

naiv fermion $\odot$ módusok

(50)

GW fermionok exten ~~le~~ térrel $\odot$ módusok

$$Du=0 \quad \gamma_5 Du=0$$

$$(a D \gamma_5 D - D \gamma_5) u = 0$$

$$D \gamma_5 u = 0$$

továbbra is fix kiralitások

$$D' = \frac{2}{a} - D$$

$$\gamma_5 D' - D \gamma_5 = a \cancel{D'} \gamma_5 D' \quad (\text{Hf.})$$

D' -nek is vannak fix kiralitású módusai

$$D \rightarrow n_-, n_+$$

D' $\odot$ módusai D $\lambda=2$ s.e. n'_-, n'_+

$$n_- - n_+ + n'_- - n'_+ = 0$$

de $n_- - n_+ \neq 0$ lehetséges

$\rightarrow D$ indexe jól definiált és tud $\neq 0$ lenni

$$\text{a'lt.} \therefore \mathcal{Q}_{\text{top}} = \text{index}(D) = \frac{a}{2} \text{Tr}(\gamma_5 D)$$

$$\psi \rightarrow \psi + \delta\psi$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} + \delta\bar{\psi}$$

$$\delta\psi = \gamma_5 \left(1 - \frac{1}{2} a D\right) \psi \cdot \epsilon$$

$$\delta\bar{\psi} = \bar{\psi} \left(1 - \frac{1}{2} a D\right) \gamma_5 \cdot \epsilon$$

$$\begin{aligned} \delta(\bar{\psi} D \psi) &= (\bar{\psi} + \delta\bar{\psi}) D(\psi + \delta\psi) - \bar{\psi} D\psi \\ &= \epsilon \cdot \left(\bar{\psi} \left(1 - \frac{1}{2} a D\right) \gamma_5 D \psi + \bar{\psi} D \gamma_5 \left(1 - \frac{1}{2} a D\right) \psi \right) = \\ &= \epsilon \left(\bar{\psi} \left(\gamma_5 D - \frac{1}{2} a D \gamma_5 D + D \gamma_5 - \frac{1}{2} a D \gamma_5 D \right) \psi \right) = 0 \end{aligned}$$

van királis szimmetria

de nincs additív tömegrenormálás

$$S = \bar{\psi} D \psi + m \bar{\psi} \psi \quad (\text{Hf})$$

$$\psi' = e^{i \gamma_5 \alpha} \psi$$

$$\bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{i \gamma_5 \alpha}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow \bar{\psi} \psi \rightarrow -\bar{\psi} \psi$$

$$m \rightarrow -m$$

$$\Rightarrow m \leftrightarrow -m \text{ szimmetria}$$

Alkalmazások

52

QED $U(1)$ + fermionok

$$S = \beta \sum_p (1 - \text{Re Tr } V_p) \quad \beta = \frac{1}{2}$$

Gauss fixpont ($=0$ -nál) IR fixpont $\rightarrow$

$\rightarrow$ triviális kont. lim

$L \ll 1$ ^{pert.} ~~scam.~~ jól működik (várs. fölösleges)

van-e nemtriviális UV fixpont?

(így tűnik, h nincs)

QCD + QED együtt

QED esetében a nemkompakt is

mérték-invariáns

$SU(3)$ csoport

fermionok nélkül, fixista $SU(3)$ mértékelmélet

S ugyanaz $\uparrow$ $\beta = \frac{6}{g^2}$

paraméter nélküli elmélet

(β -t a várszállandó adja, $\beta \rightarrow \infty$ a kont. limben)

$T=0$ ($N_s^3 \cdot N_t$ $N_t \gg N_s$)

adott β -hoz statikus potenciál:

$$(aV)\left(\frac{R}{a}\right) = -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a}{T} \log W\left(\frac{R}{a}, \frac{T}{a}\right)$$

max R -re $aV \sim (a^2 \sigma) \cdot \frac{R}{a}$

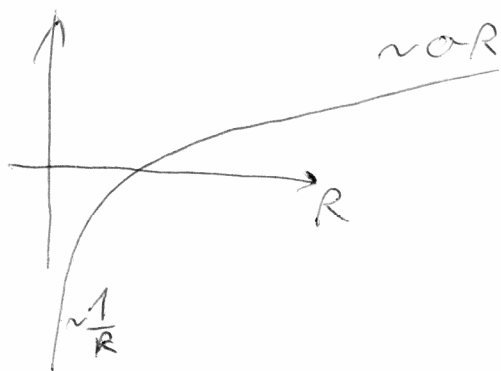
σ mérték feszültség
 σ dimenziója (MeV^2)

$$a^2 \sigma \rightarrow 0 \quad \beta \rightarrow \infty$$

Ha σ -t ismerjük (kb. $\sqrt{\sigma} \approx 440 \text{ MeV}$ QCD-ben)
 adott β -hoz $a^2 = \frac{(a^2 \sigma) \beta}{\sigma} \quad a(\beta)$

eredmények:

