ÖNSZERVEZŐDÉS ÉS KOMPLEX VISELKEDÉS 02. 09.

Önszerveződő és komplex rendszerek tudománya.

Tudomány alakulása:

- „már a görögök is"
- kvantitatív tudomány → Newton - Principia (1686)
  absztrakció → tömegpont, erő, gravitáció
  redukcionista módszer → nagyon sikeres
- elemi részek + kölcsönhatások
- Boltzmann → az idő merre halad?
  általában csak egyik irányba mennek a folyamatok → miért van az időnek iránya
  Clausius ... → megalapozták az entrópia fogalmát → termodinamika II. főtétel →
  legrendezetlenebb állapot ⇔ entrópia nő
- statisztikus mechanika sikeres volt
- elemi részek szeretnék atomokat → molekulákat → stb.
  felépíteni ⇒ egyre bonyolultabb dolgok
- a rendezetlenség ellen van ellentétes tendencia
  ⇒ kémiai → biológiai evolúció elindul ⇒ ez hogy működik → nyílt rendszerekben mi játszódik le
- Prigogine → hogyan csökkenhet az entrópia
  élet lehetősége megérthetővé vált
- számítógépek → szimulációk → hogyan szerveződnek egyre komplexebb rendszerré
- önszerveződés megértése a cél, a komplex rendszerré, szerkezetté válás megértése
- csökken az entrópia, ha kipakolja a környezetbe
- nyílt disszipatív rendszerek kutatása
  környezettel kölcsönhatás
- nemlineáris dinamika kutatása

egy-egy paramétertől függően kaotikus vagy periodikus mozgás ⇒ bifurkációk
- 80-as években PC megjelenésével számolások bárkinek elérhetővé váltak → technikai fejlődés kellett ehhez a területhez
- káosz megértése: mechanika ▪ klasszikusan determinisztikus → számítógéppel megnézhető, hogy ez mennyire igaz (pl. időjárás egyenleteit próbálták megoldani) → Lorentz leredukálta a rendszert 3 változóra → ugyanazzal a kezdeti feltétellel ~~más~~ más eredményt kapott → kicsi numerikus hiba nagy különbséget okozott → kezdeti feltételeket ha nem ismerjük végtelenül pontosan akkor megjósolhatatlanná teszik a hibát a rendszert
⇒ azt vizsgálhatjuk, hogy egymáshoz közeli kezdeti feltételek hogyan szóródnak szét
- a káosz megváltoztatta a determinisztikus felfogást, a rendszer instabilitásától függően egy idő elteltével eltávolodnak a megoldások egymástól

Evolúció:
- értjük hogyan történik a komplexitás növekedése, de miért ???
- mikor melyik történik? rendeződés vagy rendezetlenség?
- biológia → természetes kiválasztódás → a dolgoknak evolúciója van
mi volt a genetikai evolúció előtt?

ÖNSZERVEZŐDÉS 02.08.

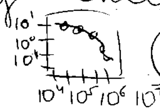
hogyan fejlődtek ez előtt ?
- evolúció általánosabb fogalom → önszerveződés törvényszerűségei → ezeket próbáljuk megérteni
- ma már tudjuk, hogy sosem lesz elég nagy számítógép szimuláláshoz → kell valami elv, ami pótolja a lukakat, részleteket.
- evolúciót egymással versengésként fogjuk fel, de az egyedek együttműködnek egymással → miért van erre szükség
Axelrod (1981) játékkal értette ezt meg
számítógépes algoritmusok versenyeztek egymással → választhatnak, hogy kooperálni akarnak vagy sem → jól járás, nem jól járás
hogyan kell ezt játszani ??? stratégiát felépítése → mindenki mindenki ellen kell játszani → nem elég egy jó stratégia → melyik fog nyerni? → először barátkozni kell és tükrözni az ő viselkedését → ez a stratégia választódik ki → kooperatív nyer
- sejt elvesztette önállóságát
- emberek társadalmakat alkotnak
- létrehoztunk rendszereket
- kommunikáció is fejlődik → kommunikációs hálózatok → tudás integrált rendszere → nem az egyes ember tudása számít
- magától megjelenik a rendszerben az együttműködés, pedig az önzés, ami bele van programozva a rendszerbe
- számít az összezártság időtartama

ÖNSZERVEZŐDÉS 02.16.

- önszerveződésnek vannak fokozatai
  egyre összetettebb rendszerek, evolúció
- komplexitás mérőszáma még nincs egységesen definiálva → nehéz mérni a komplexséget
  a bonyolultság egyszerű mérésével a random lesz a legbonyolultabb, ami ~~...~~ megint egyszerű
- egyszerű és a véletlenszerű között van vhol a skála, ezért nehéz ezt definiálni
⇒ önszerveződés definíciója is problémás
- az ember evolúciója manapság lassan halad, de az ember által készített rendszerek evolúciója folyik → mindenféle kalibratok pl. „ember elősegítette evolúció"
- megjelent a kommunikáció, a nyelv → a kommunikációnak is folyik a gyors evolúciója
  ↳ speciális ember által készített rendszer
- evolúció tervezéssel → effektívebb rendszerek, mint a természetben pl. utazás, repülés
- robosztusság kérdése: mennyire állnak ellen a külső befolyásoknak a rendszerek
  „robosztus létrát szeretnénk"
  ⇒ azok élnek túl, amik a hatékonyság mellett robosztusak is
  pl. csúcsra járatott rendszerek általában nem robosztusak ⇒ közepes tulajdonságú rendszerek a túlélők
  → highly optimized tolerance
- robosztusság nagyon fontos tulajdonság

fontosabb, mint az anyag, a fogyasztás stb.

