

Összevetés és komplex viselkedés

előadó: Vattay Gábor, vattay@elte.hu

honlap: vattay.web.elte.hu

aj. ismétlés: Complex and Adaptive Dynamical Systems (Clausius Gros)
(itp.uni-frankfurt.de/~gros/Vorlesungen/CADS/CADS_notes.pdf)

kezdés: 15⁰⁰ (16³⁰-ig tart)

1. óra

Bemutató

- 1) komplex: sok különböző részből áll, melyek mind kölcsönhatnak,
és a kölcsönh. eredményeképp olyan bonyolult viselkedés
(túl.) jön ki, melyre az egyes részekből nem következtethetünk

pl. biológiai világ, ember alkotja társaság

A -11- -6 nem a Boltzmann-féle tv. (entropia)

megértés! → akkor mi?

Történet:

- 2) Newton: redukcionizmus → a bonyolult jelenséget megpróbáljuk
egyszerű, megérthető egységekre bontani, majd ezekből
felépítjük az egészet

(pl. atomok, részecskék, ... + kölcsönhatások)

DE a redukcionizmussal nem ^{találjuk} ~~lehet~~ a bonyolult rendszer működését leírni

• 1686: Principia

• 300 évig a redukcionizmus jól működött

elemi részek (quarkok, gluonok, ...) + kkv.-ok

↓
ebből akarunk mindent felépíteni

- az idő folyásának iránya:

Boltzmann (Ludwig) } entropia
(Clausius (Rudolf)) }
→ termodinamika 2. törvénye

↓

• elmúlt 150 évben: statisztikus mechanika (fizika)

• a fizika tör.-ei a múltból is jelen között nem mutatnak különbséget
de a dolgok a rendezetlenség irányába haladnak

- OE atomok felépülése nukleonokból és elektronokból
protonok és elektronok nem bomlanak tovább!

↓

csillagokban bonyolultabb atommagok keletkezésére
(pl. C)

molekulák keletkezésére atomokból

bonyolultabb molekulák keletkezésére (pl. aminosavak)

hogyan jönnek ezek létre? Milyen ^{valószínűleg meg} ~~kevés~~ komplex állapotok,

amikor azoknak kisebb a valószínűsége? (pl. $E_{C_6H_{12}O_6} + E_{\frac{1}{2}}^{6.6} > E_{CO_2} \cdot 6 + E_{H_2O} \cdot 6$)

II

- Komplexitás tudománya:

Ilya Prigogine (1977: Nobel-díjas kémikus)

nemegyensúlyi folyamatok (Boltzmann: egyensúlyi)

előrendszerek nem zárt rendszerek, energia folyik be nyituk

II

az entropiát „kijakolják” magukból?

az entropia csökkenhet $\rightarrow$ lehet élet, káoszban rendezettség

• dissipatív rendszerek: a kezdeti fluktuációk csökken

(pontosan megy $\rightarrow$ pl. )

• nemlineáris dinamika, bifurkáció, káosz

(matematikusok először úgy gondolták, hogy minden differenciálegyenletnek van lebegő megoldása)

$\leftarrow$ (egyensúlyi, periodikus, kváziperiodikus)
↓ attraktor

1 és 2 változóra ismert

3 változóra nem! $\rightarrow$ 1960-as évek: hóreskó konstrukció (Snail)
olyan attraktor, ami csupa instabil pályából

$\leftarrow$ áll!

nem tudjuk pontosan, hogy fog leállni a megoldás

(valószínűleg a differenciálegyenlet determinisztikus, de ha a kezdeti feltételeket vagy

magát a differenciálegyenletet nem ismerem pontosan, a hibák exponenciálisan megnövekednek)

Poincaré: 3 test probléma nem megoldható, pontos megoldása

na

↓

hiába determinisztikus, nem tudjuk jósolni!

determin. és stochasztikus között nincs sok különbség

⇒ előfordulhat, hogy a nemlinearitás és dissipáció miatt valószínűleg komplexebbé válik

↓

de ez nem véletlenszerű, esetleg a világgeometriában, hanem valószínűleg cserélődik!

pl. idegenszerű megítélés elektronikusán: anélkül tudják az idegenszerűket helyettesíteni (valószínűleg) (8 db)

→ modellezni tudják

DE nem látják, hogy mitől stabil, mi kell a felépüléséhez, nem tudnak egy új részt építeni

⇒ modellezés és megítés mást jelent

= komplexebb válasz := evolúció

kell-e ehhez DNS? (geneket meg tudjuk "szimulálni")

Mi volt a DNS előtt?

Is molekulák is evolúciónak?

Le lehet-e ezeket ugyanazokkal a törvénnyel imi?

- Együttműködés, kh. (cooperáció)

Robert Axelrod

(a kooperáció evolúciója, 1981)

Evolution of Cooperation

• számítógépprogramok küzdelme / kooperáció
(agent) \ nem - II -

↓

(a teljesen kooperáló és teljesen önző programok
közé)

de alapvetően V algoritmus önző, mégis azok győznek, akik
kooperálnak egymással (időnként)

↑

ha a másik is kooperál, akkor 'ke' is

(másképpen: a valószínűség, hogy mindenkivel pozitív van)
udvariasság

evolúció → emberek → társadalom, kommunikáció

tudomány - e rajtuk az evolúció?

Válasz: valószínűleg igen → internet megjelenése → új kommunikáció

pl. programok együttműködése (nem kell
mindent megje-
gyezni) ← Wikipedia
← digitális feladatok

Komplex rendszerek:

- alulról való építés $\rightarrow$ a számítási kapacitás miatt meg kell adni egy konstukciós szintet

⇓

- holisztikus szemlélet: a kh.-okat részük
- körtes szemlélet: bizonyos egyenestéseket ~~tenünk~~, ~~ten~~ modellezünk a részeket, de a kh.-okkal, ~~is~~ kollektív mozgásokkal is foglalkozunk

bizonyos rendszereket nehéz modellezni, pl. emberi társ., internet

robosztusság: ha változtatjuk a paramétereket, a rendszer ~~megjósolhatóan változik~~ nem omlik össze egy ideig

pl. út+autók $\rightarrow$ ~~autók~~ autók számának növekedése: nő a kereset. házon de egy adott -"- eléréskor dugók alakulnak ki,...

hiszen ha beavatkozunk (pl. lámpák, ...) növeljük az utak kapacitását.

⇓

Biológiában sok helyen jelenik meg ez: "maguktól", véletlenül ittán zajlanak le a folyamatok $\rightarrow$ optimalizálás, hatékonyság növelése

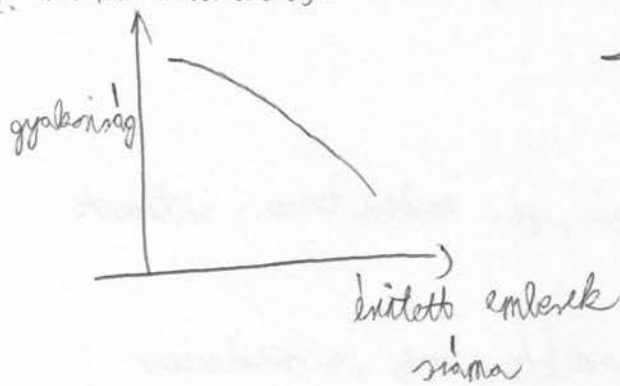
ρ_2 : kúplogépek, ...

