

egyensúlyi állapotban: egyenlő valószínűségre esik át az egyik pontból a másikra
vagy az információ minimumra (entropia)

non-egyensúlyi állapotban több válasz is van
↓

• perturbációérzékenység: lineáris válasz feltétel

mit mérünk?

- fizikai mennyiség válasz értéke
- korrelációs függvény

• válaszok jelölés elválasztása (előre megadott?)

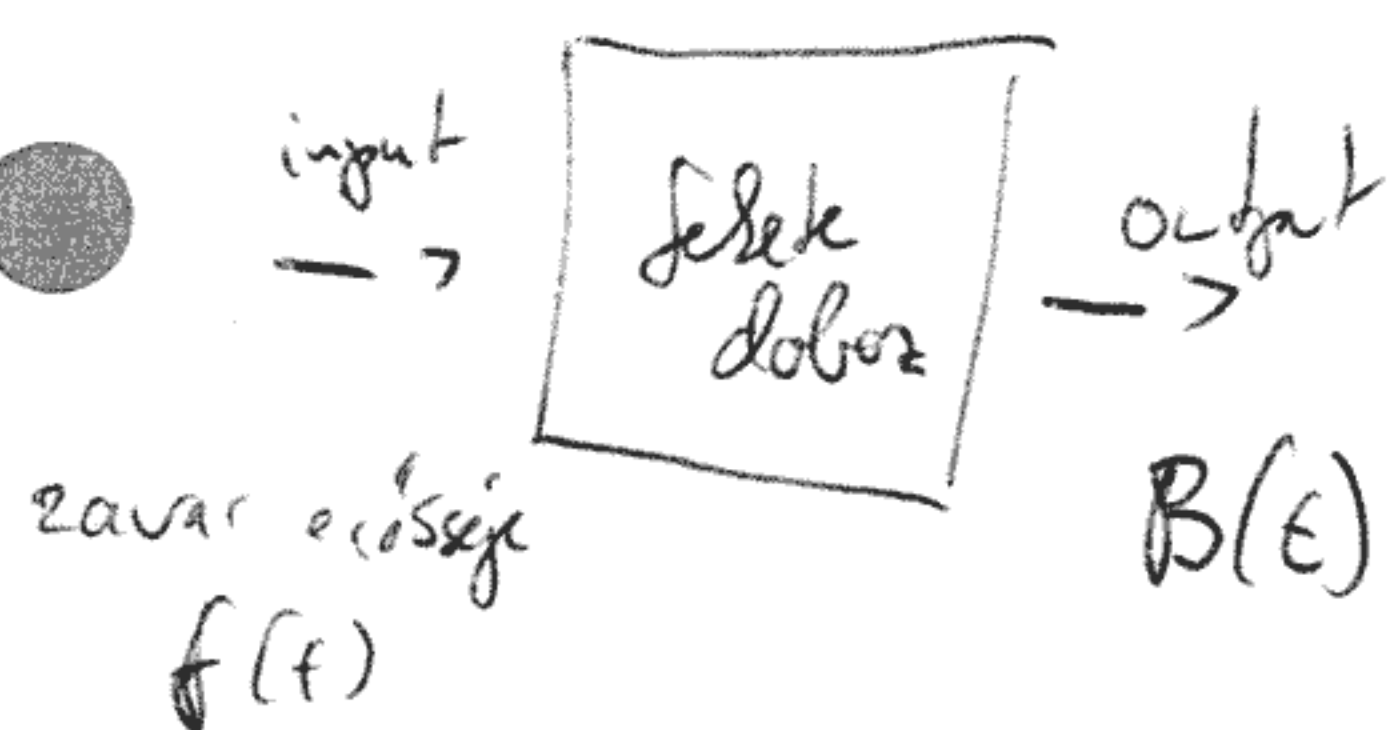
abszolút energiák
többi válaszjelölés
↓
irreversibilis
transzformáció

több válaszjelölés
nem zavar
↓
stochasztikus folyamat

• lineáris elvétel $\rightarrow$ Boltzmann-egyenlet

• minimalizáció (erről nem lesz szó)

lineáris válasz



$B(t)$ fizikai mennyiség

legyen zavar nélkül stacionárius állapotban

példa: mágneses tér

mágneses térerő

$$f(t) = H(t)$$

$$B(t) = M(t)$$

bejuttatásosabb lineáris összefüggés

$$B(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t, t') f(t') dt'$$

↑
válasz függvény

Szűrőfeltevések:

- kausalitás $X(t, t') = 0$ ha $t' > t$

- stacionárius állapot
 zavarról $\Rightarrow$ időeltolási invariancia $\Rightarrow$ ~~$X(t, t') = X(t - t')$~~
 (mindig - és az azonos nem)

$$B(t) = \int_{-\infty}^t X(t - t') f(t') dt' = \int_0^{\infty} X(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

$$t - t' = \tau$$

monodromikus zavar:

$$f(t) = f_w e^{-i\omega t}$$

$$B(t) = \int_0^{\infty} X(\tau) f_w e^{-i\omega t} e^{i\omega \tau} d\tau = f_w e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} X(\tau) e^{i\omega \tau} d\tau$$

$\xrightarrow{\text{ugyanaz az időfüggvény}}$

$$B_w = f_w X(\omega)$$

van δ frekvenciás zavar és a válasz sűrűsége

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{i\phi(\omega)}$$

a $B(t)$ és $f(t)$ is valós $\Rightarrow$ $X(\omega)$ is valós

$$X(\omega)^* = X(-\omega)$$

$$\operatorname{Re} X(\omega) = \operatorname{Re} X(-\omega)$$

$$\operatorname{Im} X(\omega) = -\operatorname{Im} X(-\omega)$$

a Fourier-transzformáltak z -ként fűzve komplex mátrixra
 $z \in \mathbb{C}$

$$X(z) = \int_0^{\infty} X(\tau) e^{iz\tau} d\tau$$

$$e^{iz\tau} = e^{i\operatorname{Re} z \tau} \cdot e^{-\operatorname{Im} z \cdot \tau}$$

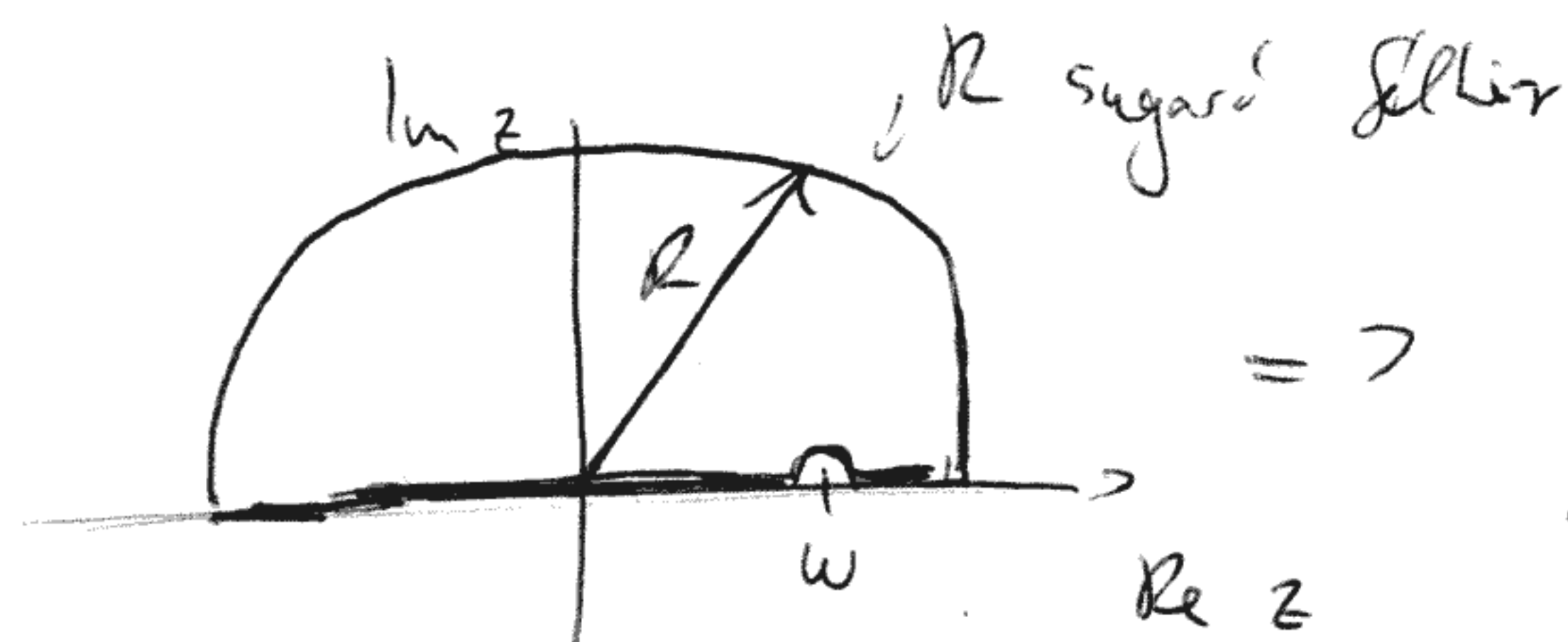
a felso' felso'bol z leeresz
 exponenciális, mivel H mindig
 integrálható lesz $\Rightarrow \exists X(z)$

azért $X(z)$ analitikus is. Ez azért kell mert

$X(z)$ egy olyan függvény, amelynek a D -ben nem tűnik el az értéke
sima Fourier transzformálással

Kramers - Kronig - reláció

$$\oint_C \frac{X(z)}{z-w} dz \text{ a fősík felső felében}$$



$$\Rightarrow \oint_C \frac{X(z)}{z-w} dz = 0$$

félkörre, hogy $X(z) \rightarrow 0$ $z \rightarrow \infty$

ha $R \rightarrow \infty$ vizsgáljuk a végtelemben

a 0 körül maradjunk

$$0 = \int_{-\infty}^{w-\sigma} \frac{X(w')}{w'-w} dw' + \int_{w+\sigma}^{\infty} \frac{X(w')}{w'-w} dw'$$

$\sigma \rightarrow 0$

Cauchy integrál
jelölés P

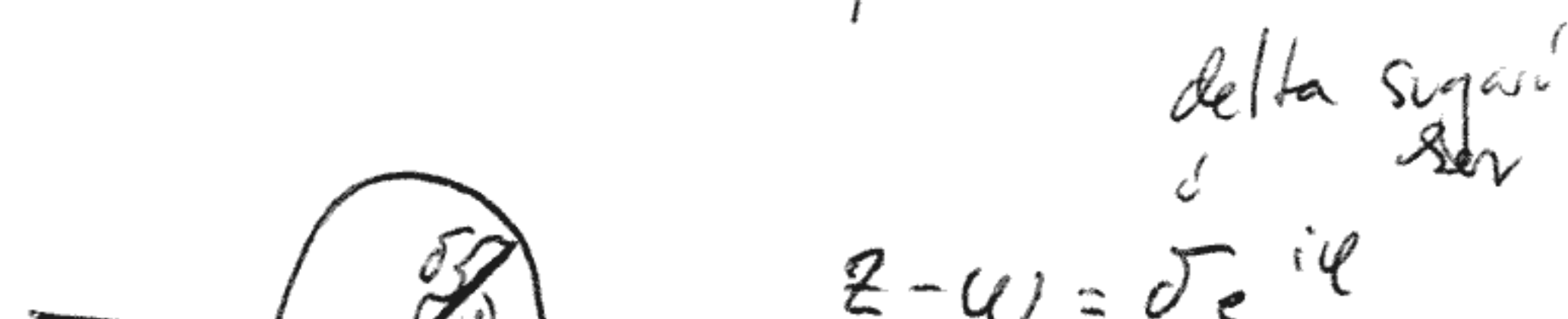
$$0 = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(w')}{w'-w} dw' - i X(w) \pi$$

$$\text{Re} = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re } X(w')}{w'-w} dw' = -\pi \text{Im } X(w)$$

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im } X(w')}{w'-w} dw' = \pi \text{Re } X(w)$$

Jordan-kurva

ahogy a félkör járja körül



$$z-w = \sigma e^{i\varphi}$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{X(w + \sigma e^{i\varphi})}{\sigma e^{i\varphi}} i \sigma e^{i\varphi} d\varphi$$

$$\sigma \rightarrow 0 \quad -i X(w) \pi$$

Hilbert transzformáció

ahogy ha $\text{Im } X$ -t $\text{Re } X$ -t ismerjük
akkor megkapjuk a másikat is

a fázisok nem lehetnek
nulla lineáris változó

Savvalik $\chi(t)=0 \quad (t < 0)$

$\downarrow$
 $\chi(z)$ analitikus a felső félkörben

$\downarrow$ $(\chi(z) \rightarrow 0 \quad z \rightarrow \infty)$ ha ez nem igaz akkor a végtelenségig
 Kravars-környezetében valószínűleg bizonyos helyeken is lehet
 zérus

Titchmarsh-tétel: az a tétel, hogy mondja ki, hogy van-e olyan függvény, amely analitikus a felső félkörben, és amelynek Fourier-transzformáltja nem nulla.

Kvantummechanika időfejlődése

$H(t)$ Schrödinger egyenlete

$$i\hbar \dot{\Psi}(t) = H(t) \Psi(t)$$

$$\text{kezdési feltétel } \Psi(t_0) = \Psi_0$$

lineáris egyenlet van az Sch. e. miatt

$$\Psi(t) = U(t, t_0) \Psi(t_0)$$

$\uparrow$
 unitár operátor

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \Psi' | \Psi \rangle = i\hbar \langle \dot{\Psi}' | \Psi \rangle + i\hbar \langle \Psi' | \dot{\Psi} \rangle = \langle -H \Psi' | \Psi \rangle + \langle \Psi' | H \Psi \rangle = 0$$

az Sch. e. nem változtatja meg a skalárszorzatot

$$\langle U(t, t_0) \Psi_0 | U(t, t_0) \Psi_0 \rangle = \langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle$$

$$\langle \Psi_0 | U^\dagger U \Psi_0 \rangle = \langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle \quad \forall \Psi_0 \text{ ra } U^\dagger U = 1$$

~~$i\hbar \dot{\psi} = H\psi$~~

$$i\hbar \dot{\psi} = i\hbar \dot{U} \psi_0 = H U \psi_0 \quad \psi_0 = \psi_0 - \psi_0$$

$$i\hbar \dot{U} = H U$$

$$\boxed{\begin{aligned} i\hbar \dot{\hat{U}}(t, t_0) &= H(t) \hat{U}(t, t_0) \\ U(t_0, t_0) &= 1 \end{aligned}}$$

u.a. u.a. Sch. e. es besteht
f. h. h. h.

ha. ll. f. g. g. e. a. d. d. d. d.

$$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}$$

id. d. f. g. g. e. e. e.

$$H(t) = \overset{\text{id. d. f. g. g. e. e. e.}}{\underset{\uparrow}{H}} + V(t)$$

er. l. e. g. g. e. p. r. d. u. c. t. i. v.

$$\text{leg. a. } U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} S(t, t_0) e^{\frac{i}{\hbar} H t_0}$$

$$S(t_0, t_0) = 1$$

$$\text{ha. } V(t) = 0 \quad \text{al. l. e. r. } S(t, t_0) = 1$$

e. l. e. i. t. S. e. l. e. k. t. e. a. f. o. r. g. o. g. i. s. i. d. a. t. e. l. l. e. n. e. i. a. p. o. r. t. u. n. b. a. t. i. v. l. a. t. e. r. t.

u. d. r. i. v. i. a. l. l. a. t. u. s. $U(t, t_0) = 1$

$$i\hbar \dot{U}(t, t_0) = H S(t, t_0) e^{\frac{i}{\hbar} H t_0} i\hbar \dot{S}(t, t_0) e^{\frac{i}{\hbar} H t_0} = (H + V(t)) e^{-\frac{i}{\hbar} H t} S(t, t_0) e^{\frac{i}{\hbar} H t_0}$$

$$i\hbar \dot{S}(t, t_0) = \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar} H t} V(t) e^{-\frac{i}{\hbar} H t}}_{Y_i(t)} S(t, t_0)$$

$$\int_{t_0}^t \dot{S}(t', t_0) dt = S(t, t_0) - \overset{1}{S(t_0, t_0)}$$

$$S(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t e^{\frac{i}{\hbar} H t'} V(t') e^{-\frac{i}{\hbar} H t'} S(t', t_0) dt'$$

Ha $V(t) = 0$ akkor $S(t, t_0) = 1$
 Ha $V(t) = 0$

első rendű:

$$S(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t e^{\frac{i}{\hbar} H t'} V(t') e^{-\frac{i}{\hbar} H t'} dt'$$

és utána iterálunk
 a magasabb rendűkig

ha megvan a sor, akkor kiszámoljuk U -ban, azaz egy látszólag
 állapotban

az a rendszer lineáris változóiban:

$$V(t) = -A f(t)$$

↑
 rendszer energiájának megváltozása

itt elhangyosított a rendszer viselkedését
 a zavaró hatás hatására

$$S(t, t_0) = 1 + \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t e^{\frac{i}{\hbar} H t'} A e^{-\frac{i}{\hbar} H t'} f(t') dt'$$

↑
 a perturbáció hatására rendszer Hamilton-függvénye
 operátora

$$\langle B \rangle_t = \sum_i P_i \langle \gamma_i(t) | B | \gamma_i(t) \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}(t) B)$$

$$\sum_i P_i = 1$$

$$\langle B \rangle_t = \sum_i P_i \langle U(t, t_0) \gamma_i(t_0) | B | U(t, t_0) \gamma_i(t_0) \rangle =$$

$$= \sum_i P_i \langle \gamma_i(t_0) | U^\dagger(t, t_0) B U(t, t_0) | \gamma_i(t_0) \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}(t_0) U^\dagger(t, t_0) B U(t, t_0)) =$$

$$= \text{Tr}(U(t, t_0) \hat{\rho}(t_0) U^\dagger(t, t_0) B)$$

$$\Rightarrow \hat{\rho}(t) = U(t, t_0) \hat{\rho}(t_0) U^\dagger(t, t_0)$$

$$U = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} S(t, t_0) e^{\frac{i}{\hbar} H t_0} \quad \text{Satz 11.16.}$$

$$\langle B \rangle_t = \text{Tr} \left(\underbrace{S(t, t_0)}_{U^\dagger} e^{-\frac{i}{\hbar} H t_0} S^\dagger e^{\frac{i}{\hbar} H t} \overbrace{B}^{B(t)} e^{-\frac{i}{\hbar} H t} S(t, t_0) e^{\frac{i}{\hbar} H t_0} \right)$$

t_0 - bei gen. Zustand genauso
 $\downarrow$
 U S- + elsöndg

$$S(t_0) = \frac{e^{-\beta H}}{Z} \quad Z = \text{Tr}(e^{-\beta H})$$

$$\begin{aligned} \langle B \rangle_t &= \text{Tr} \left(\frac{e^{-\beta H}}{Z} \left(1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t A(t') f(t') dt' \right) B(t) \left(1 + \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t A(t') f(t') dt' \right) \right) = \\ &= \text{Tr} \left(\frac{e^{-\beta H}}{Z} \left[B(t) + \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t (B(t) A(t') - A(t') B(t)) f(t') dt' \right] \right) \end{aligned}$$

$$\text{Tr} \left(\frac{e^{-\beta H}}{Z} e^{-\frac{i}{\hbar} H t} B e^{\frac{i}{\hbar} H t} \right) = \text{Tr} \left(\frac{e^{-\beta H}}{Z} B \right) = \langle B \rangle_0$$

$$\varphi_{BA}(t, t') = \frac{i}{\hbar} \text{Tr} \left(\frac{e^{-\beta H}}{Z} [B(t), A(t')] \right) = \frac{i}{\hbar} \langle [B(t), A(t')] \rangle_0$$

$$\langle B \rangle_t = \langle B \rangle_0 + \int_{t_0}^t \varphi_{BA}(t, t') f(t') dt'$$

kontinuierl. zeitl. $\rightarrow t_0 \rightarrow -\infty$

$$\varphi_{BA}(t, t') = \begin{cases} \varphi_{BA}(t, t') & t \geq t' \\ 0 & t < t' \end{cases}$$

$$\langle B \rangle_\epsilon = \int_{-\infty}^t \chi_{BA}(t-t') f(t') dt'$$

$$t \rightarrow -\infty \quad \rho_0 = e^{-\beta H}$$

$$\sigma H = -A f(t)$$

$$\chi_{BA} = \Theta(t) \psi_{BA}(t)$$

$$\psi_{BA}(t) = \frac{i}{\hbar} \langle [B(t), A(0)] \rangle = \frac{i}{\hbar} \text{Tr} \left(\frac{e^{-\beta H}}{Z} [B(t), A(0)] \right)$$

$$\text{Tr} \left(e^{-\beta H} e^{-\frac{i}{\hbar} H t} e^{\frac{i}{\hbar} H t} e^{-\frac{i}{\hbar} H t'} e^{\frac{i}{\hbar} H t'} \right) = \text{Tr} \left(\frac{e^{-\beta H}}{Z} e^{\frac{i}{\hbar} H (t-t')} A \right)$$

monochromatic zavar

adiabaticus bekapcsolás

$$f(t) = f_\omega e^{-i\omega t} \cdot e^{\epsilon t} \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

az nem lesz 0 $t \rightarrow -\infty$ -ra

$$\langle B \rangle_\epsilon = \int_0^\infty \psi_{BA}(\tau) f(t-\tau) d\tau = \int_0^\infty \psi_{BA}(\tau) e^{-i\omega(t-\tau)} e^{\epsilon(t-\tau)} d\tau$$

$$= f_\omega e^{-i\omega t} \int_0^\infty \psi_{BA}(\tau) e^{i\omega\tau} e^{-\epsilon\tau} d\tau$$

$$e^{i(\omega+i\epsilon)\tau}$$

complex Fourier trans

$$\chi_{BA}(z) \Big|_{z=\omega+i\epsilon}$$

$$\chi_{BA}(\omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \chi_{BA}(\omega+i\epsilon)$$

pl.: harmonikus - oscillator

$$H = \underbrace{\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2}_H - x f(t)$$

$f(t)$ "külső" potenciálja

$$\langle x \rangle_t = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\rho(x)}_1 (t-t') f(t') dt'$$

x változó és az x -ben szereplő a perturbáció

$$\psi_{xx}(t) \equiv \psi(t) = \frac{i}{\hbar} \langle [x(t), x(0)] \rangle$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = \frac{i}{\hbar} [H, x] \\ \dot{p} = \frac{i}{\hbar} [H, p] \\ [p, x] = -\frac{\hbar}{i} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{er általános} \\ \text{megoldás} \\ \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -m\omega_0^2 x \end{array}$$

Heisenberg - egyenlet

⇒

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x$$

$$x(t) = x(0) \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{p(0)}{m\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

$x(0), p(0)$: a Schrödinger - egy. operátorai

$$[x(t), x(0)] = \frac{[p(0), x(0)]}{m\omega_0} \sin(\omega_0 t) = \frac{\hbar}{im\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

$$\psi(t) = \frac{\sin(\omega_0 t)}{m\omega_0} : \text{a klasszikus megoldás is ez}$$

Fourier - transzformáció

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega_0 t)}{m\omega_0} e^{i\omega t} dt$$

csak az $\ln z > 0$ -n értelmezhető

ez az integrál nem létezik
(distribúciószerűen lehetne értelmezni)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega_0 t)}{m\omega_0} e^{izt} dt = \frac{1}{m\omega_0} \int_0^{\infty} \frac{1}{2i} (e^{+i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}) e^{izt} dt =$$

$$= \frac{1}{2im\omega_0} \left[\frac{e^{i(\omega_0+z)t}}{i(\omega_0+z)} - \frac{e^{i(-\omega_0+z)t}}{i(-\omega_0+z)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2im\omega_0} \left(\frac{1}{(z-\omega_0)} - \frac{1}{(z+\omega_0)} \right) =$$

$$= \frac{1}{2im\omega_0} \left(-\frac{1}{z-\omega_0} + \frac{1}{z+\omega_0} \right)$$

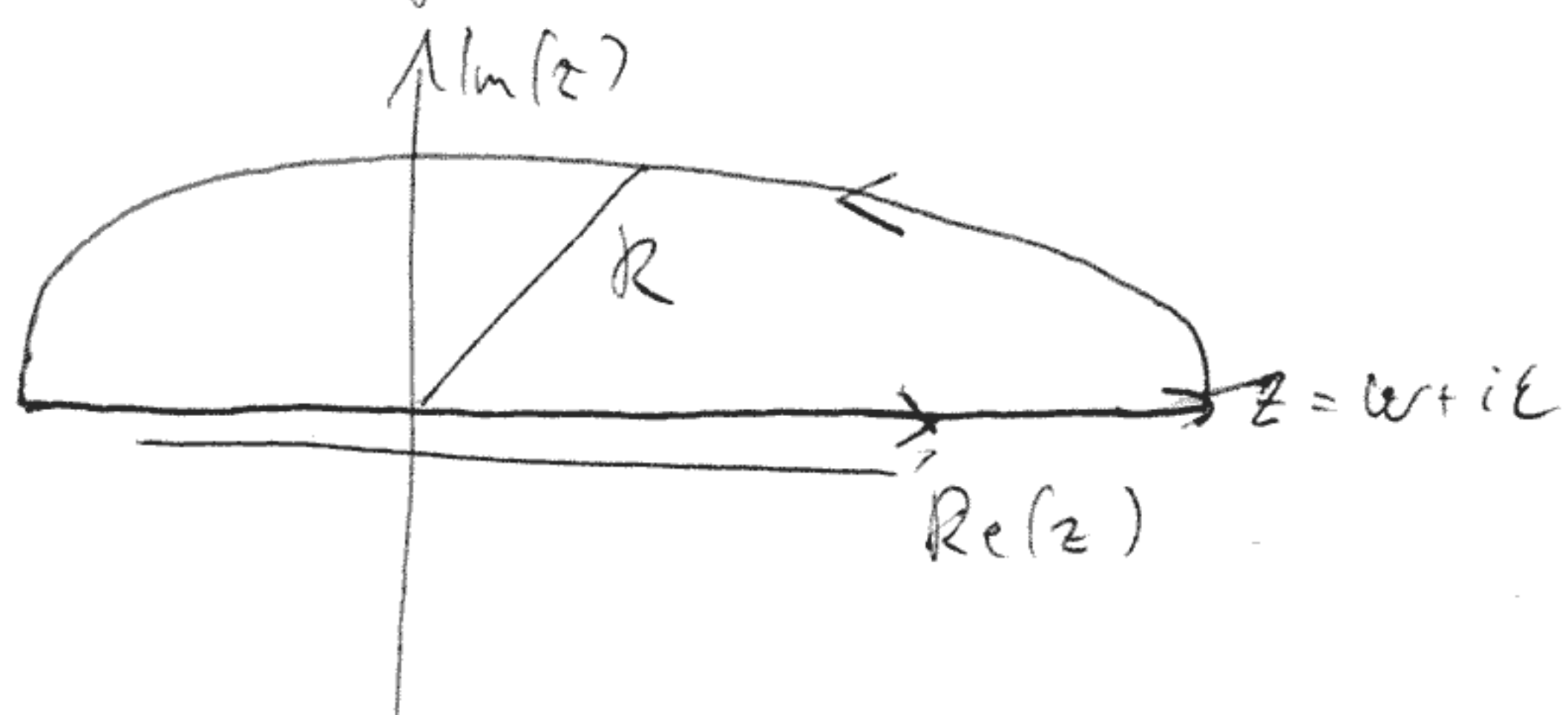
meromorf $f(z)$
(csak pólusai vannak)

