^3} e^{-p_0 x^4} e^{i \sum_j p_j x_j}$$

Hf: Áll: $\frac{1}{2p_0} e^{-p_0 |x_4|} = \int \frac{dk_4}{2\pi} \frac{1}{p_0^2 + k_4^2} e^{-ik_4 x_4}$

$$S(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_0^2 + k_4^2} e^{ikx}$$

$$p_0^2 = m^2 + \underline{k}^2$$

$$p_0^2 + k_4^2 = m^2 + k^2$$

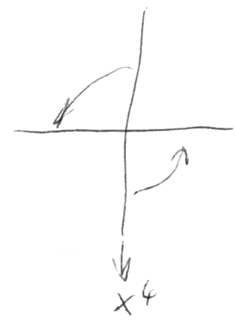
$$S(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{m^2 + k^2} e^{ikx}$$

Impulzus térben:

$$\tilde{S}(k) = \frac{1}{m^2+k^2}$$

jön Wick-forg.

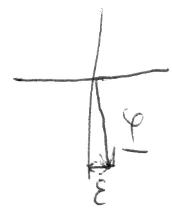
$$\tau(x) = \underset{\varphi \to \frac{\pi}{2}}{S(\underline{x}, x_0 e^{i\varphi})} = \underset{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon \to 0}}{S(\underline{x}, x_0(i+\varepsilon))}$$



$$\tau(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{m^2+k^2} e^{i(\underline{k}\underline{x} + k_4 x_0 (i+\varepsilon))}$$

$$\underline{l} := -\underline{k}$$

$$l_0 = k_4(i+\varepsilon) \Rightarrow k_4 = \frac{l_0}{i+\varepsilon} = l_0(-i+\varepsilon)$$



$$-i \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{m^2 + \underline{l}^2 - l_0^2 - \underbrace{2i\varepsilon l_0^2}_{i\varepsilon'}} e^{i(l_0 x_0 - \underline{l}\underline{x})} =$$

$$= i \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l * l - m^2 + i\varepsilon'} e^{i l * x}$$

előjel forgatás iránya

reflexiós pozitivitás: a Minkowski elméletben a $\mathcal{H}$-ban az eredeti állapotok normája pozitív

akármilyen Θ-ra

$\Theta|0\rangle$ normája: $\langle 0|\Theta^\dagger\Theta|0\rangle > 0$

Ha $\Theta|0\rangle = 0$ akkor norma $= 0$

Θ idő tükrözés op:

$$\Theta(\underline{x}, x^4) = (\underline{x}, -x^4)$$

$$\Theta \phi(x) = \overline{\phi(\Theta x)} \leftarrow \text{kompl. konj.}$$

tudja: antilinearitás, F tetsz. milyen fv-e:

$\Theta(\lambda F) = \bar{\lambda}\Theta F$

$\Theta(FG) = \Theta F \Theta G$

Legyen F az Φ tér multilin funkcionálja

$$F = \sum_j \int dx_1 \dots dx_j \, f_j(x_1 \dots x_j) \, \phi(x_1) \dots \phi(x_j)$$

$$f(x_i) \neq 0 \quad \text{ha } x_j^4 \geq 0$$

Áll: (ekviv. reflex. poz.zal)

$\langle(\Theta F) F\rangle \geq 0 \;\; \forall F \iff \mathcal{H}$-ban állapotok normája pozitív

$\to$ Schwinger-fv-ekre

$$\sum_{j,k} \int dx_1 \dots dx_j \, dy_1 \dots dy_k \, \overline{f_j(x_1 \dots x_j)} f_k(y_1 \dots y_k)$$

$$S(\Theta x_1 \dots \Theta x_j, y_1 \dots y_k) \geq 0$$

Euklid. funkcionál integrál

Eukl. metrika $\to$ terek kommutálnak

Green-fv. $\equiv$ Schw. fv.