- robosztusság és fragilitás (törékenység) összefüggése
- példa: elektromos hálózat → átlátható komplex rendszer, emberi termék, sok idő alatt optimalizálódott, folyamatosan fejlődik, de így is van áramszünet (Németo-ban eldurrant egy trafó és Spanyolo. fele elsötétült) ⇒ összeomlott magától a rendszer ⇒ miért? hogyan?

vannak eloszlások, hogy hány embert érintő áramszünetből mennyi volt  (log-log) (kumulatív)

hatványfarkú eloszlás

⇒ millióemberre előforduló áramszünet is sok

áramszünetek mérik a fragilitást ⇒ hibás viselkedés hatványfarkú eloszlás

ez általános tulajdonság

az optimalizáltságtól egyre nagyobb katasztrófák keletkezhetnek → nő a fragilitás

- erdő modellje → összeérő fák klasztereket alkotnak

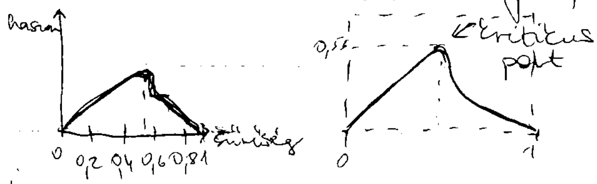
jönnek a villámok ⇒ erdőtűz modellje

egy klaszter ég le egyszerre

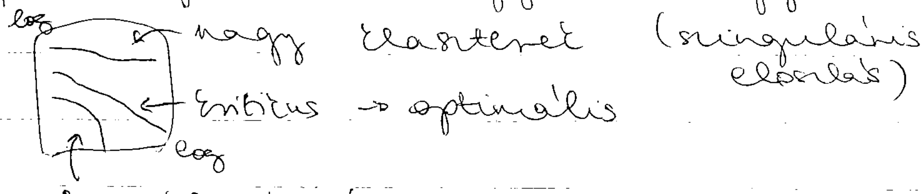
részrendszerek megsérülése magával rántja a szomszéd részrendszereket

ha nem akarjuk, hogy az erdő leégjen akkor mit csináljunk?

ki lehet számolni, hogy egy átlagos villámcsapás mennyit éget le → az erdő hasznossága = fák száma - leégő fák száma átlagosan azt alapjuk, hogy az erdő a lehető leghasznosabb legyen → megnézhetjük a természetes ~~xxx~~ viselkedést → ha véletlenül nő az erdő akkor attól függően hány százalékon van fa, a hasznosság átlagosan



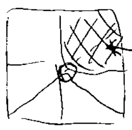
elején → jó ha növeljük
a fák számát kb 0,5 ig
elérjük a kritikus pontot → optimális
ha teljesen be van telepítve akkor egy villám leégeti az erdőt → csökkenteni jó a sűrűséget
komplex szituáció okozza a legjobb eredményt
az egyszerű szélső helyzetek, amiket értünk azok nem jók
az átlag magas, de labilis is a kritikus pontban, ahol a legkomplexebb a rendszer
természetes módszerrel nem lehet 0,5 - 0,6 fölé menni hasznossággal
Ez a kép általános sok rendszerre, hogy van egy kritikus érték
a leégett fák eloszlása a kritikus pont körül hatványfarkú eloszlást mutat, de ha csak kicsi klaszterek vannak (kritikus pont alatt) akkor gyorsan levágó eloszlás
a kritikus pont fölött nagyon nagy eloszlás



ÖNSZERVEZŐDÉS 02.16.

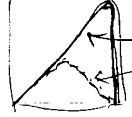
- valamiért akármilyen komplex rendszert vizsgálunk (agy, univerzum stb) hatványfarkú eloszlásokkal találkozunk, mintha a rendszerek mindig a kritikus pontjukban vannak
- „önszervező kritikusság" elmélete → a rendszer szeretne beállni a kritikus pontjukba
- másik magyarázat: azért szerveződik be a kritikus állapotba magától, hogy a legnagyobb legyen a hasznosság
- vajon így készülnek-e a biológiai és a mérnöki rendszerek?