$z = \pm \omega_0$ $h\omega_0$ - energia

ennek a gradiens energiájának van szerepe

ez a felső félkörön vett Fourier-transzformáció
(jelleme maga a $f(z)$ értékeinek mindenképp
az $\text{Im } z < 0$ -ra vonatkozó Fourier-transzformáció az
eredeti $f(z)$ -nek)

viszsa transzformálás



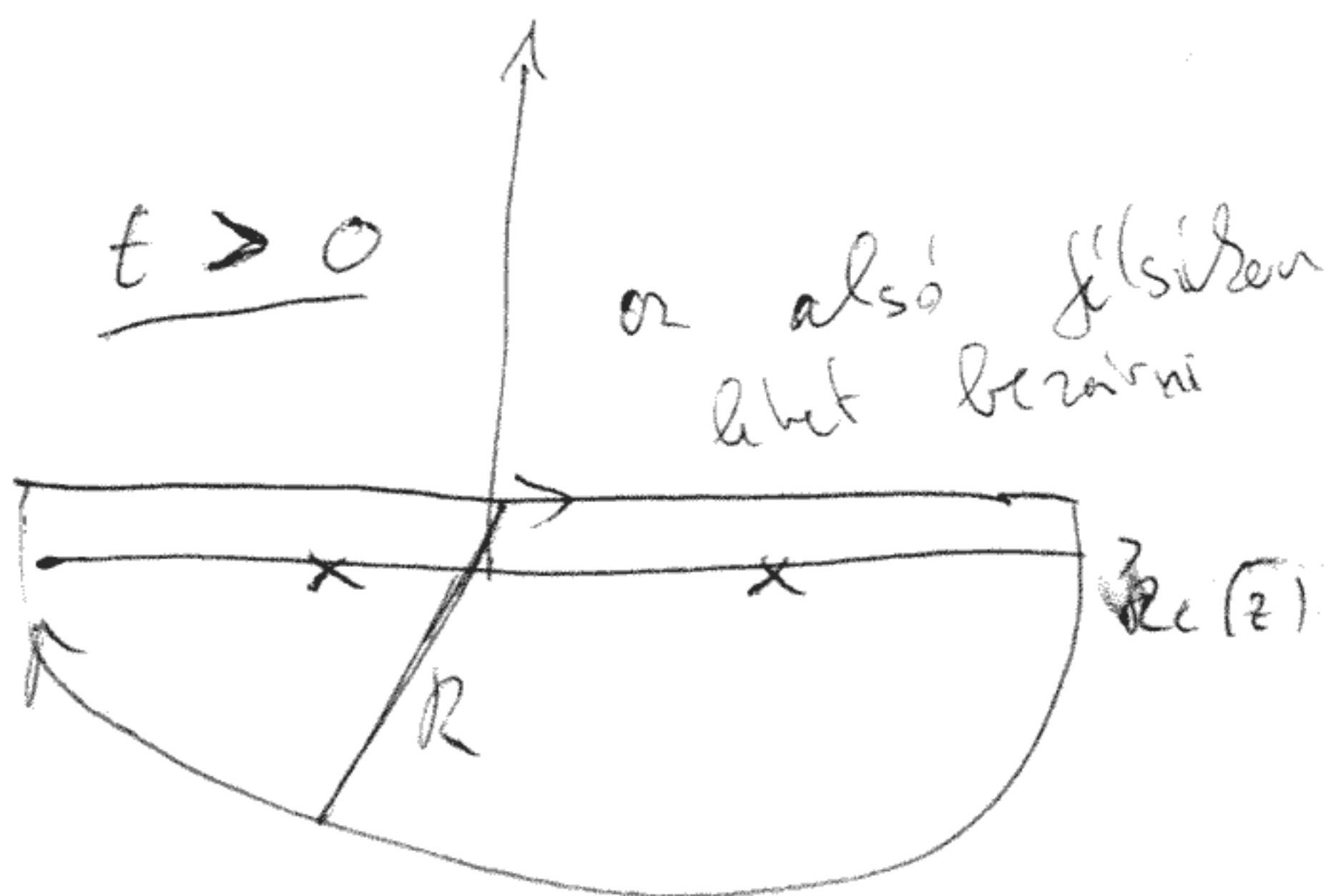
(mivel itt transzformálunk vissza, azaz itt volt először a
Fourier) a kontúr irányát $R \rightarrow \infty$ -re
szintén azaz ezt tudom beírni

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-R+i\epsilon}^{R+i\epsilon} dz \chi(z) e^{-izt}$$

$$\frac{t < 0}{e^{-izt} = e^{-i\text{Re } z t} e^{\text{Im } (z) \cdot t} \xrightarrow{-\infty} \text{ha } t < 0$$

$$|z| \rightarrow \infty \text{ Im } z \rightarrow \infty$$

mivel felső félkörön lehet
beírni a kontúr -> itt nincs
singularitás -> az $\int = 0$



$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-R-i\epsilon}^{R-i\epsilon} \chi(z) e^{-izt} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint \chi(t) e^{-izt} dz =$$

$$= -\frac{2\pi i}{2\pi i} \left(-\frac{1}{2m\omega_0} e^{-i\omega_0 t} + \left(+\frac{1}{2m\omega_0} \right) e^{i\omega_0 t} \right)$$

(elhagyhatjuk az előjelet?)
igen, így

$$= \frac{1}{m\omega_0} \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i}$$

$$\mathcal{U}_{BA}(t) = \frac{i}{\hbar} \text{Tr} \left(\frac{e^{-\beta H}}{Z} (B(t)A - AB(t)) \right) = H\phi_n = E_n \phi_n$$

$$= \frac{i}{\hbar} \sum_n \langle n | \frac{e^{-\beta H}}{Z} (B(t)A - AB(t)) | n \rangle = \hat{A} = \langle \phi_n | A | \phi_n \rangle = A_{nn}$$

$$= \frac{i}{\hbar} \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_n}}{Z} \left(\langle n | B(t) | m \rangle \langle m | A | n \rangle - \langle n | A | m \rangle \langle m | B(t) | n \rangle \right) =$$

$$= \frac{i}{\hbar} \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_n + -\beta E_m}}{Z} \underbrace{\langle n | e^{+\frac{i}{\hbar} H t} B e^{-\frac{i}{\hbar} H t} | m \rangle}_{\langle n | B | m \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_m t} e^{+\frac{i}{\hbar} E_n t}} \langle m | A | n \rangle$$

$$\omega_{mn} = \frac{E_m - E_n}{\hbar}$$

$$\mathcal{U}_{BA}(t) = \frac{i}{\hbar} \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_n + -\beta E_m}}{Z} \langle n | B | m \rangle \langle m | A | n \rangle e^{-i\omega_{mn} t}$$

Fourier - transzformáció

megint jelölés felírás

$$\int_0^\infty e^{-i\omega_{mn} t} e^{izt} dt = \left[\frac{e^{i(z-\omega_{mn})t}}{i(z-\omega_{mn})} \right]_0^\infty = \frac{i}{z-\omega_{mn}}$$

$$\int_0^\infty \mathcal{U}_{BA}(t) e^{izt} dt = \int_0^\infty \mathcal{U}_{BA}(t) e^{izt} dt = -\frac{1}{\hbar} \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_n + -\beta E_m}}{Z} \langle n | B | m \rangle \langle m | A | n \rangle$$

egén z síkon értelmezni

$z = \omega_{mn} = \frac{1}{\hbar} (E_m - E_n)$ a polusok

csak a $\text{Im } z > 0$ -ra Fourier

allapot oszlop

Állapotok energiái:

$\frac{\langle n | B | m \rangle \langle m | A | n \rangle}{z - \omega_{mn}}$
Simplex naiv

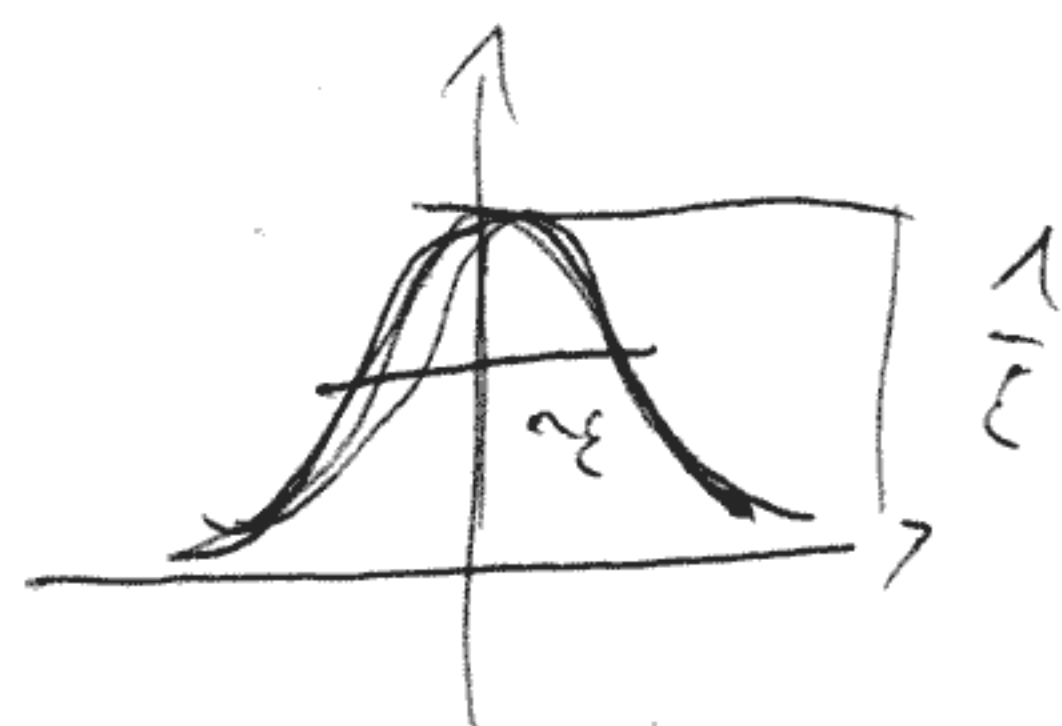
száloktási szabályok: csak akkor vannak pólusok

ha $\langle n|B|m\rangle \langle m|A|n\rangle \neq 0$ és akkor átmenet van

az adott n-esi bázisállással nem lehet megmérni az ~~az~~ eger spektrumát

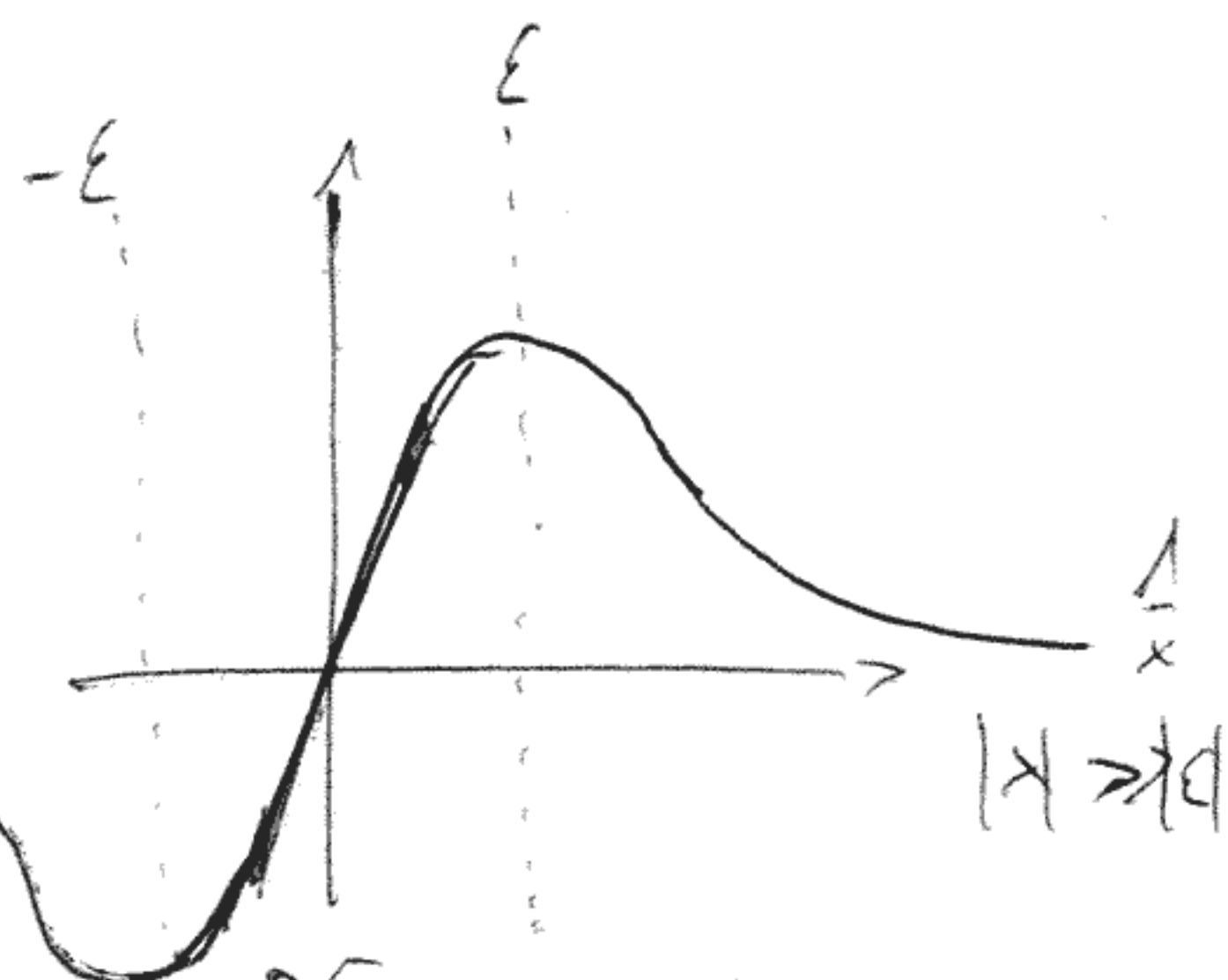
a valós frekvencián:

$$\chi_{BA}(\omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \chi_{BA}(\omega + i\epsilon)$$



$$\frac{1}{x \pm i\epsilon} = \frac{x \mp i\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} \mp i \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$$

Lorentz-görbe



$\downarrow$
 $P \frac{1}{x}$
főérték

$$\int_{-\infty}^{\infty} P \frac{1}{x} f(x) dx = \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx \right)$$

$\epsilon \rightarrow 0$

$\underbrace{\frac{1}{x \pm i\epsilon}}_{\text{az } 0 \rightarrow + \text{ ad integrálás}}$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} = \text{delta}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\frac{1}{\epsilon} + \left(\frac{x}{\epsilon}\right)^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{1}{1+s^2} = [\arctan s]_{-\infty}^{\infty} = \pi \end{aligned}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x \pm i\epsilon} = P \frac{1}{x} \mp i\pi \delta(x)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \chi_{BA}(\omega + i\epsilon) = -\frac{1}{k} \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m}}{2} \langle n|B|m\rangle \langle m|A|n\rangle$$

$$\left(P \frac{1}{\omega - \omega_{mn}} - i\pi \delta(\omega - \omega_{mn}) \right)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \chi_{BA}(u+i\epsilon) = \chi'_{BA}(u) + i \chi''_{BA}(u)$$

Sasdi2
11.23

$\uparrow$ $\uparrow$
 P tagozat δ tagozat

prae mivel a mátrixelemeiről nem lehet tudni
h. komplex v. valós ezért ez nem a valós és a
képzetes részekből áll

de pl ha $B=A$

$$\langle u|A|u \rangle \langle u|A|u \rangle = |\langle u|A|u \rangle|^2$$

ilyeskor valóban a valós és a képzetes rész

hiszt látni fogjuk, hogy az időtüközési tulajdonságok
alapján meg lehet mondani, hogy melyek képzetes és a
valós rész.

Ha B megmaradó mennyiség

$$[B, H] = 0 \quad B(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H t} \cdot B \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} H t} = B$$

(ez nem a teljes H) $[B(t), A] = [B, A]$

$$\chi_{BA}(t) = \frac{i}{\hbar} \text{Tr} \left(\frac{e^{-\beta H}}{Z} (BA - AB) \right) = 0 \quad \text{megmaradó mennyiség}$$

$$\text{Tr} \left(\underbrace{e^{-\beta H}}_1 A B \right) = \text{Tr} \left(e^{-\beta H} B A \right) \rightarrow$$

lin. váltása 0.

tehát perturbáció hatására
nem lesz lineáris váltás
csak magasabb rendben.

pl.: H

$$\langle H \rangle_\epsilon - \langle H \rangle_0 \sim O(\epsilon^2)$$

$\uparrow$
 zérusértékű átlag

perturbáció

izoterm statisztikus valószínűség esetén a megmaradó mennyiség
 valószínűségi O_j ami egy random, az előző eredmények szerint

$$H' = H - A f \quad f \text{ idővel függően változik}$$

Lásd előző feladot
 MSc Statistika I. feladat
 Sasvári L. 10/11-1

$$\langle B \rangle_{H'} = \chi_{BA}^T$$

$$\chi_{BA}^T = \int_0^{\beta} \langle A(\tau) B \rangle d\tau$$

f -ben lineáris változó
 H' -és egyenlőség várható érték

$$A(\tau) = e^{\tau H} A e^{-\tau H}$$

ha $[B, H] = 0$

$$\text{Tr} \left(e^{-\beta H} e^{\tau H} A e^{-\tau H} B \right) = \text{Tr} \left(e^{-\beta H} A B \right) = \text{Tr} \left(e^{-\beta H} B A \right)$$

$$\chi_{BA}^T = \frac{\langle BA \rangle}{k_B T}$$

izoterm valószínűségi sorban megvárjuk
 az egyenlőséget, ami időt hagy
 a környezetével való kölcsönhatásra
 adiabatikusán csak a zavarral
 hat kölcsön azaz van ez

Következő lépés megvárjuk a diszipációt

$$\overline{W} = \frac{f_{\omega}^2}{2} \omega \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m}}{Z} |\langle n|A|m\rangle|^2 \frac{\pi}{\hbar} \delta(\omega - \omega_{mn}) \geq 0$$

$$\chi''_{AA} = \text{Im} \chi_{AA}$$

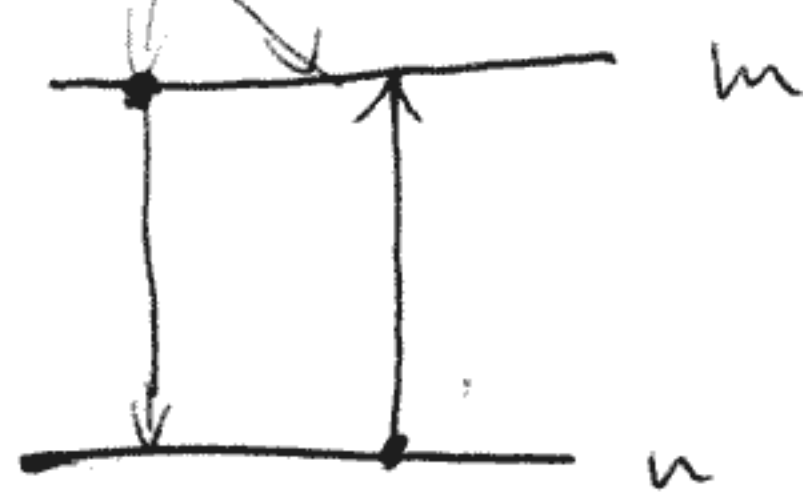
$$\left(\frac{e^{-\beta E_n}}{Z} - \frac{e^{-\beta E_m}}{Z} \right) (E_m - E_n) \geq 0$$

ebben a sorolásban energiát van fel a rendszer, ha a gerjesztés frekvenciája megegyezik a gerjeszthető energiákkal

oda - vissza energiát is kölcsönöz és van időátlagolás?

$$\overline{W} = \sum_{n,m} \left(\frac{e^{-\beta E_n}}{Z} - \frac{e^{-\beta E_m}}{Z} \right) \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{f_{\omega}}{2} \right)^2 |\langle n|A|m\rangle|^2 \delta(\hbar\omega - (E_m - E_n))$$

ez a való



Fermi-féle arányossági

ez az egyenlet az energiát nem tartalmazó valószínűség vagy micsoda

Operátorok korrelációs függvényei

$$S_{BA}(t) = \langle B(t)A(0) \rangle \neq \hat{S}_{BA}(t) = \langle A(0)B(t) \rangle$$

$$C_{BA}(t) = \frac{1}{2} \langle B(t)A(0) + A(0)B(t) \rangle$$

$$\phi_{BA}(t) = \frac{i}{\hbar} \langle B(t)A(0) - A(0)B(t) \rangle$$

a 4 sorított
csak 2 db
figyeltlen
van

||
bizonyítható, h
valójában csak 1
figyeltlen van

$$S_{BA} = \text{Tr} \left(\frac{e^{-\beta H}}{Z} B(t) A(0) \right) = \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_n}}{Z} \langle n|B|m \rangle \langle m|A|n \rangle e^{-i\omega_{mn}t}$$

$$\hat{S}_{BA} = \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_n}}{Z} \langle m|A|n \rangle \langle n|B|n \rangle e^{-i\omega_{mn}t}$$

Fourier-tr.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} = \int_{-\infty}^0 dt e^{i\omega t} e^{\epsilon t} + \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} e^{-\epsilon t} = 2 \text{Re} \left[\int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} e^{-\epsilon t} \right]$$

regularization
($\epsilon \rightarrow 0$)

↗
wertes von $\epsilon = -\epsilon'$
 $\int_0^{\infty} dt' e^{-i\omega t'} e^{-\epsilon' t'}$

$$= 2 \text{Re} \left[\frac{1}{\epsilon - i\omega} \right] = 2 \text{Re} \left(\frac{\epsilon + i\omega}{\omega^2 + \epsilon^2} \right) = 2 \frac{\epsilon}{\omega^2 + \epsilon^2} \underset{\epsilon \rightarrow 0}{=} 2\pi \delta(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} e^{-i\omega_{mn}t} = 2\pi \delta(\omega - \omega_{mn})$$

$$S_{BA}(\omega) = \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_n}}{Z} \langle n|B|m \rangle \langle m|A|n \rangle 2\pi \delta(\omega - \omega_{mn})$$

$$\hat{S}_{BA}(\omega) = \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_n}}{Z} \langle n|B|m \rangle \langle m|A|n \rangle 2\pi \delta(\omega - \omega_{mn})$$

$$e^{-\beta E_m} = e^{-\beta E_n} e^{-\beta(E_m - E_n)} = e^{-\beta E_n} e^{-\beta \hbar \omega_{mn}}$$

↑
• δ es ist diskretes
nicht $\omega_{mn} = \omega$

$$\hat{S}_{BA}(\omega) = e^{-\beta \hbar \omega} S_{BA}(\omega)$$

↖
bärmes. für ω und ω_{mn}

$$C_{B+A}(\omega) = \frac{1}{2} (S_{B+A}(\omega) + \hat{S}_{B+A}(\omega)) = \frac{1}{2} (1 + e^{-\beta \hbar \omega}) S_{B+A}(\omega)$$

$$\varphi_{B+A}(\omega) = \frac{i}{\hbar} (S_{B+A}(\omega) - \hat{S}_{B+A}(\omega)) = \frac{i}{\hbar} (1 - e^{-\beta \hbar \omega}) S_{B+A}(\omega)$$

$\uparrow$
 $\int_{-\beta}^{\beta} -y$ Fourier

de Schrödinger $\int_0^{\beta} -y$ nel mezzo

$$\chi_{B+A}(\omega) = \int_0^{\beta} dt e^{i\omega t} \varphi_{B+A}(t) = \chi'_{B+A}(\omega) + i \chi''_{B+A}(\omega)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{B+A}(\omega) &= \frac{i}{\hbar} \sum_{nm} \frac{e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m}}{2} \langle n | B | m \rangle \langle m | A | n \rangle \cdot 2\pi \delta(\omega - \omega_{mn}) = \\ &= 2i \chi''_{B+A}(\omega) \quad (\text{last Schrödinger}) \end{aligned}$$

$$\frac{C_{B+A}(\omega)}{\chi''_{B+A}(\omega)} = \frac{\frac{1}{2} (1 + e^{-\beta \hbar \omega}) S_{B+A}(\omega)}{\frac{1}{2i} \frac{c}{\hbar} (1 - e^{-\beta \hbar \omega}) S_{B+A}(\omega)}$$

Situatione dissipativa:

$$C_{B+A}(\omega) = \frac{1}{\hbar} \frac{1 + e^{-\beta \hbar \omega}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}} \chi''_{B+A}(\omega) = \frac{1}{\hbar} \coth\left(\frac{\beta \hbar \omega}{2}\right) \chi''_{B+A}(\omega)$$

$$C_{A+A}(\omega) = \frac{1}{\hbar} \coth\left(\frac{\beta \hbar \omega}{2}\right) \underbrace{\chi''_{A+A}(\omega)}_{\text{dissipazione}}$$

$\uparrow$
 $\uparrow$
 due fluttuazioni

időtükörös

$$t \rightarrow -t$$

$$A \rightarrow \epsilon_A A \quad \epsilon_A = 1 \text{ v. } -1 \quad (\text{pl.: impulzus } -1, \text{ koordináta } +1)$$

időtükörös szimmetria megjelölés a korrelációs fu. -ban is
(evenly)

$$\langle B(t) A(0) \rangle = \epsilon_B \epsilon_A \langle A(0) B(-t) \rangle = \epsilon_B \epsilon_A \langle A(t) B(0) \rangle$$

$$\begin{aligned} \varphi_{BA}(t) &= \frac{i}{\hbar} (\langle B(t) A(0) \rangle - \langle A(0) B(t) \rangle) = \frac{i}{\hbar} (\langle A(0) B(t) \rangle - \\ &\langle B(-t) A(0) \rangle) \epsilon_B \epsilon_A = \frac{i \epsilon_B \epsilon_A}{\hbar} (\langle A(t) B(0) \rangle - \langle B(0) A(t) \rangle) \end{aligned}$$

$$\varphi_{BA}(t) = -\epsilon_A \epsilon_B \varphi_{BA}(-t) = \epsilon_B \epsilon_A \varphi_{AB}(t)$$

$$\chi_{BA}(z) = \epsilon_B \epsilon_A \chi_{AB}(z)$$

$$\varphi_{BA}(u) = \int_0^\infty dt e^{iut} \varphi_{BA}(t) + \int_{-\infty}^0 dt e^{iut} \varphi_{BA}(t) \quad t = -t'$$

↓
két Fourier

széledelés Fourier: a valós fu.
 $\chi_{BA}(u)$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dt' e^{-iut'} \varphi_{BA}(-t') &= \\ = \int_0^\infty dt e^{-iut} (-\epsilon_A \epsilon_B) \varphi_{BA}(t) &= \\ = -\epsilon_A \epsilon_B \chi_{BA}(-u) &= \\ \chi_{BA}^*(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{BA}(u) &= \chi_{BA}(u) - \epsilon_A \epsilon_B \chi_{BA}^*(u) = \begin{cases} 2i \operatorname{Im} \chi_{BA}(u) & \text{ha } \epsilon_A \epsilon_B = 1 \\ i 2 \operatorname{Re} \chi_{BA}(u) & \text{ha } \epsilon_A \epsilon_B = -1 \end{cases} \\ \varphi_{BA}(u) &= 2i \chi_{BA}''(u) \end{aligned}$$

$$\chi_{BA}''(u) = \begin{cases} \operatorname{Im} \chi_{BA}(u) & \epsilon_A \epsilon_B = 1 \quad (\text{azonos módok transformál}) \\ \frac{1}{i} \operatorname{Re} \chi_{BA}(u) & \epsilon_A \epsilon_B = -1 \quad (\text{ellentétes módok transformál}) \end{cases}$$

$$C_{BA}(\omega) = k \operatorname{cth} \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \operatorname{Im} X_{BA}(\omega) \quad \text{ha } \epsilon_+ \epsilon_- = 1$$

⇓
 eller velos es paros
 $C_{BA}(\omega)$

$$C_{BA}(\omega) = k \operatorname{cth} \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \frac{1}{i} \operatorname{Re} X_{BA}(\omega) \quad \text{ha } \epsilon_+ \epsilon_- = -1$$

⇓
 eller Conda spets es paratlan
 $C_{BA}(\omega)$

Klassikus határeset:

$$\hbar \omega \ll k_B T$$

$$\operatorname{cth} x \approx \frac{1}{x} \quad x \ll 1$$

$$C_{BA}(\omega) = \frac{2 k_B T}{\omega} X''_{BA}(\omega) \quad \text{de } \text{his fizesen iljen mindg van} \\ \text{ha van a' tmeant}$$

ha a sziválasztási
 málajal olyan, akkor
 lehet olyan, hogy a klasszikus
 van dandálpa $C_{BA} - t$

⇓
 szonduralt anyagban ninte mindg van
 a folytonos spektrum miatt

$$C_{BA}(\omega) = \frac{2 k_B T}{\omega} X''_{BA}(\omega) = \frac{2 k_B T}{\omega} \frac{\varphi_{BA}(\omega)}{2i} = \frac{k_B T}{i\omega} \varphi_{BA}(\omega)$$