Állandóan fejlesztik $\rightarrow$ egyre hatékonyabban működik
DE közben egyre ~~kevesebb~~ ^{növekszik} sűrűsége lesz

II
robotasság: hatékony, de egyre sűrűsége lesz a rendszer

II
hatékonyságot ~~nem~~ nem kell akármennyig növelni
nem Poisson, hanem határhelyzethez

pl. áramkimaradások

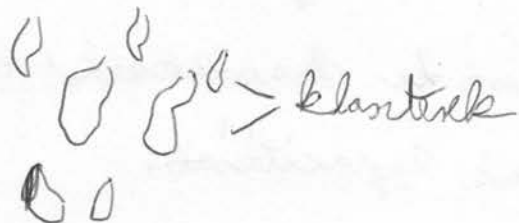


$\rightarrow$ nem véletlenszerű az eloszlás,
hogy véletlen esemény egy pontban
 bekövetkezik
↑
érintett emb.
számával

kaszkádhatóságok bekövetkeznek: az események kisebb eseményekből
állnak ki $\Rightarrow$ az a nagyobb hatású - II - száma

Erdős modelle:

pontok $\rightarrow$ lak az időben
a részben



~~de~~ villám $\rightarrow$ véletlenszerűen becsap egy pontba:

ha van fa, leég ~~egy~~ a szomszédsággal együtt

(klaszterek egyszerre leégnek)

Kütkötés¹ hasznos¹ mellett milyen ~~haszn~~ a haszon?

(levegő¹ fa: ~~haszn~~^{haszn})

(megmaradt) fa¹ száma : haszon)

$$\text{haszon} = \text{szűrség} - \text{vesztés} \quad (\text{levegő fa} \quad \text{szűrség})$$

(nyerség

↓

tenyésztés-
ségeket)

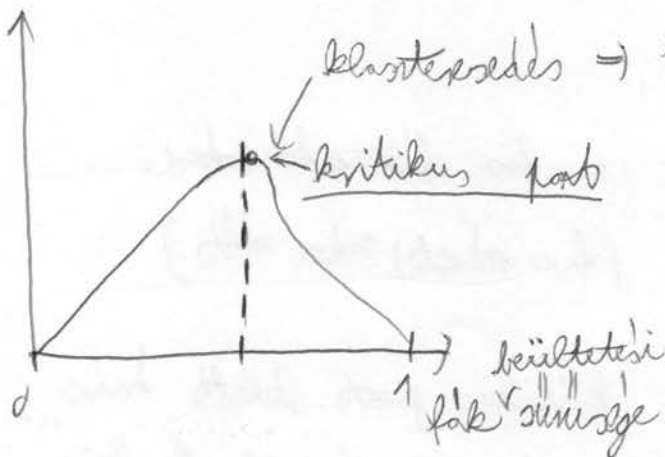
ha nem lenne

villám, az lenne

a legjobb, ha az egész

erő tele lenne fákkal

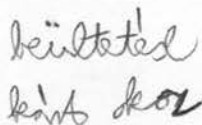
nyerség



(azonos val.-el
vannak a fa
minderhol)

pl. autók száma (időegység alatt)





hate any tw.



basalt pl. statiska
spinklosterek

→ hatringle.

blaster meste (shat'koryng)

Ha a negatív események előrelépése nem egyenletes
Amikor mindkét oldal: itt is határozottan van
(hiszen az el.)

(pl. villámcsapás)
más sz. el.
én akül. részes

✓
kritikus ponton vagyunk!

DE miért vagyunk ott?

Önszerveződő kritikuság → a rendszer beviszi magát a ebbe
a pontba!

~~Miért van ez?~~ Pl. evolúció, vagy fatemelelés
↑
nem véletlenszerűen pakszok
le lehet

⇒ a fejlődések képesek rendszereket optimalizálni magukat
pl. nem azonos a villámcsapódás sz. - e

↑ nagy sz. - e
↓ kis sz. - e
↑ ~~nagy~~ sz. - e
↓ ~~nagy~~ sz. - e
↓ nem kell úgy feladni
~~feladni~~

↓
kis darabot
területe ide

ha azokkal a problémákkal találkozunk, ami
nagyobb sz. - e kör. le, nagyobb optimalizálást
értünk el.

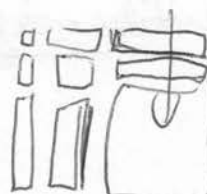
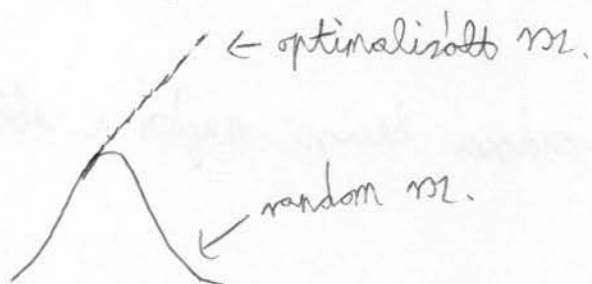
← ha mesterségesen
beavatkozunk, ilyen tapasztalat
is lehetünk ami véletlenszerűen nincs meg

világos
tetsz.
eljárás
(mz.-e)

$\Rightarrow$
optimalizálás

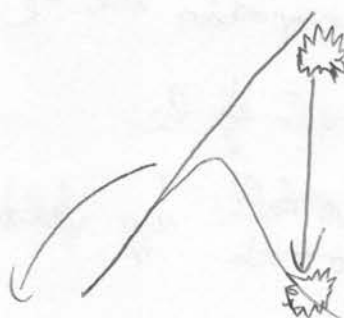
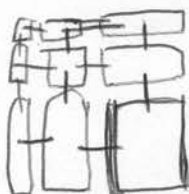
itt is
határylv.

(kialakulnak olyan
blaszterek, ahol nagy
események jöhetnek létre,
de kis mz.-el)



✓
jó a hatékonyság, max. haszon

DE ennek ára van: a szabotálás, kis hibák önsz. problémákat okoznak



érdekesség a rendszer

hibasítási kérdések:

- taxisofor: term. göbén mozog, perturbációval szemben ellenállóbb
- bankár: nagyobb profit, de ha megváltoznak a körülmények (összeomlik a bank) kevésbé tud alkalmazkodni

1) Komplex rendszerek leírása

• ~~koordinátarend.~~• ~~rétegek~~• hálózatok (gráfok)

csak a kh.-ok fontosak, az elhelyezkedés nem

→ pl. emberek a gráf csúcsai

→ a récs is egy spec. gráf (hálózat), csak mindenkihez ugyanannyi szomszédja van

→ számítógépek, weboldalak

→ biológia, genetikai kh.-a

Milgram-kísérlet Nebraska-ból Bostonba küldött levelet küldője ismeretlen személynek ismert személyeken keresztül.

→ 6 személyen keresztül 4 levelt adott

2) Kis világ (hálózat) modella gráf átmérője a hálózat mértékének logaritmusávala ~~hálózat~~ db szomszéd $\rightarrow \sim$ szomszéd a^n db

$$a^n \approx N$$

(Hátrétektől eltekintve)

$$n \ln a \approx \ln N$$

$$\underline{\underline{n \sim \frac{\ln N}{\ln a}}}$$

csúcsok = csomópontok, kapcsolási rel.

koordinációs szám: átlagos = μ - 13 - kapcsolati szám
1 csúcsra

adott él (kys.) rel.-e

3) Véletlen gráfok: Erdős Pál - Rényi Alfréd

köztél-party: 2 ember p valószínűséggel ismeri meg egymást
 → véletlen gráf

- termodin. limit: N méretű gráf $\parallel$ ∞ méretű gráf

$p \cdot (N-1)$ az ismerősök átlagos száma $= \langle z \rangle$

ha $N \rightarrow \infty$, ~~nem~~ p maradja áll., hanem az ismerősök száma!

$$\Rightarrow p \text{ változik} \Rightarrow p \approx \frac{\langle z \rangle}{N-1}$$

- Átlagos fokszáma

- gráf átmérője: $D \sim \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{1-p}}$ $\frac{1}{1-p}$: ∞ méretű gráf (l. 13. old.)
 $\langle z \rangle$

4) Komplex gráfok:

a) Klaszterizációs koeff.! → nem ismétlődő ~~le~~ ^{együtt} véletlen-szerű gráfokkal

k db ismerős között $? db$ ismerettség
 $\left(\frac{k(k-1)}{2} \text{ max.} \right)$