pl: az erdőket az ember doménekbe vagdossa ⇒ tervezés jobban működő erdőt tud létrehozni



toleráns tartomány → tolerálják a villámcsapásokat

olyanra fogjuk szabdalni optimalizálással, hogy hatványszerű eloszlás legyen



optimalizált piros görbe

természetes, véletlenszerű

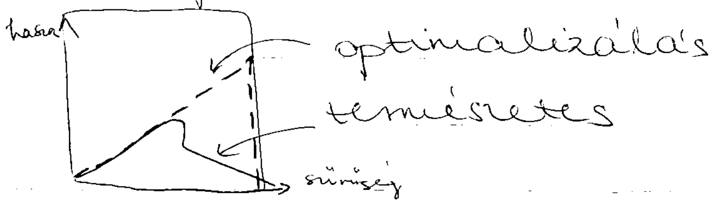
bárhol optimalizálunk → hatványfarkú eloszlás

⇒ az áramhálózatnál is az optimalizálás okozza a hatványfarkú eloszlást

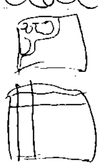
- autóforgalom is jó példa erre a csúcsos görbére → forgalomirányítással = tervezéssel lehet javítani a dugók kialakulását
- a ferromágneses domének eloszlása is ilyen hatványfarkú eloszlás Curie-pontnál

ÖNSZERVEZŐDÉS 02.23.

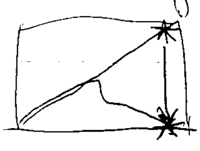
- fázisátalakulások fizikája hasonlít ezekhez a modellekhez → kritikus pont + két fázis → kritikus pontban hatványfv. eloszl.
- vajon mi okozza a hatványfv. eloszlásokat a természetben? mi a kritikus jelenség mögött?
- általában azért van, mert ha egy rendszer optimalizált (ember, evolúció stb. által), akkor a legjobb működés a kritikus állapotnál van



- változtassuk meg a modellt → a villámok valószínűsége ne legyen homogén → egyik sarokba többször csap be, mint a szemben lévőbe
- szimulációval találjuk ki, hogy a teljesen teli erdőből melyik fákat kell kivágni
ezzel ki lehet találni az optimumhoz közeli megoldást → lokális mozgatásokkal majdnem a legjobb megtalálható



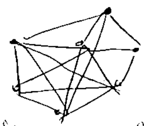
- többféle optimalizációs folyamat lehetséges
- a hatványfv eloszlás minden optimalizált esetre jellemző
- a rendszer bármilyen kis hibára érzékenyek
az átlagra optimalizált rendszerek „kis bajra" lezuhan a teljesítmény → perturbációra



- kommunikáció evolúciója, amit az ember hajt → ez visszahat az emberi evolúcióra → megváltoztatja a tulajdonságokat
információ → gyorsabban és messzebbre folyamatosan → beszéd, lovak + posta, fény és füstjelek, postaszolgálat, vasút, telegráf, telefon, telefonközpont + telefonhálózat, számítógép, internet...
internethálózat ⇒ THE BEAST

Komplex hálózatok:

- gráf → csúcsok + élek



hasznos a komplex rendszerek leírásakor
pl. emberi kapcsolatok leírásánál
internet
áramellátó hálózat
www weboldalai a linkekkel egymásra

- szociális hálókban nagyon kicsik a távolságok
- a kis távolság a hálózatba szerveződés következménye

$N \approx a^n$

$\ln N \approx n \ln a$ emberiség száma

$n \approx \frac{\ln N}{\ln a}$ távolság

6 lépés van 2 amerikai között

- véletlen gráfokkal lehet modellezni a komplex hálózatokat → Erdős-Rényi véletlen gráfok
→ összekötöttségi valószínűség (p), N db pont → $(N-1)p = z$ koordinációs szám → a szomszédok átlagos száma

$$\langle L \rangle = \frac{N(N-1)}{2} p \qquad \langle L \rangle = \frac{Nz}{2} \qquad p = \frac{z}{N-1}$$

élek száma

ÖNSZERVEZŐDÉS 02.23.

- fehérjék kölcsönhatási ~~hálózata~~ hálózata
  - → valós gráfban minden össze van kötve
  - → véletlenben lehetnek részek, amik nincsenek összekötve a többi résszel
- termodinamikai határeset $N \to \infty$, $z = \text{fix}$, $p \to 0$
- „kis világ" tulajdonság már a véletlen gráfnál is megmutatkozik
- gráf átmérője → a legnagyobb távolság
- véletlen gráfnál $z^D \approx N \Rightarrow D \approx \ln N / \ln z$

  $\Downarrow$ nagyméretű gráfban is kicsi átmérő
- átlagos távolság: legrövidebb utak átlagos hossza

  ↳ ez is $\ln N$-nel megy, D nagyságrendje
- clustering → közös szomszédokat lehet megszámolni