⇓
 vissza Fourier

$$\varphi_{BA}(\omega) = \frac{i\omega C_{BA}(\omega)}{k_B T}$$

⇓
 ez van monossag arit hatlakues:

$$\varphi_{BA}(t) = -\frac{1}{k_B T} \frac{\partial C_{BA}(t)}{\partial t} = -\frac{1}{k_B T} \langle \dot{B}(t) A(0) \rangle$$

$$X_{BA}(t) = \begin{cases} -\frac{1}{k_B T} \frac{\partial C_{BA}(t)}{\partial t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\langle B(t) A(0) \rangle = \langle B(t) A(-t) \rangle$$

$$\langle \dot{B}(t) A(0) \rangle = - \langle B(0) \dot{A}(-t) \rangle = - \langle B(t) \dot{A}(0) \rangle$$

$$\chi_{BA}(t) = \frac{1}{k_B T} \langle B(t) \dot{A}(0) \rangle$$

összegeznélve (his $t \rightarrow s$ cserélhető)
"növel idő"

$$\chi_{BA}(t) = \frac{i}{\hbar} \langle [B(t) A(0)] \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \underbrace{\chi_{BA}(\omega)}_{2i\chi''_{BA}(\omega)} e^{-i\omega t}$$

$t=0$

$$\chi_{BA}(t=0) = \frac{i}{\hbar} \langle [B, A] \rangle = \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \chi''_{BA}(\omega) d\omega$$

"Dirac-delta" van az itten

$$\frac{i}{\hbar} \langle [B, A] \rangle = \frac{1}{\pi} \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m}}{E_n - E_m} \langle n | B | m \rangle \langle m | A | n \rangle \frac{\pi}{\hbar}$$

"erő gátlóan kényszer" kényszerít
amivel kibeküldhető az előző integrál elvégzése

$$\chi_{BA}(t=0) = \frac{i}{\hbar} \langle [B, A] \rangle = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega) \chi''_{BA}(\omega) d\omega$$

ez van: frekvencia momentum
errel a módszerrel több
momentum is mérhető

$$\chi_{MA}(z) = \int_0^{\infty} dt e^{izt} \varphi_{MA}(t) = \left[\frac{e^{izt}}{iz} \varphi_{MA}(t) \right]_0^{\infty} - \frac{1}{iz} \int_0^{\infty} dt e^{izt} \dot{\varphi}_{MA}(t)$$

$\ln z > 0$ ↑
levegő a végtelenben erem is lehet
parcialisan
nyomni, amit a
végtelesejéig lehet
nyomni

$$e^{izt} = e^{i \operatorname{Re} z t} e^{-\ln z t}$$

$$- \frac{\varphi_{MA}(t=0)}{iz}$$

$$\chi_{MA}(z) = - \frac{\varphi_{MA}(0)}{iz} + \frac{\dot{\varphi}_{MA}(0)}{(iz)^2}$$

$\frac{1}{iz}$ $\Rightarrow$ írni aszimptotikus sor
ha $|z| \gg 1$

ezt a követendő lépés rátoljuk az
elektromos vezetésre

$$\chi_{BA}(z) = -\frac{1}{h} \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m}}{z} \langle n|B|m \rangle \langle m|A|n \rangle \frac{1}{z - \omega_{mn}} \quad (1)$$

$$\chi_{BA}''(\omega) = \frac{1}{h} \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m}}{z} \langle n|B|m \rangle \langle m|A|n \rangle \pi \delta(\omega - \omega_{mn}) \quad (2)$$

$$\chi_{BA}(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\chi_{BA}''(\omega')}{z - \omega'}$$

$\chi_{BA}(z)$: Fourier transzform $\chi_{BA}(t)$ -re $\text{Im } z > 0$, de az
alsó félkörön is értelmes és meromorf

de ez a avanzsált valószínűség Fourier-transzform $\chi_{BA}(z)$ az
alsó félkörön

Rövid felgyutató gáztörési spektrum
 $\chi_{BA}''(\omega)$

 a sok dirac-delta szinál hálóját: $\overline{\chi_{BA}''}(\omega)$

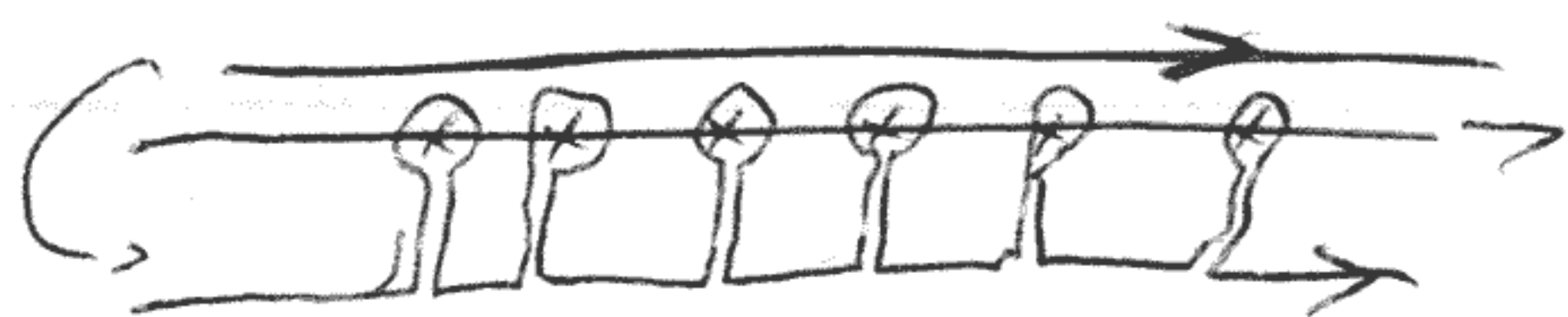
$$\overline{\chi_{BA}''} \Delta\omega = \int_{\omega}^{\omega+\Delta\omega} \chi_{BA}''(\omega') d\omega'$$

$$\chi_{BA}(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\overline{\chi_{BA}''}(\omega')}{z - \omega'} \quad \text{Im } z > 0 \quad \chi_{BA}(t) \text{ Fourier-transzform}$$

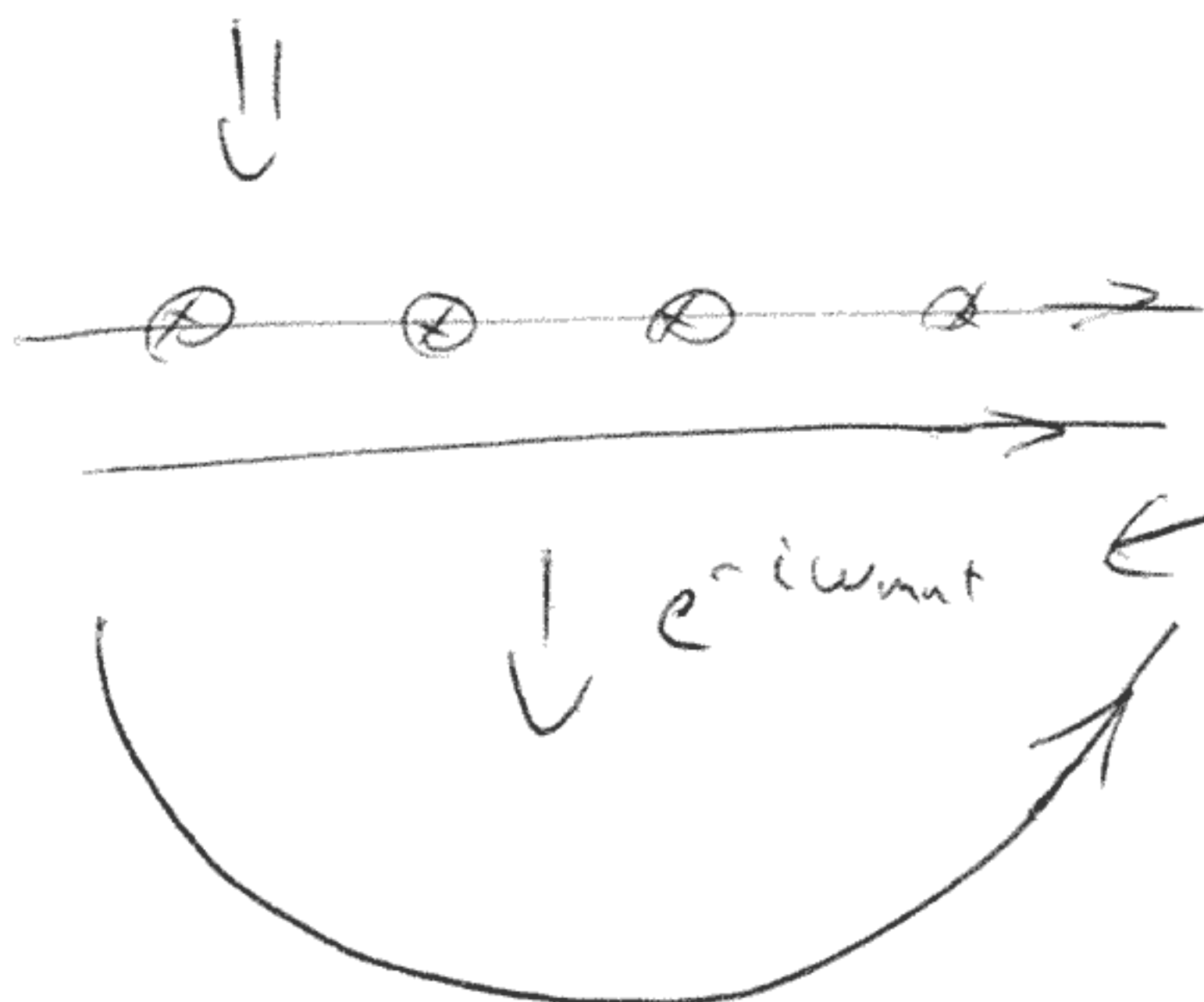
$$\chi_{BA}(t = \omega \pm i\epsilon) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\chi_{BA}''(\omega')}{\omega - \omega'} \pm i\pi \overline{\chi_{BA}''}(\omega)$$

a sok szinguláris pont $\rightarrow$ azaz ω -nál
ugyanezen $\text{Im } z = 0$ -nál
szingularitásai

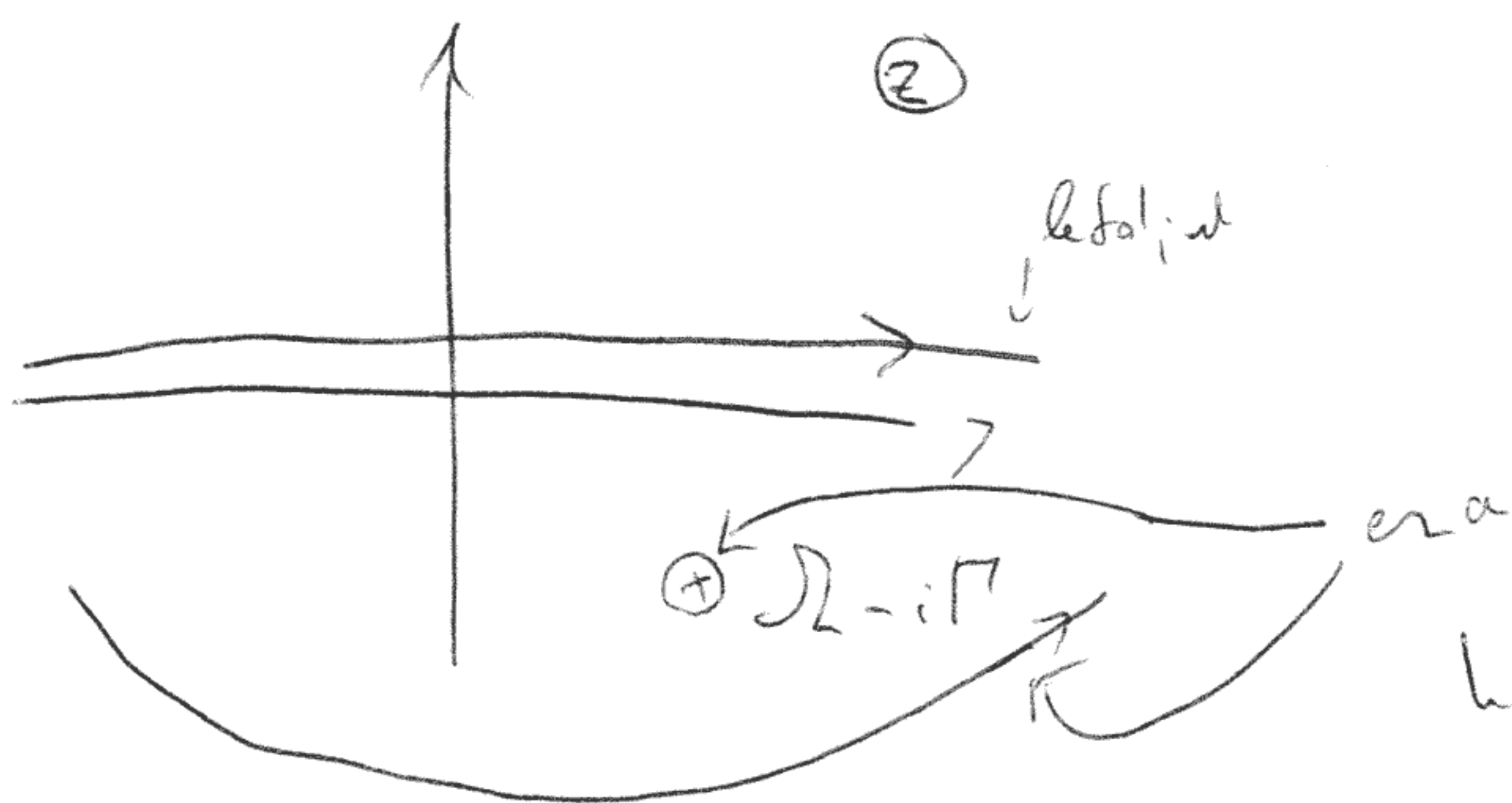
viszta transformálás időbe:



eltolva lefelé a szandék



stabil gerjesztés



Ω adja a teljes integrál

ha dinamikusan a jelét vizsgáljuk
a jelét akkor a szandék szandék
a pólus

$$pl.: \frac{1}{2\pi} \oint_{\alpha} dz e^{-izt} \frac{\Omega}{z - (\Omega - i\Gamma)}$$

$$pólus: -2\pi i \frac{1}{2\pi} \Omega e^{-i(\Omega - i\Gamma)t} = -i\Omega e^{-i\Omega t} e^{-\Gamma t}$$

Ω -végső időtartamú gerjesztés
 Ω energiája $\frac{1}{\Gamma}$ időtartam

Szandékfokozat csak akkor van a valódi gerjesztéssel
hanem lecsengő gerjesztéssel

vége az általános formájának

e töltésű részecskék, $E(t)$ homogén térerő

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} - \sum_{i=1}^N e \cdot \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{E}$$

polárisáció $\underline{P} = e \sum_i \mathbf{r}_i$

áram $\underline{J} = e \sum_i \mathbf{v}_i = e \sum_i \frac{\mathbf{p}_i}{m} = \underline{\dot{P}}$

$$B \rightarrow \underline{J}$$

$$A \rightarrow \underline{P}$$

$$f \rightarrow \underline{E(t)}$$

korlátok:

- nincs viselkedés
- az időben változó $\underline{E}$ részecske-sorok nem homogén
- $\lambda \gg L \Rightarrow L \ll \text{rendszert}$
↑
E.M. ter elhanyagolható

izotrop rendszer

$$\langle \underline{P} \rangle \propto \underline{E}$$

$$\langle \underline{J} \rangle \propto \underline{E}$$

formálisabb alakok

$$\chi_{JP}(t) = \int_{-\infty}^t \chi_{JP}(t-t') E(t') dt'$$

$$\chi_{JP}(t) = \frac{i}{\hbar} \langle [\mathcal{J}(t), \mathcal{P}(0)] \rangle \quad (t > 0)$$

áramsűrűség: $\underline{j} = \frac{\underline{J}}{V}$

$$\langle \underline{j} \rangle = \frac{1}{V} \int_{-\infty}^t \chi_{JP}(t-t') E(t') dt'$$

$$\sigma(t) = \frac{1}{V} \chi_{JP}(t) = \int_{-\infty}^t \sigma(t-t') E(t') dt'$$

előfeltételek: $\epsilon_j = -1$

$\epsilon_p = 1$

$$\chi''_{jp}(\omega) = \frac{1}{\epsilon} \operatorname{Re} \chi_{jp}(\omega) = \frac{V}{\epsilon} \operatorname{Re} \sigma(\omega)$$

$$\chi_{jp}(t) = \frac{i}{\hbar} \left\langle \left[\underset{\uparrow}{\dot{p}(t)}, p(0) \right] \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \chi_{pp}(t)$$

$$\chi_{jp}(\omega) = -i\omega \chi_{pp}(\omega)$$

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t)$$

diszipáció: ~~Balozs~~

$$\begin{aligned} \overline{W} &= \frac{E_0^2}{2} \omega \operatorname{Im} \chi_{pp}(\omega) = \frac{E_0^2}{2} \omega \chi''_{pp}(\omega) = \frac{E_0^2}{2} \frac{1}{-i} \chi''_{jp}(\omega) = \\ &= V \frac{E_0^2}{2} \operatorname{Re} \sigma(\omega) \end{aligned}$$

összehangoltság:

$$\langle p_{jt}(t=0) \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [p_j, A] \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{jt}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2i \chi''_{jt}(\omega) d\omega$$

jobb oldal:

$$\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \chi''_{jp}(\omega) d\omega = \frac{V}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \sigma(\omega) d\omega$$

bal oldal

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar} \left\langle \left[\sum_i \frac{p_i}{m}, e \sum_j x_j \right] \right\rangle &= \frac{i}{\hbar} \frac{e^2}{m} \left\langle \sum_i \underbrace{[p_i, x_j]}_{\substack{\delta_{ij} \frac{\hbar}{i}}} \right\rangle = \\ &= \frac{e^2}{m} N \end{aligned}$$

$$n = \frac{N}{V}$$

$$\frac{ne^2}{m} = \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \sigma(\omega) d\omega$$

universális mennyiség (nem függ a rendszer konkrét tulajdonságaitól)

mi a σ ?

- ① klassieke Lorentz $\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \text{ebbel neg het smelt}
 ② relaxatiedo Lorentz$

Klassiek

$$\chi_{sp}(t) = -\frac{1}{2T} \langle \dot{f}(t) p(0) \rangle = \frac{1}{2T} \langle \dot{f}(t) f(0) \rangle$$

$$= \frac{1}{2T} \langle \dot{f}(t) f(0) \rangle$$

$\uparrow$
 $\dot{f}(0)$

$t \rightarrow \infty \quad \langle \dot{f}(t) f(0) \rangle \rightarrow 0$ (magnetoet loeg niet of sell)
 leggemiddelen idijgen a relax van span

$$\langle \dot{f}(t) f(0) \rangle = \langle \dot{f}^2 \rangle e^{-|t|/\tau} \quad (2)$$

$$\langle \dot{f}^2 \rangle = \left\langle \left(\sum_i e v_i \right) \left(\sum_j e v_j \right) \right\rangle = e^2 \sum_{ij} \langle v_i v_j \rangle = N e^2 \frac{k_B T}{m}$$

$\uparrow$
Maxwell

$$\langle \dot{f}(t) f(0) \rangle = \frac{N e^2}{m} k_B T e^{-|t|/\tau}$$

$$\sigma(t) \stackrel{t>0}{=} \frac{1}{V} \chi_{sp}(t) = \frac{1}{V k_B T} \langle \dot{f}(t) f(0) \rangle = \frac{n e^2}{m} e^{-t/\tau}$$

$$\sigma(\omega) = \int_0^\infty dt e^{i\omega t} e^{-t/\tau} \frac{n e^2}{m} = \frac{n e^2}{m} \tau \frac{1}{1 - i\omega\tau}$$

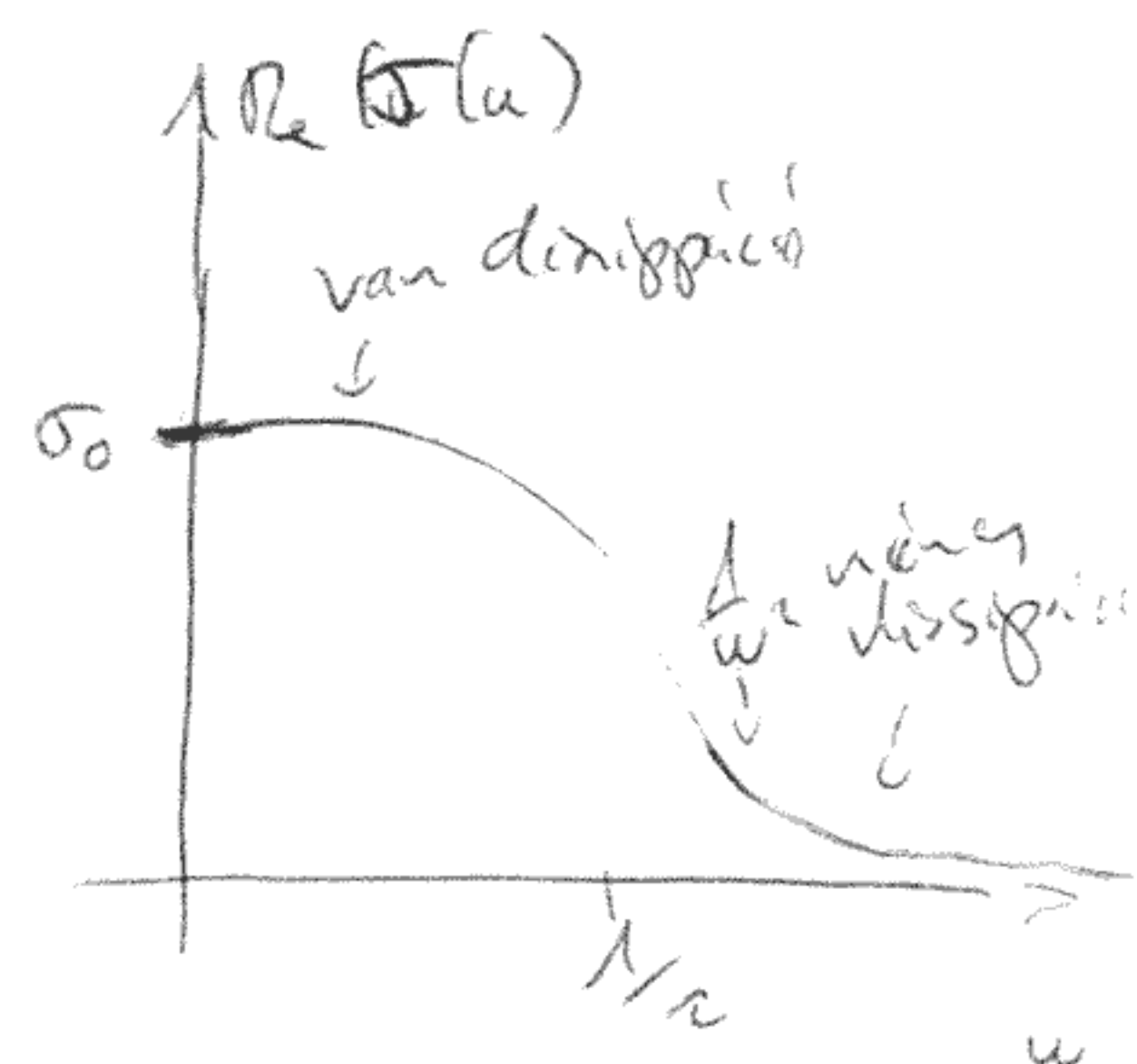
$\frac{1}{\frac{1}{\tau} - i\omega} = \frac{\tau}{1 - i\omega\tau}$

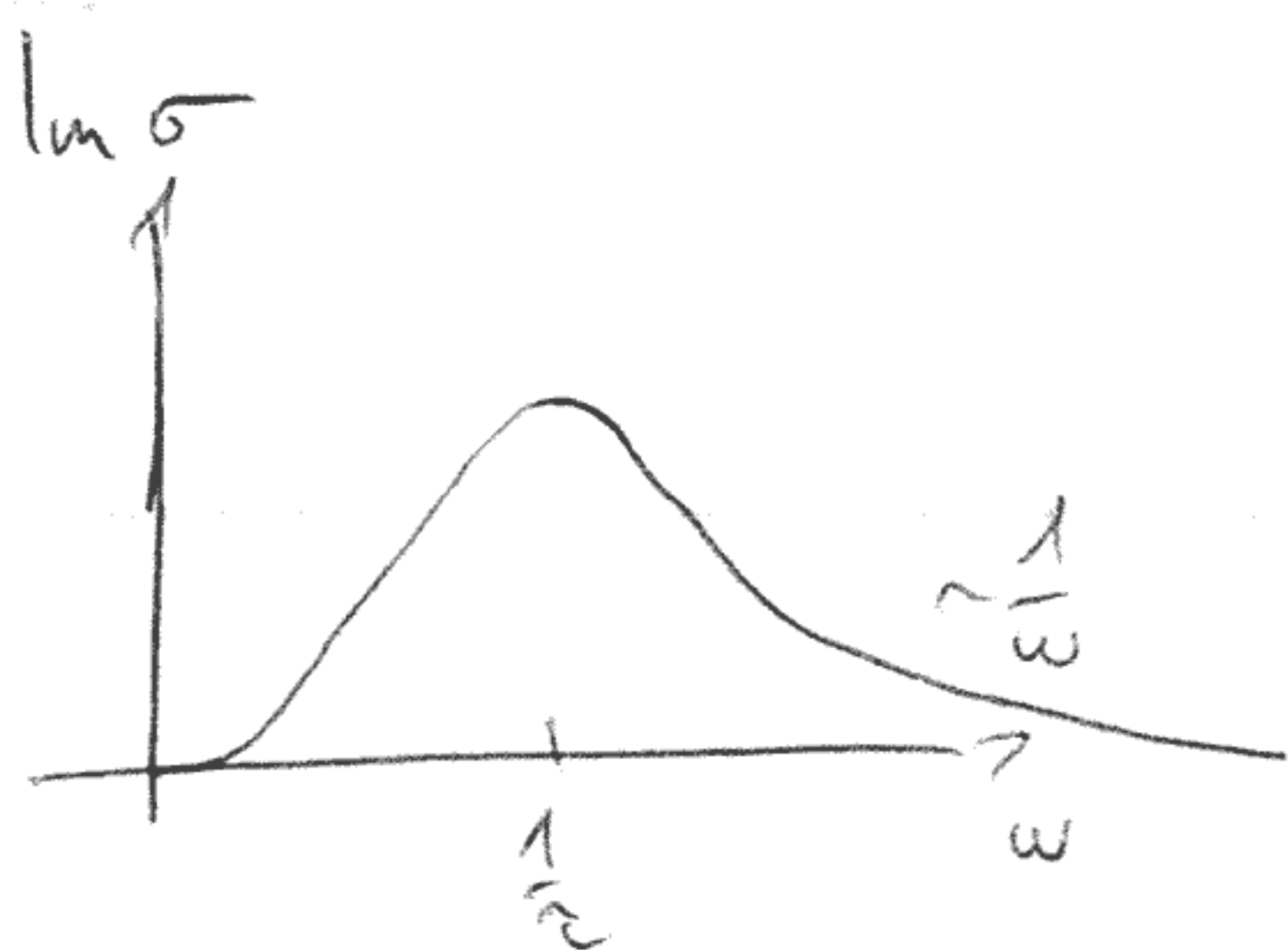
(Drude-model)
erelnege

$\omega=0$
(gevaar)

$$\sigma_0 = \frac{n e^2}{m} \tau$$

$$\text{Re } \sigma(\omega) = \sigma_0 \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2}$$





összeghatással jól lehet ellenőrizni az eredményt, jó leírás

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Re } \sigma(u) du = \frac{ue^2}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{ue^2}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{1+s^2} \quad \begin{matrix} s=u \\ \text{mindkét oldal} \end{matrix}$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{1+s^2}}_{[\arctan s]_{-\infty}^{\infty} = \pi} = \pi \frac{ue^2}{m}$$

reális részre átalakítható:

$$m \rightarrow m_{\text{eff}}$$

ilyenkor az önmeghatás nem teljesül, mert
nem létezik az ionokos elektronok

lokális operátor $A(x)$

Sűrűség: $\rho(x) = \sum_{i=1}^N \delta(x-x_i) = \psi^+(x)\psi(x)$ másképpen

átlagsűrűség: $\bar{\rho}(x) = \frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{p_i}{m} \delta(x-x_i) + \delta(x-x_i) \frac{p_i}{m} \right)$

Fourier-transzformált:

$$A(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_q e^{iqx} \hat{A}_q \quad \hat{A}_q = \frac{1}{\sqrt{V}} \int d^3r e^{-iqx} A(x)$$

$$\hat{A}_q = \frac{1}{\sqrt{V}} \int d^3r e^{-iqx} \sum_{i=1}^N \delta(x-x_i) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{i=1}^N e^{-iqx_i}$$

$$\hat{A}_q = \frac{1}{2\sqrt{V}} \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i}{m} e^{-iqx_i} + e^{-iqx_i} \frac{p_i}{m} \right)$$

$$\dot{S}_q = \frac{i}{\hbar} [H, S_q] = \frac{i}{\hbar} \left[\sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}, S_q \right]$$

$$\left[\sum_i \frac{p_i^2}{2m}, \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_j e^{-iqx_j} \right] = \sum_i \left[\frac{p_i^2}{2m}, e^{-iqx_i} \right] \frac{1}{\sqrt{V}}$$

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{2m} e^{-iqx} - e^{-iqx} \frac{p^2}{2m} &= \frac{1}{2m} \left(p e^{-iqx} p + p (-iq) e^{-iqx} \cdot \frac{\hbar}{i} - \right. \\ &\quad \left. - p e^{-iqx} p + \frac{\hbar}{i} (-iq e^{-iqx}) p \right) = \left[\frac{p^2}{2m}, e^{-iqx} \right] = \frac{\hbar}{i} (-iq) e^{-iqx} \\ &\Rightarrow = \frac{\hbar}{i} \frac{1}{2m} (-iq) \left(p e^{-iqx} + e^{-iqx} p \right) \end{aligned}$$

$$\dot{S}_q = \frac{1}{2m} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{V}} (-iq) \sum_i \left(\frac{p_i}{2m} e^{-iqx} + e^{-iqx} \frac{p_i}{2m} \right) = -iq \frac{1}{V} \sum_i p_i$$

es a $\hat{g}(x) = -\nabla \hat{\phi}(x)$ gemäß Fourier-Transform

Solter ilgeneral verind.

$$\langle A(x) \rangle = \langle A(x+a) \rangle = \langle A(x=0) \rangle \quad (\text{Translation})$$

$$\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_q e^{iqx} \langle A_q \rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_q e^{iqx} e^{iqa} \langle A_q \rangle$$

$$\langle A_q \rangle = e^{-iqa} \langle A_q \rangle \quad \text{etwos a erter}$$

$$\langle A_q \rangle = 0 \quad \text{for } q \neq 0$$

$$\langle B(x) A(x') \rangle = \langle B(x+a) A(x'+a) \rangle = \langle B(x-x') A(0) \rangle$$

$$\frac{1}{V} \sum_q \sum_{q'} e^{iqx} e^{iq'x} \langle B_q A_{q'} \rangle = \frac{1}{V} \sum_{q'} \sum_{q'} e^{iqx} e^{iq'x} e^{i(q+q')x} \langle B_q A_{q'} \rangle$$

$$\langle B_q A_{q'} \rangle = e^{i(q+q')x} \langle B_q A_{q'} \rangle$$

$$\langle B_q A_{q'} \rangle = 0 \quad \text{ha } q+q' \neq 0$$

$$\langle B_q A_{q'} \rangle = \delta_{q,-q'} \langle B_q A_{-q} \rangle$$

ent adárhagyjuk a korábbi megállapításokat, hogy a transzláció szimmetriájának eredményeként csak olyan átlag lehet nem 0 ha a rendszer invariáns a transzlációra.

