

Fermionik

Grassmann'sk

 $\bar{\Psi}(x), \Psi(x)$ fälttänkantikommutabelsk $\{\Psi(x), \Psi(y)\} = \{\bar{\Psi}(x), \Psi(y)\} = \{\bar{\Psi}(x), \bar{\Psi}(y)\} = 0$

integrals formulis

$$\int d\Psi = 0 \quad \int d\Psi \cdot \Psi = 1 \quad \int \Psi d\Psi = -1$$

teta. analitiska for. $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i$ $f(\Psi) = a_0 + a_1 \Psi$

$$\int d\Psi f(\Psi) = a_1$$

teta. analitiska

$$f(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$$

$$f(\bar{\Psi}, \Psi) = a_{00} + a_{10} \bar{\Psi} + a_{01} \Psi + a_{11} \bar{\Psi} \Psi$$

$$\int d\bar{\Psi} d\Psi f(\bar{\Psi}, \Psi) = a_{11} \int d\bar{\Psi} d\Psi \cdot \bar{\Psi} \Psi =$$

$$= -a_{11} \underbrace{\int d\bar{\Psi} \bar{\Psi}}_1 \underbrace{\int d\Psi \Psi}_1$$

$$d. \quad f(\bar{\Psi}, \Psi) = e^{-\lambda \bar{\Psi} \Psi} = 1 - \lambda \bar{\Psi} \Psi$$

$$\int d\bar{\Psi} \cdot d\Psi \cdot e^{-\lambda \bar{\Psi} \Psi} = \lambda$$

bilinear $\sum_{x,y} \bar{\Psi}(x) A_{xy} \Psi(y)$

$$\int \prod_x d\bar{\Psi}(x) d\Psi(x) \cdot e^{-\sum_{x,y} \bar{\Psi}(x) A_{xy} \Psi(y)} = \det A$$

$$\int \prod_x d\bar{\Psi}(x) d\Psi(x) \cdot e^{-\sum_{x,y} \bar{\Psi}(x) A_{xy} \Psi(y)} \cdot \Psi_{x_1} \bar{\Psi}_{y_1} \cdots \Psi_{x_n} \bar{\Psi}_{y_n}$$

$$= \det A \cdot \sum_{z_1, \dots, z_n} \epsilon^{z_1, \dots, z_n}_{x_1, x_2, \dots, x_n} \cdot A^{-1}_{z_1 y_1} \cdot A^{-1}_{z_2 y_2} \cdots A^{-1}_{z_n y_n}$$

$$\epsilon = \begin{cases} +1 & z_i = x_i \text{ para permutação} \\ -1 & z_i = x_i \text{ para não permutação} \\ 0 & z_i = x_i \text{ não permutação} \end{cases}$$

Mi e Retas?

Minkowski $\mathcal{L} = \bar{\Psi}_\alpha \left(i \gamma^\mu_{\alpha\beta} \partial_\mu - m \delta_{\alpha\beta} \right) \Psi_\beta$

Ψ bispinor

obl $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$

$$\text{Erl. } t = -i\tau \quad S_E = -iS$$

'closed' & γ^μ is hermitic

$$\{\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E\} = 2\delta_{\mu\nu}$$

$$\gamma_4^E = \gamma^0 \quad \gamma_j^E = -i\gamma^j$$

$$S_E = \int d^4x \mathcal{L}_E^{\text{Dir}} \quad \mathcal{L}_E^{\text{Dir}} = \bar{\Psi} (\gamma_\mu^E \partial_\mu + m) \Psi$$

Discretisation

$$\text{Dirac: } \partial_\mu \rightarrow \Delta_\mu^F \quad \Delta_\mu^B$$

$$\text{symmetrisches Differenzial} \quad \frac{1}{2}(\Delta_\mu^F + \Delta_\mu^B)$$

$$S_E = \sum_{x,y} a^4 \bar{\Psi}(x) \underbrace{(D_{xy} + m \delta_{xy})}_{M_{xy}} \Psi_y$$

$$D_{xy} = \frac{1}{a} \sum_\mu \frac{1}{2} \gamma_\mu (\delta_{y, x+a\hat{\mu}} - \delta_{y, x-a\hat{\mu}})$$

$$\int \prod_x d\bar{\Psi}(x) d\Psi(x) e^{-S_E} = \det M$$

2011. nov. 9.