S felírható valós terekkel, ezek véletlen fluktuációinak átlagaként

$\langle F(\phi)\rangle = \int d\mu \, F(\phi)$

ahol a $d\mu$ valamilyen mérték

ilyet szeretnénk:

tippre ez lesz: $d\mu = \frac{1}{Z} e^{-S_E} \prod_x d\phi(x)$

$$Z = \int \prod_x d\phi(x) \, e^{-S_E}$$

$S(x_1 \dots x_n) = \int d\mu \, \phi(x_1) \dots \phi(x_n)$

Hogy lehet ezt belátni?

Stratégia: $\longrightarrow$ Szabad esetre megnézzük

$\longrightarrow$ kcsh. esetét így definiáljuk

Gauss-integrálok

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\phi\, e^{-\frac{1}{2}A\phi^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{A}} \quad \text{ha } \mathrm{Re}A > 0$$

több változó:

$\phi = (\phi_1 \dots \phi_k) \in \mathbb{K}^k$

A_{ij} $i,j = 1 \dots k$ poz. definit, szimm. valós mátrix

$$Z_0 \equiv \int d^k\phi\, e^{-\frac{1}{2}(\phi, A\phi)} = (2\pi)^{k/2} (\det A)^{-\frac{1}{2}}$$

$$(\phi, A\phi) = \sum_{ij} \phi_i A_{ij} \phi_j$$

J tetsz. vek.

$$Z_0(J) := \frac{1}{Z_0} \int d^k\phi\, e^{-\frac{1}{2}(\phi, A\phi) + (J,\phi)} = e^{\frac{1}{2}(J, A^{-1}J)}$$

biz: $Y = \phi + A^{-1}J$ helyettesítés kell

$Z(J)$ gen. funkcionál

$$\langle \phi_{i_1} \phi_{i_2} \dots \phi_{i_n} \rangle := \frac{1}{Z_0} \int d\phi\, \phi_{i_1} \dots \phi_{i_n} e^{-\frac{1}{2}(\phi, A\phi)}$$

$$\langle \phi_{i_1} \dots \phi_{i_n} \rangle := \frac{\partial}{\partial J_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial J_{i_k}} Z_0[J]\Big|_{J=0}$$

konkrétan

$\langle \phi_i \rangle = 0$

$\langle \phi_i \phi_j \rangle = A^{-1}_{ij}$

$\langle \phi_i \phi_j \phi_l \rangle = 0$

$\langle \text{páratlanok} \rangle = 0$

$\langle \phi_i \phi_j \phi_k \phi_m \rangle =$

$= A^{-1}_{ij} A^{-1}_{km} + A^{-1}_{ik} A^{-1}_{jm} + A^{-1}_{im} A^{-1}_{jk}$

$\langle \dots \rangle = \sum A^{-1}_{j_1 k_1} A^{-1}_{j_2 k_2} \dots A^{-1}_{j_n k_n}$

Euklideszi szabadtér

$$S_0(\phi) = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 \right\} = \int d^4x \frac{1}{2}\phi(x) \left\{ \Box + m^2 \right\} \phi(x)$$

ahol $\Box = -\partial_\mu \partial_\mu$

$G(x,y) = S(x,y) = \langle \phi(x)\phi(y) \rangle \leftarrow$ propagátor

$(\Box + m^2) G(x,y) = \delta^4(x-y)$ megoldása

$$G(x,y) = S(x,y) = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} \frac{1}{p^2+m^2}$$

n-pont fv-ek:

$G(x_1 \ldots x_{2n}) = S(x_1 \ldots x_{2n}) = \langle \phi(x_1) \ldots \phi(x_{2n}) \rangle =$

$$= \sum_{\text{párosítások}} G(x$$

összefüggő Green fv-ek: (általánosan)

$$G(x_1 \ldots x_n) = \sum_P G_c(x_1 \ldots x_j) \cdot \ldots \cdot G_c(x_k \ldots x_l)$$

ahol P az $1 \ldots n$ számok partíciói nem üres halmazok

konkrétan:

$G(x) = G_c(x)$

$G(x,y) = G_c(x,y) + G_c(x)\, G_c(y)$

$G(x,y,z) = G_c(x,y,z) + G_c(x,y)\, G_c(z) + \text{perm.} + G_c(x) G_c(y) G_c(z)$

invertálható!