→ véletlen gráfban: $\frac{z(z-1)}{2}$ kapcsolatok, de minden ^{egyik} p szel történik meg, azaz

$$p \approx \frac{\langle z \rangle}{N-1}$$

$$\frac{z(z-1)}{2} \cdot \frac{\langle z \rangle}{N-1}$$

→ mivel nagyobb N , annál kisebb szel ismerik egymást az ismerősök

(emberek ált. 100-150 ismerőst tudnak megjegyezni / ennyivel kapcsolatban tartani)

→ DE valószínűsítő ismerősök körül nagyobb valószínűséggel ismerünk egymást

↓
klaszterstruktúra: ismerős 3-asokból, ismerős 4-esekből, ... hányszor van

b) fokszám eloszlás:

→ ~~valószínű~~ véletlen gráfok

$$P_k = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k} \quad : \text{~ val., hogy egy ismerős } k \text{ ele van}$$

$$\begin{aligned} N \rightarrow \infty \\ \rightarrow P_k &\approx e^{-pN} \frac{(pN)^k}{k!} = e^{-z} \cdot \frac{z^k}{k!} \\ \text{Átlag} &= \text{all} \end{aligned}$$

Átlagtól való eltérések nagyon ritkák (expon. eloszlás)

⇒ emberi kapcsolatoknál ez azt jelenti, hogy kb. mindenkinek ugyanannyi ismerős van

→ valószínű: hatványf. név (lassabb) eloszlás az átlagtól
($k^{-\alpha}$) nagy fokszámra

($\alpha > 2$, ha az átlagos fokszám véges)

c) összekötöttségi mátrix:

1, ha van kapcsolat i és j között, 0 ha nincs

$$\rightarrow A_{ij}$$

⇓

Spektrum, ...

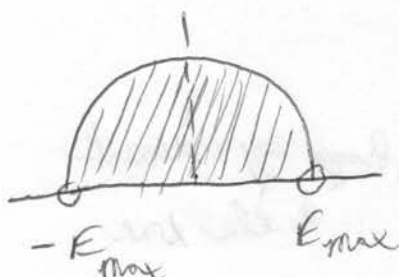
véletlen számokkal feltöltött mátrixok spektruma ismét

(Wigner Dirac → magfizika, sokféle kl. van az alkotóelemek között)

↓

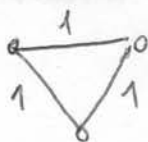
legyen véletlenszerű a kl.

✓ random gráf spektruma



Wigner féle félkör tr.

Δ -ek száma $\sim \text{Tr}(A^3)$



$$\sum A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} A_{i_3 i_1} = \text{Tr}(A^3)$$

⇓

5) Általánosított random gráf

a) megadjuk a csomópontok számának (fokszám) eloszlását!

↓
 $\forall$ ponthoz egy csúcsok rendeltünk → 1. csúcsnak legyen 7 csomópont, ...

* * * → "csapok"

ezeket p. val.-el kössük össze → így $\forall$ csapok $\forall$ csapokkal összekötjük (ha páros szám van)

Nézetlen gráf, de a romszedek hosszúsága az előre megadott lesz.

DE a klusteresedés még esetenként is kisebb lesz a valószínűségi

b) Az összekötöttség sz. -et súlyozzuk a "körök" számával

$$r_{k-1} = \frac{k \cdot r_k}{\sum_j j \cdot r_j}$$

↑
súlyozás

↓
azaz a "klusteresedés" vezet

$z = \langle k^2 \rangle / \langle k \rangle^2$ romszedek száma

$$z_m = \frac{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2}{\langle k \rangle^2} z_{m-1} = \frac{z_2}{z_1} z_{m-1} \Rightarrow z_m = \left(\frac{z_2}{z_1} \right)^{m-1} z_1$$

$\frac{z_2}{z_1}$ ahogy mindig $\rightarrow$ meg

hogy mennyire van összekötve a szim

~~hogy mindig~~

$\frac{z_2}{z_1} < 1$ méltatlanabb a gráf

gigantikus komponensek

$\rightarrow \frac{z_2}{z_1} > 1$ teljes gráf-ossak.

$$\langle k^2 \rangle - \frac{2}{\langle k \rangle} \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) p_k = 0$$

$$\frac{z_2}{z_1} = 1 \quad \text{kritikus pont}$$

$k(k-1) \rightarrow k=0, k=1$ nem számít

$$G_1(x) = \dots = \frac{G_0'(x)}{x} \quad \text{romszedek száma}$$

generátorf. $\Rightarrow$ romszedek számának eloszlása a gráf

$$\square = \circ + \begin{array}{c} \square \\ | \\ \circ \end{array} + \begin{array}{c} \square \quad \square \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \end{array} + \dots \quad (\text{Dyson-differenciálgráf})$$

$$H_1(x) = x \sum_{k=0}^{\infty} g_k H_k(x) = x \cdot G(H_1(x))$$

↓ (funct. egyenlet)

$$H_1(x) = \dots$$

↓
analitikus megoldás
is lehetséges

⋮

4. óra

Hálózati robusztusság

1) Robusztusság:

- Külső zajokra, behatásokra hogyan reagál a hálózat.

random gráf: véletlenszerűen "kiszaknak" pontok
(élekkel)

↓
mikor eseti el működőképességet a sz.?

pl. internet: működőképesség, ha összeköttetésben marad

∀ pont

Itt. bár is egy jó dolog ez

p_k fokozatelosulású random gráf

$b_k = b(k)$ a var. -e, hogy k ~~szomszéd~~ ^{szomszéd} csúcs működik

(aktivitás) $\nwarrow$ ~~p_k~~ p_k var.-el "öljük meg" a csúcsokat

$$F_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot x^k \cdot b_k \quad \text{lesz a generátorf. (fokozatelosulás)}$$

$(p_k \cdot b_k)$ fokszám

$$\boxed{F_0(1) = \sum_k p_k b_k \leq 1} \quad \text{illetlen maradt csúcsok aránya}$$

$$F_1(x) : \text{kinenő él generátorf.} : \frac{F_0'(x)}{x}$$

$$\left. \begin{aligned} H_0(x) &= 1 - F_0(1) \\ H_1(x) &= 1 - F_1(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{a régi képletben } F \text{ helyére } F \text{ lép}$$

Legyen $\forall$ csúcs lebomlási var.-e b ($b_k \equiv b$) ≤ 1

$$\Rightarrow F_0(x) = b G_0(x) \quad F_1(x) = b G_1(x)$$

$$\langle \tau \rangle = b + \frac{b^2}{\tau_1 - b \tau_2} \quad \text{legnagyobb klaszter mérete}$$

gigantikus komponens:

$$b_c = \frac{\tau_1}{\tau_2} \quad \text{#}$$

tsakra endemes vizsgálni, amikre elvile volt gigantikus komponens $\leftrightarrow$ működőképesek voltak

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} > 1$$

Bombázás $\Rightarrow$ megalátás a frishatár

$$z_1(k) \sim \int dk \left(\frac{k}{k^a} \right), \quad \langle k^2 \rangle \sim \int dk (k^2/k^a)$$

$$\rightarrow 1 < a \leq 2: z_1 \rightarrow \infty, z_2 \rightarrow \infty \quad \left. \vphantom{\int dk} \right\} \text{ ezek } \langle k \rangle \rightarrow \infty$$

$$k_c = \frac{z_1}{z_2} \text{ nem adható meg}$$

$$\rightarrow 2 < a \leq 3: z_1 < \infty, z_2 \rightarrow \infty$$

$$k_c = z_1/z_2 \rightarrow 0 \Rightarrow \text{akárhány csúcsot} \text{ kerünk el,}$$

összekötött marad a gráf

és annak köszönhető, hogy van néhány nagyon jól (ak mássikkal) összekötött csúcs, ami összekötja a gráfot

Ezeket véletlen-szerűen nehezen találom el.