37

Diszkrétizáció

naivan: $\partial_\mu \rightarrow \Delta_\mu^f, \Delta_\mu^b$ szimmetrikus derivált: $\frac{1}{2}(\Delta_\mu^f + \Delta_\mu^b)$

$$S_E = \sum_{x,y} \bar{\psi}_x \underbrace{(D_{xy} + m \delta_{xy})}_{M_{xy}} \psi_y$$

$$D_{xy} = \sum_{\mu} \frac{1}{a} \frac{1}{2} \partial_\mu (\delta_{y,x+a\hat{\mu}} - \delta_{y,x-a\hat{\mu}})$$

$$\int \prod_x d\bar{\psi}(x) d\psi(x) e^{-S_E} = \det M$$

D (és M) tulajdonságai

γ_5 hermiticitása

$$\gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$$

$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0$$

$\mu = 1, \dots, 4$

$$D^\dagger = \gamma_5 D \gamma_5$$

$$M^\dagger = \gamma_5 M \gamma_5$$

(Hf.)

királis szimmetria (D -vek)

$$\{\gamma_5, D\} = 0$$

$$\gamma_5 D + D \gamma_5 = 0 \quad (\gamma_5 \text{ herm.})$$

$$D^\dagger \gamma_5 + \gamma_5 D = 0$$

$$D^\dagger + D = 0$$

D antiherm.

$\Rightarrow D$ spektruma korlátos

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow e^{-i\gamma_5 \alpha} \psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} e^{i\gamma_5 \alpha} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{tráfo szimmetria} \\ \text{ja hatásnak} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}' D \psi' &= \bar{\psi} e^{i\gamma_5 \alpha} D e^{-i\gamma_5 \alpha} \psi = \\ &= \bar{\psi} D e^{-i\gamma_5 \alpha} e^{i\gamma_5 \alpha} \psi = \bar{\psi} D \psi \end{aligned}$$

M spektruma:

γ_5 hermitikus $\rightarrow$ lgn V qz M^+ sv-a λ sé-kel

$$M^+ V = \lambda V$$

$$\gamma_5 M^+ V = \lambda \gamma_5 V$$

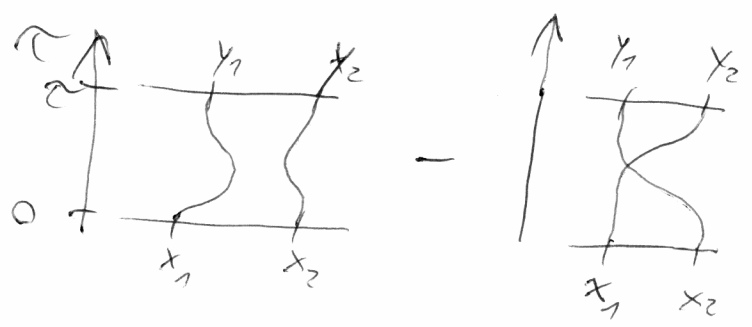
$$M \gamma_5 V = \lambda \gamma_5 V \Rightarrow \gamma_5 V \text{ vektora } M\text{-nek } \lambda\text{-val}$$

$M \text{ és } M^+$

M sé-ei párolban vannak λ, λ^*
ha $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda = \lambda^*$ nyilván

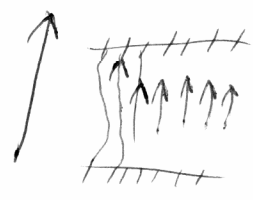
$\det M$ való's & pozitív

$$\langle \gamma_1, \gamma_2 | e^{-H\tau} | x_1 x_2 \rangle$$



ha n rész.