  1 pont k szomszéd, amik között $\frac{k(k-1)}{2}$ összekötés lehetne

  azt számoljuk, hogy mennyi valósul meg

  ezek aránya $\frac{\text{megvalósuló}}{\text{lehetséges}} = C$ klaszterezettség ezen mennyiséget átlaga
- random gráfra a klaszterezettség $C_{rand} = \frac{z}{N-1} \approx \frac{z}{N}$

  nagyobb gráfokra kisebb N nő p kisebb, ami pont a klaszterezettség

  $C \to 0$ termodinamikai határesetben

  ez nem teljesül valódi gráfokra a természetben

  ezt már nem írja le az Erdős Rényi modell
- klikk, ahol mindenki mindenkit ismer 

  ⇒ teljesen összekötött gráf

  ki lehet számolni, hogy hány $\overset{\text{pont}}{\vee}$ K nagyságú klikk van egy véletlen gráfban:

  $$\binom{N}{K} p^{K(K-1)/2} \left(1 - p^K\right)^{N-K}$$

$k=3$-nál ugyanaz a ki~~l~~lett meg a klaszterezettség, ami tart 0-hoz $N \to \infty$-nél, ezért sem jó modell az Erdős-Rényi gráf
- valós hálózatokban sokkal nagyobb a klaszterezettség, mint véletlen gráf megfelelőjükben
- minél nagyobb a hálózat annál nagyobb az eltérés
- a véletlen gráfok eloszlására binomiális jön ki → Poisson-eloszláshoz tart határesetben a szomszédok számának eloszlása $\lambda = z$
- a valóságban megfigyelhető gráfoknál sokkal lassabban esik az eloszlás, mint a Poisson
- központnak (hub) nevezzük az olyan pontot, ahol nagyon sok szomszéd van (többszöröz z)
- $p_k \sim \frac{1}{k^\alpha}$ $\alpha > 1$ típusú eloszlás
- általában $\alpha > 2$ kell ~~[illegible]~~
- skálafüggetlen gráfok eloszlása ugyanúgy néz ki, ha ~~[illegible]~~ változtatjuk a forrásnot
- valós gráfok hatványfarkú eloszlást mutatnak a megfigyelhetőség határain belül (van min-max korzáin, ami megfigyelhető)
- ez sem jó Erdős-Rényi modellel
- gráf összekötöttségi mátrixa

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{össze van kötve } i \text{ és } j \\ 0 & \text{nincs összekötve } i \text{ és } j \end{cases}$$

(irányított gráfnál nem szimmetrikus)

k, l-et összekötő utak: → 1 hosszú $A_{kl} = 1$ van

→ 2 hosszúak száma: $\sum_i A_{ki} A_{il} = [A^2]_{kl}$

→ n hosszúak: $[A^n]_{kl}$

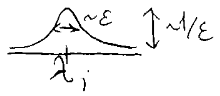
- sajátértékek eloszlását is megnézhetjük

ÖNSZERVEZŐDÉS 03.07.

a visszatérő utak száma -> körök (n hosszú) $\sum_k [A^n]_{kk} = \mathrm{Tr}\, A^n = \sum_j \lambda_j^n$

- Green-fv, aminek pólusa van a sajátértékeknél
  -> ezzel a sajátértékek eloszlása

$$\frac{1}{\lambda-\lambda_j+i\varepsilon} = \frac{\lambda-\lambda_j-i\varepsilon}{(\lambda-\lambda_j)^2+\varepsilon^2} \qquad \frac{\lambda-\lambda_j}{(\lambda-\lambda_j)^2+\varepsilon^2} - i\varepsilon\,\frac{1}{(\lambda-\lambda_j)^2+\varepsilon^2}$$



$\varepsilon \to 0$ esetben

Dirac-delta

pólusok $+ i\varepsilon$ -> vesszük a képzetes részét => Dirac-delta $\varepsilon \to 0$
alatta a terület π úgyhogy osztani kell π-vel
$G(\lambda) = \frac{1}{N}\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{\lambda - A}\right]$

meg lehet kapni a sajátértékek sűrűségét

- Wigner-féle félkör képlet igaz a véletlen gráfra, ami egy véletlen mátrix
- a mátrix jól jellemzi a hálózatokat kiszámolhatóak a tulajdonságok belőle

$$\frac{C}{3}N\,\frac{z(z-1)}{2} = \frac{1}{6}\sum_{ijk} A_{ij}A_{jk}A_{ki}$$

- momentumok és a spektrálsűrűség összekapcsolódik

- szerkeszteni akarunk egy véletlen gráfot, aminek adott a fokszámeloszlása termodinamikai limeszben -> p_k
- veszünk N pontot, $\{k_i\}$ a fokszámok sorozata => p_k eloszlás realizációja
- véletlennek is kell lennie -> az összekötögetést véletlenszerűen kell végezni
- lehet előírt fokszámeloszlású véletlen gráfot létrehozni, hiszen bármelyik fél-

linket bármelyik féllinkkel véletlenszerűen ugyan-olyan valószínűséggel kötöttük össze