$V(R)$ már fizikai egységekben, kontinumban



köben $\exists R \quad R^2 \frac{\partial V}{\partial R} \Big|_{r_0} = 1,65 \quad (\text{lehetne más is})$

→ itt a legnagyobb a
 potenciálgörbe görbülete

r_0 dimenziós mennyiség: $r_0 \approx 0,5 \text{ fm}$ ($0,46 \text{ fm}$ QCD-ben)

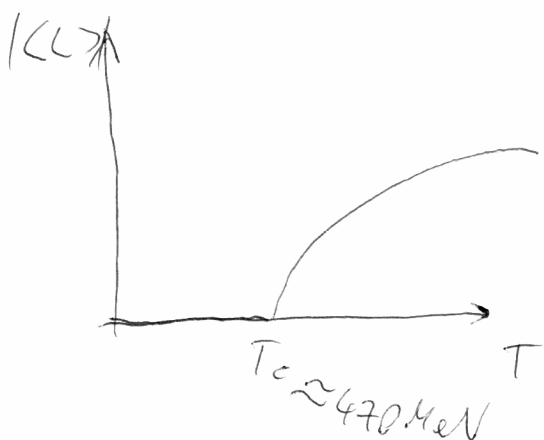
2011. dec. 7.

54

$T > 0$ $Z(3)$ spontán sérül $\langle L \rangle$

$T < T_c$ (T kicsi) $\langle L \rangle = 0$

$T > T_c$ (T nagy) $\langle L \rangle \neq 0$ spontán szimmetria sértés



$T_c/\sqrt{\sigma}$ -t lehet meghatározni

Hogy kell ezt csinálni?

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta H} = \text{Tr} e^{-\beta H} = \text{Tr} e^{-\beta H}$$

$T > 0$ $N_t \ll N_s$

T változtatása $\begin{cases} N_t \text{ vált} \rightarrow \text{diszkrét} \\ a \text{ vált. egyszerű} \end{cases}$
 β -t növeljük $\rightarrow a$ csökken

1.) $T=0$ -ra $a(\beta)$ fr. pontosabban $(a\sqrt{\sigma})(\beta)$ vagy $(\frac{a}{r_0})(\beta)$

2., fix N_t

$$T(\beta) = \frac{1}{N_t \cdot a(\beta)} \quad \text{vagy} \quad T(\beta)\sqrt{\sigma} = \frac{1}{N_t(\sqrt{\sigma} \cdot a(\beta))}$$

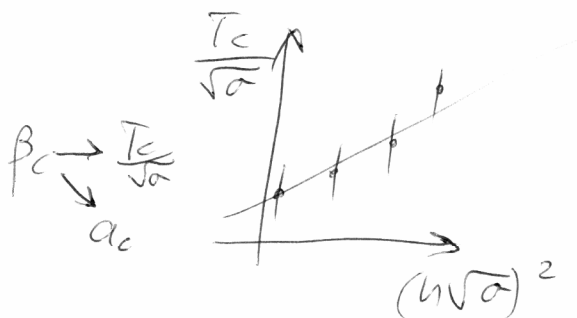
3) fix N_t változó $\beta \Rightarrow \langle L \rangle(\beta) \rightarrow \beta_c$

$$\frac{T_c}{\sqrt{a}} = \frac{1}{N_t(\sqrt{a} a) / \beta}$$

kontin.

$$a \rightarrow 0$$

$$N_t \rightarrow \infty$$



$$N_t = 4, 6, 8, 10, \dots$$

$$\frac{T}{\sqrt{a}}(a) - \frac{T_c}{\sqrt{a}} = c_1 (4\sqrt{a})^2 + c_2 (4\sqrt{a})^4$$