$$\langle \gamma_1 \dots \gamma_n | e^{-H\tau} | x_1 \dots x_n \rangle$$



$n!$ tag
bármelyik mehet
bárhova

Bay: duplázódás (doubling)

$$\langle \bar{\psi}(x) \psi(y) \rangle = G_{xy} = D_{xy}^{-1}$$

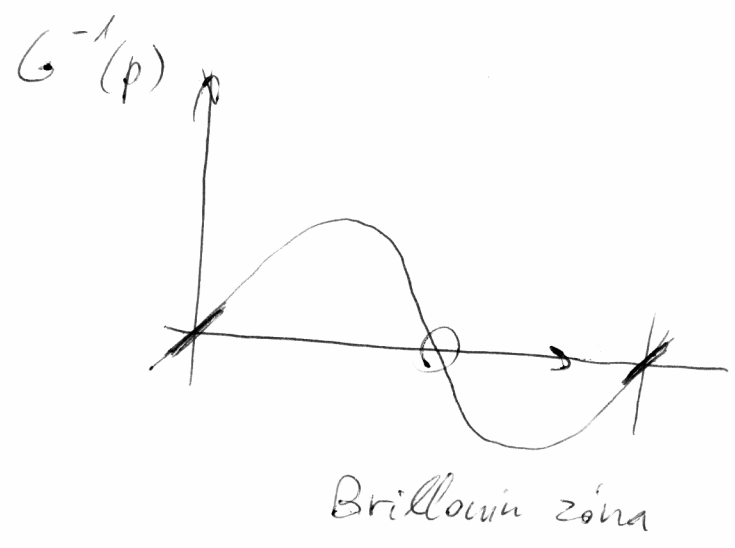
szabad propagátor

$$\sum_y a^4 D_{xy} G_{yz} = \delta_{xz}$$

$$\tilde{G}^{-1}(p) = i \frac{1}{a} \partial_p \sin(p, a)$$

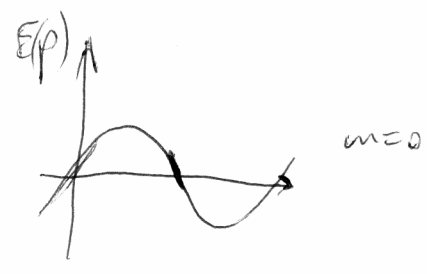
fizikai állapotok: pólusok sin miatt 16 db

$$p_n \cdot a = M \cdot \left(\right)$$

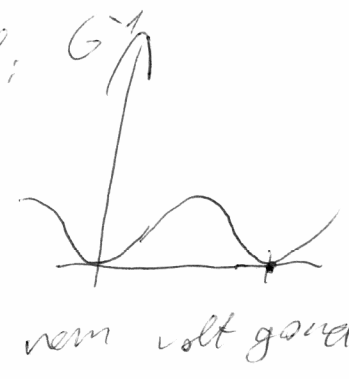


$$E^2 = p^2$$

16 db részecske



skalárnál: G^{-1}



duplázódás vács jelenség, de
nehéz elűntetni
duplázódás azért jelzik meg, mert vácsban eltűnik az
anómália = Z nem invariancia $4 \rightarrow 4e$
 $4 \rightarrow e \bar{e}$ tráfóra

Nielsen - Minomija

1. kontinuum $G^{-1} \sim i p_\mu \gamma_\mu$
2. lokalitás $D_{xy} \sim e^{-\lambda|x-y|}$
3. kíváls szimmetria $\{D, \gamma_5\} = 0$ ~~Alho~~

$\psi \rightarrow$ nincs lokális szimmetria $\rightarrow$ kontinuumban helyreáll (40)

Wilson diszkrétizáció

$\psi \rightarrow$ Kogut - Lüscher diszkrétizáció
részben

+
Z részben: 1 db fermion, de nem lesz
lokális a hatás

3 módosítása:

$$\{D, \delta_5\} \neq 0 = a(\dots)$$

kontinuumban eltűnik
a vérszivárgás fermion

staggered < Wilson < lokális
(nagyon drága)

2011. nov. 16.