- ki lehet az ilyen gráfoknak is számolni a tulajdonságait ⟶ átlagfokszám, klaszterezettség → lényegesen nem különbözik az Erdős-Rényitől ⟶ $\frac{1}{N}$ szerint 0-hoz tart a klaszterezettség
- kiválasztunk egy A pontot, mi a valószínűsége, hogy egy B pont hozzákapcsolódik? ez arányos k_B-vel (B fokszámával)
- A-hoz kapcsolódó B-k fokszámeloszlása:

$$\frac{k p_k}{z} = q_{k-1} \longrightarrow q_k = \frac{(k+1)p_{k+1}}{\sum_j j p_j}$$

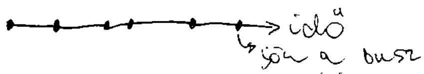
z → átlagfokszám $\sum_j j p_j$ ⟹ normált eloszlás

q_k a maradék linkek eloszlása ⟹ a B-k szomszédjainak fokszámeloszlása

$$\sum_k q_k k = \dots = \frac{\langle k^2\rangle - \langle k\rangle}{\langle k\rangle}$$

van egy ilyen valószínűségszámítási effektus a szomszédok fokszámeloszlása más, mert hozzájuk nagyobb valószínűséggel csatlakoznak a nagyobb fokszámúak

- ugyanez az effektus a random busznál ha random érek a buszmegállóba, és random járnak a buszok, akkor az utasok mindig többet várnak átlagosan, mint amilyen a buszok átlagos időköze



egyenletes valószínűséggel érek bármelyik pillanatban ⟹ nagyobb valószí-

ÖNSZERVEZŐDÉS 03.09.

nüséggel ér el oda egy hosszabb időintervallumba
várakozási idő $\sim \frac{\langle k^2\rangle - \langle k\rangle}{\langle k\rangle}$ szerű

- ugyanez a szám az Erdős - Rényi - hálózatra
$z_2 = z^2 = \langle k\rangle^2$ $\Rightarrow$ nem változik meg, nincs effektus
- m-edik szomszédok száma: $z_m = \frac{\langle k^2\rangle - \langle k\rangle}{\langle k\rangle} z_{m-1} = \frac{z_2}{z_1} z_{m-1}$
$$z_m = \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{m-1} z_1$$
- ha $z_2 < z_1$ akkor nem divergál hanem 0-hoz tart z_m
ha $z_1 > z_2$ akkor divergál } termodinamikai határesetben
- gráf végtelen, de abban lehet az A pont véges tartományban, vagy végtelenben
- $z_2 = z_1$ a határ, amikor megjelenik végtelen nagy klaszter → perkolációs pont → gigantikus komponens
- ez a gráfban egy fázisátalakulási pont
speciális tulajdonságú gráf ebben a pontban
$\langle k^2\rangle - 2\langle k\rangle = 0$
$\langle k(k-2)\rangle = 0$ ebben a pontban
↳ nem függ az izolált pontoktól
↳ nem függ azoktól akiknek pont két szomszédja van

be lehet iktatni két szomszédost, amitől nem változik a kinézet
↳ csak a topológiai kinézettől függ
↳ akármennyi 0 v. 2 fokszámú node-ot hozzáadhatunk a gigantikus komponens kérdését nem változtatja meg
- élek perkolációját is meg lehet vizsgálni

- átlagos távolság a gráfban számolható
- klaszterezettség is számolható $C = \ldots = \frac{z}{N}\left(\frac{\langle k^2\rangle - \langle k\rangle}{\langle k\rangle^2}\right)^2 \sim \frac{1}{N}$

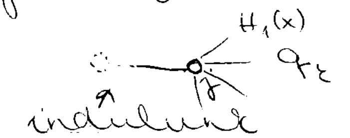
$C_{E-R} = \frac{z}{N}$

- generálófüggvényeket lehet felírni, ami az adott fokszámeloszláshoz tartozik

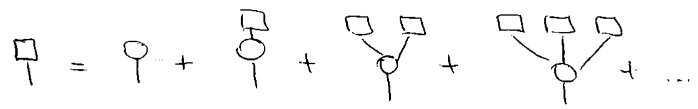
$$p_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k G_k}{dx^k}\bigg|_{x=0}$$

$G_1(x) = \ldots = \frac{G_0'(x)}{z}$ → maradékfokszámeloszlás tulajdonságot ...

- Poisson-eloszlásra egyszerű $G_0(x)$, $G_1(x)$ is ugyanaz
ez az Erdős-Rényire vonatkozik 03.16.
- klaszterméreteloszlás számolása:
↳ nincsenek benne körök, hurkok ⇒ perkolációs átalakulás előtti nézzük a gráfot
⇒ fának hívjuk az ilyen gráfot
↳ H_1 fv. a klaszterméretek eloszlását fogja generálni $H_1(x) = \sum_m h_m^{(1)} x^m$



maradék szomszédok száma



önkonzisztens egyenletet tudjuk írni:

$H_1(x) = x\sum q_k [H_1(x)]^k = x\, G_1(H_1(x))$

egy szinttel lejjebb (q_k-n lóg $H_1(x)$)

ebből kell H_1-et meghatározni

$H_0(x)$ → m méretű klaszterek eloszlása

benne a h_m

$H_0(x) = x\sum_k p_k H_1^k(x) = x\, G_0(H_1(x))$

átlagklaszterméretet ki lehet számolni

$\langle s\rangle = H_0'(1)$ ...