QCD: $SU(3)$ mértékelmélet + fermionok (u d s c t b)
 alacsony energian 3 színt: u d s

fundamentális ábrázolásban: 3 színtomp. &
 Sphorbau

$$S = S_g + S_F$$

$$S_F = \sum_{i=u,d,s} \bar{\psi}_i M(u, m_i) \psi_i$$

$$M \leq \begin{matrix} M_W & \text{Wilson} \\ M_S & \text{staggered} \\ M_{ch} & \text{lattice} \end{matrix}$$

$$Z = \int \prod_x \prod_{\mu} dU_{x\mu} |\det M(u_u)| \cdot |\det M(u_d)| \cdot |\det M(u_s)| e^{-S_g}$$

↑
 csak Wilsonhoz kell, mert
 ott lehet - i

tipikusan: $m_u = m_d = m_{ud}$ (QED nulla effektus) (56)

$$\sim < 1\% \rightarrow \det M(m_{ud})^2 \cdot \det M(m_s)$$

3 parameter (β, m_{ud}, m_s)

teljes: $\beta, \alpha, m_u, m_d, m_s$
 α
 $\frac{1}{137}$ de változik

~~de~~ / / nem kell
 változtatni

$\beta \rightarrow$ most is a vácsallandót adja
 pontosabban (β, m_{ud}, m_s) egy kombinációja
~~valami~~

LCP: line of constant physics

ők -nek a csupasz paraméterek között

$m_{ud}(\beta)$ $m_s(\beta)$

2 db fizikai feltétel (pl. 2 tömegarány)

$$\langle \theta(\tau) \theta(0) \rangle \sim e^{-m_\pi \tau}$$

pl: $\theta = \bar{u} \gamma_5 d (= \bar{\psi}_u \gamma_5 \psi_d) \rightarrow m_{\pi^-}$

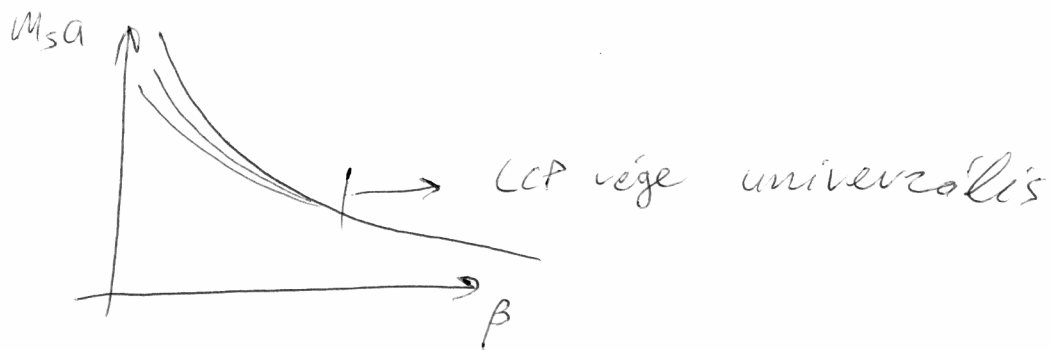
$$\theta = \bar{u} \gamma_5 s \rightarrow m_{K^-}$$

$$\theta_\gamma = \bar{u}_d (\gamma_5 \gamma_\mu) d_\beta u_\gamma \rightarrow u u d \quad s = \frac{1}{2} \rightarrow m_p$$

legnagyobb energiánál

Mud (β) $m_s(\beta)$ open layers, heavy

$$\frac{m_{\pi^0} \cdot a}{m_N \cdot a} = f_{\pi^0}, \quad \frac{m_K \cdot a}{m_N \cdot a} = f_K,$$



+ vacillando' $m_{N \cdot a}(\beta)$

3 merging $(m_\pi, m_u, m_N) \rightarrow 2LCP + q(\beta)$

A lora kimavadt

2011. Dec. 19.

Algoritma

$$Z = \int \prod_x \prod_\mu dU_{x,\mu} e^{-S[U]}$$

$$pl. S = \beta \sum (1 - \frac{1}{N} Re Tr \rho$$

$$\langle \phi \rangle = \frac{\int \pi_x \pi_{\mu} \phi_{x,\mu} \phi e^{-S}}{Z}$$

integral dinge = 644.48

↑ ↑ ↑
4 $SU(3)$ skal for
værdieret

fontossági mintavételre is (importance sampling) [58]

onnan kéne venni konfigurációkat, ahol e^{-S} nagy
 emnyire nem egyszerű, mert fáriszterfogát is számírt

számírt, h egy hatáshoz hány $\left(\prod_{\mu} dU_{\mu} \right)$
 konkrét "különböző" konfigurációk léteznek

$$W[U] \sim e^{-S[U]}$$

eloszlás fű lenne

Hf: ha ilyen eloszlással veszek konfigurációkat
 $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$

$$\langle O \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_i^n O[U_i]$$

$$\Delta O \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Hogyan valósíthatunk meg $W[U]$ eloszlást?