Wilson fermionok:

a hatásból új tagot adunk: 2. derivált

$$a \cdot \bar{\psi} \square \psi$$

$$\bar{\psi}(m + \cancel{\gamma_\mu} \partial_\mu) \psi \rightarrow \bar{\psi}(m + \gamma_\mu \partial_\mu + r \cdot a \cdot \square) \psi$$

↓
Wilson paraméter
általában $r=1$

diszkrétizálva:

$$\mathcal{L} = \int d^4x \left(m \bar{\psi} \psi + \frac{1}{2} \bar{\psi}(x) \partial_\mu [\psi(x+a\hat{\mu}) - \psi(x-a\hat{\mu})] \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{a} \sum_{\mu} \bar{\psi}(x) \left[2 \psi(x) - \psi(x+a\hat{\mu}) - \psi(x-a\hat{\mu}) \right] = \\
 & = \sum_x a^4 \left\{ \left(m + \frac{q}{a} \right) \bar{\psi}(x) \psi(x) - \frac{1}{2a} \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} \bar{\psi}(x) (1 - \gamma_{\mu}) \cdot \psi(x+a\hat{\mu}) \right\} \\
 & \qquad \qquad \qquad \gamma_{-\mu} = -\gamma_{\mu}
 \end{aligned}$$

$v=1$ dőnye: $\frac{1-\gamma_{\mu}}{2}$ projektor
csökkennek a szab. fokok $\rightarrow$ numerikus stabilitás
jó!

átskalázzunk & új parameter (K)

$$S = \sum_x \left\{ \bar{\psi}(x) \psi(x) - K \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} \bar{\psi}(x) (1 - \gamma_{\mu}) \psi(x+a\hat{\mu}) \right\}$$

fermion matrix:

$$M_{xy} = \delta_{xy} - K \sum_{\mu=1}^4 \delta_{y, x+a\hat{\mu}} (1 - \gamma_{\mu}) - K \sum_{\mu=1}^4 \delta_{y, x-a\hat{\mu}} (1 + \gamma_{\mu})$$

propagátor

$$G^{-1} = \underbrace{1 - 2K \sum_{\mu} \cos k_{\mu}}_{\text{extra tag}} + 2iK \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \sin k_{\mu}$$

fizikai mo.: $k_{\mu} \ll 1$ $\sin \approx 0$
 $\cos \approx 1$

de ha $\sin k_{\mu} \approx 0$
és $k_{\mu} \neq 0 \Rightarrow \cos \approx -1 \Rightarrow G^{-1} \sim \frac{1}{a} \rightarrow 0$

Bay: Wilson fermionok nem tudják a kíváls szim- (42)
metriát

De $D_W = M(m=0)$ nincs kir. szim.

$$D_W \gamma_5 + \gamma_5 D_W \neq 0$$

All: ha van kíváls szim. $\Rightarrow m=0$ big $m=0$ marad

~~kont:~~

kont: ~~M~~ $M = D + m$

$$\gamma_5 M_W \gamma_5 = M_W^+ \quad (\text{Hf.})$$

Staggered (Kogut-Susskind)

~~a~~ $a \rightarrow 2a$ Brillouin zóna közepén van

$a \rightarrow 2a$, felezzük a BR-~~é~~

naiv hatás: $S = \frac{1}{2} \sum_{x, \mu} \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x + a\hat{\mu}) - \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x - a\hat{\mu}) + \sum_x m \bar{\psi}(x) \psi(x)$

diagonalizáció spin térben

legyen $\psi(x) = T(x) \chi(x)$

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\chi}(x) T^\dagger(x)$$

T : forgatás

unitér

$$T^\dagger T = 1$$

$$S = \frac{1}{2} \sum_{x, \mu} \bar{\chi} T^\dagger(x) \gamma_\mu T(x + a\hat{\mu}) \chi(x + a\hat{\mu}) -$$

$$- \bar{\chi}(x) T^\dagger(x) \gamma_\mu T(x - a\hat{\mu}) \chi(x - a\hat{\mu}) + \sum_x m \bar{\chi}(x) \chi(x)$$

$$\text{Ha } T^\dagger(x) \delta_\mu T(x + a\hat{\mu}) = \eta_\mu(x) \cdot \mathbb{1}$$

akkor

$$T^\dagger(x + a\hat{\mu}) \delta_\mu T(x) = \eta_\mu^*(x) \cdot \mathbb{1}$$

$\downarrow$ adj.