= ezek robotosnak véletlen külső támadásokra

$$\rightarrow 3 < a: z_1 < \infty, z_2 < \infty$$

$$k_c = \frac{z_1}{z_2}$$

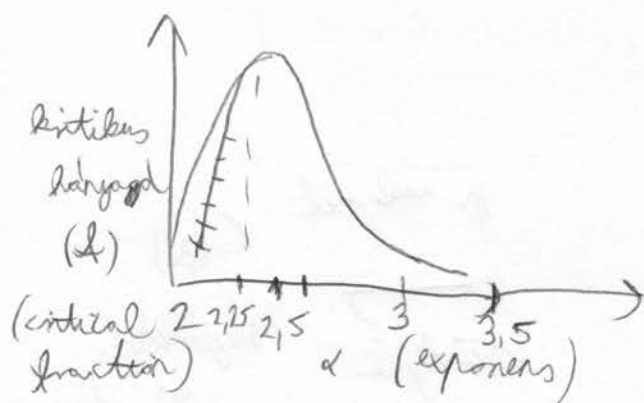
pl. $k_c = 0,8$: akkor $\checkmark$ ha a 20% $\rightarrow$ kinyitjuk

$$k_k = \Theta(k_{max} - k) \Rightarrow \text{ha elzárható a nagy csúcsokat}$$

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

köröm, lerombolom a gráfot, egyenként

-20- semmi sem történik



↓
 f : elvártott α azal jellemzem a gráfot, hogy ha adott k_{max} -t α -t illeszkedik (a gráf hányad része fog elvární)
 (hányad része kell kinyírni, hogy szétszessen a gráf)

⇓

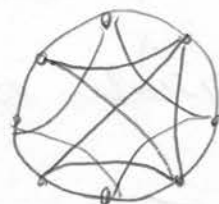
Ha véletlen hibák szempontjából robusztus a konst. (jól összekötött csomók), akkor nem véletlen hibákra érzékeny lesz (elegendő a jól összekötött csomókat kiirtani) ← endőltés modell

Small world modellek (kicsatlaxsedés):



az elején definiáljuk a fideszmodot

p való. el válogat el 1 kapcsolatot (drótot)



$p=0$ (szab. gráf)
 $p=1$ véletlen gráf

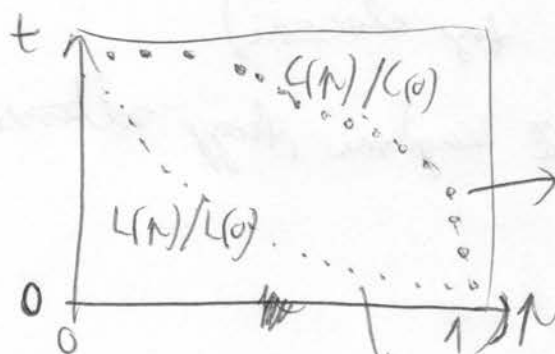
3 szomszédos máma

$$\left(\frac{3(z-2)}{4(z-1)} \right) \text{ klasteresedés}$$

több dim.-ra is igaz lehet

$$\left(\frac{3(z-2d)}{4(z-d)} \right)$$

$$t \sim N^{1/d} \quad ? \quad \text{távolság (a rész mérete)}$$



klasteresedés véletlen grafon elhunik

átlagos távolság

Bray: ez még mindig nem tja le az internetet

Oh még megrögt az összeköttetés, így lett egyk nagyobb.

Hasonlóan biológiai m.-eknél is.

↓

Növekedő grafok

preferenciális összeköttetés

$$\pi(k_i) = k_i / \sum_j k_j \quad \text{normális}$$

a fokránok növekedésének előrelátása ↓

k_i részecskének esélye elhárulni az n -edikre

$$P_k \sim k^{-\gamma} \quad \gamma > 1$$

$\gamma = ?$ (gyök növekedése)

$$\Delta k_i(t) \equiv k_i(t+1) - k_i(t) \approx \frac{\partial k_i}{\partial t} = A \pi(k_i) = A \frac{k_i}{\sum_{j=1}^{m_0+t-1} k_j}$$

$$\sum_i \Delta k_i(t) \equiv m = A \frac{\sum_i k_i}{\sum_j k_j} = A$$

t lépés
 m_0

1 hozzáadott pont esetén
az pontok száma
a pontok ~~száma~~ alakul
száma

Folyt. modell

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = \frac{mk_i}{2m(t-1)} \rightarrow \text{addig állt esélye száma}$$

$\underbrace{2m}_{2m\text{-el}} \underbrace{(t-1)}_{t-1 \text{ lépés}}$
 az a után ($t=1$)
 részecskének lehetséges mérete
 száma

$$\underline{\underline{k_i(t) = m \cdot \left(\frac{t}{t_i}\right)^{-\gamma}}}$$

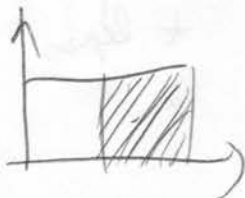
$\rightarrow$ teljesítmény növekedése

$P(k_i(t) < k) = ?$ (Kacso tudjuk tudjuk a felsőrekorlát)

$$P(k_i(t) < k) = P\left(t_i > \frac{m^2 t}{k^2}\right)$$

$\forall$ lépés hosszátunk m -et

$\Downarrow$
 t idő múlva egyenletes az eloszlás
 hogy t idő múlva kell.



$$P\left(t_i > \frac{m^2 t}{k^2}\right) = \left(1 - \frac{m^2 t}{k^2}\right) \frac{1}{m_0 + t}$$

$$h_k = \frac{P(k_i(t) < k)}{dk} = \frac{P\left(t_i > \frac{m^2 t}{k^2}\right)}{dk} = \frac{2m^2 t}{m_0 + t} \cdot \frac{1}{k^3}$$

$$\boxed{h_k \sim k^{-3}} \Rightarrow \text{robosztás kategória}$$

$\alpha=3$

Nem preferenciális növekedés:

$$\Pi(\cdot) \sim 1 \Rightarrow \forall k_i\text{-ket} \text{ ugyanolyan valószínűséggel nő az új csomó}$$

$\Downarrow$

$$\frac{dk_i}{dt} = \frac{m}{m_0 + (t-1)}$$

addig nő a csomó addig

$$h_k = \frac{1}{m} \cdot e^{-\frac{k}{m}} \Rightarrow \boxed{h_k \sim e^{-\frac{k}{m}}}$$

-24-

Dinamikai rendszerek

0) Komplex sz.-ek:

1. Hálózatok $\rightarrow$ "koordinátasz." $\S$
2. Bifurkációk, kritikus sz. $\rightarrow$ "mozgásegyenletek" (diff. egyenletek)

1) Mozgásegyenletek $\rightarrow$ determinisztikus?

1800-as évek vége: Lagrange, Poisson, ... (francia tudósok) $\rightarrow$ égi mechanika mozgásegyenleteinek megoldása (bolygók kölcsönhatása)

$\downarrow$

perturbációszámítás: ellipszis k. sz. $\rightarrow$ a többi bolygó ~~perturbációja~~ (hatása) a miénk $\rightarrow$ módosított pályák $\rightarrow$ — || — ...

És a módszer viszonylag jó eredményeket hozott ($M_{\odot} \gg M_{\text{bolygó}}$)

DE lehet konvergálnak ezek a perturb. sorok?

- ha a pályák ω frekvenciájának hányadosa racionális:

$$\frac{\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2}{\omega_3 n_3} \rightarrow \text{és lehet } \infty \text{ nagy}$$

(n egész)

perturb. $\rightarrow$ hányadosok ~~megjelennek~~

- ha ω -k aránya irrac. $\rightarrow$ totál. közelíthető rac.-al

DE így is maradnak olyan ω -k, ahol egy idő után a további perturb. rendek sorjái az eredményt.

Poincaré $\rightarrow$ rájött, hogy $\exists$ olyan pályák, ahol a mozgás megjárod-
hatóan (véletlenszerűen) összemérhető, kaotikus)

$\downarrow$
ezeknél fog elromlani a perturb. számítás
(gyorsan felhátrerek a hibák)

Einstein $\rightarrow$ Bohr-lelke kvantálás nem mindenhol alkalmazható
(nem csak periodikusok lehetnek a mozgások
 $\rightarrow$ kaotikus mozgás)

(Einstein ezen cikket nem ~~lehet~~ hivatta senki!)