közvetlenül nem megy (olyan nehéz, mint utasígyrök
 NP-teljes probléma)

átmeneti valószínűség legyen

sorozat: $[U_1] \dots [U_n] \dots$

$$[U_n] \rightarrow [U_{n+1}]$$

$P([U'] \leftarrow [U])$ átmeneti valószínűség



$$W[u'] = \sum_{[u]} P([u'] \leftarrow [u]) W[u] = \int [du] P([u'] \leftarrow [u]) W[u]$$

matrixos jelöléssel:

~~$$W' = PW$$~~

P-re

$$\sum_{[u']} P([u'] \leftarrow [u]) = \int [du'] P([u'] \leftarrow [u]) = 1$$

↑
vektor aminek minden eleme 1

$$1 = \sum_{[u']} W[u'] = \sum_{[u][u']} P([u'] \leftarrow [u]) W[u]$$

P-re még megköveteljük az erős ergodicitást:

$$P([u'] \leftarrow [u]) > 0 \quad \forall [u'], [u] \text{-ra}$$

(elegendő, ha P^k tudja ezt: $\forall u, u'$ -höz $\exists k$ amire $P^k([u'] \leftarrow [u]) > 0$)
(Valamilyen hatvány)

$W_1, W_2, \dots, W_n, \dots$ Markov lánc

P átmeneti valószínűség

$$\lim_n W_n = W_c \quad \text{fixpont}$$

$$PW_c = W_c$$

kérdés: Mi legyen P?

részletes egyenlőség nem szükséges, de elegendő

$$P([u'] \leftarrow [u]) W_c[u] = P([u] \leftarrow [u']) W_c[u']$$

$$P W_c = \sum_u P([u'] \leftarrow [u]) W_c[u] = \sum_u P([u] \leftarrow [u']) W_c[u'] = W_c[u'] = W_c[u] = W_c$$

megmutatható P -re: lbb se'-e 1, a többi mind < 1

$\lim_{q \rightarrow \infty} P^q W_0 = W_c$, ha W_0 nem merőleges W_c -re

$\delta(u-u_0)$ eloszlás tudja ezt, ha $W_c[u_0] > 0$



autokorreláció:

tetsz A mennyiségre: $C_A(\tau) = \langle A_h A_{h+\tau} \rangle - \langle A_h \rangle \langle A_{h+\tau} \rangle$

$$\sim e^{-\frac{\tau}{\tau_{AC}}} \rightarrow \tau_{AC} \text{ autokorrelációs lecsengési ideje}$$

Metropolis algoritmus

$$P([u'] \leftarrow [u]) = C \cdot \max \left\{ 1, \frac{W_c[u']}{W_c[u]} \right\}$$

Hf: biz, h. ez tudja részletes egyensúlyt

Módosított Metropolis

$$P(r_{i+1} \leftarrow r_i) \quad (0 \leq |u' - u| < d)$$

integrálás:

(61)

1. véletlenszerű u' $|u-u| < d$

2. $p = \max \left\{ 1, \frac{W(u')}{W(u)} \right\}$ valószínűséggel elfogadjuk

$1-p$ eséggel $u'=u$

nagy autokorreláció

Hőfürdő (lokális)

$$W_c([u]) = W(u_{x,\mu}, \overline{u_{x,\mu}}) = W(u_{x,\mu}, \overline{u_{x,\mu}}) W(\overline{u_{x,\mu}})$$

↑ maradék

csak $u_{x,\mu}$ -t változtatjuk

$$P([u'] \leftarrow [u]) = P(u'_{x,\mu} \leftarrow u_{x,\mu}; \overline{u_{x,\mu}})$$

$\int d\overline{u}', \overline{u}$

és legyen $P(u'_{x,\mu} \leftarrow u_{x,\mu}; \overline{u_{x,\mu}}) = W(u'_{x,\mu}, \overline{u_{x,\mu}})$

egy szab. fok helyes eloszlással

nem ergodikus $\rightarrow u_{x,\mu}$ véletlenszerű

ez ekvivalens $\approx$ Metropolis lépéssel egy $u_{x,\mu}-u$

Metropolis & hőfürdő lokálisak: boszonnoknál jó

fermionokkal nem, mert $\det M(u)$ pl. mértékén van, és ez nem lok.