Érdekes kérdés: m

$$\text{ha azaz} \quad -\int d^3x \, A(x) f(x, t)$$

halso' zavar : halso' potencial

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \sum_{i=1}^N \phi(r_i, t)$$

↑ minden részecske azonos potencial

$$\int d^3r \sum_{i=1}^N \delta(r-r_i) \phi(r_i, t) = \int d^3r \hat{\rho}(r) \phi(r, t)$$

↑ a zavar operátora

↑ zavar erőssége

$$\sum_q \hat{p}_q \phi_{-q}(t)$$

$$f = -\phi(r, t)$$

$$\langle p_q \rangle_t = \langle p_q \rangle_0 + \int_{-\infty}^t \chi_{SS}(q, t-t') (-\phi_q(t')) dt'$$

↑
csak a $q=0$ eset nem 0-t

$$\chi_{SS} = \frac{i}{\hbar} \langle [p_q(t), p_{-q}(0)] \rangle$$

ha ϕ halso' E-tör
adja χ_{SS} a dielektrikus
funkcióval??
szükség van
Sapora.

nézzük a Fourier-t.

$$\chi_{SS} \chi_{SS}(q, \omega) = \frac{i}{\hbar} \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m}}{Z} \langle n | p_q | m \rangle \langle m | p_{-q} | n \rangle 2\pi \delta(\omega - \omega_{nm})$$

$$|\langle n | p_q | m \rangle|^2$$

$$\chi''_{SS}(q, \omega) = \frac{\chi_{SS}}{2i}$$

$$S(q, t) = \langle p_q(t) p_{-q}(0) \rangle$$

$$\tilde{S}(q, t) = \langle p_{-q}(0) p_q(t) \rangle = \langle p_{-q}(t) p_q(0) \rangle = S(-q, -t)$$

$$\tilde{S}(q, \omega) = e^{i\hbar\omega} S(q, \omega) = S(-q, -\omega)$$

$$\langle g(x, t) g(0, 0) \rangle = \langle g(0, 0) g(x, -t) \rangle = \langle g(x, t) g(0, 0) \rangle = S(-x, t)$$

$$S(x, t) = S(-x, t) \Rightarrow S(q, t) = S(-q, t)$$

$$S(q, \omega) = S(-q, \omega)$$

$$\varphi(q, \omega) = \frac{i}{\hbar} (S(q, \omega) - \tilde{S}(q, \omega)) = \frac{i}{\hbar} (S(q, \omega) - S(q, -\omega))$$

összegyabalyoz.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(q, \omega) e^{-i\omega t} d\omega = \varphi(q, t) \quad \text{ebből es deriváltsból áll elő}$$

$$\varphi(q, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(q, \omega) d\omega = 0$$

↓

$$\frac{i}{\hbar} \langle [S_q, S_{-q}] \rangle = 0$$

$$\dot{\varphi}(q, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega) \varphi(q, \omega) d\omega$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega (S(q, \omega) - S(q, -\omega)) \omega =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega (-\omega) S(q, -\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega S(q, \omega)$$

$$= \frac{1}{\pi \hbar} \int_{-\infty}^{\infty} S(q, \omega) \omega d\omega$$

$$\dot{\varphi}(q, 0) = \frac{i}{\hbar} \langle [S_q, S_{-q}] \rangle = \frac{i}{\hbar} (-iq) \langle [S_q, S_{-q}] \rangle$$

$$S'_q = -i(q S_q)$$

$$[\hat{\phi}_q, \hat{\phi}_q] = \frac{1}{2V} \left(\sum_i \frac{\hat{p}_i}{m} e^{-iqx_i} + e^{-iqx_i} \frac{\hat{p}_i}{m} \right) \sum_j e^{iqx_j} - \sum_j e^{iqx_j} \sum_i \left(\frac{\hat{p}_i}{m} e^{-iqx_i} + e^{-iqx_i} \frac{\hat{p}_i}{m} \right) =$$

$$= \frac{1}{2V} \sum_i \left[\frac{\hat{p}_i}{m} e^{-iqx_i} e^{iqx_i} + e^{-iqx_i} \frac{\hat{p}_i}{m} e^{iqx_i} - e^{iqx_i} \frac{\hat{p}_i}{m} e^{-iqx_i} - e^{-iqx_i} \frac{\hat{p}_i}{m} e^{iqx_i} \right]$$

(azt az alhatárokat $\hat{p} = \epsilon$)

$$\left(e^{-iqx_i} \frac{\hat{p}_i}{m} + \frac{\hbar}{i} \frac{q(iq)}{m} e^{-iqx_i} e^{iqx_i} \right) - \left(e^{iqx_i} \frac{\hat{p}_i}{m} + \frac{\hbar}{i} \frac{q(-iq)}{m} e^{iqx_i} e^{-iqx_i} \right) = 2 \frac{\hbar}{m} q^2$$

$$[\hat{\phi}_q, \hat{\phi}_q] = \frac{1}{2V} 2 \frac{\hbar}{m} q^2 N$$

$$\hat{\phi}(q,0) = \frac{1}{\hbar} \langle [\hat{\phi}_q, \hat{\phi}_q] \rangle = \frac{1}{\hbar} \frac{N}{V} \frac{\hbar q^2}{m}$$

$$\frac{N}{V} \frac{\hbar q^2}{m} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(q, \omega) \omega d\omega$$

e2 egy
: összegre alakít
ami ráadásul állítás
híres is

ideális fém gáz ($s = \frac{1}{2}$)

Szfr

III. 16

és adódik továbbá a mágneses spin-suszeptibilitás (paramágneses)

$$\hat{d} = \sum_{\sigma} \epsilon_{\sigma} a_{\sigma}^{\dagger} a_{\sigma}$$

$m(r)$: mágnesesség sűrűsége komponense

$$m(r) = \underbrace{\hat{\mu}}_{\text{mágneses momentum}} \left(\psi_{\uparrow}(r) \psi_{\uparrow}(r) - \psi_{\downarrow}(r) \psi_{\downarrow}(r) \right)$$

$$\psi_{\uparrow}(r) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} a_{\mathbf{q}\uparrow}$$

$$m_2 = \frac{1 \cdot \hat{\mu}}{\sqrt{V}} \int e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} m(r) d^3r = \frac{1 \cdot \hat{\mu} \cdot 1}{\sqrt{V} \cdot V} \sum_{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{q}'} \int e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} e^{i\mathbf{q}' \cdot \mathbf{r}} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \cdot$$

$$(a_{\mathbf{q}\uparrow}^{\dagger} a_{\mathbf{q}'\uparrow} - a_{\mathbf{q}\downarrow}^{\dagger} a_{\mathbf{q}'\downarrow}) d^3r$$

periodikus határfeltétel

$$\int e^{i(-\frac{1}{2} - \mathbf{q} + \mathbf{q}') \cdot \mathbf{r}} d^3r = V \delta_{\mathbf{q}', \frac{1}{2} + \mathbf{q}}$$

$$m_2 = \frac{\hat{\mu} \cdot 1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{q}} (a_{\mathbf{q}\uparrow}^{\dagger} a_{\mathbf{q}+\frac{1}{2}\uparrow} - a_{\mathbf{q}\downarrow}^{\dagger} a_{\mathbf{q}+\frac{1}{2}\downarrow})$$

bedarabolandó az mágneses Töret : perturbáció $= - \int d^3r m(r) B(r,t) =$
 $= - \sum_{\mathbf{q}} m_{\mathbf{q}} B_{-\mathbf{q}}(t)$

$$\chi(\mathbf{q}, t) = \frac{i}{\hbar} \langle [m_{\mathbf{q}}(t), m_{-\mathbf{q}}(0)] \rangle$$

$$\langle m_{\mathbf{q}} \rangle_t = \int_{-\infty}^t \chi(\mathbf{q}, t-t') B_{-\mathbf{q}}(t') dt'$$

$$\hat{a}_{30} = \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}, a_{30}] = \frac{i}{\hbar} [\epsilon_2 a_{30}^\dagger a_{30} a_{30}] = -\frac{i}{\hbar} \epsilon_2 a_{30}$$

$$\underbrace{a_{30}^\dagger a_{30} a_{30}}_0 - \underbrace{a_{30} a_{30}^\dagger a_{30}}_{1 - a_{30}^\dagger a_{30}} = -a_{30}$$

$$a_{30} = a_{30} e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon_2 t}$$

$$a_{30}^\dagger = a_{30}^\dagger e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon_2 t}$$

$$m_2(t) = \frac{\hbar}{V} \sum_q (a_{q1}^\dagger a_{2+q1} - a_{q2}^\dagger a_{2+q2}) e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon_q t} \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar} (\epsilon_{2+q} - \epsilon_q) t}}_{e^{-\frac{i}{\hbar} (\epsilon_{2+q} - \epsilon_q) t}}$$

$$\chi(z, t) = \frac{\hbar^2}{V} \sum_{q, q'} e^{-\frac{i}{\hbar} (\epsilon_{2+q} - \epsilon_q) t} \cdot \frac{i}{\hbar} \langle [a_{q1}^\dagger a_{2+q1} - a_{q2}^\dagger a_{2+q2}], (a_{q'1}^\dagger a_{q-21} - a_{q'2}^\dagger a_{q-22}) \rangle =$$

$$= \frac{\hbar^2}{V} \sum_{q, q'} e^{-\frac{i}{\hbar} (\epsilon_{2+q} - \epsilon_q) t} \frac{i}{\hbar} \langle [a_{q1}^\dagger a_{2+q1}, a_{q'1}^\dagger a_{q-21}] + [a_{q2}^\dagger a_{2+q2}, a_{q'2}^\dagger a_{q-22}] \rangle$$

$$\underbrace{a_{q1}^\dagger a_{2+q1} a_{q'1}^\dagger a_{q-21}}_{\mathcal{J}_{q', q+2}^\dagger - a_{q'1}^\dagger a_{q+21}} - \underbrace{a_{q'1}^\dagger a_{q-21} a_{q1}^\dagger a_{2+q1}}_{\mathcal{J}_{q, q'-2}^\dagger - a_{q1}^\dagger a_{q'-2}} =$$

a bit fog u.a. csak a goal π
a válasz le

$$= \mathcal{J}_{q', q+2}^\dagger a_{q1}^\dagger a_{q1} - a_{q1}^\dagger a_{q1} \mathcal{J}_{q, q'-2}^\dagger - \underbrace{a_{q1}^\dagger a_{q1}^\dagger a_{q1} a_{q'-2}}_{(-a_{q1}^\dagger a_{q1})} + \underbrace{a_{q1}^\dagger a_{q1}^\dagger a_{q'-2} a_{q+2}}_{(-a_{q+2} a_{q'-2})}$$

$$(-a_{q1}^\dagger a_{q1}) (-a_{q+2} a_{q'-2})$$

0

az egy óráh
sokat hiányzott
lehet csak a
nagyon
sokan

$$\chi(\underline{k}, t) = \frac{2\bar{n}^2}{V} \sum_q e^{-\frac{i}{\hbar}(\epsilon_{k+q} - \epsilon_q)t} \left\langle \frac{i}{\hbar} \left(a_{q\uparrow}^\dagger a_{q\uparrow} - a_{q+2\uparrow}^\dagger a_{q+2\uparrow} + a_{q\downarrow}^\dagger a_{q\downarrow} - a_{q+2\downarrow}^\dagger a_{q+2\downarrow} \right) \right\rangle =$$

$$= \frac{2\bar{n}^2}{V} \sum_q e^{-\frac{i}{\hbar}(\epsilon_{k+q} - \epsilon_q)t} \left(f(\epsilon_q) - f(\epsilon_{k+q}) \right) \cdot \frac{i}{\hbar}$$

$$\langle a_{q\uparrow}^\dagger a_{q\uparrow} \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_q - \mu)} + 1} = f(\epsilon_q) \quad (\text{nagy szamok})$$

Ideális Fermi gáz

Szfn.
III.23

Spin-szurreptivitas

$$\chi(\underline{k}, t) = \frac{i}{\hbar} \frac{2\bar{n}^2}{V} \sum_q e^{-\frac{i}{\hbar}(\epsilon_{k+q} - \epsilon_q)t} \left(f(\epsilon_q) - f(\epsilon_{k+q}) \right) \quad t > 0$$

$$\mathcal{H} = \sum_q \epsilon_q a_{q\sigma}^\dagger a_{q\sigma}$$

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1}$$

Fourier-transzformáció

$$\int_0^\infty e^{-\frac{i}{\hbar}(\epsilon_{k+q} - \epsilon_q)t} e^{izt} dt = - \frac{1}{iz - \frac{i}{\hbar}(\epsilon_{k+q} - \epsilon_q)} \quad \text{Im } z > 0$$

$$\chi(\underline{k}, z) = - \frac{1}{\hbar} \frac{2\bar{n}^2}{V} \sum_q \frac{f(\epsilon_q) - f(\epsilon_{k+q})}{z - \frac{1}{\hbar}(\epsilon_{k+q} - \epsilon_q)}$$

Ha $\underline{k} = 0$ $\chi(\underline{k}=0, t) = 0$

minden f_z
pólusai vannak

megmaradó mennyiség a mágnesezettség

valós frekvenciás határesetek:

$$z = \omega + i\epsilon \quad \epsilon \rightarrow 0$$

$$\chi(\underline{k}, \omega) = - \frac{1}{\hbar} \frac{2\bar{n}^2}{V} \sum_q (f(\epsilon_q) - f(\epsilon_{k+q})) \cdot \left(P \frac{1}{\omega - \frac{1}{\hbar}(\epsilon_{k+q} - \epsilon_q)} - i\pi \delta\left(\omega - \frac{1}{\hbar}(\epsilon_{k+q} - \epsilon_q)\right) \right)$$

statikus válasz $\omega \rightarrow 0$

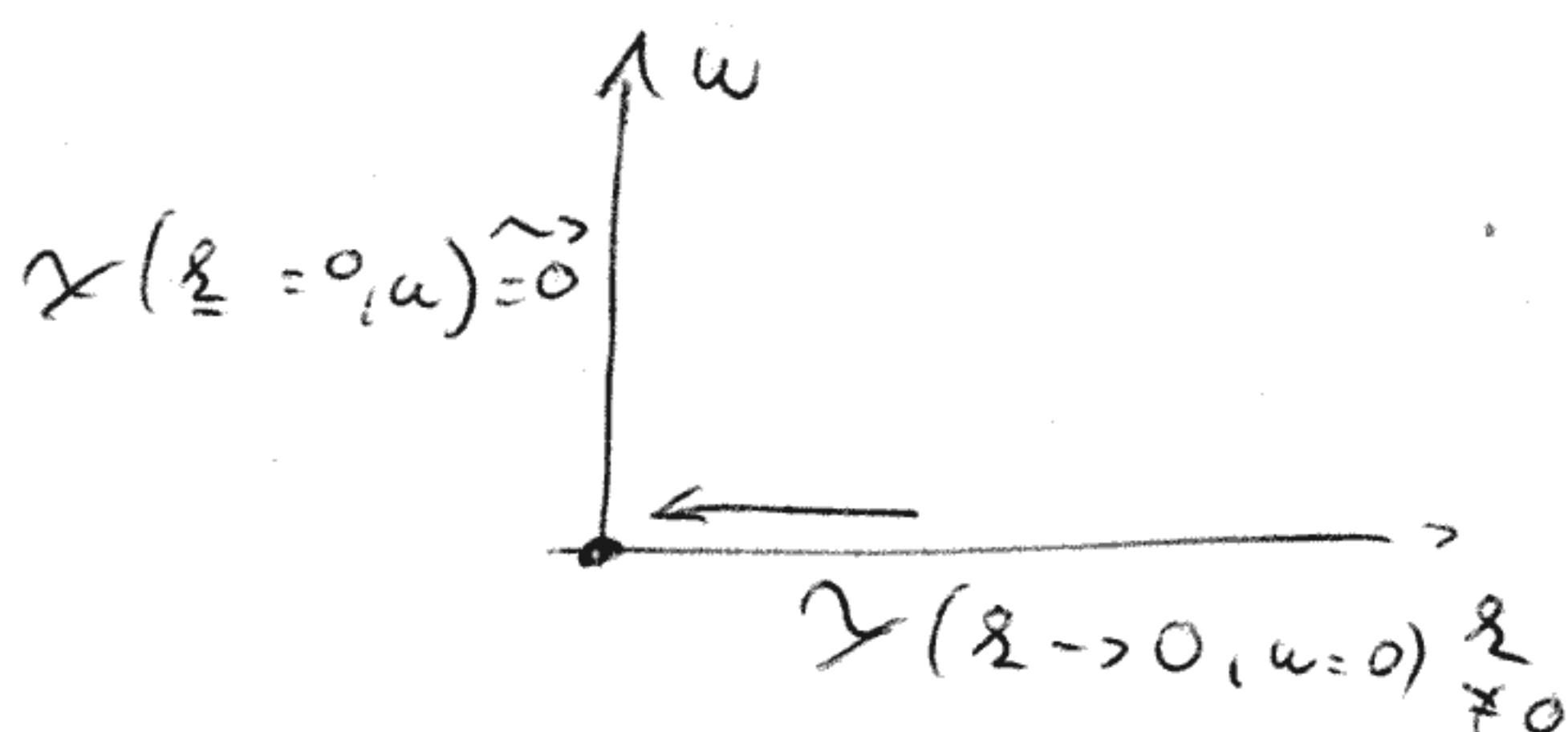
$$\text{Im } \chi(\underline{x}, \omega=0) = 0$$

$$\int \left(\frac{1}{\hbar} (\epsilon_{\underline{x}+\underline{q}} - \epsilon_{\underline{q}}) \right) \rightarrow \epsilon_{\underline{x}+\underline{q}} - \epsilon_{\underline{q}} \Rightarrow f(\epsilon_{\underline{q}}) - f(\epsilon_{\underline{x}+\underline{q}}) = 0$$

$$\text{Re } \chi(\underline{x}, \omega=0) = \frac{2\tilde{\mu}^2}{V} \sum_{\underline{q}} \frac{f(\epsilon_{\underline{q}}) - f(\epsilon_{\underline{x}+\underline{q}})}{\epsilon_{\underline{x}+\underline{q}} - \epsilon_{\underline{q}}}$$

$$f(\epsilon_{\underline{q}}) - f(\epsilon_{\underline{x}+\underline{q}}) \approx \left. \frac{\partial f(\epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon_{\underline{q}}} (\epsilon_{\underline{q}} - \epsilon_{\underline{x}+\underline{q}})$$

$$\underline{x} \rightarrow 0 \quad \text{Re } \chi(\underline{x} \rightarrow 0, \omega=0) = - \frac{2\tilde{\mu}^2}{V} \sum_{\underline{q}} \left. \frac{\partial f(\epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon_{\underline{q}}}$$



izotróp statikus susceptibilitás

homogén mágneses tér $B \uparrow$ $\underline{q} = \tilde{\mu} B$

$$\mu = V \cdot m = \tilde{\mu} \sum_{\underline{q}} (\langle a_{\underline{q}\uparrow}^\dagger a_{\underline{q}\uparrow} \rangle - \langle a_{\underline{q}\downarrow}^\dagger a_{\underline{q}\downarrow} \rangle) = \tilde{\mu} \sum_{\underline{q}} (f(\epsilon_{\underline{q}} - \tilde{\mu} B) - f(\epsilon_{\underline{q}} + \tilde{\mu} B))$$

$$\approx \tilde{\mu} \sum_{\underline{q}} \left. \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon_{\underline{q}}} (-\tilde{\mu} B) \cdot 2$$

$$\mu = - \frac{2\tilde{\mu}^2}{V} \sum_{\underline{q}} \left. \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon_{\underline{q}}} \cdot B$$

χ_T

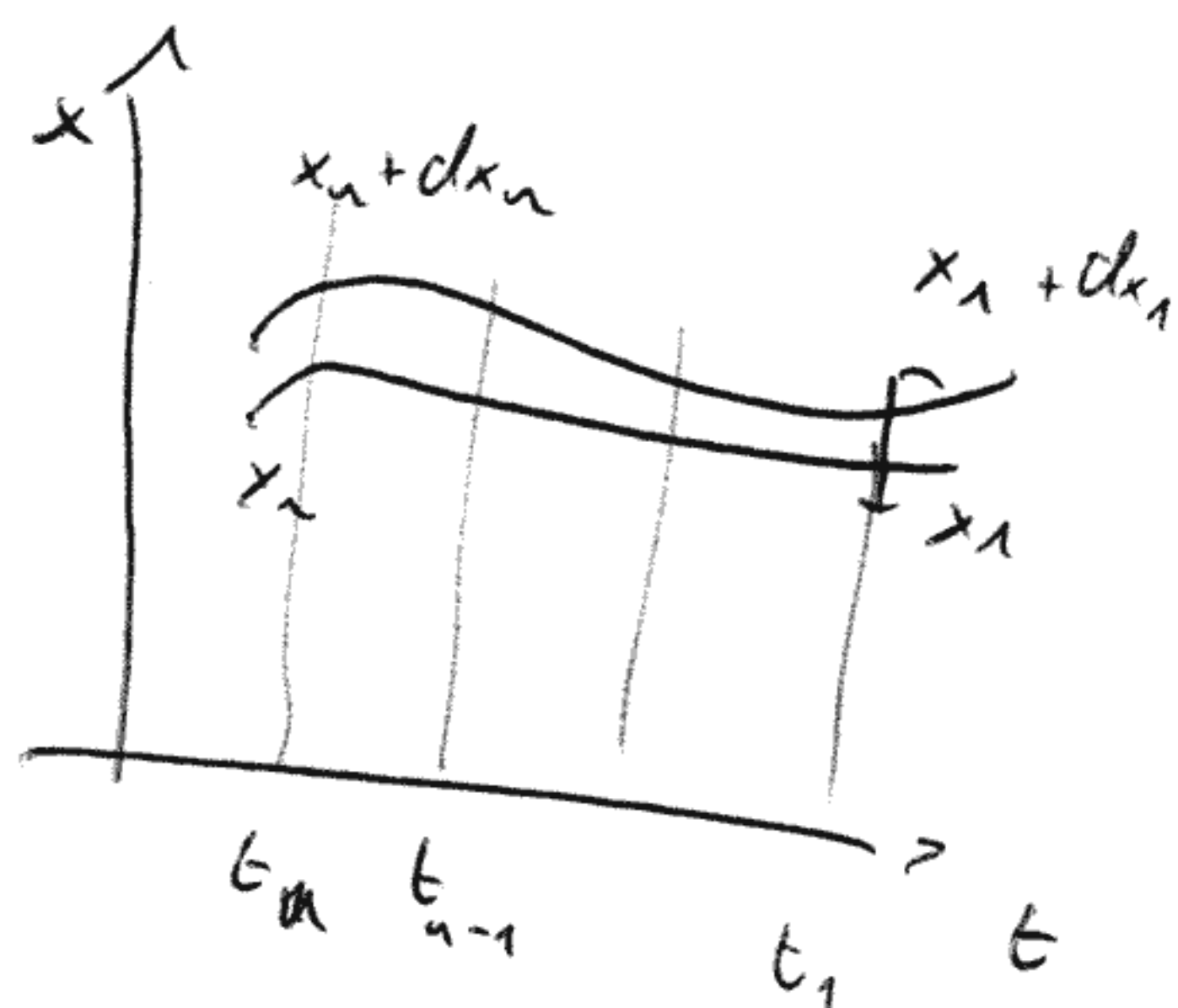
megfelel $\text{Re } \chi(\underline{x} \rightarrow 0, \omega=0)$ -nek

Stochasztikus folyamatok

X Járat mozgás $x(t)$

időpontok: $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)$

$$P(x_1 < x(t_1) < x_1 + dx_1, \dots, x_n < x(t_n) < x_n + dx_n) = P_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n, dx_1, \dots, dx_n)$$



$$P_1(x_1, t_1)$$

$$P_2(x_1, t_1, x_2, t_2)$$

$$P_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n)$$

$$t\text{-ben } \langle x \rangle = \int P_1(x, t) x dx \quad \text{várható érték}$$

$$\langle x(t_1) x(t_2) \rangle = \int P_2(x_1, t_1, x_2, t_2) x_1 x_2 dx_1 dx_2 \quad \text{korrelációs függvény}$$