az eredmény tudja az átalakulás határát
- ha megvan az átlagklaszter eloszlásunk, akkor sokmindent vizsgálhatunk
- robosztusság: mikor hal meg a hálózat? amikor szétesik a gráf, nem összefüggő, akkor nem jó

arra vagyunk kíváncsiak, ha eltávolítunk csúcsokat a gráfból, akkor mikor hal meg
- b_k a valószínűsége, hogy a csúcs aktív

$F_0(x) = \sum_k p_k b_k x^k$ → leszámolófv. $F_0(1) \leq 1$
- $H_0(x)$, $H_1(x)$ új klaszterméreteloszlások a b_k valószínűséggel élő linkekhez
- vehetjük b_k-kat b-nek

$$\tilde{G}_0(x) = 1 - F_0(1) + F_0(x) \quad \text{helyett} \quad \tilde{G}_0(x) = 1 - b + bG_0(x)$$
- ebben a hálózatban fázisátalakulás lép fel, ha $b_c = \frac{z_1}{z_2}$
- nagy hálózatot véve $1-b_c$ valószínűséggel rontolunk, akkor éppen szét fog esni a hálózat → b_c méri a robosztusságot
- hatványfarkú eloszlással rendelkező gráfra lehet b_c-t számolni $p_k \sim \frac{1}{k^\alpha}$

$3 < \alpha$: $z_1 < \infty$, $z_2 < \infty$ $b_c = \frac{z_1}{z_2}$

$2 < \alpha \leq 3$: $z_1 < \infty$, $z_2 \to \infty$ $b_c = \frac{z_1}{z_2} \to 0$ termodinamikai limit

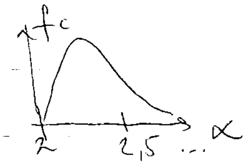
↳ egyben marad a gráf

$1 < \alpha \leq 2$: $z_1 \to \infty$, $z_2 \to \infty$ $b_c = \frac{z_1}{z_2}$ tetszőleges
- skálafüggetlen hálózatra $p_k \sim k^\alpha$ célzott támadás

$H_n^{(r)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r}$ részösszeg

$$\sum_{k=1}^{k_{max}} k(k-1)p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}} \to H_\infty^{(\alpha-1)} \text{ jelölése}$$

f-el jelöljük, hogy hányad részét távolítottuk el → f_c-nél esik szét



2 és 3 közötti hatványok a legérdekesebbek
↳ extrém robosztus
↳ kivéve a célzott támadásokat amik a legfontosabb komponensek ellen irányulnak

- small-world models
rácsban nézzük a pontokat és összekötteléseket → nézzük a klaszterezettséget
- ha úgy randomizáljuk, hogy belekötünk linkeket → Newmann-Watts model
- ezzel a modellel nem tűnik el a klaszterezettség termodinamikai ~~modell~~ limeszben → működhet szociális hálóra
- valós hálózatokban → preferáljuk azokat a csúcsokat, aminek már sok szomszédja van → Barabás ? modell → a ragadás valószínűsége ~ a linkek számával az adott csúcsnál
ezzel lehet növekvő gráfot kapni
- megadható egy m paraméter, ami azt mondja meg, hogy egy új csúcsnak hány lába van, amiket $\frac{k_i}{\sum k_i}$ valószínűséggel kötünk i-hez
- gyorsan kialakulnak "hub"-ok ilyen hálózatban
- ha $m = 1$ → fa

ÖNSZERVEZŐDÉS 03.23.

- megmutatható, hogy p_k hatványfarkú (3-as kitevővel) az eloszlás $p_k \sim k^{-3}$
- számolhatunk átlagtér közelítéssel
- kiszámolható, hogyan növekednek a csúcsok
- többféle modellje is van ennek a preferenciális kapcsolódásnak
- lehet véletlenszerű is a kapcsolódás, pl. azonos valószínűségű mindenhova a kapcsolódás
- átmenet is van a kettő között $\frac{(k_i+a)}{\sum(k_i+a)}$
  - k_i nagy $\Rightarrow$ preferenciális $(a=1)$
  - $a \to \infty \Rightarrow$ véletlenszerű hozzáragadás

HF: cikkek megnézegetése, feladatokon gondolkodás

03.30

<u>Dinamikai rendszerek</u> – káosz, bifurkációk, diffúzió

↳ időben változó rendszer → differenciálegyenletekkel leírható rendszerek

- kérdés: hosszú idő után hová, milyen állapotba kerül a rendszer? pl. határciklus, periodikus mozgás, stb., fix pont
- diffegyenletek → autonóm, folytonos
- leképezések
- pályák (idővel paraméterezve) trajektóriák (fázistérben)
- Poincaré-metszet → minden pályát elmetsz → leképezés → jó vizualizációra
- mozgásállandók → $f(x(t))$ időben állandó adott kezdeti feltételnél
- ergodicitás: vannak fázistérben megengedett pontok ...