$$G_c(x_1 \dots x_n) = \sum_P (-1)^{k-1} (k-1)! \underbrace{G(x_1 \dots x_j) \dots G(x_e \dots x_n)}_{k \text{ db tényező}}$$

első néhány

$$G_c(x) = G(x)$$

$$G_c(x,y) = G(x,y) - G(x)G(y)$$

$$G_c(x,y,z) = G(x,y,z) - G(x) \cdot G(y,z) - \text{perm} + 2G(x)G(y)G(z)$$

Szabad térre:

$$G_c(x) = 0$$

$$G_c(x,y) = G(x,y)$$

$$G_c(x_1 \dots x_n) = 0 \quad n \geq 3$$

Legyen $J(x)$ forrás

skalszorz def je: $(J,\phi) = \int d^4x\, J(x)\phi(x)$

part - fv: (generáló funkci) $Z(J) := \langle e^{(J,\phi)} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \cdot J(x_1) \dots J(x_n)\, G(x_1 \dots x_n)$

ezzel:

$$G(x_1 \dots x_n) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} Z(J) \Big|_{J=0}$$

öf. Green fv-ek

$$G_c(x_1 \dots x_n) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} W[J] \Big|_{J=0}$$

$W[J] = \log Z(J)$

Hf.

$$Z(J) = Z_0(J) = \exp\left\{ \frac{1}{2} \int d^4x\, d^4y\, J(x)\, G(x,y)\, J(y) \right\}$$

$$W[J] = W_0[J] = \frac{1}{2}(J, GJ) = \frac{1}{2} \int d^4x\, d^4y\, J(x)\, G(x,y)\, J(y)$$

észrevétel

$\phi_i \rightarrow \phi(x)$ $\quad \frac{\partial}{\partial J_i} \rightarrow \frac{\partial}{\partial J(x)}$

$\frac{1}{2}(J, A^{-1}J) \rightarrow \frac{1}{2}(J, GJ)$

minden megfelel egymásnak

$A = G^{-1} = \Box + m^2$

$\frac{1}{2}(\phi, A\phi) = \frac{1}{2}(\phi, G^{-1}\phi) = \frac{1}{2}(\phi, (\Box + m^2)\phi) = \frac{1}{2}\int d^4x \phi(x) \cdot$

$\cdot (\Box + m^2)\phi(x) = S_0$

Z_0 felírható Gauss-integrállal

$Z_0[J] = \exp\{\frac{1}{2}(J, GJ)\} =: \frac{1}{Z_0}\int \prod_x d\phi(x) e^{-\frac{1}{2}(\phi, (\Box + m^2)\phi) + (J,\phi)}$

ez a def. a folytonos ~~határát menetnek~~ integrálnak

ez a def. csak Gauss integrálokra működik

ahol $Z_0 = \int \prod_x d\phi(x) \; e^{-\frac{1}{2}(\phi, (\Box + m^2)\phi)}$

$\prod_x d\phi(x)$ nem túl jól definiált, definiáljuk így (Gauss típusú integrálra)

$G(x_1 \dots x_n) = \frac{1}{Z_0}\int \prod_x d\phi(x) e^{-S_0[\phi]} \phi(x_1) \dots \phi(x_n)$

kcsh-ó eset úgy:

$S[\phi] = S_0[\phi] + S_I[\phi]$ $\quad$ pl: $S_I[\phi] = \frac{g}{4!}\int d^4x\, \phi(x)^4$

ez az egyetlen értelmes

ϕ^3-ös elrontja $\phi \to -\phi$

$$Z[J] := \frac{1}{Z}\int \prod_x d\phi(x)\, e^{-S[\phi] + (J,\phi)}$$

$$Z = \int \prod_x d\phi(x)\, e^{-S[\phi]}$$

ez már nem olyan jól definiált (l. később)

$$G(x_1 \dots x_n) = \frac{1}{Z}\int \prod_x d\phi(x)\, \phi(x_1)\dots\phi(x_n) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[-\frac{g}{4!}\int d^4x\, \phi(x)^4\right]^n \cdot e^{-S_0[\phi]}$$