Sűrűségfüggvény: normális
kompatibilitás

$$\int P_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) dx_1 \dots dx_n = 1$$

$$P_{n-1}(x_1, t_1, \dots, x_{n-1}, t_{n-1}) = \int dx_n P_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n)$$

diszkrét változókra:

$$x(t) \rightarrow m(t) \text{ egész értékű változó}$$

$$P_n(m_1, t_1, m_2, t_2, \dots, m_n, t_n)$$

$$\int dx \rightarrow \sum_m$$

Markov-sorozat

feltételes valószínűség

$$P(x_1 t_1 | x_2 t_2 \dots x_n t_n) = \frac{P_n(x_1 t_1 \dots x_n t_n)}{P_{n-1}(x_2 t_2 \dots x_n t_n)}$$

Markov-függőség

$$P(x_1 t_1 | x_2 t_2 \dots x_n t_n) = P(x_1 t_1 | x_2 t_2) \quad \text{átmeneti valószínűség}$$

azaz $x_3 t_3 \dots x_n t_n$ -től nem függ

$$\begin{aligned} P_n(x_1 t_1 \dots x_n t_n) &= P(x_1 t_1 | x_2 t_2) P_{n-1}(x_2 t_2 \dots x_n t_n) = \\ &= P(x_1 t_1 | x_2 t_2) P(x_2 t_2 | x_3 t_3) \dots P(x_{n-1} t_{n-1} | x_n t_n) P_1(x_n t_n) \end{aligned}$$

Markov-függésztől

$P(x t | x' t')$ és $P_1(x_1 t_1)$ meghatározása az egy hierarchiát?

$$P_2(x_1 t_1, x_2 t_2) = P(x_1 t_1 | x_2 t_2) P_1(x_2 t_2)$$

$\downarrow \int \dots dx_2$

$$P_1(x_1 t_1) = \int P(x_1 t_1, x_2 t_2) P_1(x_2 t_2) dx_2 \quad t_1 > t_2$$

Chapman-Kolmogorov egyenlet

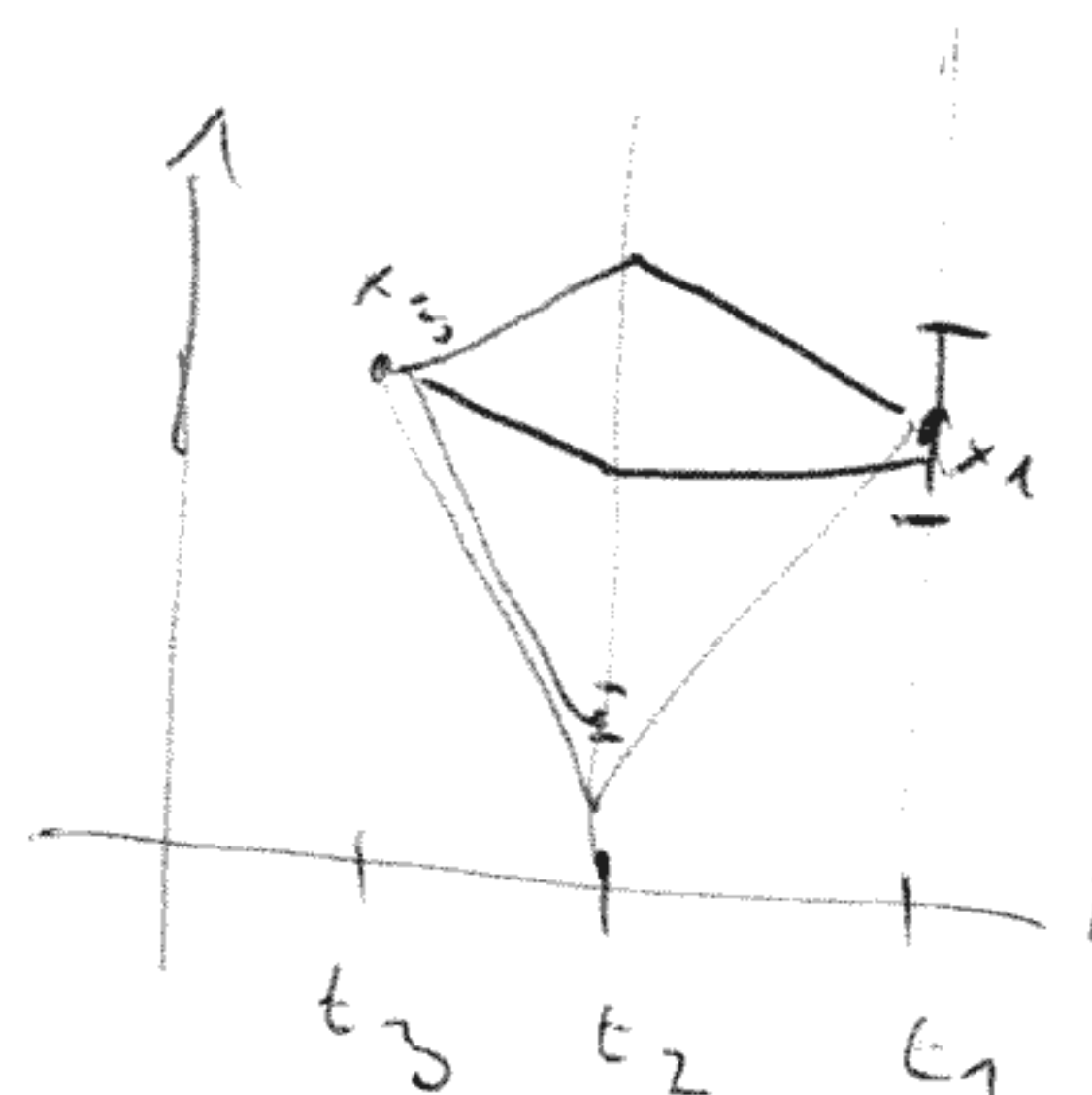
$$P_3(x_1 t_1, x_2 t_2, x_3 t_3) = P(x_1 t_1 | x_2 t_2) P(x_2 t_2 | x_3 t_3) P_1(x_3 t_3)$$

$\int \dots dx_2$

$$P_2(x_1 t_1, x_3 t_3) = \left[\int P(x_1 t_1 | x_2 t_2) P(x_2 t_2 | x_3 t_3) dx_2 \right] P_1(x_3 t_3)$$

$$\hookrightarrow P(x_1 t_1 | x_3 t_3) P_1(x_3 t_3)$$

$$P(x_1 t_1 | x_3 t_3) = \int P(x_1 t_1 | x_2 t_2) P(x_2 t_2 | x_3 t_3) dx_2$$



Homogén markov folyamat

$$P(x_1, t_1 | x_2, t_2) = P(x_1, t_1 + \tau | x_2, t_2 + \tau) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ha } \tau = -t_2}}{=} P(x_1, t_1 - t_2 | x_2, 0)$$

Stacionárius állapot (folyamat):

$$P_1(x_1, t) = P_1(x_1, t + \tau) = P_1^*(x)$$

ergodikus markov folyamat

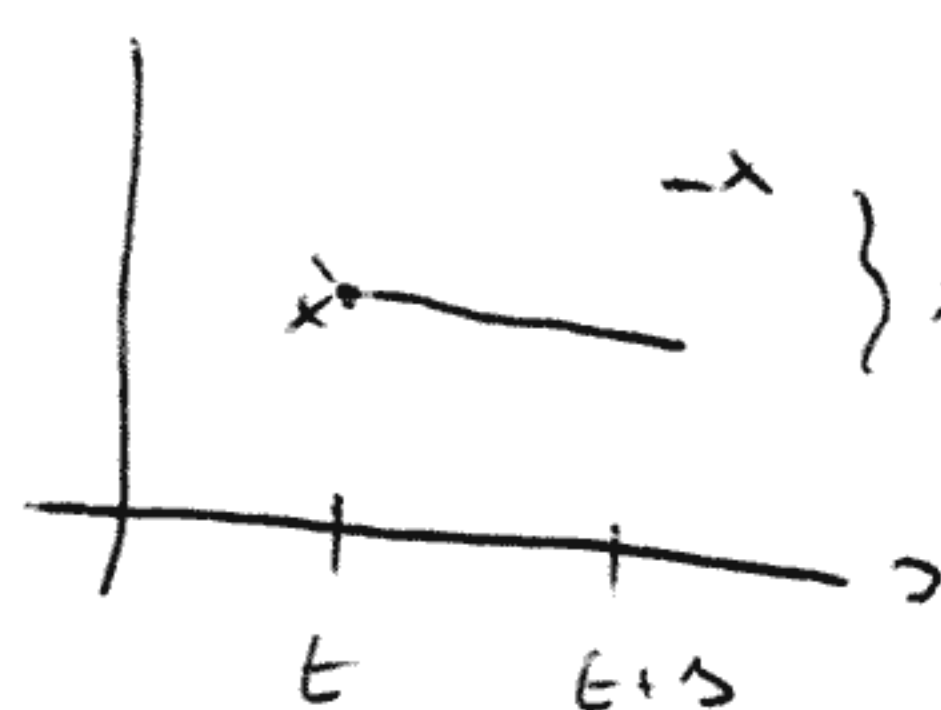
$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(x, t | x') = P^*(x) \text{ (független } x' \text{-től)}$$

$$P_1(x, t) = \int P(x, t | x') P_1(x', 0) dx'$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_1(x, t) = \int P^*(x) P_1(x', 0) dx' = P^*(x) \underbrace{\int P_1(x', 0) dx'}_1 = P^*(x) \text{ (az } P_1 \text{ határelonlása)}$$

diffúziós folyamatok:

def: növekvő időmomentumai (felkötés)



$$\int P(x, s | x') (x - x')^n dx =$$

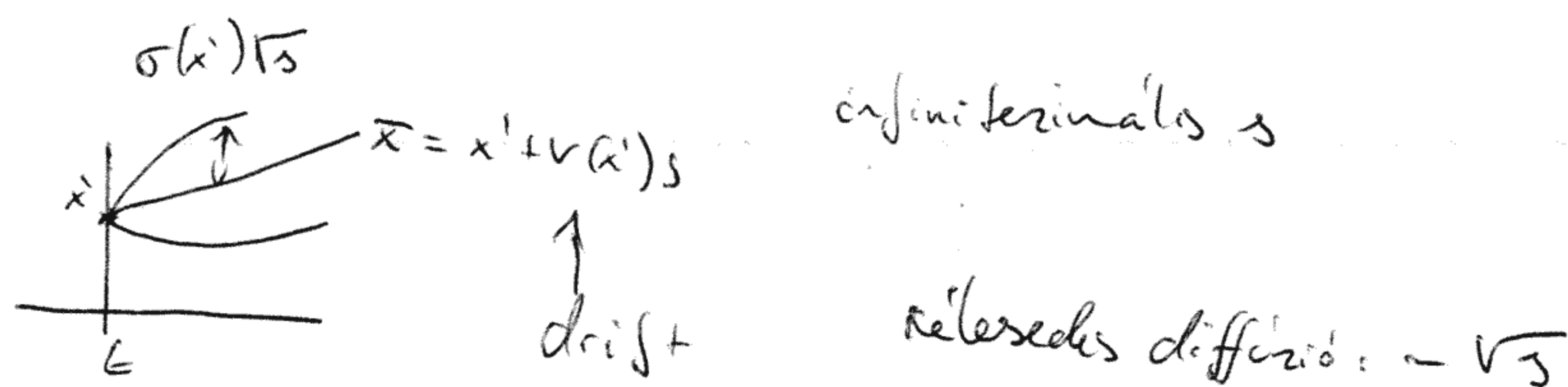
$$\begin{cases} V(x')s + o(s) & n=1 \\ \sigma^2(x')s + o(s) & n=2 \\ o(s) & n \geq 3 \end{cases}$$

s-el onbra is
j 0-hoz tart

$$\overline{x - x'} = V(x')s + o(s)$$

$$\overline{(x - x')^2} = \underbrace{\overline{(x - x')^2}}_{o(s)} = \sigma^2(x')s + o(s)$$

$$P(x|s|x') = C e^{-\frac{(x-x'-v(x')s)^2}{2\sigma^2(x')s}}$$



$$x - x' \sim \sqrt{s} \quad \frac{\sqrt{s}}{s} \sim \frac{1}{\sqrt{s}} \rightarrow \infty \quad \text{infinitesimal } s \Rightarrow \text{nem differenciálható}$$

Chapman - Kolmogorov egyenlet

↓
diffúziós egyenlet

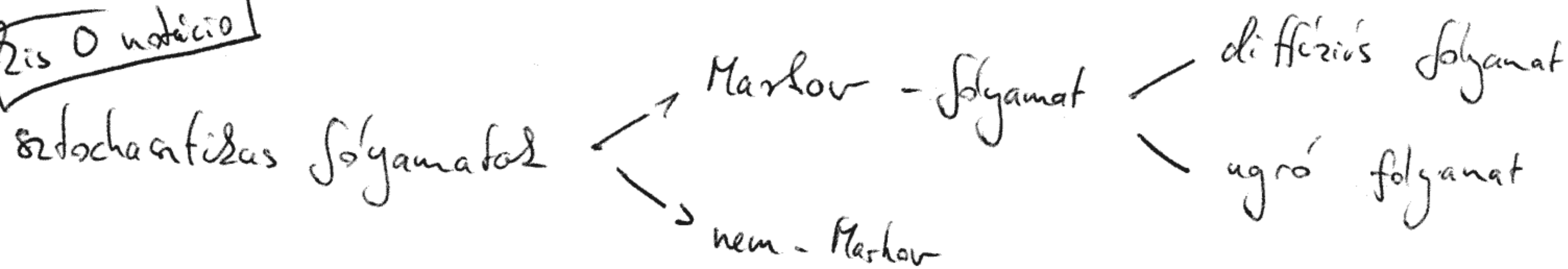
↓
Fokker-Planck egyenlet

$$P(x,t|x'): \quad \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (v(x)P) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2(x)P)$$

$$P(x,t=0|x') = \delta(x-x')$$

2. is 0. utólcso

Szajz
III. 30.



diffúziós folyamat def.:

$$\int (x - x')^n P(x, s | x') dx = \begin{cases} \overset{\text{átlag}}{\downarrow} v(x') s + o(s) & n=1 \\ \sigma^2(x') s + o(s) & n=2 \\ o(s) & n \geq 3 \end{cases}$$

feltételes várható érték

$$\int f(x) P(x, t+s | x') dx = \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \quad \begin{array}{c} x' \\ | \\ 0 \quad \quad \quad t \quad t+s \end{array}$$

$$(1) = \int f(x) \left[P(x, t+s | x') + \frac{\partial P(x, t | x')}{\partial t} \cdot s + o(s) \right]$$

$$(2) = \int dx f(x) \int dx' P(x, s | x') P(x', t | x') = \text{Chapman - Kolmogorov egyenlet}$$

↑
ez nagyon elcsúsz, sorfektűz
alapján

$$f(x) = f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})(x - \tilde{x}) + \frac{1}{2} f''(\tilde{x})(x - \tilde{x})^2$$

$$(2) = \int d\tilde{x} \left[f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x}) v(\tilde{x}) s + \frac{1}{2} f''(\tilde{x}) \sigma^2(\tilde{x}) s + o(s) \right] P(\tilde{x}, t | x') =$$

$$(2) \stackrel{!}{=} (1)$$

parciális integrálás, termineteket határfektűz: $x \rightarrow \pm \infty$ -ben lecsúsznak a dolgozat

$$\stackrel{!}{=} \int dx f(x) \left[P(x, t+s | x') - \frac{\partial}{\partial x} (v(x) P(x, t | x')) s + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2(x) P(x, t | x')) s + o(s) \right]$$

Eztán öltöztetjük $f(x)$ -et x (2) és (1) $\Rightarrow$

$$\frac{\partial P(x, t | x')}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (v(x) P(x, t | x')) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\sigma^2(x)}{2} P(x, t | x') \right)$$

Fokker - Planck - egyenlet

Perse azel tmelet. Lati feltetellel es a $P(x, t=0|x') = \delta(x-x')$
 kezdeti feltetellel

az első tag a drift (Santinaítás)

a második a rölés (napdram diffúziós egyenlet)

$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\sigma^2(x)}{2} \frac{\partial}{\partial x} P(x, t|x')$ lenne ha valóban
 diff lenne.

$$P_1(x, t) = \int dx' P(x, t|x') P_1(x', t=0) \quad P_1(x, t) \text{ teljesíti a F.P. egyenletet}$$

továbbá σ^2 nem függ x -től (Sonstans)

Wiener - folyamat: $V(x) = 0$
 $\sigma^2 = 2D$

$$\text{F.P.: } \frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad (\text{diffúziós egyenlet})$$

meg akarjuk határozni a P átmeneti valószínűségeket
 (ehhez szükség)

Generátor - függvény

$p(x)$: valószínűségi sűrűség

$$\phi(z) = \overline{e^{zx}} = \int dx p(x) e^{zx} \quad = \text{momentum - generátor függvény}$$

$$L = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} z^l \overline{x^l} \Rightarrow \frac{\partial^l \phi(z)}{\partial z^l} \bigg|_{z=0} = \overline{x^l}$$

$p(x)$ -nek hogyan lehet aszimptotikus?

ln $\phi(z)$: momentum - generátor ln.

$$\ln \phi(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} z^l g_l$$

↑
Szummálás

$$\left. \frac{\partial \ln \phi}{\partial z} \right|_{z=0} = g_1$$

$$\frac{\partial \ln \phi}{\partial z} = \frac{1}{\phi} \phi' \quad z=0 \quad g_1 = \bar{x}$$

momentum és szummálás összehasonlítása
(két az általános formula)

$$\frac{\partial^2 \ln \phi}{\partial z^2} = \frac{\phi''}{\phi} - \frac{1}{\phi^2} (\phi')^2 \quad z=0 \quad g_2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

$$\frac{\partial^3 \ln \phi}{\partial z^3} = \frac{\phi'''}{\phi} + \frac{2}{\phi^3} \phi' \phi'' - \frac{1}{\phi^2} 2\phi' \phi'' - \frac{1}{\phi^3} \phi' \phi'' \phi' \quad z=0 \quad g_3 = \overline{x^3} + 2\bar{x}^3 - 3\bar{x}^2 \cdot \bar{x} =$$

$$= \overline{x^3} - 3\bar{x}(\bar{x}^2 - \overline{x^2}) - \bar{x}^3$$

általában az összes alacsonyabb rendű szummákra való
felbontást le kell vonni

Gauss-eloszlás

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta}} e^{-\frac{x^2}{2\Delta}}$$

$$\phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{x^2}{2\Delta}} e^{zx} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2\Delta}(x-\Delta z)^2} e^{\frac{1}{2}\Delta z^2}$$

$$-\frac{1}{2\Delta}(x^2 - 2\Delta z x + \Delta^2 z^2 - \Delta^2 z^2)$$

$$\phi(z) = e^{\frac{1}{2}\Delta z^2}$$

$$g_1 = 0$$

$$g_2 = \Delta$$

$$g_l = 0 \quad (l \geq 3)$$

$$\phi(z) = e^{x_0 z + \frac{1}{2} z^2} \quad \text{ha}$$

nem 0-ra centrált

momentum

$$\phi(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \frac{\Delta^l z^{2l}}{2^l} = \overline{x^l} = \begin{cases} 0 & \text{ha } l \text{ páratlan} \\ \neq 0 & \text{ha } l \text{ páros} \end{cases}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l)!} \frac{\Delta^l z^{2l}}{2^l l!} (2l)!$$

$$\overline{x^{2l}} = \Delta^l \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l-1)$$

Vissza a Wiener-folyamatokhoz:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

$$P(t=0) = \delta(x-x')$$

$$\phi(z, t=0) = \int e^{zx} \delta(x-x') dx = e^{zx'}$$

$$\int e^{zx} \frac{\partial P}{\partial t} dx = \frac{\partial}{\partial t} \phi(z, t) \quad \int e^{zx} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} dx \stackrel{\text{parciális}}{=} z^2 \int e^{zx} P dx = \phi(z, t) z^2$$

$$\frac{\partial \phi(z, t)}{\partial t} = D z^2 \phi(z, t)$$

$$\frac{\partial \phi}{\phi} = D z^2 dt$$

$$\ln \left(\frac{\phi(z, t)}{\phi(z, 0)} \right) = D z^2 t$$

$$\phi(z, t) = \phi(z, 0) e^{D z^2 t} = e^{zx' + D z^2 t}$$

↑
szétszétválasztás
↓ Gauss

$$P(x, t | x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(x-x')^2}{2\sigma^2 t}}$$

Wiener-folyamat növekedése $(W(t))$

Szűz
III. 30

az a ξ Wiener-folyamat $(W(t=0) = 0)$

$$P(w, t | 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{w^2}{2\sigma^2 t}}$$

$$\overline{W} = 0 \quad \overline{W^{2k+1}} = 0$$

$$\overline{W^2} = \sigma^2 t \quad \overline{W^{2k}} = (\sigma^2 t)^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)$$

Korrelációs függvény: $\overline{W(t)W(t')}$ $t, t' > 0$

$$\overline{W(t)W(t')} = \int dw dw' P_2(W(t), W(t')) = \int dw' \left(\int dw W P(W, t-t' | w') \right) P(w', t' | 0) W$$

$$\quad \quad \quad \underbrace{\quad}_{P(W, t-t' | w')} \underbrace{\quad}_{P(w', t' | 0)}$$

$$= \int dw W^2 P(W, t-t' | 0) = \sigma^2 t'$$

$$\overline{W(t)W(t')} = \sigma^2 \min(t, t')$$

Marshalls $(t > t')$

$$\overline{(W(t) - W(t'))W(t')} = \underbrace{\overline{W(t)W(t')}}_{\substack{\text{növekmény} \\ \uparrow \\ \text{függvény}}} - \underbrace{\overline{W(t')^2}}_{\sigma^2 t'} = 0$$

$$\quad \quad \quad \underbrace{\quad}_{0} \quad \quad \quad \underbrace{\quad}_{0} \quad \quad \quad \underbrace{\quad}_{0}$$

Gauss-típusú fluktuáció: ún. általánosított stochasztikus folyamat
(mint sz. $\rightarrow$ eloszlás)

momentumai és szimulációs eloszlások

azaz Gauss-típusú mint azaz az első két szimulációs eloszlás

$$\overline{\xi(t)} = 0 \quad \overline{\xi(t)\xi(t')} = \sigma^2 \delta(t-t')$$

ilyen típusú egyenlet a fizikában
használnak és ezek Gauss-függvények

er a felter 297 a Wiener-folyamat drivalthya

$$Y(t) = \int_0^t \xi(s) ds \quad Y(t) : \text{Gauss-folyamat}$$

$$Y(0) = Y(t=0) = 0$$

$$\overline{Y(t)Y(t')} = \overline{\int_0^t \xi(s) ds \int_0^{t'} \xi(s') ds'} = \int_0^{\min(t,t')} \int_0^{\min(t,t')} ds ds' \sigma^2 \delta(s-s') = \sigma^2 \int_0^{\min(t,t')} ds = \sigma^2 \min(t,t')$$

$$Y(t) = W(t) \quad \square$$

Langevin-egyenlet: $\dot{x}(t) = v(x(t)) + \beta \xi(t)$ (Gauss-folyamat 297)

$\overline{\xi(t)} = 0$ (a determinisztikus csúszás nem jelenik meg)
 $\overline{\xi(t)\xi(t')} = \sigma^2 \delta(t-t')$ determinisztikus mozgás

$\overline{\xi(t)\xi(t')} = \sigma^2 \delta(t-t')$ = hogyan sok véletlen hatás összeadásával a korrelációk sokkal rövidebbek lesznek, mint $v(x(t))$

érkezőes a folyamat. ($\xi(t)$ "gyenge" jel)

$$dx(t) = x(t+dt) - x(t) = v(x(t))dt + dw(t) + \text{...}(dt)$$

stokasztikus differenciál egyenlet

$x(t)$ Markov-folyamat

(297) $x(t+dt)$ -t meghatározza $x(t)$ és $dw(t) \Rightarrow$ figyelem $t' < t$ események

$x(t)$ differenciális egyenlet:

$$\overline{dx(t)} = v(x(t))dt + \underbrace{dW(t)}_{=0}, O(dt)$$

$$\begin{aligned} \overline{dx(t)^2} &= \overline{v(x(t))dt + dW(t)}^2 = \underbrace{(v(x(t))dt)^2}_{O(dt)} + v(x(t))dt \underbrace{dW(t)}_{=0} + \overline{dW(t)^2} = \\ &= \sigma^2 dt + O(dt) \end{aligned}$$

$$\overline{dx(t)^n} = O(dt) \quad n \geq 3$$

Fokker-Planck egyenlet

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(vP) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\sigma^2}{2}P\right)$$

$\sigma^2(x)$: ha x függő

Ito-féle értelmezés

(matematikus)

: intervallum elején vett értékek

Stratonovich-féle értelmezés

(alk. mat.)

: intervallum közepén vett értékek

(stochasztikus integrál)

$$\dot{x}(t) = v(x(t)) + \alpha(x(t))\xi(t)$$

$$dx(t) = v(x(t))dt + \alpha(x(t))dW(t) \quad \text{Ito}$$

$$dx(t) = v(x(t))dt + \alpha\left(\frac{x(t) + x(t+dt)}{2}\right)dW(t) \quad \text{Stratonovich}$$

Langevin - egyenlet: $\dot{x} = V(x) + \xi(t)$

$$\overline{\xi(t)} = 0 \quad \overline{\xi(t)\xi(t')} = \sigma^2 \delta(t-t') = 2D \delta(t-t')$$

Fokker-Planck - egyenlet:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (V(x)P) + D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

több változó: $\underline{x} = (x_1 \dots x_n)$

2. egyenlet: $\dot{x}_i = V_i(\underline{x}) + \xi_i(t)$

$$\overline{\xi_i(t)} = 0 \quad \overline{\xi_i(t)\xi_j(t')} = 2D_{ij} \delta(t-t')$$

$D_{ij} = D_{ji}$ pozitív definit

F-P egyenlet:

$$P(\underline{x}, t) | \underline{x}'$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (V_i(\underline{x})P) + \sum_{ij} D_{ij} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j} =$$

$$= - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[V_i P - \sum_j D_{ij} \frac{\partial P}{\partial x_j} \right]$$

← folytonitási egyenlet

$\uparrow$ valószínűségi áram sűrűség

Stacionárius megoldás (stochasztikus folyamat nemperiodikus)

$$P_1(x, t) = P_s(x) \quad (t\text{-folyt.})$$

$\uparrow$ stac. megoldás

$$P_s(x) = e^{-\phi(x)}$$

↑ uni. potenciál
↑ uni. erő

(vagyis: Jón alacsony ??)
de mit is kijönne

1 változó

$$0 = - \frac{\partial}{\partial x} (V(x)P_s - D \frac{\partial P_s}{\partial x}) \quad f(x) = \text{állandó}$$

$$V(x)P_s(x) - D \frac{\partial P_s}{\partial x} = \text{állandó} = 0 \quad (\text{mert } P_s(x) \rightarrow 0 \text{ ha } x \rightarrow \pm \infty)$$

$$D \frac{\partial \rho_s}{\partial x} = v(x) \rho_s \rightarrow \rho_s = e^{-\phi}$$

$$\ln \frac{\rho_s}{c} = \frac{1}{D} \int v(x) dx \quad \rho_s = c \exp \left\{ \frac{1}{D} \int v(x) dx \right\}$$

$$-D \frac{\partial \phi}{\partial x} e^{-\phi} = v e^{-\phi} \Rightarrow v = -D \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Föhrer vorkond:

$$-\sum_i' \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad \rho_s = e^{-\phi}$$

$$\sum_i' \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\left[v_i + \sum_j' D_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right]}_{f_i} e^{-\phi} = 0$$

① $\text{gen } f_i = 0$

$$v_i = - \sum_j' D_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}$$

③ $f_i \neq 0$

g. v. d. e.

$$v_i = \sum_j' \overset{\text{anti-symmetrisches}}{Q_{ij}} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - \sum_j' \overset{\text{sym. def. nicht}}{D_{ij}} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}$$

belegtes

$$\sum_i' \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_j' Q_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right] e^{-\phi} = 0 =$$

$$= \sum_{i,j}' \left(\underbrace{Q_{ij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}}_{\text{sym.}} e^{-\phi} - \underbrace{Q_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}}_{\text{anti-sym.} \times \text{sym.}} e^{-\phi} \right) = 0$$

$$\left(\text{Tr} (\text{sym} \times \text{anti-sym.}) = 0 \right)$$

a determinisztikus zenit:

$$\dot{x}_i = v_i(x)$$

legyen $x_i(t)$ ennek megoldása

$$L \rightarrow \phi(x(t))$$

kvadrátusban van a minimumus (val?)
ad, parabola

$$\frac{d\phi}{dt} = \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} v_i = \sum_{ij} Q_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = \sum_{ij} D_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \leq 0$$

antisim.