$\eta_\mu \in \mathbb{C}$
x függő

$$T^\dagger(x) \delta_\mu T(x - a\hat{\mu}) = \eta_\mu^*(x - a\hat{\mu}) \cdot \mathbb{1}$$

$\Downarrow$

$$S = \frac{1}{2} \sum_{x, \mu} \eta_\mu(x) \bar{\chi}(x) \chi(x + a\hat{\mu}) - \eta_\mu^*(x - a\hat{\mu}) \bar{\chi}(x) \chi(x - a\hat{\mu}) + \sum_x m \bar{\chi}(x) \chi(x)$$

$\exists$ ilyen T :

$$\text{pl: } T(u) = \delta_1^{u_1} \delta_2^{u_2} \delta_3^{u_3} \delta_4^{u_4}$$

$$\underline{u} = \frac{x}{a} \quad \pm = a\hat{u}$$

$$\eta_\mu(u) = (-1)^{u_1 + u_2 + \dots + u_{\mu-1}}$$

Ni egésze

$$\eta_\mu^* = \eta_\mu \quad \eta_\mu(x - a\hat{\mu}) = \eta_\mu(x)$$

$$S = \sum_{u, \mu} \eta_\mu(x) [\bar{\chi}_\mu(x) \chi_\mu(x + a\hat{\mu}) - \bar{\chi}_\mu(x) \chi_\mu(x - a\hat{\mu})] + m \sum_{x, \mu} \bar{\chi}_\mu(x) \chi_\mu(x)$$

$\mathbb{Z}$ index: szétcsatolt

$$S = \sum_{\mathbb{Z}} S_{\mathbb{Z}} = \sum_{\mathbb{Z}} S_{\text{staggered}}$$

$$S_{\text{stagg}} = \sum_{M, \mu} \{ \}$$

(44)

$$S_{\text{stagg}} = \frac{1}{4} S_{\text{fermion}} \rightarrow 4 \text{ fermion}$$

4 = áll. egyetlen stagg. prop. tényleg 4 db fermiont ír le

nem bizonyított de az aszimptotikus szabadság miatt
hiszen a mértékén

- 2 előny: - 1 komponens
- maradék $U(1)$ királis szim.

$$\chi' = e^{i\gamma_5 \alpha} \chi$$

$$\bar{\chi}' = \bar{\chi} e^{i\gamma_5 \alpha}$$

$$\gamma_5 \alpha = \begin{cases} +1 & \text{ps} \\ -1 & \text{pte} \end{cases}$$

Hogy lesz 1 fermion?

Tetszőleges M

1 db fermiont ír le (pl. Wilson v. királis)

$$Z = \int \overbrace{\mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}}^{\text{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi} e^{-S_\psi - \bar{\psi} M \psi} = \int \mathcal{D}u \det M(u) e^{-S_\psi}$$

N_f db. fermion azonos tömeggel.

$$S_f = \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_i M \psi_i$$

M egyenlő

(45)

$$Z_{N_f} = \int \mathcal{D}u \prod_i \mathcal{D}\bar{\psi}_i \mathcal{D}\psi_i e^{-S_g - \sum_i \bar{\psi}_i M \psi_i} =$$

$$= \int \mathcal{D}u \prod_i \mathcal{D}\bar{\psi}_i \mathcal{D}\psi_i e^{-S_g} \prod_i e^{-\bar{\psi}_i M \psi_i} = \int \mathcal{D}u (\det M(u))^{N_f} e^{-S_g}$$

M_{st} 4×4 fermionok ir. le, N_f db fermion (N_f 4 -nek többszöröse)

$$Z_{N_f} = \int \mathcal{D}u (\det M_{st})^{\frac{N_f}{4}} e^{-S_g} \quad \frac{N_f}{4} \text{ egész}$$

$\rightarrow$ kitérgetjük ~~az~~ N_f egész N_f -re
(család)

$$\text{pl. } Z_{N_f=1} = \int \mathcal{D}u (\det M_{st})^{1/4} e^{-S_g}$$

Nielsen-Ninomiya: ~~az~~ nem lesz lokális a határ
& nem írható fel Grassmann $\int$ -al

vagy kiválasztott fermionok

Ginsparg-Wilson reláció (1982)

H_g teljesül, h $\gamma_5 D^{-1} + D^{-1} \gamma_5 = 2 R \gamma_5$
így feloldható a Nielsen-Ninomiya tétel.

$$D \gamma_5 + \gamma_5 D = 2 \cdot R \cdot \gamma_5 \cdot D$$

R tetszőleges

($R=1$ esetén)

Homan jön?