1980-as évek körül: számítógépek (PC)

$\rightarrow$ időjárás jelölés (Edward Lorenz) (Xavier Stokes - egyenletek
megoldása közelítősekkel)

Ugyanazok a kezdeti feltételek a PC-rek $\Rightarrow$ a számítógépen
eltérnek a megoldások!

(valójában a kezdeti feltételek ~~nem idéző~~ ^{kicsit} eltértek (utolsó jegyeket
már nem írták ki, ~~is~~ ^{is} máskor amikor kezdtek ~~éke~~ ^{éke} újra
a PC-rek, elromlott a megoldás)

$\rightarrow$ a bizonytalanságok a kezdeti feltételeknél megközelíthet-
lenül felbukkannek kaotikus rendszerek esetén

ε eltérés $\rightarrow \varepsilon \cdot e^{\lambda t}$ eltérés t idő múlva

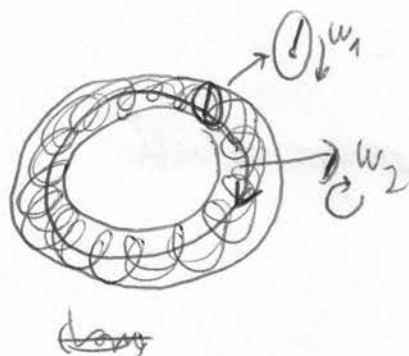
ahol λ nagy $\rightarrow$ rossz jövedelmek az. (pl. időjárás $\leftrightarrow$ nemlin. függvény.)

Pillangó effektus:

pillangó mélységben az ismeretlen jövedelmének teszi az időjárás New Yorkban.

- Ismeretlen
túl sok
tudás:
- különböző állapotokban eltérő, hogy milyen gyorsan nőnek fel a hibák
 - a hibák itt-lan lokalizálódnak

2) Fix pontok, attraktorok, periodikus / kváziperiodikus megoldások



Ha az előzőekben megvan
hatás - sűrű hálózat

$$\frac{w_1}{w_2} = \text{rac} \Rightarrow \text{periodikus}$$

$$\frac{w_1}{w_2} = \text{irrac} \Rightarrow \text{kváziperiodikus}$$

1D
2D } összes függvény típusnak ilyen a megoldása (strukturálisan stabil
? az. $\Rightarrow$ stabil megoldás)

3D (pl. 3 test probléma)

Snail: strukturálisan stabil (megperturbálom a differenciálót, nem változ. a megoldás)
(párh.) DE $\forall$ pályája instabil

nemlin. differenciálható és ismétlődő gyakori!

különös attraktor: instabil pályák összessége

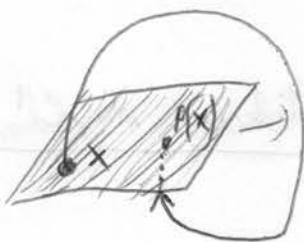
3) Differenciálekvenletek leírása:

a) 3. rendű d.e., ... $\rightarrow$ lin. d.e. rendszer

szokványos differgy., dinamikát (idő) változó $\rightarrow$ hogyan választjuk

b) Poincaré - metszet (logisztikus leképezés)

$\approx$ időegységet



→ fázis tér egy metszete

$\downarrow$
differgy. alapján a metszethez egyértelműen megmondható
a mozgás pályája

c) $\text{Ka} \exists F(x)$ fr., hogy:

$$\frac{d}{dt} F(x(t)) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} F(x) \right) \underbrace{\dot{x}_i(t)}_m \equiv 0$$

$\Downarrow$
 F megmaradó
mennyiség

$\downarrow$
célszerű lehet bevezetniⁿ mozgás változóinak, mert ezek
állandóak $\rightarrow$ csökkentjük a dimenziószámot $\rightarrow$ lehet sík-
metszetet venni

d) Attraktor: bekongrólnak a pályák (bizonyos kezdeti felté-
telek mellett = vonzási medence) $\downarrow$

→ a fázistérben felbonthatjuk ilyen vonzásmegcentrékre.

[III KAM - elmélet

(Kolmogorov, Arnold, Moser)

kaotikus megoldások ~~is~~ helyén ismét. Invariánsok (elliptikus megoldások)]

↓
Struktúra gyűlése:

a kaotikus megoldások ellipszis (kör) pályákra el fog
fogyni

Liouville - tétel:

konzenetratív vs. → fázistér egy térfogata megmarad

disszipatív vs. → - || - elfogy

↓

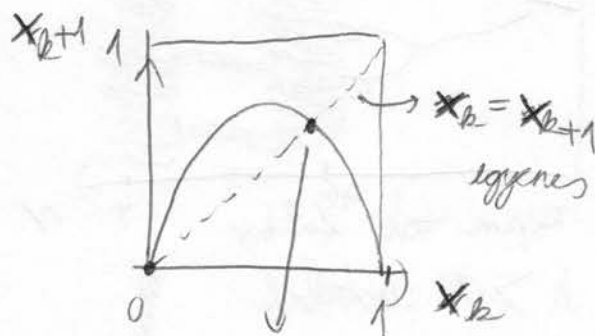
Lorenz - attraktor: körül 20-30 → 10-30 Poincaré

metódus

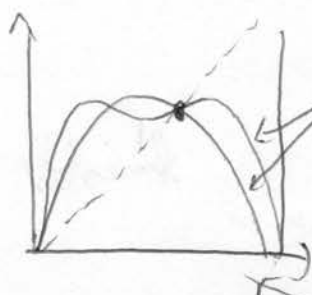
fix pont: a logisztikus

lekepezésben ismételten

megjelenés



fix pont



(iterációk)

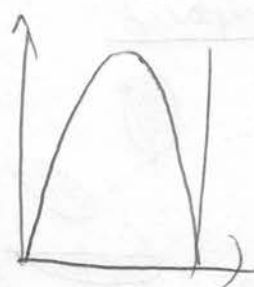
írfunkció $(\Lambda: x_k \rightarrow x_{k+1})$

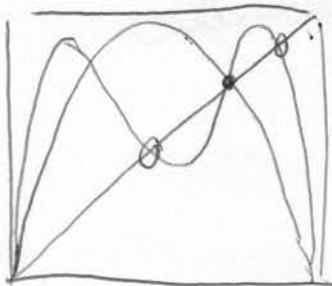
kül. paraméterek: $M: x_{k+1} \rightarrow x_{k+2}$

ha a meredekség $\Theta \rightarrow$ instabil

ha $\Theta \rightarrow$ stabil

kül. paraméterek (r)

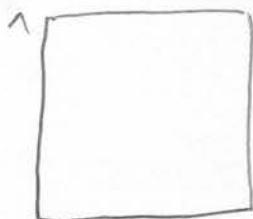




parameter változtatásával

↓

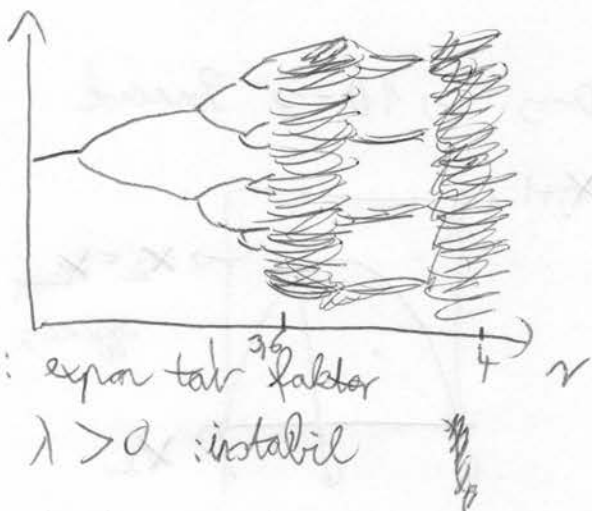
bifurkáció: fix pont stabilitása megváltozik, de megjelenik egy másik fix pont is



→ ha ezen túllépünk, végtelenbe esni kezd a pálya

$$r=4$$

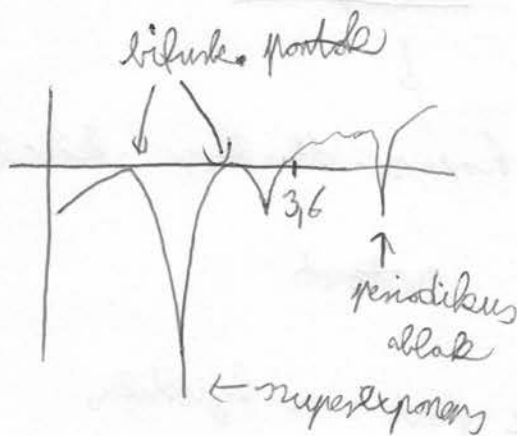
DE még erre is
 $r_{\infty} \approx 3.57$



λ : expon. talr. faktor

$\lambda > 0$: instabil

$\lambda < 0$: stabil



Dissipáció



konz.
m.