↓
konseratív mozgás
mert ϕ -t megőrzi

szim. pozitív definit

↓
disszipatív mozgás

↓
az ϕ sz. minimumpontjába
vált

↓
vagy az a disszipatív
mozgás maradhat meg

tehát ϕ sz. Lyapunov-függvény

példa. Lineáris sz. g.

$$v(x) = -\gamma x$$

$$L. \text{ zenit } \dot{x} = -\gamma x + \xi$$

$$\xi(t) = 0 \quad \overline{\xi(t)\xi(t')} = 2D\delta(t-t')$$

$$F.P. \text{ zenit } \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\gamma x P) + D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

$$P(x, 0 | x') = \delta(x - x')$$

$$\text{stationárius eloszlás: } \phi = \frac{1}{D} \int v(x) dx = -\frac{\gamma}{D} \int x dx = -\frac{\gamma}{D} \frac{x^2}{2}$$

$$P_s = \frac{1}{\sqrt{2\pi D/\gamma}} e^{-\frac{\gamma}{2D} x^2}$$

átmeneti valószínűségi

generátor f.e.: $G(z, t) = e^{zx}$ $G(z, 0) = e^{zx'}$

$$\int \frac{\partial P}{\partial t} e^{zx} dx = \frac{\partial}{\partial t} G(z, t)$$

$$\int \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} e^{zx} dx = \int P z^2 e^{zx} dx = z^2 G(z, t)$$

↑
parc.

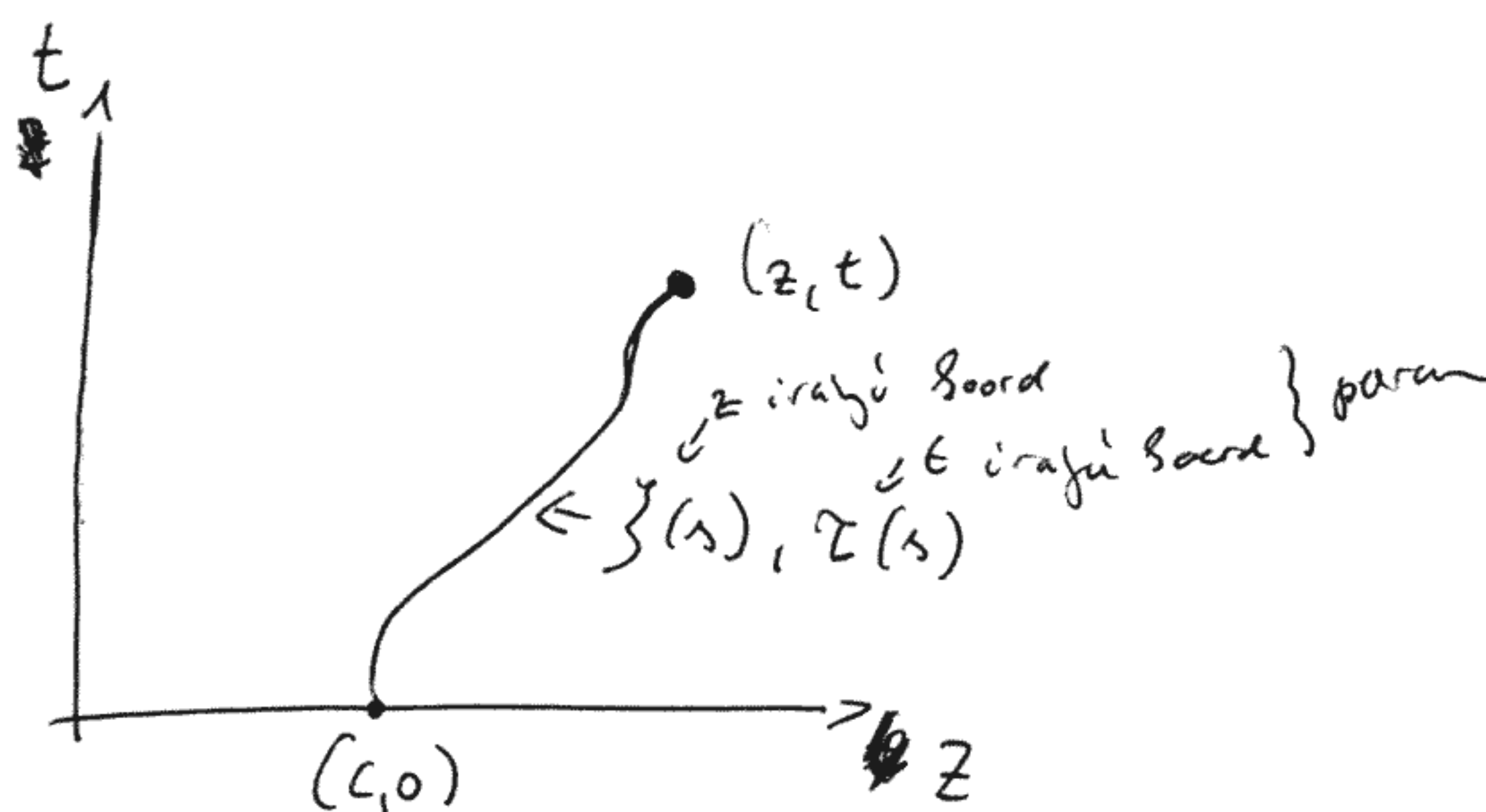
$$\int \frac{\partial}{\partial x} (xP) e^{zx} = - \int x P e^{zx} dx = -z \frac{\partial}{\partial z} G(z, t)$$

|| F.P.

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -\gamma z \frac{\partial G}{\partial z} + D z^2 G$$

$$G(z, 0) = e^{zx'}$$

} ezzel a differenciáls egyenlettel van megoldható.
Szakaszoként is lehet.



$$\begin{aligned} z(s=0) &= z \\ t(s=0) &= 0 \end{aligned}$$

parametrikus

$$\Rightarrow G(z = z(s), t = t(s)) = G(s)$$

$$\frac{d}{ds} G(s) = \frac{\partial G}{\partial z} \frac{dz}{ds} + \frac{\partial G}{\partial t} \frac{dt}{ds}$$

$$z(s) = z \cdot e^{\gamma s}$$

$t = s$

$$\Leftarrow \text{ha } \frac{dz}{ds} = \gamma z \quad \frac{dt}{ds} = 1$$

ha $z = z$ $t = t$ parametrikus

$$\frac{d}{ds} G(s) = \gamma z \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial t} = D z^2 G \quad (\text{ha ezeket diff. gub.})$$

$$\frac{dG}{ds} = D z^2 G(z, s)$$

$z = z e^{\gamma s}$

$$\frac{dG}{G} = D z^2 ds \Rightarrow \ln \frac{G(s)}{G(0)} = D \int_0^s z^2(s') ds' = D \int_0^s z^2 e^{2\gamma s'} ds' = D z^2 \frac{e^{2\gamma s} - 1}{2\gamma}$$

$$G(s) = G(0) e^{\frac{D}{2\gamma} c^2 (e^{2\gamma s} - 1)} = G(z(s), \tau(s))$$

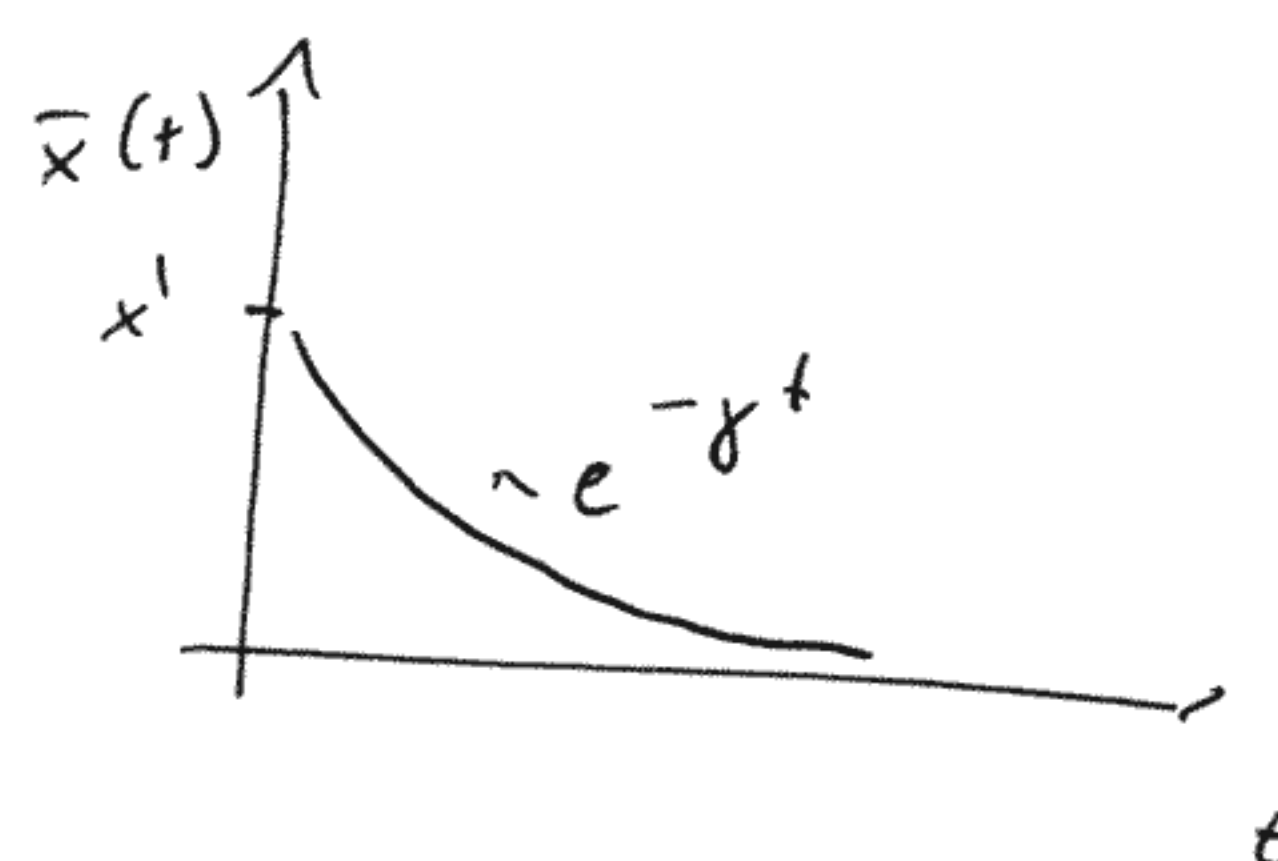
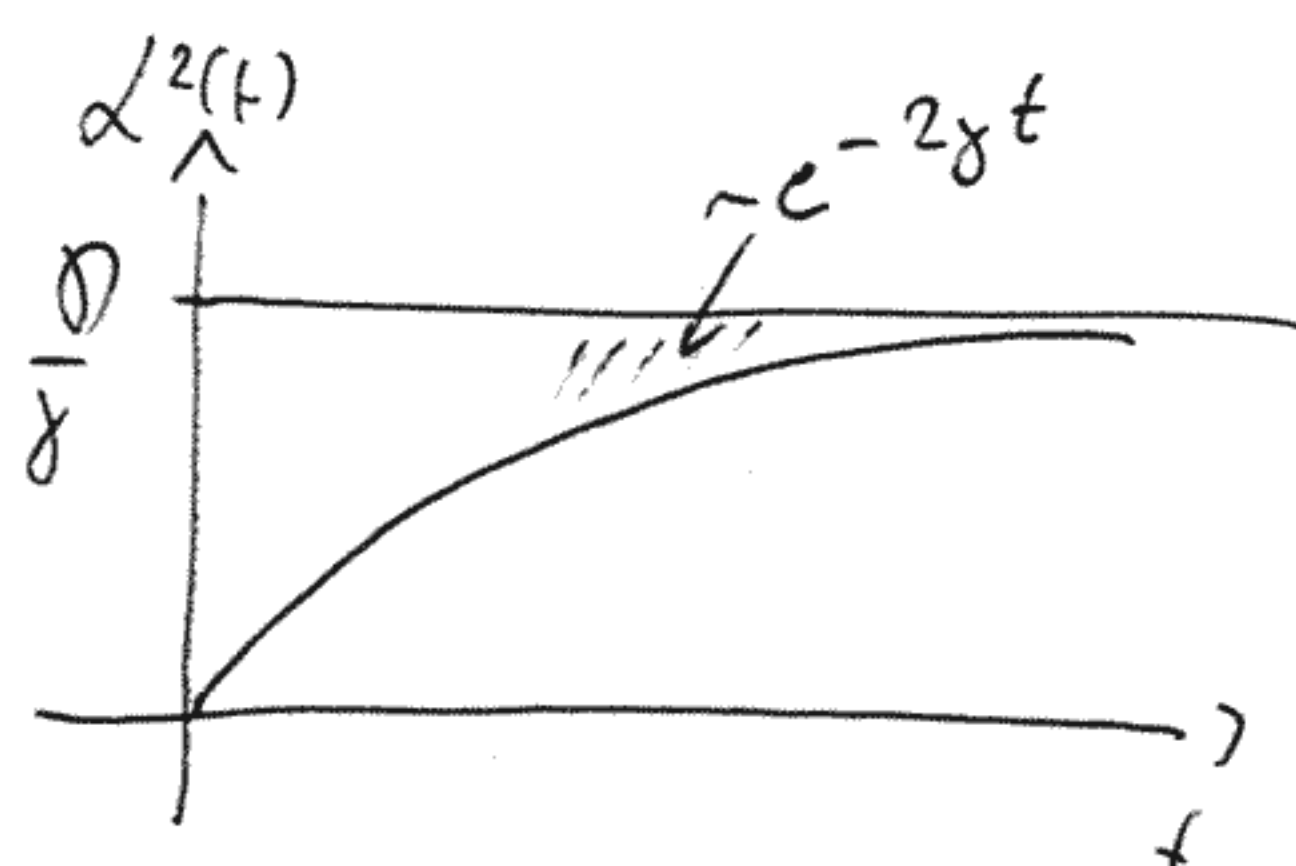
$$G(c, 0) = e^{cx'} \quad s=0$$

$$c = ze^{-\gamma t}$$

$$G(z, t) = e^{zx'e^{-\gamma t}} + \frac{D}{2\gamma} z^2 e^{-2\gamma t} (e^{2\gamma t} - 1)$$

$$G(z, t) = \exp \left\{ \underbrace{zx'e^{-\gamma t}}_{\bar{x}} + \underbrace{\frac{z^2}{2} \frac{D}{\gamma} (1 - e^{-2\gamma t})}_{\bar{x}^2 - \bar{x}^2 := \sigma^2(t)} \right\}$$

$$P(x, t | x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \exp \left\{ -\frac{(x - x'e^{-\gamma t})^2}{2\sigma^2(t)} \right\}$$



↑

Orstein - Uhlenbeck - folyamat

ergodikus folyamat, minden kezdeti elonlás a stationarius elonlásba megy át

$$P(x, t | x') \rightarrow P_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D/\gamma}} e^{-\frac{\gamma}{2D} x^2}$$

Brown - mozgás

$$\dot{x} = \frac{p}{m} \quad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}(x)}{\partial x} - \gamma p + \zeta(t)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \quad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} - \gamma m \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} + \zeta$$

$\zeta(t)$: Gauss típusú zaj; $\overline{\zeta(t)} = 0$

$$\overline{\zeta(t)\zeta(t')} = 2D\delta(t-t')$$

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \mathcal{U}(x)$$

Stacionárius eloszlás

$$\xi : \text{a hőtartály} \quad e^{-\frac{\mathcal{H}}{k_B T}} = e^{-\phi}$$

$$\dot{x} = k_B T \frac{\partial \phi}{\partial p}$$

$$\phi = + \frac{\mathcal{H}}{k_B T}$$

$$\dot{p} = -k_B T \frac{\partial \phi}{\partial x} - \gamma m k_B T \frac{\partial \phi}{\partial p} + \xi$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & k_B T \\ -k_B T & 0 \end{pmatrix}}_{\text{konz}} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial p} \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma m k_B T \end{pmatrix}}_{\substack{\text{diss.} \\ D = \gamma m k_B T}} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix}$$

ezt lehet a differenciál megoldással is??

$$p(t+dt) = p(t) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} dt - \gamma p(t) dt + dW_t$$

keressük

$$\overline{p(t+dt)^2} = \overline{p^2(t)} + \overline{dW_t^2} - 2 \overline{p(t) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} dt} - 2 \overline{\gamma p^2(t) dt}$$

dt + rendben -1

$$\overline{p(t+dt)^2} = \overline{p^2(t)} + \overline{dW_t^2} - 2 \overline{p(t) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} dt} - 2 \overline{\gamma p^2(t) dt} + 2 \overline{p(t) dW_t} - \overline{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} dt dW_t} - 2 \overline{\gamma p(t) dW_t dt}$$

$$2D = \overline{dW_t^2} = 2 \gamma \overline{p(t)^2} \underbrace{k_B T m}_{\text{szórtás}}$$

az összes nülteset

$$\overline{\mathcal{L} \beta} = \overline{\mathcal{L} \cdot \beta} = 0 \quad \text{mivel}$$

Fokker-Planck:

$$\dot{x} = v$$

$$\dot{v} = -\frac{\partial U}{\partial x} \frac{1}{m} - \gamma v + \frac{\xi}{m}$$

$$\frac{\overline{\xi(t)\xi(t')}}{t^2} = 2\gamma \frac{k_B T}{m}$$

$$P(x, v, t) \dots$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (vP) - \frac{\partial}{\partial v} \left(-\frac{\partial U}{\partial x} \frac{1}{m} - \gamma v \right) + \frac{\gamma k_B T}{m} \frac{\partial^2 P}{\partial v^2}$$

Sonderst pelda

átalakított mozgás

$\dot{p} \approx 0 \Rightarrow$ az impulzust a hely határozza meg

$$-\frac{\partial U}{\partial x} - \gamma p + \xi = 0 \quad p = m\dot{x}$$

$$\underbrace{\dot{x} = \frac{-1}{\gamma m} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\xi}{\gamma m}}_{\text{Aristotelészi - dinamika}} : \text{Langevin - egyenlet}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\gamma m} \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{k_B T}{\gamma m} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} : \text{Kramers - egyenlet}$$

korrekciós differenciál, ha olyan időskálán nézünk

szabad Brown $U(x)=0$

$$\dot{v} = -\gamma m v + \xi$$

$$\overline{\xi \xi} = 2\gamma k_B T \delta(t-t')$$

másra megoldás

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma(t-t_0)} + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt' e^{-\gamma(t-t')} \xi(t')$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{belső } \frac{1}{\gamma} \text{ idő alatt}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{1}{\gamma} \text{ időig emlékszik } \xi(t') \rightarrow x} \quad t=t_0 \quad v(t_0)=v_0$

$$\overline{v(t)} = v_0 e^{-\gamma(t-t_0)}$$

$\frac{1}{\gamma}$ idő után stationárius állapot

stac állapot: $t_0 \rightarrow -\infty$

$$v(t) = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^t dt' e^{-\gamma(t-t')} \xi(t')$$

~~$v(t) = 0$~~
 ~~$v(t) = v(t')$~~

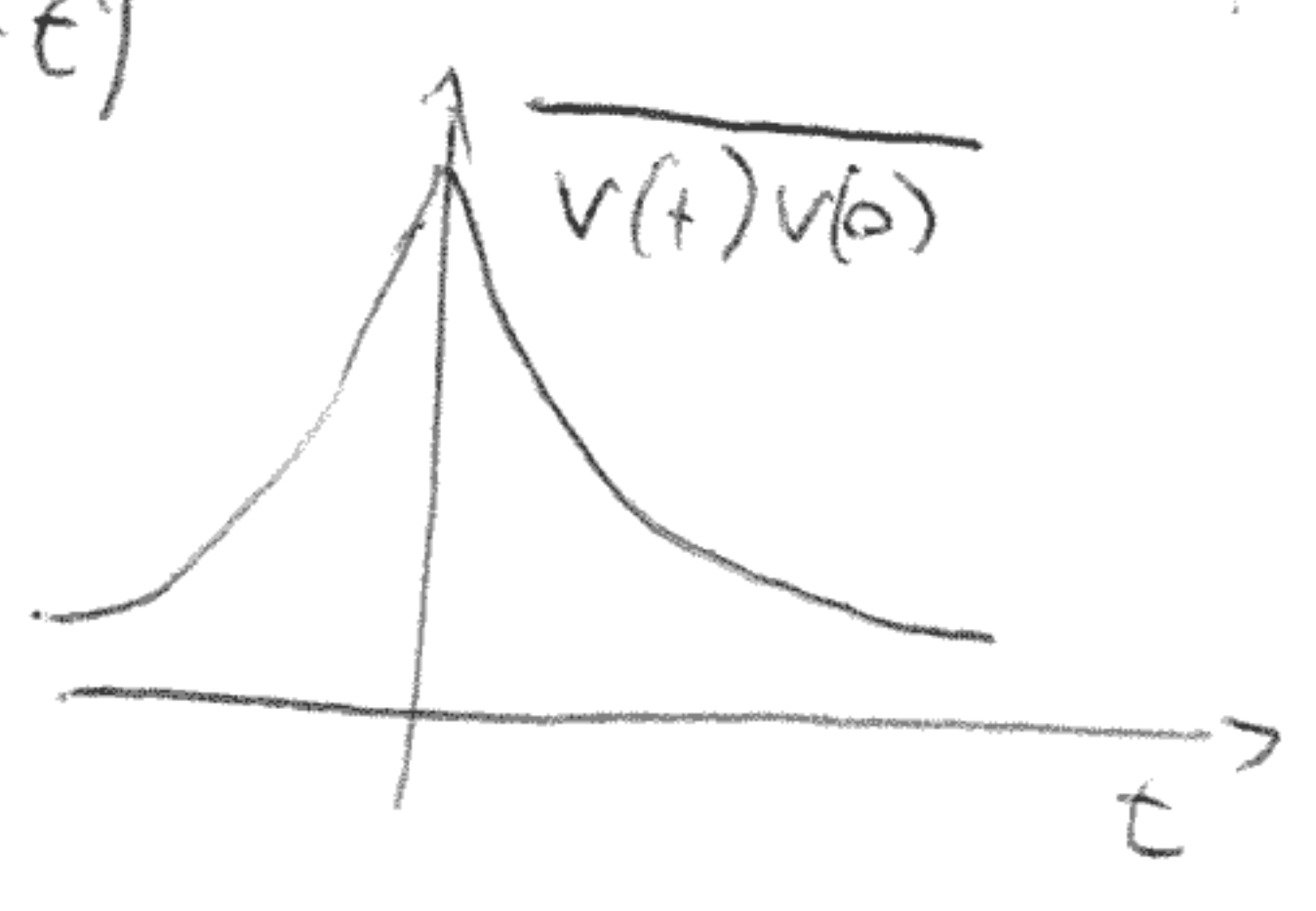
$$\overline{v(t)} = 0$$

$$\overline{v(t)v(t')} = \frac{1}{m^2} \int_{-\infty}^t ds \int_{-\infty}^{t'} ds' e^{-\gamma(t-s)} e^{-\gamma(t'-s')} \underbrace{\overline{\xi(s)\xi(s')}}_{2\gamma k_B T \delta(s-s')} \quad (t > t')$$

$$= \frac{2\gamma m k_B T}{m^2} e^{-\gamma(t+t')} \int_{-\infty}^{t'} ds' e^{2\gamma s'} = \frac{2\gamma m k_B T}{m^2} \frac{1}{2\gamma} e^{-\gamma(t-t')}$$

$$\overline{v(t)v(t')} = \frac{k_B T}{m} e^{-\gamma|t-t'|}$$

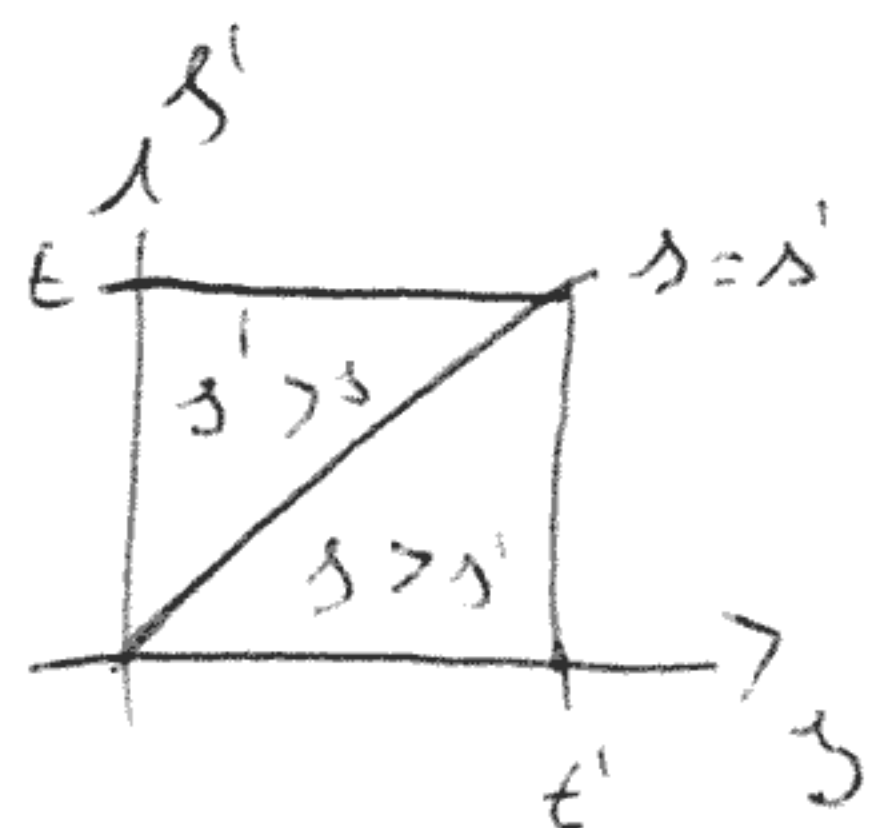
$$t=t' \Rightarrow \overline{v(t)^2} = \frac{k_B T}{m}$$



$$x(t) - x(0) = \int_0^t v(s) ds$$

$$\overline{x(t) - x(0)} = 0 \quad \text{szac allgottan}$$

$$\overline{(x(t) - x(0))^2} = \int_0^t ds \int_0^t ds' \overline{v(s)v(s')} = \frac{k_B T}{m} \int_0^t ds \int_0^t ds' e^{-\gamma|s-s'|} =$$



$$= 2 \frac{k_B T}{m} \int_0^t ds \int_0^s ds' e^{-\gamma(s-s')} = 2 \frac{k_B T}{m} \frac{1}{\gamma} \int_0^t ds (1 - e^{-\gamma s}) =$$

$$\int_0^s ds' e^{\gamma s'} = \left[\frac{e^{\gamma s'}}{\gamma} \right]_0^s = \frac{e^{\gamma s} - 1}{\gamma}$$

$$= 2 \frac{k_B T}{m} \frac{1}{\gamma} \left[t - \frac{1}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \right]$$

$$\left(\begin{array}{l} \gamma t \ll 1 \\ t \ll \frac{1}{\gamma} \end{array} \right)$$

$$e^{-\gamma t} \approx 1 - \gamma t + \frac{1}{2} \gamma^2 t^2$$

$$\overline{(x(t) - x(0))^2} = 2 \frac{k_B T}{m} \frac{1}{\gamma} \frac{1}{2} \cdot \gamma^2 t^2 \frac{1}{\gamma} = \frac{k_B T}{m} t^2$$

$$\left(\begin{array}{l} \overline{(v_0 t)^2} = \overline{v_0^2} \cdot t^2 = \frac{k_B T}{m} t^2 \\ \text{eint} \sim \text{drivals}^m \end{array} \right)$$

$$t \gg \frac{1}{\gamma}$$

$$\overline{(x(t) - x(0))^2} \approx 2 \frac{k_B T}{\gamma m} t$$

diffúzió egyenlete a Brown-mozgásról

$$D = \frac{k_B T}{\gamma m} = \frac{k_B T}{\gamma} \quad m \dot{v} = -\gamma v \quad \dot{v} = -\frac{1}{m} \gamma v$$