Renom csoportból

naegyon finom rácsos pl. Wilson féle fermion
blokk transzformáció $\rightarrow$ GW relációt adja

Hasenratz (1998): fixpont határis (RG alapján)
tudja GW-t

Neuberger (1998): konkrét egzakt konstrukció

overlap fermion:

tetsz. ~~kontinuum~~

kezdeti

Dirac

open. (nincsnek duble-

tek, helyes kontinuum, ideális)

pl. D_W

$$A = 1 - 2D_W$$

$$D = \frac{1}{a} \left(1 - A \frac{1}{\sqrt{A^+ A}} \right)$$

D: - helyes kontinuum
nincsnek duble-
tek
kiváló
GW

2011. nov. 23.

Ginsparg-Wilson reláció

$$D \gamma_5 + \gamma_5 D = 2R_9 \quad D \gamma_5 D$$

Neuberger: overlap operator

D_W : Wilson operator

$$A = 1 - a D_W$$

$$D = \frac{1}{a} \left(1 - \dots \right) \quad \uparrow$$

$$S_W = \sum_{xy} \bar{\psi}_x D_{W,xy} \psi_y$$

$$A^+ = \gamma_5 A \gamma_5$$

$$A^+ A = A A^+$$

$$\gamma_5 D = \frac{1}{a} \left(\gamma_5 - \frac{\gamma_5 A}{\sqrt{A^\dagger A}} \right)$$

$$D \gamma_5 = \frac{1}{a} \left(\gamma_5 - \frac{A \gamma_5}{\sqrt{A^\dagger A}} \right) \leftarrow \gamma_5 A^\dagger$$

$$\gamma_5 D + D \gamma_5 = \frac{1}{a} \left(2 \gamma_5 - \gamma_5 \frac{A + A^\dagger}{\sqrt{A^\dagger A}} \right)$$

$$\begin{aligned} a D \gamma_5 D &= \frac{1}{a} \left(1 - \frac{A}{\sqrt{A^\dagger A}} \right) \gamma_5 \left(1 - \frac{A}{\sqrt{A^\dagger A}} \right) \\ &= \frac{1}{a} \left(\gamma_5 - \frac{A \gamma_5}{\sqrt{A^\dagger A}} - \frac{\gamma_5 A}{\sqrt{A^\dagger A}} + \frac{A \gamma_5 A}{\sqrt{A^\dagger A}} \right) = \\ &= \frac{1}{a} \left(\gamma_5 - \gamma_5 \frac{A + A^\dagger}{\sqrt{A^\dagger A}} + \gamma_5 \right) \end{aligned}$$

$$\gamma_5 D \gamma_5 = D^\dagger \quad (\text{Hf.})$$

Legyen $V := 1 - aD$

$$V^\dagger V = (1 - aD^\dagger)(1 - aD) = 1 - a(D^\dagger + D) + a^2 D^\dagger D$$

$$\begin{aligned} \gamma_5 (D + D^\dagger) &= \gamma_5 D + \gamma_5 D^\dagger = \gamma_5 D + D \gamma_5 = a D \gamma_5 D = \\ &= a \gamma_5 D^\dagger D \end{aligned}$$

$$D^\dagger + D = a D^\dagger D$$

$$\Rightarrow V = 1 - aD \quad \text{unitér:} \quad D = \frac{1}{a} (1 - V)$$

Ha $D = \frac{1}{a} (1 - V)$ and V unitér és $\gamma_5 V \gamma_5 = V^\dagger$

$$D = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{A}{\sqrt{A^* A}} \right) \quad \text{ahol} \quad A = 1 - a D_0$$

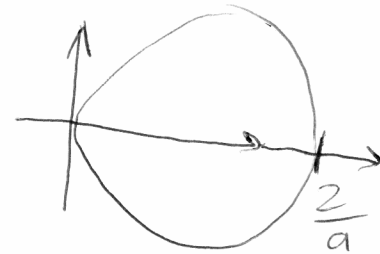
Ha D_0 tudja a GW-t $\Rightarrow A$ unitár, $A A^\dagger = 1$

$$D = \frac{1}{a} (1 - A) = D_0$$

D spektruma:

V (unitér) spektruma:  egységkörön

$1 - V$: 

D : 

A'll: ~~Nincs~~ Nincs ultralokális $m_0 = a$ a GW relációinak index-tétel:

$$Q_{\text{top}} = \text{index}(D)$$

$$Q_{\text{top}} = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \quad \epsilon_{\mu\nu\sigma\alpha} \text{Tr}(\tilde{F}_{\mu\nu} F_{\sigma\alpha}) =$$

(topológikus töltés)
(mértékterület szorzata)

$$= \frac{1}{16\pi^2} \int d^4x \quad \tilde{F}_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \rightarrow \text{Hig egész}$$

$$\text{index}(D) = n_- - n_+$$

$$n_- / n_+ \quad D u = 0$$

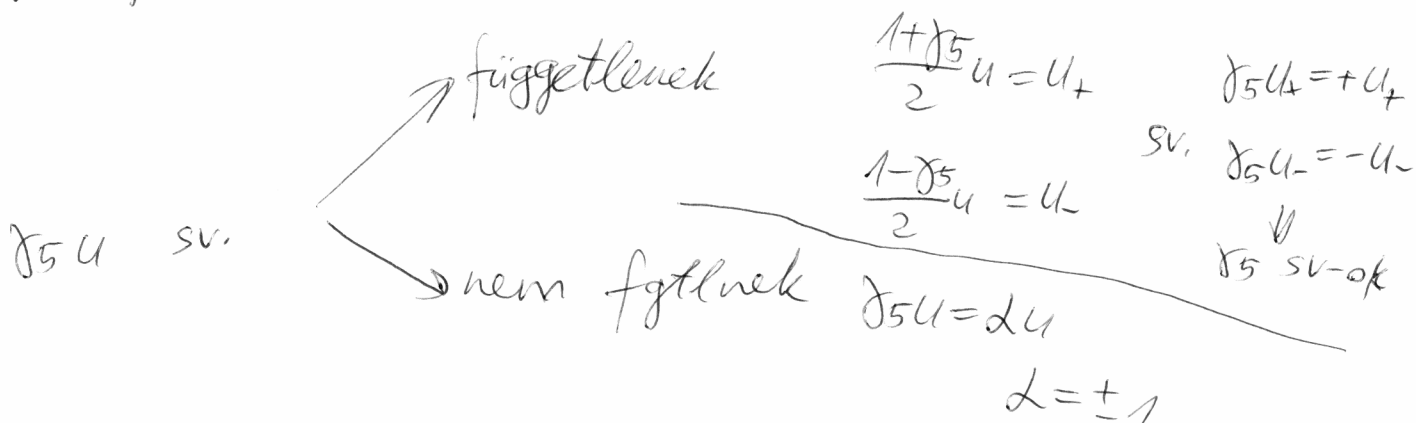
$$\delta_5 D u = 0$$

miel $\gamma_5 D + D \gamma_5 = 0$

(49)

ha u sv $\Rightarrow \gamma_5 u$ is sv.

u sv. $\lambda=0$ -val



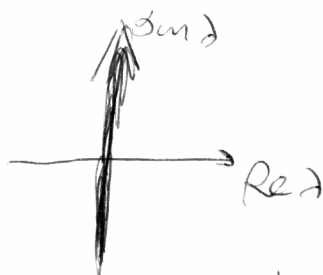
n_+ azon sv-ok száma

n_- -lt

amelyekre $\gamma_5 u = +u$

$\gamma_5 u = -u$

D spektruma:



λ, λ^* párok: $u, \gamma_5 u$ sv-ok

vagy $\lambda=0$

mértékteret folytonosan változtatva egysége csökkenti/növeli n_+, n_- -t

$n_- - n_+$ nem változik

rácsos: Q_{top} rosszul definiált (nem egyszerű)
indexen keresztül lehet Q_{top} -t definiálni

index(D)

pl. Wilson fermionokra értelmetlen