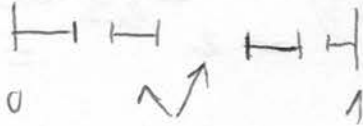
diss.
m.

szintet

instabil $\rightarrow$ felragyul a ~~hátsó~~ ^{hátsó}, benne megismétlődés a
kisebb struktúrák

fraktáldimenszió

pl. Cantor -féle halmaz



közégyűk
darabolás
(a harmadát)

$\rightarrow$ ezt folytatjuk ...

(hány l hosszú részeket lehet l)



1

1



1/3

2



1/9

4

$\vdots$

$\vdots$

3^{-n}

2^n

$\leftarrow$ stacionárius a végén
állapota éntendők

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n \sim \text{hossza} \sim \text{halmaznak}$$

(n változik $\Rightarrow$ a hossz is)

~~megértés függőben~~

l^d
kocka
térfigured

$$V(l) \approx \frac{V}{l^d} \sim l^{-d}$$

lehetőleg
mikor is kockák
sima

$$\Rightarrow \text{ha } V(l) \sim l^{-D}$$

$D :=$ dimenziója a
halmaznak

lehet több is

pl. $\downarrow$ - 31

Cantor-halmaznál

$$\text{ha } l = \frac{1}{3^n} \Rightarrow \log l = -n \log 3$$

$$\Leftrightarrow n = -\frac{\log l}{\log 3}$$

$$N\left(l = \frac{1}{3^n}\right) = 2^n = 2^{-\frac{\log l}{\log 3}} \underset{\log = \ln}{=} e^{\ln 2 \left(\frac{\ln l}{\ln 3} \right)} = e^{-\frac{\ln 2}{\ln 3} \ln l} =$$

$$= \frac{1}{e^{\ln 2 / \ln 3}} \Rightarrow \boxed{D = \frac{\ln 2}{\ln 3}} \approx 2,06$$

Cantor-halmaz dimenziója 2,06

Különös attraktor: dimenziója nem egész

6. óra

Diffúzió és transport

1) "normál" diffúzió: $\langle r^2 \rangle$ t-ben lineáris



"anomális" diffúzió: t-ben nem lineáris
(ugrások)

sokszor vannak hosszú ugrások, amiknek
a normál diff.-ban kisebb lenne a való.-e
(hatványfűrészek)

$$p_{t+1}(x) = \frac{1}{2} p_t(x-1) + \frac{1}{2} p_t(x+1) \leftarrow 2 \text{ oldalról}$$

↑

azaz, hogy $t+1$ időben x helyen vagyunk

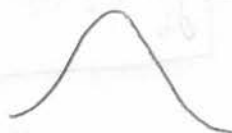
$$\frac{p_{t+\Delta t}(x) - p_t(x)}{\Delta t} = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \dots$$

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}$$

$$D = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}$$

Mo.:

$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$



Gauss-görbe

$$\Delta x \sim \sqrt{t}$$

"Lévy - flights"

$$p(\Delta t) \sim \frac{1}{(\Delta t)^{1+\alpha}}$$

$$p(\Delta x) \sim \frac{1}{(\Delta x)^{1+\beta}}$$

$$\alpha, \beta > 0$$

azaz időlépések mértéke

az időbeli eloszlás

ha $\alpha > 1 \rightarrow$ van időtartama a lépéseknek

$$\rightarrow \alpha > 1 \quad \beta > 2$$

$$\Delta x \sim \sqrt{t}$$

rendes diff.

$$\rightarrow \alpha > 1 \quad \alpha < \beta < 2$$

$$\Delta x \sim t^{1/\beta}$$

"Lévy - flights"

$$\rightarrow 0 < \alpha < 1 \quad \beta > 2$$

$$\Delta x \sim t^{\alpha/2}$$

szubdiff.

...

Halón töltés diffúzió

$$p_i(t) \quad \sum_{i=1}^N p_i(t) = 1$$

↑
i. weboldal (vertex áll.-ban)

$$p_i(t+\Delta t) = p_i(t) + \underbrace{f_i^{(+)}(t) \Delta t}_{\text{beérő töltés "bejövő áram"}} - \underbrace{f_i^{(-)}(t) \Delta t}_{\text{"kimenő áram"}}$$

$$\frac{p_i(t+\Delta t) - p_i(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} p_i(t) = \sum_j T_{ij} p_j(t) - p_i(t)$$

Master-egyenlet

Oldalanként: bejövő és kimenő linkek határozzák meg alapvetően, hogy a weboldalon mennyi ideig tartózkodunk

↓
"page rank" a linkek alapján

Langevin-egyenlet (stokasztikus diffúgy.)

$$\dot{m} = -\gamma m + \xi(t)$$

↑
stokasztikus
erő

$\langle \xi(t) \rangle = 0$ és korrelálatlan:

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \delta(t-t')$$

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t} + \frac{e^{-\gamma t}}{m}$$

$$\int_0^t dt' e^{\gamma t'} \xi(t')$$

↑
 est nem tudjuk kiszámolni,
 de statisztikusan kezelhet!

pl.

$$\langle v(t) \rangle = v_0 e^{-\gamma t} + \underbrace{\langle \xi(t) \rangle}_0 \dots$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle x \rangle = \frac{Q}{\gamma^2 m^2} t \equiv 2Dt$$

ξ a mozgás idővel zaj $\rightarrow$ ennek a korrelációjára (ami T-hoz képest.)
 (Q) vissza

Indjuk meg az a diffúzió mozgást.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (v^2)$$

important to note that the
total momentum is

$$\langle p \rangle = \frac{1}{2} m v = \frac{1}{2} m v$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (v^2)$$

(and
also b) important to note that the
total momentum is

.ora

Random Boole-hálózatok

1) Boole-algebra: $0, 1$ $\leftrightarrow$ spin: $+, -$
 $\swarrow$ biológia
(diszkrét hálózatok)

Genetika:

genom DNS $\rightarrow$ különböző gének fejeződnek ki
az egyes sejttípusokban

minimálmodell a gényeszűréshez

adott sejttípusban: gén kifejeződik vagy nem

1 0

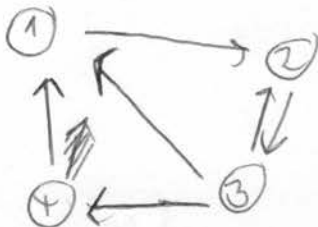
$\downarrow$
(sejtszámitógépek)

Boole-hálózat

gének egymással is kölcsönözhatnak

$\rightarrow$ a hálózaton: szabályozás

pl.