* Einstein - reláció

diffúzió a mozgathatóság fogalma

konstans determinisztikus erő

$$m\dot{v} = -\gamma v + f$$

ilyenkor

$$v = \frac{1}{\gamma} f \quad \frac{1}{\gamma} = \mu \text{ mozgathatóság}$$

$$D = k_B T \mu \quad (\text{ez az Einstein-reláció az egyenlet})$$

gömb alakú részecskék:

$$-\gamma v = -6\pi\eta a v$$

Stokes-erő a gömb sugara

$$\overline{\Delta x^2} = \frac{k_B T}{3\pi\eta a} t$$

Brown-mozgás $\rightarrow$ elektronok reakt

~ szabadon mozgó elektron ami a megváltozó elektromos térre

$$\dot{v} = -\gamma v + \frac{f}{m} + \frac{eE(t)}{m}$$

stacionárius állapotot keresünk

$$v(t) = \int_{-\infty}^t dt' e^{-\gamma(t-t')} \left(\frac{f(t')}{m} + \frac{eE(t')}{m} \right)$$

$$\overline{v(t)} = \frac{e}{m} \int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-t')} E(t') dt'$$

áramsűrűség: $j = e v \cdot n$ ^{sűrűség}

$$\overline{j} = e \overline{v} \cdot n = \frac{ne^2}{m} \int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-t')} E(t') dt'$$

$$\sigma(t) = \frac{ne^2}{m} e^{-\gamma t} \quad (t \geq 0)$$

$$\sigma(\omega) = \frac{ne^2}{m} \int_0^\infty e^{-\gamma t} e^{i\omega t} dt = \frac{ne^2}{m} \frac{1}{\gamma - i\omega} = \frac{ne^2}{m} \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 - i\omega/\gamma}$$

az olyan mint a Drude modell $\frac{1}{\gamma}$ relaxációs idővel

$$\overline{j(t)j(0)} = \overline{\left(\sum_i v_i(t)\right) \left(\sum_j v_j(0)\right) e^2} = \sum_{i,j} e^2 \overline{v_i(t)v_j(0)} = \sum_{i,j} \sigma_{ij} \overline{v_i(t)v_j(0)} e^2 =$$

(Stacion, $E \equiv 0$ -val) a relaxációs függvények $v_i v_j \sim \sigma_{ij}$

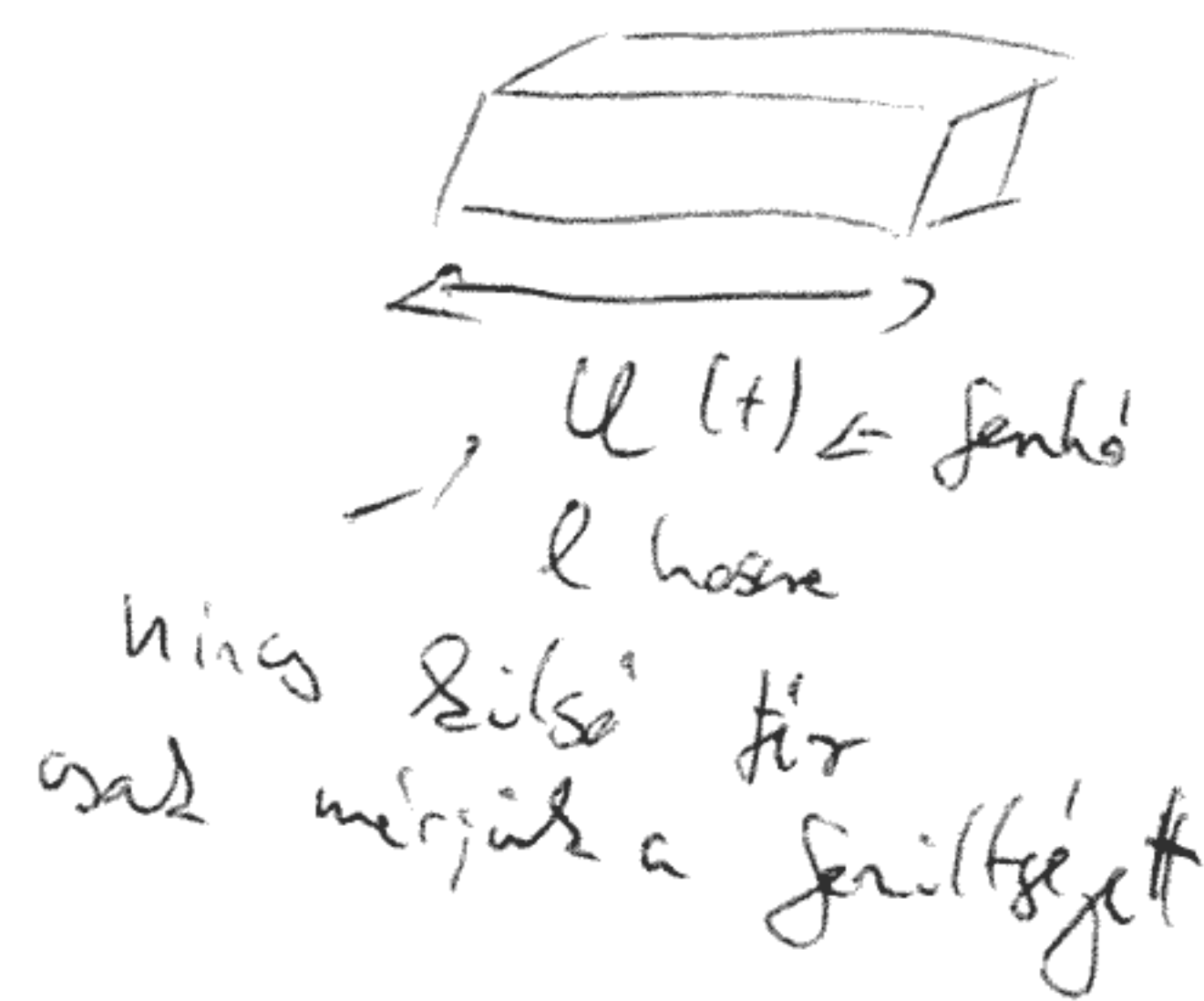
$$= e^2 \overline{v(t)v(0)} = e^2 n \frac{k_B T}{m} e^{-\gamma|t-t'|} = \frac{e^2 n}{m} \frac{1}{\gamma} k_B T \gamma \cdot 2 \cdot \frac{\gamma}{2} e^{-\gamma|t-t'|}$$

$\left(\gamma \rightarrow \infty (\tau \rightarrow 0) \right) \rightarrow \delta(t-t')$

alacsony frekvencia ($\omega \ll \gamma$)

$$\overline{j(t)j(0)} \approx 2 \cdot \sigma_0 k_B T \delta(t)$$

0-frekvencia értéke (generáció)



$$\frac{U(t)}{L} = \frac{j(t)}{\sigma_0} \Rightarrow U(t) = L \frac{j(t)}{\sigma_0}$$

$$\overline{U(t)U(0)} = \frac{L^2}{\sigma_0^2} \overline{j(t)j(0)} = \frac{L^2}{\sigma_0^2} 2\sigma_0 k_B T \delta(t) =$$

$$= 2A \cdot 2 \frac{L}{A\sigma_0} k_B T \delta(t) =$$

ellenőrzés $R = \frac{L}{A \cdot \sigma_0}$

$$= 2V R k_B T \delta(t)$$

Nyquist-zaj $\in$ szimmetria
Johnson-zaj $\in$ szimmetria

lineáris oszcillátor T halmazán vizsgáljuk:

$$\ddot{x} = \frac{F}{m} \quad U(x) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2$$

$$\ddot{x} = -m \omega_0^2 x - \gamma \dot{x} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{m} \delta(t - t_n) \quad \sum_{n=0}^{\infty} f_n \delta(t - t_n) = 2 \gamma m \omega_0 \tau \delta(t - t')$$

stacionárius állapot:

$$\ddot{x} = \frac{F}{m} = -\omega_0^2 x - \gamma \dot{x} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{m} \delta(t - t_n) \quad \text{determinantális eső}$$

Fourier-transzformáció:

$$(i\omega)^2 x_\omega = -\omega_0^2 x_\omega + \gamma i\omega x_\omega + \frac{f_\omega}{m} + \frac{f_\omega}{m}$$

$$x_\omega = \frac{f_\omega/m + f_\omega/m}{\omega_0^2 - i\omega\gamma + (i\omega)^2}$$

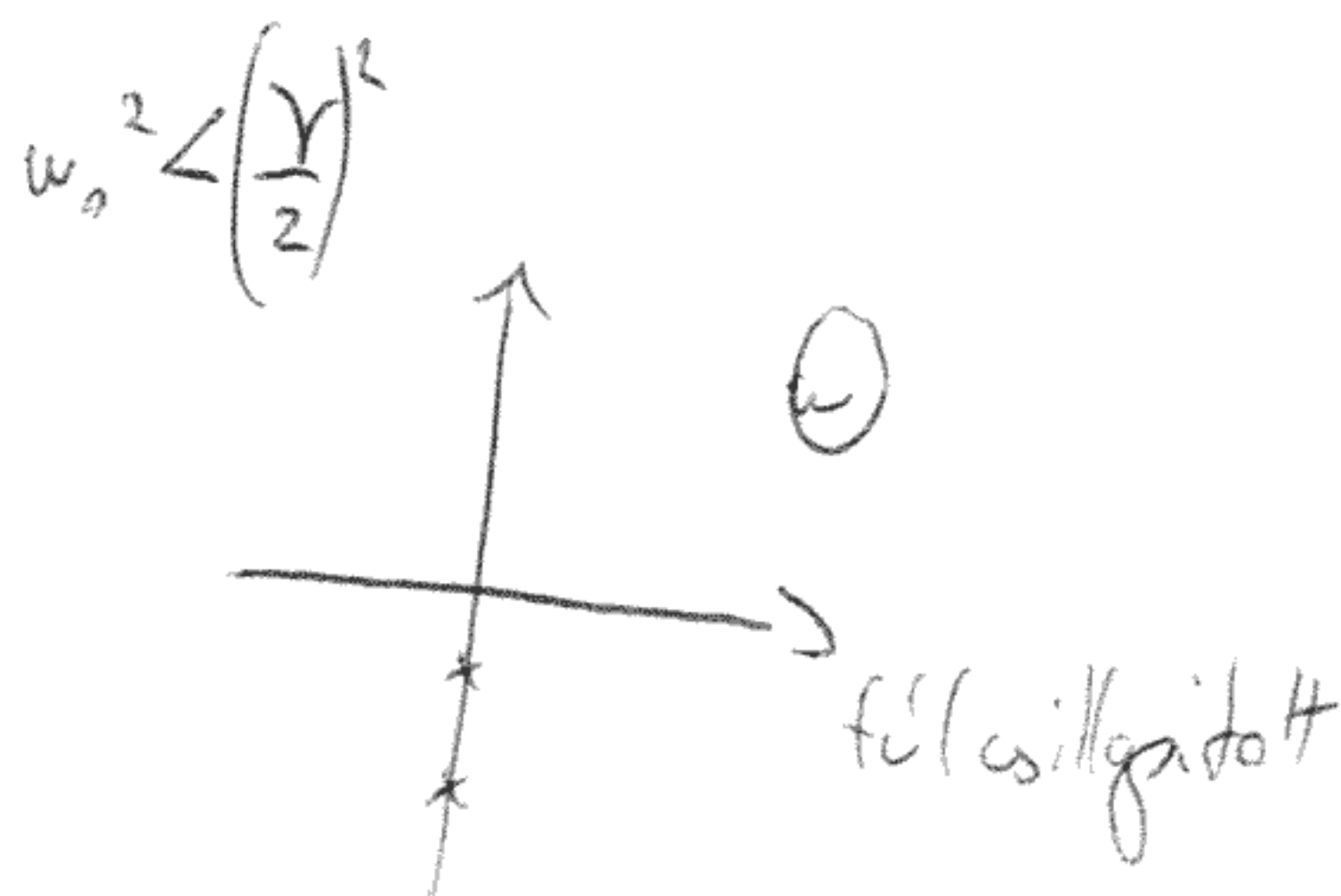
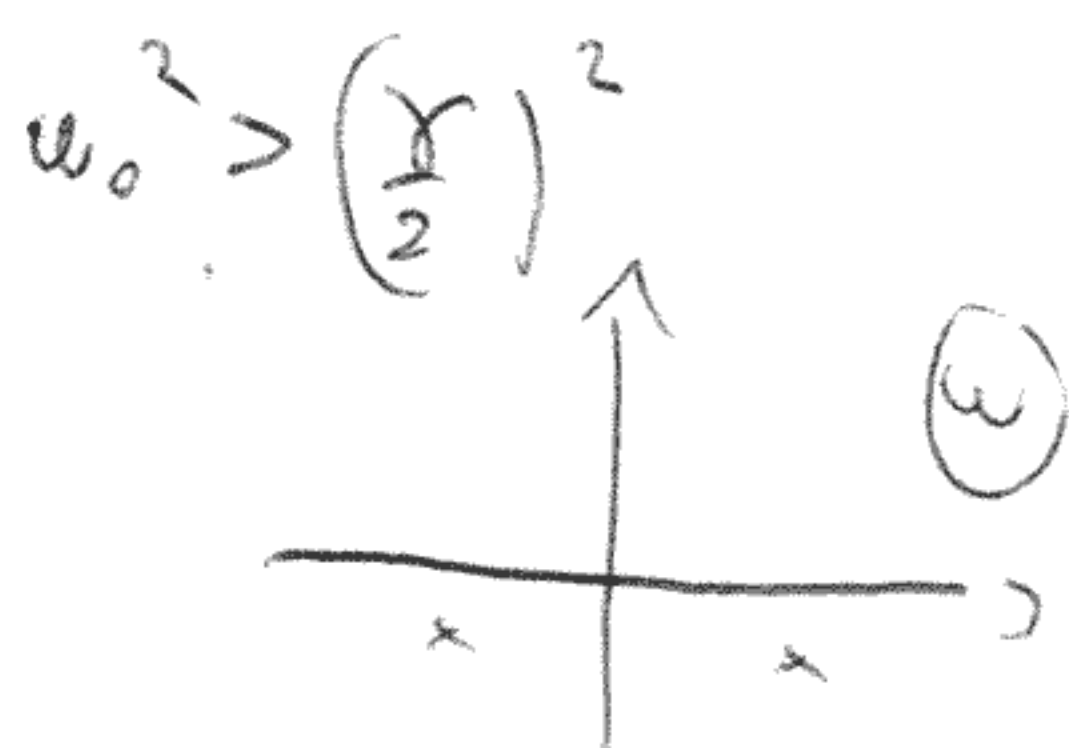
valós függvény

$$\overline{x_\omega} = \frac{1}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - i\omega\gamma - \omega^2} f_\omega$$

polusok:

$$\omega^2 + i\omega\gamma - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \omega = \frac{-i\gamma \pm \sqrt{-\gamma^2 + 4\omega_0^2}}{2}$$

$$\omega = \frac{-i\gamma \pm \sqrt{-\gamma^2 + 4\omega_0^2}}{2} = \frac{-i\gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} = \frac{-i\gamma}{2} \pm i \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$$



$$\overline{x(t) x(t')} = C(t-t') \quad \text{Sonderfall } J_0$$

$$C(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')} \hat{C}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} e^{-i\omega t} e^{-i\omega' t'} \hat{C}(\omega) 2\pi \delta(\omega+\omega')$$

$$C(t-t') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} e^{-i\omega t} e^{-i\omega' t'} C(\omega, \omega')$$

$$C(\omega, \omega') = 2\pi \delta(\omega+\omega') \hat{C}(\omega)$$

mit:

$$\overline{\{t\} \{t'\}} = 2\gamma m \hbar \gamma T \delta(t-t')$$

$\Downarrow$

$$2\gamma m \hbar \gamma T \delta(\omega+\omega') \cdot 2\pi = \overline{\xi_{\omega} \xi_{\omega'}}$$

$$\overline{x_{\omega} x_{\omega'}} = \frac{1}{\omega_0^2 - i\omega\gamma - \omega^2} \frac{\overline{\xi_{\omega} \xi_{\omega'}}}{m^2} \frac{1}{\omega_0^2 - i\omega'\gamma - \omega'^2} = 2\pi \delta(\omega+\omega') \frac{2\gamma m \hbar \gamma T}{|\omega_0^2 - i\omega\gamma - \omega^2|^2 m^2} \cdot \frac{1}{m^2}$$

$\overline{x(t) x(0)}$ Fourier transform

Dirac-delta miatt átfaktorizálva a komplex konjugátusok

a valós rész

$$X = \frac{1}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - i\omega\gamma - \omega^2}$$

$$\frac{2\hbar\gamma T}{\omega} \operatorname{Im} X =$$

$$= \frac{2\hbar\gamma T}{\omega m} \frac{\omega\gamma}{|\omega_0^2 - i\omega\gamma - \omega^2|^2}$$

ez is a Sondereis für (Stuhlsch - dissipiert Teil)

előzetes demonstráció: hővezetés

$e(r, t)$ energiasűrűség

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}$$

energiaáram sűrűség

$$\mathbf{j} = -D_T \nabla e \quad \text{constitúciós egyenlet}$$

lokális egyensúly feltételeiről: $de = \rho C_p dT$

$$D_T \rho C_p = \lambda \quad (\text{hővezetési együttható})$$

fluktuációk leírása

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}$$

$$\mathbf{j} = -D_T \nabla e + \mathbf{f}$$

$\mathbf{f}$ fluktuáló energiaáram sűrűség
Gauss-típusú felírás

$$\overline{\mathbf{f}}(r, t) = 0$$

$$\overline{\mathbf{f}}(r, t) \overline{\mathbf{f}}(r', t') = 2A \delta(r-r') \cdot \delta(t-t') \delta_{ij}$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = +D_T \Delta e(r, t) - \nabla \cdot \mathbf{f}(r, t)$$

Fourier-transzformáció

$$\frac{\partial e(q, t)}{\partial t} = -D_T q^2 e(q, t) - iq \cdot \mathbf{f}(r, t)$$

az $\mathbf{f}$ -hez hozzá lehet adni
egy konstans, az nem érint
erősen az egyenletet az
egyensúlytól való eltérést jelenti

$$\overline{\mathbf{f}}(q, t)$$

$$\overline{\mathbf{f}}(q, t) \overline{\mathbf{f}}(q', t') = \sigma_{q, q'} \cdot 2A \delta(t-t') \delta_{ij}$$

Meunier H, Deneubourg JL, Petit O, 2008. How many for dinner? Recruitment and monitoring by glances in capuchins. *Primates*, 49, 26-31.

Ramseyer, A., Petit, O., Thierry, B., 2009. Decision-making in group departures of female domestic geese. *Behaviour*, 146, 351-371.

Reynolds, C. W., 1987. Flocks, Herds, and Schools: A Distributed Behavioral Model, in *Computer Graphics. SIGGRAPH '87 Conference Proceedings*, 21, 25-34.

Sirot, E., 2006. Social information, antipredatory vigilance and flight in bird flocks. *Anim. Behav.* 72, 373-382.

Vicsek, T., Czirók, A., Ben-Jacob, E., Cohen, I., Shochet, O., 1995. Novel type of phase-transition in a system of self-driven particles. *Phys. Rev. Lett.* 75, 1226-1229.

Visscher, P.K., Seeley, T.D., 2007. Coordinating a group departure: who produces the piping signals on honeybee swarms? *Behav. Ecol. Sociobiol.* 61, 1615-1621.

Ward, A.J.W., Sumpter, D.J.T, Couzin, I.D., Hart, P.J.B, Krause, J., 2008. Quorum decision-making facilitates information transfer in fish shoals. *PNAS.* 105, 6948-6953.

$$\sum_{\mathbf{q}} (-iq_x \mathcal{L}_x(\mathbf{q}, t)) (-iq'_x \mathcal{L}_x(\mathbf{q}', t)) = 2Aq^2 \delta(t-t')$$

Szűcs
11.27

$$\frac{\partial e(\mathbf{q}, t)}{\partial t} = -D_T q^2 e(\mathbf{q}, t) + \underbrace{(-iq_x \mathcal{L}_x(\mathbf{q}, t))}_{\equiv \xi(\mathbf{q}, t)}$$

$$\xi(\mathbf{q}, t)$$

$$\overline{\xi(\mathbf{q}, t)} = 0$$

$$\overline{\xi(\mathbf{q}, t) \xi(\mathbf{q}', t')} = 2Aq^2 \delta(t-t') \delta_{\mathbf{q}, -\mathbf{q}'}$$

ez egy 0-u folyamat, tehát várhatóan az ott tanult folyamatot
de mi inkább megoldjuk

$$e(\mathbf{q}, t) = \int_{-\infty}^t ds e^{-D_T q^2 (t-s)} \xi(\mathbf{q}, s) \quad (\mathbf{q} \neq 0)$$

$$\overline{e(\mathbf{q}, t) e(\mathbf{q}', t')} = \int_{-\infty}^t ds \int_{-\infty}^{t'} ds' e^{-D_T q^2 (t-s)} e^{-D_T q'^2 (t'-s')} \overline{\xi(\mathbf{q}, s) \xi(\mathbf{q}', s')} = \text{ez volt a Brown-mozgás}$$

$$= \frac{A}{D_T} e^{-D_T q^2 |t-t'|}$$



$$\overline{\Delta E^2} = \frac{1}{3} T^2 C = \frac{1}{3} T^2 g c V$$

"↓"

$$\int_V d\mathbf{r} \overline{\sigma e(\mathbf{r}, t) \sigma e(\mathbf{r}', t)} =$$

$$\int d^3 r' \int d^3 r \overline{\sigma e(\mathbf{r}, t) \sigma e(\mathbf{r}', t)} = V \frac{A}{D_T}$$

ha az eddig nagy C_p is inkább
his C_p de csak $\frac{1}{3}$ c-vel
relativizál

Conradt, L. Roper T.J., 2003. Group decision-making in animals. *Nature*. 421, 155-158.

Conradt, L., Roper T.J., 2005. Consensus decision making in animals. *Trends. Ecol. Evol.* 20, 449-456.

Conradt, L. Roper T.J., 2007. Democracy in animals: the evolution of shared group decisions. *Proc Royal Soc.B.* 274, 2317-2326.

Couzin, I.D., Krause, J., James, R., Ruxton, G.D., Franks, N.R., 2002. Collective memory and spatial sorting in animal groups. *J. theor. biol.* 218, 1-11.

Daruka, I., 2009. A phenomenological model for the collective landing of bird flocks. *Proc. R. Soc. B*, 276, 911-917.

Detrain, C., Deneubourg, J.L., 2008. Collective Decision-Making and Foraging Patterns in Ants and Honeybees. *Advances in Insect Physiology* 35, 123-173.

Garnier, S., Gautrais, J., Asadpour, M., Jost, C., Theraulaz, G., 2009. Self-Organized Aggregation Triggers Collective Decision Making in a Group of Cockroach-Like Robots. *Adaptive Behaviour* 17, 109-133.

Grégoire, G., Chaté, H., 2004. Onset of collective and cohesive motion. *Phys. Rev. Lett.* 92, 025702.

Gautrais, J., Michelena, P., Sibbald, A., Bon, R., Deneubourg, J.L., 2007. Allelomimetic synchronization in Merino sheep. *Anim. Behav.* 74, 1443-1454.

Halley, J.D., Burd, M., 2004. Nonequilibrium dynamics of social groups: insights from foraging Argentine ants. *Insect Soc.* 51, 226-231.

Helbing, D., Molnár, P., 1995. Social force model for pedestrian dynamics. *Phys. Rev. E.* 51, 4282-4286.

$$t = t'$$

$$\overline{e(q, t) e(-q, t)} = \frac{A}{D_T}$$

$$\overline{\delta c(r, t) \delta c(r', t)} = \frac{A}{D_T} \delta(r - r')$$

$$\overline{\Delta E^2} = V \frac{A}{D_T} = \frac{2}{3} T^2 \rho c V \Rightarrow A = \frac{2}{3} T^2 \rho c D_T = \frac{2}{3} T^2 \rho$$

$$\overline{e(q, t) e(-q, t')} = \frac{2}{3} T^2 \rho c e^{-D_T q^2 |t - t'|}$$

ez olyan mintha az egyszerű eloszlás ez lenne.

$$e^{-\int d^3r \frac{\delta c(r)^2}{2 \frac{2}{3} T^2 \rho c}} \sim P(\delta c(r))$$

ezt vmi funkcionális integrállal megoldhatjuk volna, de inkább nem

$$e^{-\sum_q \frac{\delta c(q) \delta c(-q)}{2 \frac{2}{3} T^2 \rho c}}$$

időbeli Fourier

$$\frac{1}{D_T q^2 - i\omega}$$

$$c.c.: \frac{1}{D_T q^2 + i\omega}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-D_T q^2 |t - t'|} e^{i\omega t} dt \frac{2}{3} T^2 \rho c = \left(\int_0^{\infty} dt e^{-D_T q^2 t} e^{i\omega t} + \int_{-\infty}^0 dt e^{D_T q^2 t} e^{i\omega t} \right) =$$

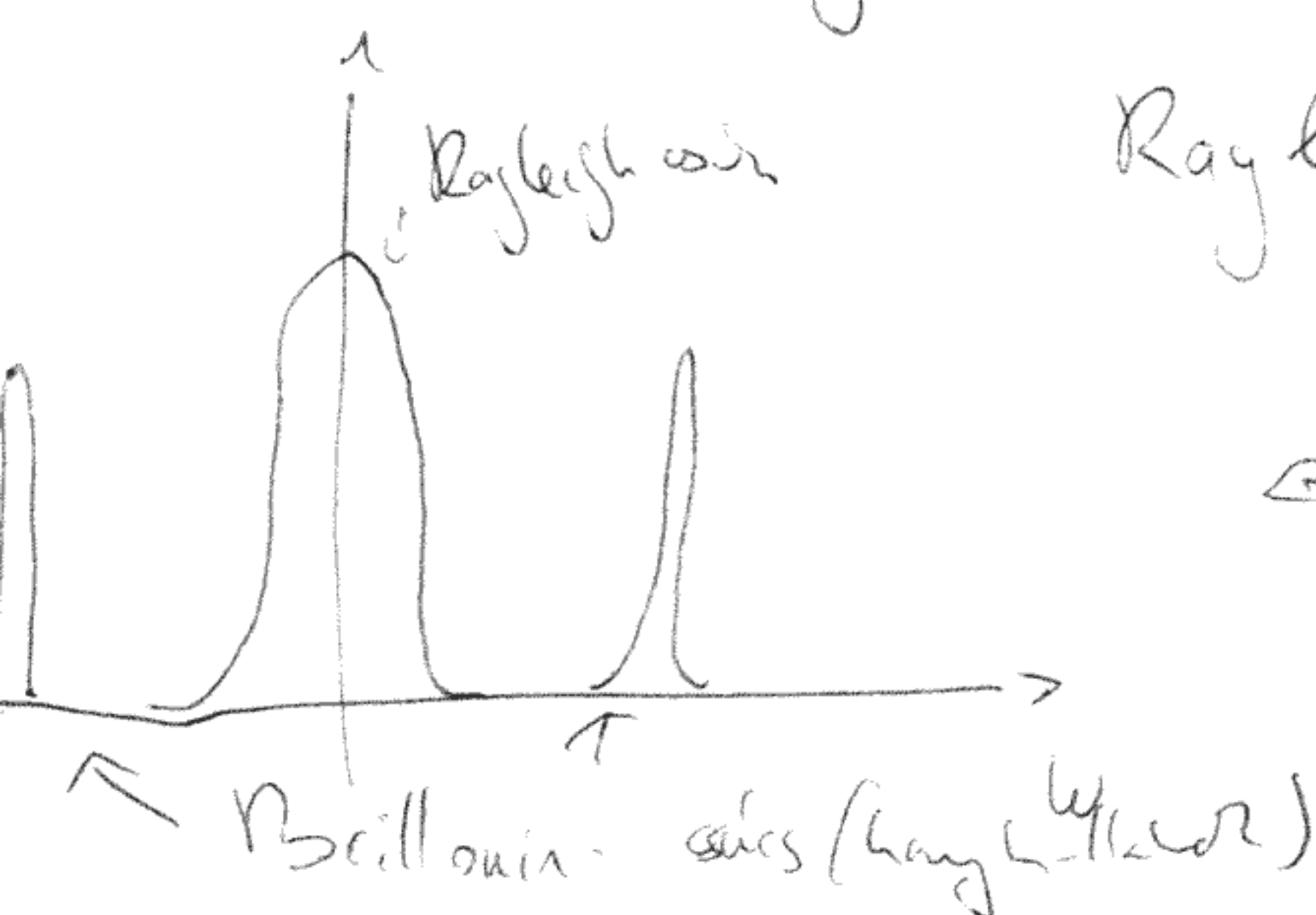
$$= \frac{2}{3} T^2 \rho c \left(\frac{2 D_T q^2}{(D_T q^2)^2 + \omega^2} \right) : \text{Lorentz-görbe } D_T q^2 \text{ fluktuációs erővel}$$

hogy lehet ezt mérni?

hőátvitel miatt sűrűségfluktuációk felismerése ami fénnyel mérhető

Rayleigh- és Brillouin- és a sűrűség korrelációs függvényben

← szórás és szórás



α slightly less than the smallest shown on the graph no landing occurs. **(b)** The coherence of the flock as a function of the magnitude of the vertical noise and f_z^h (all other parameters are as of Table 1). The place of the minimum in α shifts to the right, and the value of the minimum increases as f_z^h becomes stronger.