ÖNSZERVEZŐDÉS 03.30

- attraktor: ahova tart a mozgás bizonyos k.f.-ek mellett
  → vonzási tartomány (basin) (separatrix)
- integrálható mechanikai rendszerek
  racionális aránya van a két ciklikus koordinátához tartozó frekvenciának ⇒ zárt pálya → vonal a játéktéren
  ha nem racionális az arány, akkor besatírozza a játékteret, nem periodikus mozgás, kváziperiodikus, ez pl. ergodikus mozgás → egy pont tetszőlegesen kis környezetébe eljutunk
- KAM-elmélet

04.13.

- logisztikus leképezés: $x_{n+1} = f(x_n) \equiv r x_n (1 - x_n)$
  $x_n \in [0, 1]$, $r \in [0, 4]$
  ↓
  logisztikus görbe $\frac{dx}{dt} = r x (1 - x)$  (pl. baci)
- logisztikus leképezés fix pontjai
  (0), $(1 - \frac{1}{r})$ pontok maradnak leképezés után is
  ha $r < 1$ a 0 vonzó fixpont
  ha $r \geq 1$ megjelenik mégegy fixpont → ebben futnak be az iterációk
  $r = 4$-nél éri el a parabola a négyzet tetejét
  $r = 3.3$ már nem a fixpontba fut be, hanem valami vonalon köröz körülötte → ehhez az $f(f(x))$ fix pontjait kell megnézni → $r = 3.3$-nál két extra fixpont
- fixpontok stabilitásának vizsgálata → minimum, hogy a vonzó fixponthoz közeledjen
- stabilitás azt jelenti, hogy a fixponttól kicsit eltérő pálya közeledni v. távolodni fog.

ÖNSZERVEZŐDÉS 04. 13.

- lineáris stabilitásvizsgálat $y \ll 1 \to$ kellően közel vagyunk a fixponthoz
  $\Rightarrow r \geq 3$-nál elveszti a stabilitást a fixpont
  $r = 3 \to$ bifurkációs pont $\to$ keletkezik két új fix pont, amik vonzóak
  ezek is elvesztik a stabilitásukat és a 4-es periódus válik stabillá $\Rightarrow$ ahogy nő r, egyre hosszabb pályák válnak stabillá
  minden bifurkációval megduplázódik a periódus $\to$ végtelen periódusú pálya már $r_\infty \approx 3,59\ldots$-nál (konvergens sor ide tart) $\to$ kritikus érték után nem lesz ~~~~ periodikus
- $r_\infty < r < 4$
  bevezethető λ, $|\varepsilon| = e^\lambda$ Ljapunov exponens
  távolodás $\lambda > 0$, közeledés $\lambda < 0$

$y_2 = \varepsilon y_1$ $\quad y_{n+1} = \varepsilon^n y_1$ $\quad y_1$ kezdetben kicsi
$y_3 = \varepsilon^2 y_1$ $\quad |\varepsilon|^n = e^{n\lambda}$ $\to$ hosszabb pályára átlagolunk
$\lambda = \ln|\varepsilon|$ $\to$ átlagosan távolodás v. közeledés

x_1 és $x_1 + y_1$ a két pályám $y_1 \ll 1$
iterálunk n lépésben $\lim\limits_{y_1 \to 0} |- f^n(x_1) + f^n(x_1 + y_1)| \approx e^{n\lambda(x_1)}$
távolodási / közeledési ráta

$$\left|f^n(x_1) + \frac{df^n(x_1)}{dx_1} y_1 - f^n(x_1)\right| = \left|\frac{df^n(x_1)}{dx_1} y_1\right| \approx y_1 e^{n\lambda(x_1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left|\frac{df^n(x_1)}{dx_1}\right| = \lambda(x_1) = \frac{1}{n}\ln \prod |f'(x_n)| = \frac{1}{n}\sum \ln f'(x_n) = \langle \ln|f'(x)|\rangle$$

átlag

$r_\infty < r < 4$ esetén $\lambda > 0$ kaotikus állapotok is és
$\lambda < 0$ periodikus pályák is vannak
$\to$ vannak ilyen ablakok pl. 3 periódusú pálya

ÖNSZERVEZŐDÉS

04.27.

- intermittencia:

intermittens út a káoszhoz, amikor valamilyen paraméterértéknél periodikus a megoldás, de ha átlép egy küszöb értéket, akkor megjelenik a káosz → először látszik a periodikus mozgás az idősorban → ahogy a paraméter távolodik egyre hosszabb kaotikus darabok jelennek meg az idősorban

- másik út: bifurkációk után egyre nagyobb dimenziós objektumra futnak rá a pályák → mikor már 3 változó van a nem-lineáris rendszerben, akkor már nem tud egyszerű objektum kialakulni → kaotikus attraktor lesz ...