2) N-K hálózati

N pont, mindegyik K -val hat kötésen

3) • változók

$$\sigma_i \in \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\} \quad \sigma_i \in \{0, 1\} \quad i=1, 2, \dots, N$$

• időfüggés:

$$\sigma_i = \sigma_i(t) \quad t=1, 2, \dots$$

$$\sigma_i(t+1) = f(\sigma_{j_1(i)}(t), \sigma_{j_2(i)}(t), \dots, \sigma_{j_{K_i(i)}(t)}(t))$$

$\uparrow$
 $i \rightarrow$ ~~átíró~~ átíró változó

$\uparrow$
 K_i : i -vel kölcsönható
változó száma

f : transz. f.

↓ definíálható pl. 3 változóra

σ_1	σ_2	σ_3	random	f additív ...
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
	1		1	0
	1	1	1	1
		1	1	1

• összeállítás:

$$\langle K \rangle = \frac{1}{N} \sum_i K_i = (\text{átlag}, \text{nyilak átlagos száma})$$

- 4) • negatív halmozat: csak a normálisok

Kapcsolódó.-ek dinamika

5) $N_f = 2^{\binom{K}{2}}$ für kapazitäts. block

a) & definisasa lelet:

- ~~random~~ asonos val. - ~~el~~ 0 ~~val~~^{nagy} 1
 - ^{magnetic} bias: p val. - el 0, $1-p$ val. - el 1
- } random
- additív:

$$\sigma_i(t+1) = \theta(\ell_i(t)) \quad \ell_i(t) = h + \sum_{j=1}^V c_{ij} \sigma_j(t) \quad c_{ij} \in \{0,1\}$$

- ha $f_i > 0$ lesz $\Rightarrow$ az i . is működésbe lép
- $f_i \rightarrow$ az i . ~~alk.~~ ^{alk.} ~~alk.~~ neutronok jelei hat. meg,
szüksége (c_{ij})

2) $K=0$: senki nem függ senkitől

$$\Rightarrow \ell = 1, \ell = 0$$

$$K=1 \rightarrow 2 \text{ fr.}$$

$K=2 \rightarrow 4$ fajta sv.

c) dinamika:

- szinkron update: megnézem, hogy t időben kic
- hogy hatnak a többiek, majd egyszerre az alapján mindenkét $t+1$ időre leírtam
- aszinkron update: megnézem, hogy x t -ben milyen hatás $\rightarrow$ leírtam $t+1$ -re. Kiválasztok egy másik gént $\dots \rightarrow$ az is leírtam

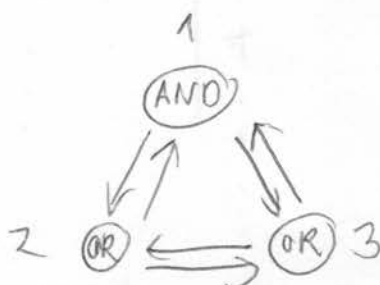
d) - quenched model

- $\neq$ sz. változatlanság
- annealed model
- is változik ~~sz.~~ random
- genetic algorithm
- is változik (sz. ^{pl.} szelekció alapján) $\rightarrow$ mi alapján tanulnak

e) $\Omega = 2^N$ féle állapot lehet $\sim$ 2^N -nek $\Rightarrow$ bizonytalan ismétlés az eredeti állapotba, periodikus

$\rightarrow$ attraktor, fix pont

pl.



OR		
1	2	3
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A rendszer mindig periodikus, de ha a periodusidő hosszú, körben vizsgálhatjuk a pályák rétegzettségét

- Hamming-távolság: $D(t)$

$$D(t) = \sum_{i=1}^N (\sigma_i(t) - \bar{\sigma}_i(t))^2$$

a pályák hogyan ismertek

$\sigma_i, \bar{\sigma}_i$: állapotvektorek
(kül. kiindulások
all. -ból)

- állapotok

$$a(t) = 1 - \frac{D(t)}{N}$$

$$a(t) \in (0, 1)$$

$$a=0 \rightarrow D=N \Rightarrow \text{messze vannak}$$

$$a=1 \rightarrow D=0 \Rightarrow \text{körül vannak}$$

$$a(t) = 1 - \frac{D(t)}{N} \approx \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i(t) \bar{\sigma}_i(t)$$

* Higgs Hamming-távolság

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a = \dots \Rightarrow$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a < 1 \Rightarrow \text{~~összekötés~~}$$

nem ugyanabba a per. pályákba
fut bele a m. $\rightarrow$

$$D(t) \approx D(0) e^H$$

• káotikus ^{all.} $\lambda > 0 \rightarrow$ nagy az "összekötés"

• fagyott áll.: $\lambda < 0 \rightarrow$ kicsi az "összekötés"

• kritikus állapot: $\lambda = 0$

átlagolt körletés:

ahogy mekkorát $\sim$ körlet $\Rightarrow$ milyen tartó és
 $\vee$ kör $\Rightarrow$ újabb mekkorát ... (iteráció)

$K=2 \rightarrow$ kritikus m.

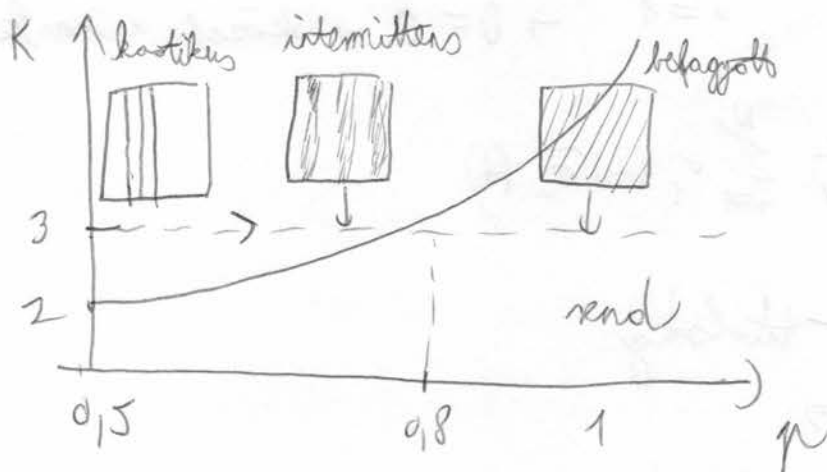
$K>2 \rightarrow$ kaotikus m.

$K<2 \rightarrow$ befagyott m.

$\Rightarrow K=2$ -nél „fázisátalakulás”

ml.

$N-K$ modell fázisdiagramja



p : mekkora ml.-el
 lesz az ℓ fr. 1
 • (l. a magnetic hyst.)

Perkoláció: Erős - Rényi-gráf

p ml.-el letessük a csomópontokat

$1-p$ $\rightarrow$ nem

van egy határ, ami alatt csak kis darabok lesznek, de a határ elérésekor lezajlik az egész gráf

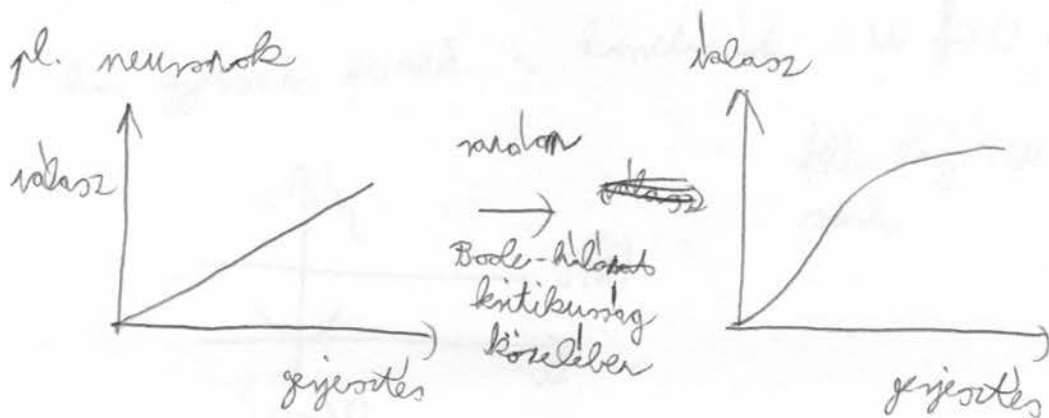
↑
 ez a perkolációs határ



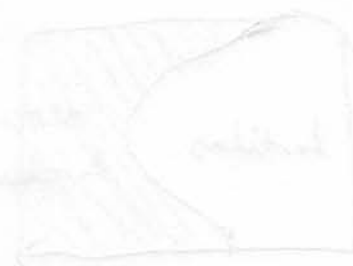
- Ha a geneexpressiók hálóját kritikus lenne
 $\Rightarrow$ kritikus differenciálódás
- Befagyott hálóját eseten $\Rightarrow$ nem lenne elég változatosság
 („unalmas creature”-ök)
- $\Rightarrow$ miért a rendszer a kritikus pont közelében él
 (adaptív viselkedés)

önrenverő kritikuság : mi magától a rendszert a kritikus pont közelébe?

pl. ember fejlődése $\rightarrow$ a boole hálóját hálóját kevés
 sokféle módon
 rekurrenálóan
 fejlődnek ki
 jól működik, még λ is megvalósítható!