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2 - \lambda x^4}$$


0 1. 2. rendek

$$f(\lambda) = f(0) + \lambda f' + \dots$$

$$f(\lambda) = \lim_{\Lambda\to\infty} \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} e^{-x^2-\lambda x^4} = \lim_{\Lambda\to\infty} f_\Lambda(\lambda) = \lim_{\Lambda\to\infty} \left(f_\Lambda(0) + \lambda f_\Lambda'(0) + \dots\right.$$

$$Z[J] = \frac{1}{Z}\sum_n \frac{1}{n!}\int \prod_x d\phi(x) \left[-\frac{g}{4!}\int d^4x\, \phi(x)^4\right]^n e^{-S_0[\phi] + (J,\phi)} =$$

felcseréltük pedig nem szabad

$$= \frac{1}{Z}\sum_n \frac{1}{n!}\left[-\frac{g}{4!}\int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right]^n \underbrace{\int \prod_x d\phi(x)\, e^{-S_0[\phi] + (J,\phi)}}_{Z_0 \cdot Z_0[J]} =$$

$$= \frac{Z_0}{Z}\sum_n \frac{1}{n!}\left[-\frac{g}{4!}\int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right]^n Z_0[J]$$

Hasonlóan

$$G(x_1, \dots, x_n) = \frac{Z_0}{Z}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} \cdot$$

$$\left[-\frac{g}{4!}\int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right]^n Z_0(J)\Big|_{J=0}$$

gráf szabályok ($\frac{Z_0}{Z}$ nélkül)

$\forall \frac{\delta}{\delta J(x_i)} \to$ külső pont

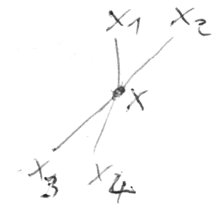
$\forall \left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 \to$ belső pont $\to$ 4db vonal indul ki

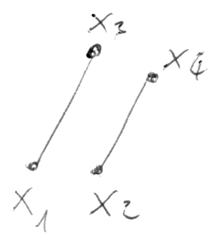
Z_0-ban van (J, GJ)

$J=0$ miatt minden J-nek el kell tűnni

$G \to$ vonalak

$\forall$ gráf megengedett, nem öf-ek is:





$$Z[0]=1 \Rightarrow \frac{Z}{Z_0} = \sum_n \frac{1}{n!}\left[-\frac{g}{4!}\int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right]^n Z_0[J]\Big|_{J=0}$$

$\Rightarrow$ vákuum diagramok (külső pont nélkül)

pl:  ... stb.

G-ben azok a gráfok kellenek, amelyekben nincsenek vákuum részek

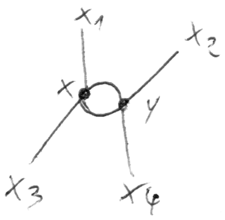
$$(\underbrace{g_1+g_2+\dots+g_n+\dots}_{\text{(nincs vákuum)}})(\underbrace{1+v_1+v_2+\dots+v_n+\dots}_{\text{(vákuum)}}) = g_1+g_2+\dots$$

$+g_n+\dots + g_1 v_1 + g_1 v_2 + \dots$

$+g_2 v_1 + g_2 v_2 + \dots$

$+ \vdots$

Hf: G_c-hez öt diagramok kellenek



OK

∞-t ad az integrál

Rácsregularizáció

$\Lambda = a\mathbb{Z}^4 = \{x \,;\, \frac{x_\mu}{a} \in \mathbb{Z}\}$ rács

$\phi(x)$ tereket csak $x \in \Lambda$-ra értelmezzük

$$(f,g) = \sum_x a^4 f(x) g(x)$$

$$\int d^4x \to \sum_x a^4$$

forward

deriváltak: $\Delta^f_\mu f(x) := \frac{1}{a}\left(f(x+a\hat{\mu}) - f(x)\right)$

backward

$$\Delta^b_\mu f(x) = \frac{1}{a}\left(f(x) - f(x-a\hat{\mu})\right)$$

$\hat{\mu}$ egységvektor

$$(\Delta^f_\mu)^+ = -\Delta^b_\mu$$

$$(f, \Delta^b_\mu g) = -(\Delta^f_\mu f, g)$$