Disszipáció és adaptáció:

- disszipatív rendszer pl. egy matematikai inga csillapítással
- ideálisan a fázistérfogat megmarad, disszipatív rendszernél egyre kisebb terület
- disszipatív rendszerre $\underline{\nabla}\dot{\underline{x}} < 0$
  konzervatív – " – $\underline{\nabla}\dot{\underline{x}} = 0$
- csillapított matematikai ingára $\underline{\nabla}\dot{\underline{x}} = -\gamma < 0$
- a disszipativitás kérdése függ a koordinátarendszertől
- 3D-s rendszerekre lépjünk tovább
- Lorentz rendszer

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma(x-y)$$
$$\frac{dy}{dt} = -xz + rx - y$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

- különös attraktorok → fraktálok → tört a dimenziószám
  Cantor-halmaz

...

Diffúzió és transzport
↳ véletlen mozgások eredménye
- Brown-mozgás
- véletlen bolyongás → master-egyenlet:

$$p_{t+1}(x) = \frac{1}{2} p_t(x-1) + \frac{1}{2} p_t(x-1)$$

- messziről nézve → Δx lépésköz, Δt időköz

$$\frac{p_{t+\Delta t}(x) - p_t(x)}{\Delta t} = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \frac{p_t(x+\Delta x) + p_t(x-\Delta x) - 2p_t(x)}{(\Delta x)^2}$$

$\Delta x, \Delta t \to 0$, $\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}$ véges

diffúziós egyenlet → $\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}$ $\left(D = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \right)$

- megoldás: $p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$

kezdeti felt: $p(x, t=0) = \delta(x)$

- $\langle x^2(t) \rangle = 2Dt$, $\left(\sigma = \sqrt{\langle x^2(t) \rangle} = \sqrt{2Dt} \right)$ szórás $\sim \sqrt{t}$

tipikus távolodást szokták $\sim \sqrt{t}$ venni

- Lévy flights

Δt is eloszlást követ, mint Δx

ha mindkettő gyorsan lecseng, akkor az ilyenekből is diffúzió lesz

ha nem szép az eloszlás, akkor Lévy-repülésnek nevezzük, → hatványfarkú eloszlás

⇒ Lévy eloszlás

- $p(\Delta t) \sim \frac{1}{(\Delta t)^{1+\alpha}}$ $\quad p(\Delta x) \sim \frac{1}{(\Delta x)^{1+\beta}}$ $\quad \alpha, \beta > 0$

$\alpha > 1$, $\beta > 2$ $\quad \sigma \sim \sqrt{t}$ ⇒ normális diffúzió

$\alpha > 1$, $1 < \beta < 2$ $\quad \sigma \sim t^{1/\beta}$ ⇒ Lévy repülés

$0 < \beta < 1$ újabb jelenségek

$0 < \alpha < 1$, $\beta > 2$, $\sigma \sim t^{\alpha/2}$ ⇒ szubdiffúzió

$0 < \alpha < 1$, $1 < \beta < 2$, $\sigma \sim t^{\alpha/\beta}$ ⇒ ambivalens folyamat

- hogyan megy az információ hálózatokban → ezeket is lehet modellezni: pl. $\sum_{i=1}^{N} \rho_i(t) = 1$

$\rho_i(t+\Delta t) = \rho_i(t) + J_i^{(+)}(t)\,\Delta t - J_i^{(-)}(t)\,\Delta t$

$J_i^{(\pm)}$ az információ ki/be áramai

$$J_i^{(+)}(t) = \sum_j \frac{W_{ij}}{\sum_k W_{kj}} \rho_j(t) \quad , \quad J_i^{(-)}(t) = \sum_j \frac{W_{ji}}{\sum_k W_{ki}} \rho_i(t) = \rho_i(t)$$

k_i

$$\frac{\rho_i(t+\Delta t) - \rho_i(t)}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t} \rho_i(t) = \sum_j T_{ij} \rho_j(t) - \rho_i(t)$$

$$T_{ij} = \frac{W_{ij}}{\sum_k W_{kj}}$$

diszkrét diffúziós egyenlet $\frac{\partial}{\partial t} \vec{\rho}(t) = \underline{\underline{D}}\, \vec{\rho}(t)$, $(D_{ij} = T_{ij} - \delta_{ij})$

T „transzfermátrix" → információ haladását adja

- stacionárius állapot → $\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} \to 0 \quad \forall i$
- általában a determinisztikus és stochasztikus folyamatok együtt szerepelnek
- Langevin-egyenlet: $m\dot{v} = -m\gamma v + \xi(t)$ ← zaj

 ↑ súrlódás

$$\langle \xi(t) \rangle = 0$$

$$\langle \xi(t)\, \xi(t') \rangle = Q\delta(t-t')$$

megoldás, $\langle v(t) \rangle$, $\langle v^2(t) \rangle$, Einstein, $D = \frac{Q}{2\gamma^2 m^2}$

Zajos rendszerek

- neurális hálózatok
- stochasztikus kiszökés → valamilyen potenciálgödörből megszökés zaj hatására

 Focker-Planck egyenlet (lesz)

Stochasztikus dolgok 05.11. ... ...

VÉGE