$\gamma < \gamma_c$



in a homogeneous system, the interface is flat.

in a homogeneous system, the interface is flat.

in a homogeneous system, the interface is flat. (in a homogeneous system, the interface is flat.)

(in a homogeneous system, the interface is flat.)

in a homogeneous system, the interface is flat.

in a homogeneous system, the interface is flat.

in a homogeneous system, the interface is flat.

in a homogeneous system, the interface is flat.

in a homogeneous system, the interface is flat.

in a homogeneous system, the interface is flat.



1) 1/x raj (137. dd - töl) időátlag

$$c(\tau) = \frac{\langle x(t) x(t+\tau) \rangle - \langle x^2 \rangle}{\langle x^2 \rangle}$$

↑
autokorrelációs fvk.

$$(c(\tau))^2 = c(\tau)$$

$$\int c(t) e^{i\omega\tau} d\tau = |S(\omega)|^2$$

$S(\omega)$: power spectrum
(telj. - 11-)

ahol $S(\omega) = \int x(t) e^{i\omega t} dt$ (a jel Fourier - tr.)

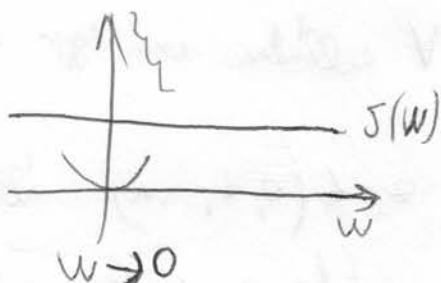
ha $c(\tau) \sim \frac{1}{\tau^\alpha}$

$$\Rightarrow |S(\omega)|^2 = \int \frac{1}{|\tau|^\alpha} e^{i\omega\tau} d\tau = \int \left(\frac{\omega}{x}\right)^\alpha \cdot e^{ix} \frac{dx}{\omega} =$$

$$= \omega^{\alpha-1} \cdot \int \dots$$

$\frac{1}{x}$ -es emelkedést úgy lehet elérni, ha $\alpha \sim 0 \rightarrow$ állando
 $\sim$ korreláció

ha gyorsan esnek $\sim$ korrelációk: $\omega \neq 0 \Rightarrow S \rightarrow 0$



előző raj: $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow S \rightarrow \infty$
szűk

Jok helyen $\sum_{i=0}^w \frac{1}{x^i} \propto \frac{1}{x}$ az autokorr. fr. hatvány
menet esik (pl. $\frac{1}{x}$)

Korreláció most, kritikus viselkedést mutat a sz.

Per Bak (fizikus): önszervező kritikuság alakul ki
 (magától a krit. pontba álltathatjuk be a sz.)

$$S(w, \tau) = \text{Re} \int_0^\infty dt e^{iwt} e^{-t/\tau} = \dots = \frac{\tau}{1 + (\tau w)^2}$$

↑
időállandó

ha $w \gg 1/\tau \Rightarrow$ ~~konstans~~ $\frac{1}{w^2}$ -es esik

legyen oscillatorok eloszlása:

$$D(\tau) \propto \frac{1}{\tau^\alpha} \quad \text{ahol } \tau \text{ az osz. relaxációs ideje}$$

$$\Rightarrow S(w) \sim \int_0^\infty d\tau \tau^{\alpha-2}$$

$$\text{ha } \alpha = -1 \Rightarrow S(w) \sim \frac{1}{w} \rightarrow \frac{1}{f} \text{ zajszint}$$

(skalárgör hatványfr. eloszlás)

2) 1/f zajos modellek

a) sejtautomata



$\forall$ cellák van egy nődus
 leh.

$$z_i \in (0, 1, \dots, n) \quad \text{állapotok (szintek)}$$

$$z_i \rightarrow f_i(z_i, z_{i+\delta}, \dots)$$

↓

(2)

(ha $z_i \in (0, 1) \rightarrow$ Kaufmann-gör)

ahol $\oplus$ az i . cella szomszédjait jelöli

$\Downarrow$

az i . cella állapotát - szomszédjai is befolyásolják

↓

Random Boole-hálózat nem, de az állapotok szám $n+1$ (2 helyett)

"update rules": kör. áll. megállapítása

$n=1 \rightarrow z_i = 0, 1$

$2^9 = 512$ konfiguráció

$\rightarrow 2^{12}$ szabály

(8 szomszéd)
+ a körpáros
(i .) elem

↑ (mindegyik konfigurációhoz
lehet egy következményt definiálni
 $\rightarrow z_i = 0$ v. 1 legyen)

✓ cellához 512 db konf. körül választhatunk

Totalisztikus update szabályok

$2^9 = 18$ konfiguráció

$\rightarrow 2^{18} = 262,144$ totalisztikus
szabály

Conway életjátéka

(szomszédok áll. is)

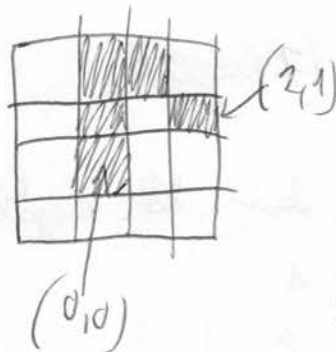
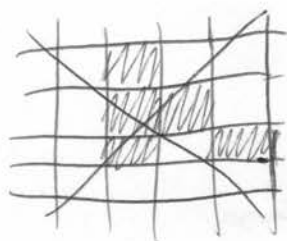
szabály { $\left\{ \begin{array}{l} \text{ha } 2 \text{ v. } 3 \text{ szomszéd él} \Rightarrow \text{"is" él} \\ \text{ha } \neq 2, 2 > \text{ szomszéd él} \Rightarrow \text{meghal} \end{array} \right.$

fixpont: $\begin{matrix} (0,0) & (0,1) & (1,1) & (1,0) \\ \text{szűz} & \text{szűz} & \text{szűz} & \text{szűz} \end{matrix}$ $\rightarrow$ ha elindítjuk a játékot, nem változ.

oscilláló megoldás:

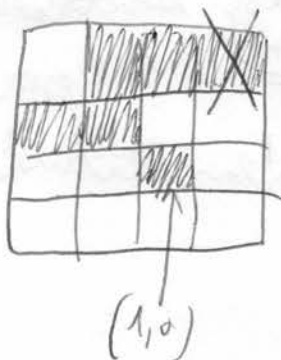
$$(1,0), (0,0), (1,0) \quad \text{v.} \quad (0,-1), (0,0), (0,1)$$

$$(0,0), (0,1), (0,2), (1,2), (2,1)$$

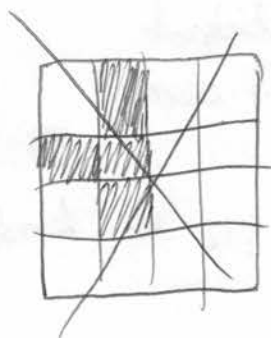


"kereske"

indítás



Ad



transziciós vég (márgó a rácson)

Belátható, hogy ez az élet játék egy Turing-gép