V^4 -nel nem, mert $\det M$ csámboris V^3 -bol nem.

legyen ϕ tér $W(\phi) \sim e^{-S[\phi]}$

bekerítünk $\forall \phi_x$ -hez egy "impulzust": π_x

$$Z = \int \prod_x d\phi(x) e^{-S[\phi]} = c \cdot \int \prod_x d\phi_x d\pi_x e^{-\frac{1}{2} \sum_x \pi_x^2} e^{-S(\phi)}$$

$$\mathcal{Q} = \frac{\int \prod_x d\phi(x) d\pi(x) e^{-(S + \frac{1}{2} \sum_x \pi(x)^2)} \mathcal{Q}}{\int \prod_x d\phi(x) d\pi(x) e^{-(S + \frac{1}{2} \sum_x \pi(x)^2)}}$$

$$Z_\pi = \int \prod_x d\phi(x) d\pi(x) e^{-\mathcal{H}}$$

$$\mathcal{H} = S + \frac{1}{2} \sum_x \pi(x)^2$$

tudok csinálni konstans $\mathcal{H}$ trajektóriáji vonalakat

$$\dot{\phi}_x = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_x} \quad \dot{\pi}_x = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_x}$$

szimulációs időben léptetünk

↳ e szerint deriv

diszkrétizálni kell az időt $\rightarrow$ $\mathcal{H}$ nem marad meg
tudja a részletes egyensúlyt
megtartja az int. értékeket
nem ergodikus

1. lépés:

1. véletlen π_x $e^{-\frac{1}{2}\sum_x \pi_x^2}$ eloszlással
2. mol. dinamika

 $\rightarrow$ ergodikus

hibrid-MC

1. véletlen π_x
2. mol. dinamika véges ϵ lépéskörrel
3. Metropolis $e^{-S\mathcal{H}}$ -al

$$\max \{1, e^{-\Delta S}\}$$

$$\Delta S \sim \epsilon^2$$

fermionok

$$Z = \int \prod_{x,\mu} dU_{x,\mu} \det M e^{-S_g}$$

$$\det M = \text{const.} \int \prod_x d\phi_x^+ d\phi_x e^{-\phi^+ (M^{-1}) \phi} \quad \text{ha } M \text{ hermitikus}$$

$$M = D + m$$

pl. ~~Wilson~~ $N_F = 2$ Wilson

$$Z = \int \prod_x \prod_\mu dU_{x,\mu} (\det M)^2 e^{-S_g}$$

$$(\det M)^2 = \det M^+ M = \text{const} \int \prod_x d\phi_x^+ d\phi_x e^{-\phi^+ (M^+ M)^{-1} \phi}$$

ϕ -ben kvadrátikus a hiba $\rightarrow \phi$ -re nem kell mol. din.

$$\phi = M^\dagger \eta \rightarrow W(\phi) = e^{-\phi^\dagger (M^\dagger M)^{-1} \phi}$$

mal. die a mértékűtérre

$$U_{x,\mu} \rightarrow \pi_{x,\mu}$$

$$U_{x,\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi_{x,\mu}} \quad \dot{\pi}_{x,\mu} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U_{x,\mu}} = \frac{\partial S_g}{\partial U_{x,\mu}} + \phi^\dagger \frac{\partial (M^\dagger M)^{-1}}{\partial U_{x,\mu}} \phi$$

$$\frac{\partial (M^\dagger M)^{-1}}{\partial U_{x,\mu}} = - (M^\dagger M)^{-1} \frac{\partial M^\dagger M}{\partial U_{x,\mu}} (M^\dagger M)^{-1}$$

$$\phi^\dagger (M^\dagger M)^{-1} \frac{\partial M^\dagger M}{\partial U_{x,\mu}} (M^\dagger M)^{-1} \phi$$

$$\underbrace{M^\dagger M}_\text{ritka matrix} v = \phi$$

lin. egy rendszer

$$\mathcal{O}(V)$$