4. Conclusion

In this report, we have investigated a model where the concepts of collective decision making and collective motion are intertwined. In particular, we have introduced a simple phenomenological model for the landing of a flock of birds. In the model birds are only influenced by the dynamical variables, like position and velocity, of other birds in their immediate neighbourhood. Heterogeneity is introduced in the flock in terms of a depletion time after which a bird feels an increasing bias to move towards the landing surface. The stochastic nature of the bias ensures that the effects of the surface, over which the flock flies, is also included. Our results suggest that the coherence of the collective action of landing can be enhanced by the random perturbations from the environment. Through our model we have demonstrated a mechanism by which animals in large group can arrive at an egalitarian decision about the time of switching from one activity to another in the absence of a leader.

Acknowledgment

This research was supported by the EU ERC COLLMOT project.

References

- Aoki I., 1982. A simulation study on the schooling mechanism of fish. B. Jpn. Soc. Sci. Fish 48, 1081-1088.
- Bhattacharya, K., Vicsek, T., 2010. Collective decision making in cohesive flocks. New J. Phys. 12, 093019.
- Chamley C.P., 2004. Rational Herds, Cambridge University Press, Cambridge.

ha nagyon jól lenne az a hidroba és a flakidit
 levezni: ϕ = $\phi(x)$ ϕ = $\phi(x)$ ϕ = $\phi(x)$

Sesfor
 11. 27.

L, akkor ϕ = $\phi(x)$ ϕ = $\phi(x)$

ϕ = $\phi(x)$ ϕ = $\phi(x)$

lajtkésően lineáris folyamatos, Onsager reláció

$$\underline{x} = (x_1 \dots x_n)$$

$$P_S(x) = e^{-\phi(x)}$$

$$\text{Lajtkéső } X_i = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i}$$

$$\text{mikrokanonikus rendszer } \phi = -\frac{\ln Z}{Z}$$

$$\text{kanonikus rendszer: } \phi = \frac{F(x)}{Z}$$

margás g enlet

szimmetrikus g ϕ ϕ ϕ

$$x_i = - \sum_j L_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} + \sum_i x_i$$

$$L_{ij} = L_{ij}^{(s)} + L_{ij}^{(as)} \text{ antiszimmetrikus}$$

szimmetrikus

$$\frac{L_{ij} + L_{ji}}{2} \quad \frac{L_{ij} - L_{ji}}{2}$$

$$\overline{\sum_i x_i(t)} = 0$$

$$\overline{\sum_i x_i(t) \sum_j x_j(t')} = 2 L_{ij}^{(s)} \delta(t-t')$$

lajtkéső szimmetrikus, ϕ a
 szimmetrikus, ϕ a
 elonlas a $e^{-\phi(x)}$ ϕ ϕ

mikrokanonikus dinamika időtükrözés

invarians ϕ ϕ ϕ

$$\overline{x_i(t) x_j(0)} = \overline{x_i(-t) x_j(0)} = \overline{x_j(t) x_i(0)}$$

$$\overline{\dot{x}_i(t) x_j(0)} = \overline{\dot{x}_j(t) x_i(0)}$$

(stationarius állapotban
 egyen)

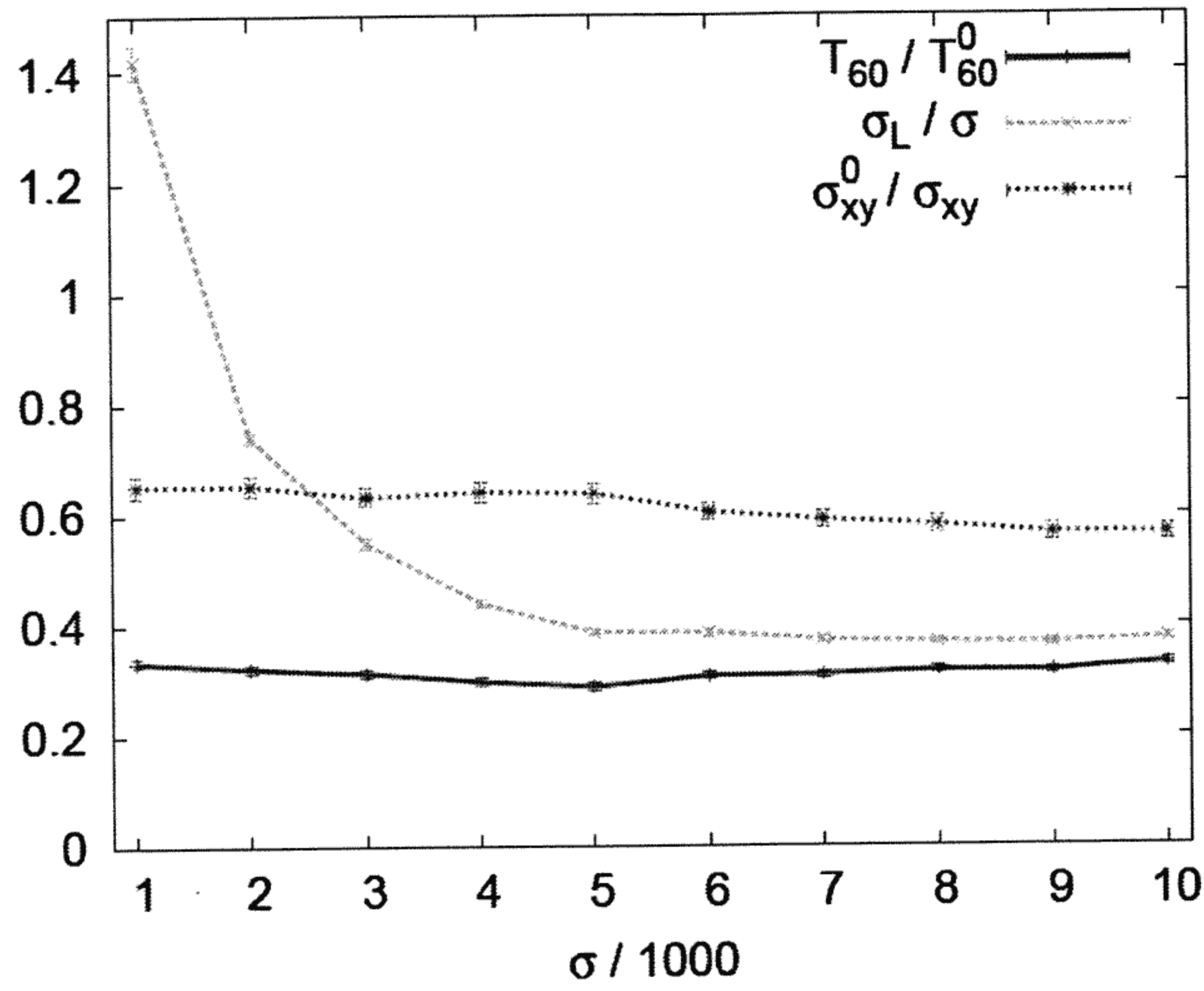


Figure 6: The values of the most important quantities describing the collective landing for different variances of the depletion times (all other parameters are as of Table 1). Note that T_{60}/T_{60}^0 is well below 1. For small σ -s σ_L/σ grows considerably, which is due to the fact, that effects, such as the size of the birds and the height of the flock, become noticeable when σ is small.

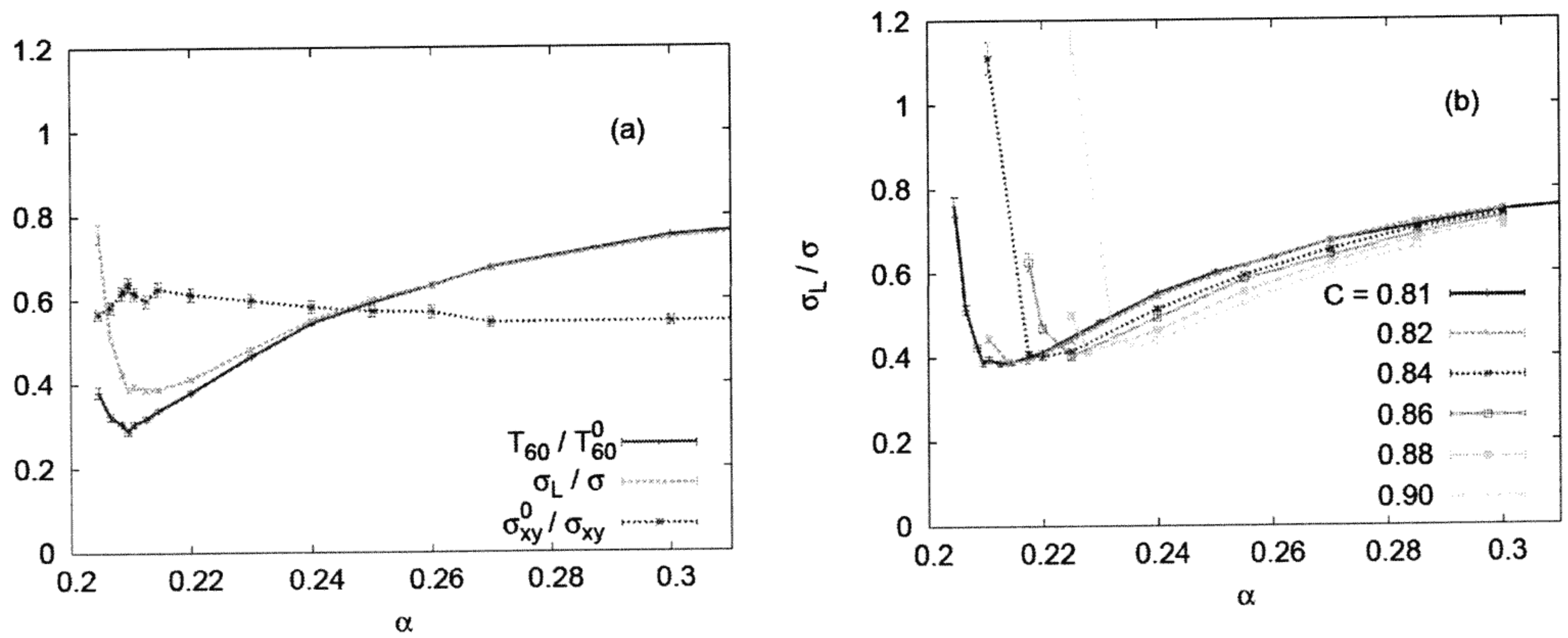


Figure 7: (a) The values of the most important quantities describing the collective landing for different magnitudes of the vertical noise (all other parameters are as of Table 1). For values of

$$-\sum_i' L_{ie} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(t) x_j(0) + \sum_i' (t) x_j(0) \stackrel{t \rightarrow 0}{=} -\sum_i' L_{ie} \overline{X_e(t) x_j(0)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} -\sum_i' L_{ie} \overline{x_j(0)} \stackrel{\text{Satz 27.}}{\sim} -L_{ij}$$

$t > 0$ függvény
 $\sum_i' (t) x_j(0) = 0$
szimmetria
||
-L_{ij}

$$\overline{X_e x_j} = \frac{\int dx_1 \dots dx_n e^{-\phi(x)} \frac{\partial \phi}{\partial x_e} x_j}{\int dx_1 \dots dx_n e^{-\phi(x)}} = \delta_{ej}$$

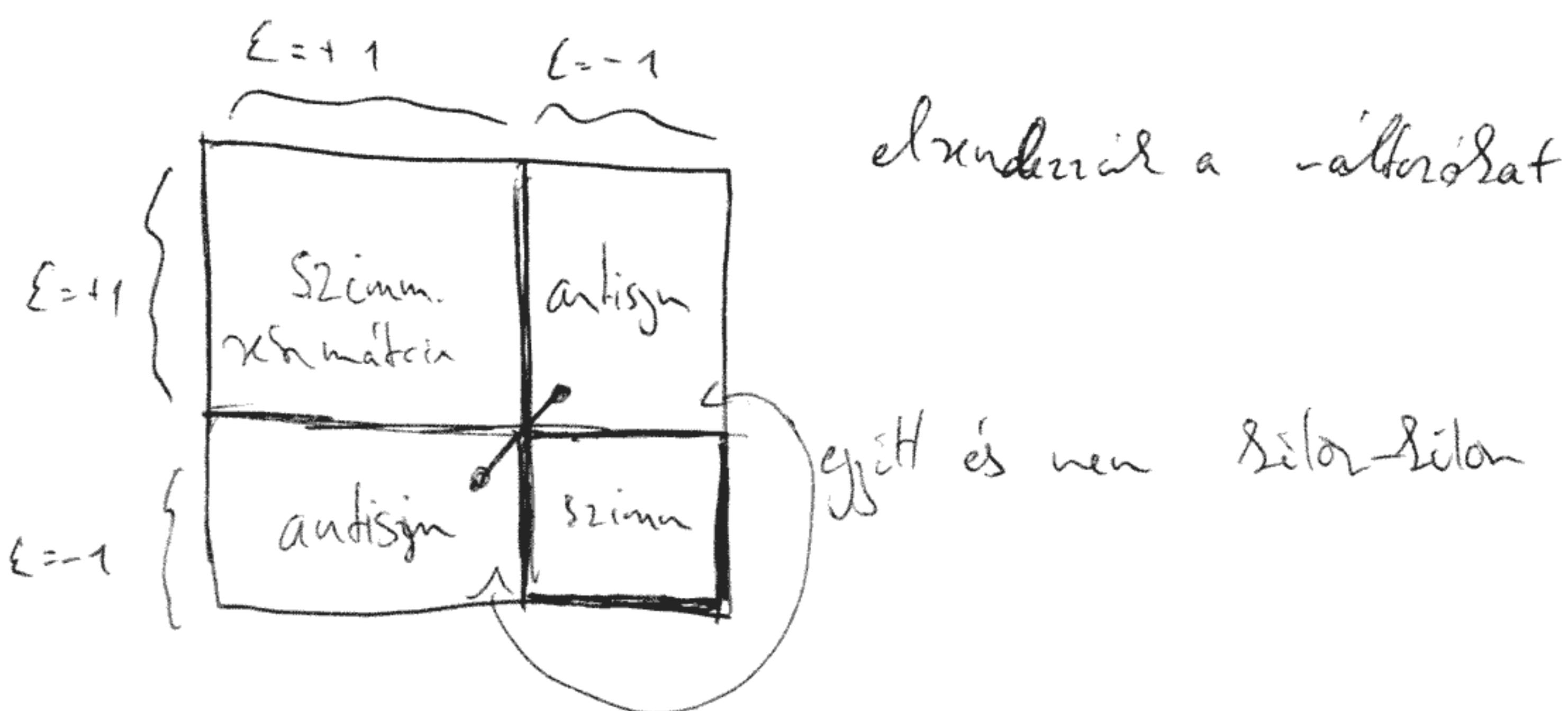
$$\int dx_e e^{-\phi(x)} \frac{\partial \phi}{\partial x_e} x_j = \left[-e^{-\phi} x_j \right]_{x_e=-\infty}^{x_e=+\infty} + \int dx_e e^{-\phi(x)} \frac{\partial x_j}{\partial x_e} = \delta_{ej} \int dx_e e^{-\phi(x)}$$

terménstet határértéke
 $e^{-\phi} \rightarrow 0 \quad (x_e \rightarrow \pm \infty)$

$$-L_{ij} = \epsilon_i \epsilon_j (-L_{ji})$$

$L_{ij} = \epsilon_i \epsilon_j L_{ji}$: ha ezt tudjuk, akkor van
Onsager-szimmetria
makroszkopikus szinten is előtérbe

L_{ij} : $n \times n$ es mátrix



$$L_{ij}^{(s)} = \begin{pmatrix} (u_i)(0) \\ (0)(u_i) \end{pmatrix}$$

diszipatív
folyamatok

$$L_{ij}^{(a)} = \begin{pmatrix} (0)(u_i) \\ (u_i)(0) \end{pmatrix}$$

konzervatív folyamatok

of the noise has to be large enough for the birds to overcome f_z^h , but too much noise decreases the coherence achieved by the averaging force.

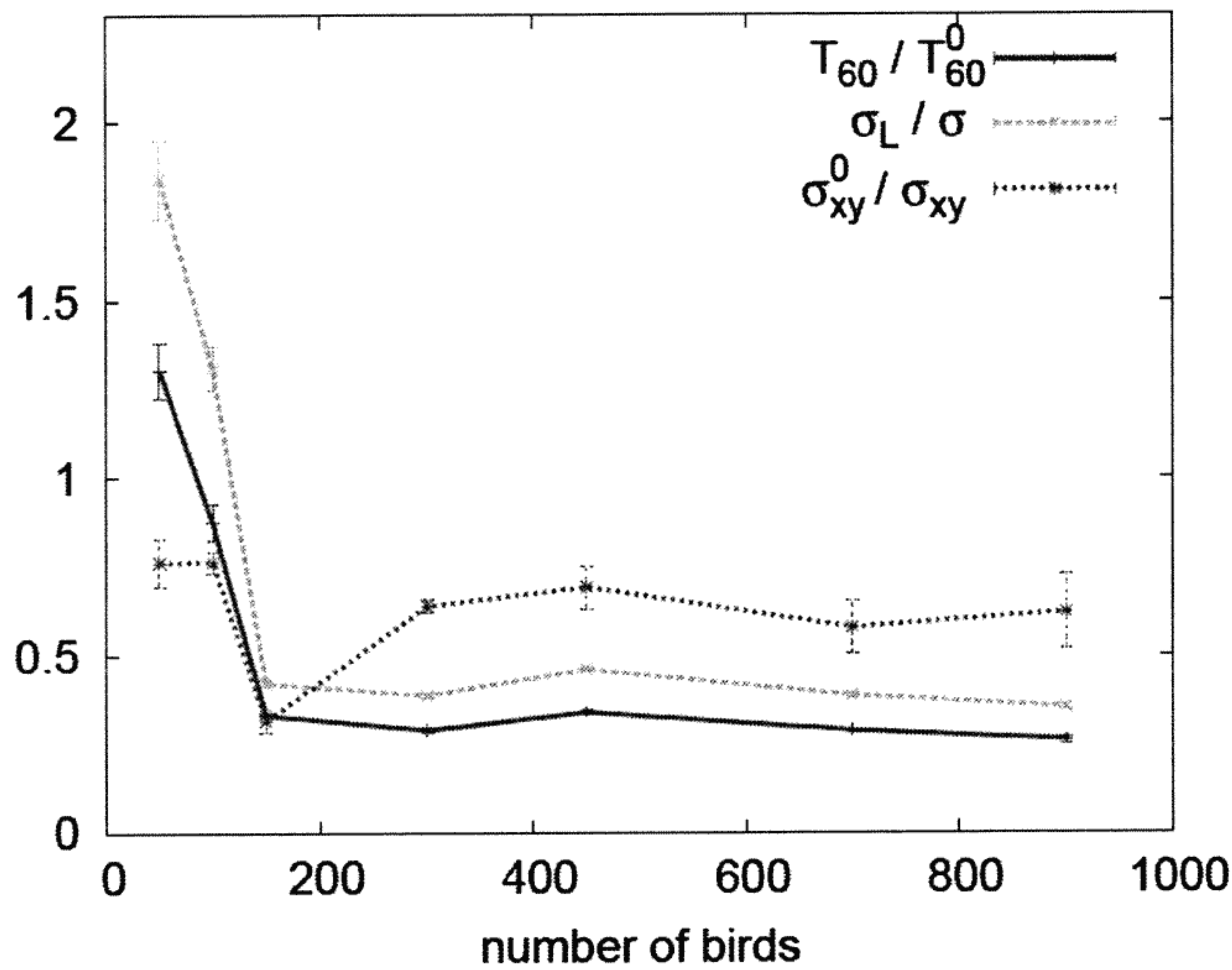


Figure 5: The values of the most important quantities describing the collective landing for different number of birds, while keeping the density of the birds constant with the changing of D (all other parameters are as of Table 1). Note that T_{60}/T_{60}^0 is well below 1 and this property persists for much larger flocks than the one used in most of our measurements.

itt a hajtörés linearis, a szanabolás nem illik
annak kenne.

Szfor
W. 27.

Szöveges órán master - egyenlet

We stress that this happened while a single bird had information about only a few neighbours, and not the whole flock.

quantity	Value	
σ_L/σ	0.387	± 0.007
T_{60}/T_{60}^0	0.288	± 0.007
$\sigma_{xy}^0/\sigma_{xy}$	0.639	± 0.017

Table 2: The quantities describing the coherence in space and time, with the parameter values of Table 1.

In Figures 5, 6 and 7 we show these quantities graphically, while the number of birds in the flock, the standard deviation of the distribution of t_i -s, and the magnitude of the vertical noise are changed respectively. When changing the number of birds in the flock, we keep the density of the birds constant with the appropriate changing of D . Note that our previous statements about temporal coherence hold for considerable changes of these attributes of the flock.

In Figure 5 we see that decreasing the number of birds, while keeping the ratio of the number of birds and the volume set by the boundaries of the forces f_z^h and f_{xy}^c a constant, makes the flock decoherent. This is due to the fact that with the decrease in the number of birds, the fluctuations in the number of neighbours, with respect to the individual birds, become important.

In Figure 6 we see that for small σ -s the value of σ_L/σ grows well above one. This is because there is an inherent difference in landing times, due to the birds starting from different heights and thus arriving at the ground at different times, and that the birds cannot land on top of each other. The effect of this inherent difference becomes noticeable compared to σ when σ is small.

Figure 7 shows that for any given coefficient of f_z^h there is maximum of temporal coherence or put otherwise a minimum of T_{60}/T_{60}^0 and σ_L/σ , as a function of the noise. The interplay between f_z^h and the vertical noise becomes clear from Figure 7(b). The place of this minimum (in α) shifts to right, and increases (in T_{60}/T_{60}^0) with the increase of the coefficient of f_z^h . Also the place of the minimum is very close to the minimum magnitude of noise where landing occurs. This is because the magnitude

Fázisok: n (egyen) $|||$

$P_1(n, t)$ $P(n, t|m)$
↓ ↓
előadás átmeneti valószínűség

$$P_1(n, t) = \sum_m \underbrace{P(n, t|m) P_1(m, 0)}_{P_2(n, t, m, 0)}$$

Chapman - Kolmogorov:

$$P(n, t|m) = \sum_{m'} P(n, t-t'|m') P(m', t'|m)$$

átírunk folytonos idejű differenciál egyenletre



$P_1(n, t+s)$ $P_1(n, t+s) = \sum_m \underbrace{P(n, s|m)}_{\substack{\text{1-es rendű} \\ \text{átmeneti valószínűség}}}$ $P_1(t, m)$

$n \neq m$

$W_{nm} \cdot s \geq 0$ (átmeneti valószínűség)

$\underbrace{P_{nm} + W_{nm} \cdot s + O(s)}_{\substack{\text{1-es rendű} \\ \text{átmeneti valószínűség}}}$

$n = m$

$1 + W_{mm} \cdot s = 1 - \sum_{n \neq m} W_{nm} \cdot s$

$\Rightarrow W_{mm} = - \sum_{n \neq m} W_{nm}$

$P_1(n, t+s) = P_1(n, t) + \frac{\partial P_1(n, t)}{\partial t} \cdot s$

$\frac{\partial P_1(n, t)}{\partial t} = \sum_m W_{nm} P_1(m, t) = \sum_{n \neq m} (W_{nm} P_1(m, t) - W_{mn} P_1(n, t))$

Master-egyenlet

diszkrét idejű változat

$$t = l\tau \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

$$p_1(n, (l+1)\tau) = \sum_m w_{nm} p(m, l\tau)$$

$$w_{nm} = p(n\tau | m)$$

$$\sum_n w_{nm} = 1 \quad \text{stochastikus mátrix}$$

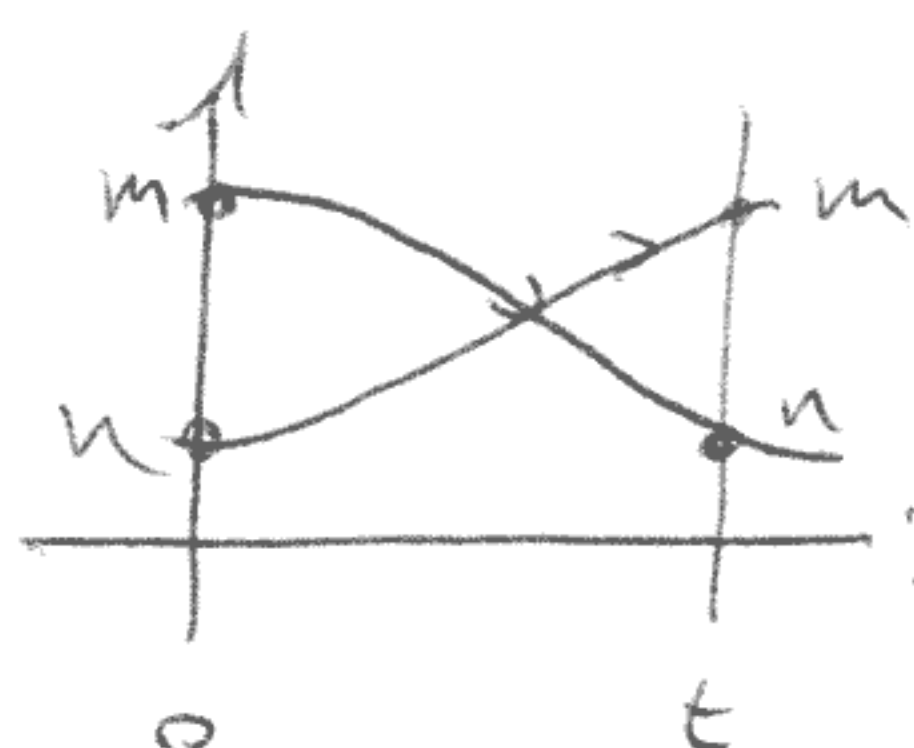
stacionárius állapot: $p_s(n)$

$$\sum_m (w_{nm} p_s(m) - w_{mn} p_s(n)) = 0$$

reinkettség: $w_{nn} p_s(n) = w_{nn} p_s(m)$



Ha a stacionárius állapot időtárhelyes ciklusok, reinkettség



$$p_2(m, t, n, 0)$$

$$p_2(n, t, m, 0)$$

ezek közös időtárhelyes ciklusok, tehát reinkettség

$$P(m, t | n) p_s(n) = P(n, t | m) p_s(m)$$

infinitesimális időben ($t \rightarrow 0$)

$$w_{nn} p_s(n) = w_{nn} p_s(m)$$

Tétel

- feltételek:
- legyen $p_s(n)$ stacionárius eloszlás
 - fennáll a reinkettség
 - fennáll a nem reparálhatóság (kiszorítások helyett állapotok közötti átmenet reprezentációját követi)

tétel: ebben az esetben $p_s(n)$ stabil stacionárius eloszlás

bizonyítás.

$$H := \sum_n p(n,t) \ln \frac{p(n,t)}{p_s(n)} =$$

$$p_s(n) \text{ nem } 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = 0$$

$$= \sum_n \left(p(n,t) \ln \left(\frac{p(n,t)}{p_s(n)} \right) - p(n,t) + p_s(n) \right) =$$

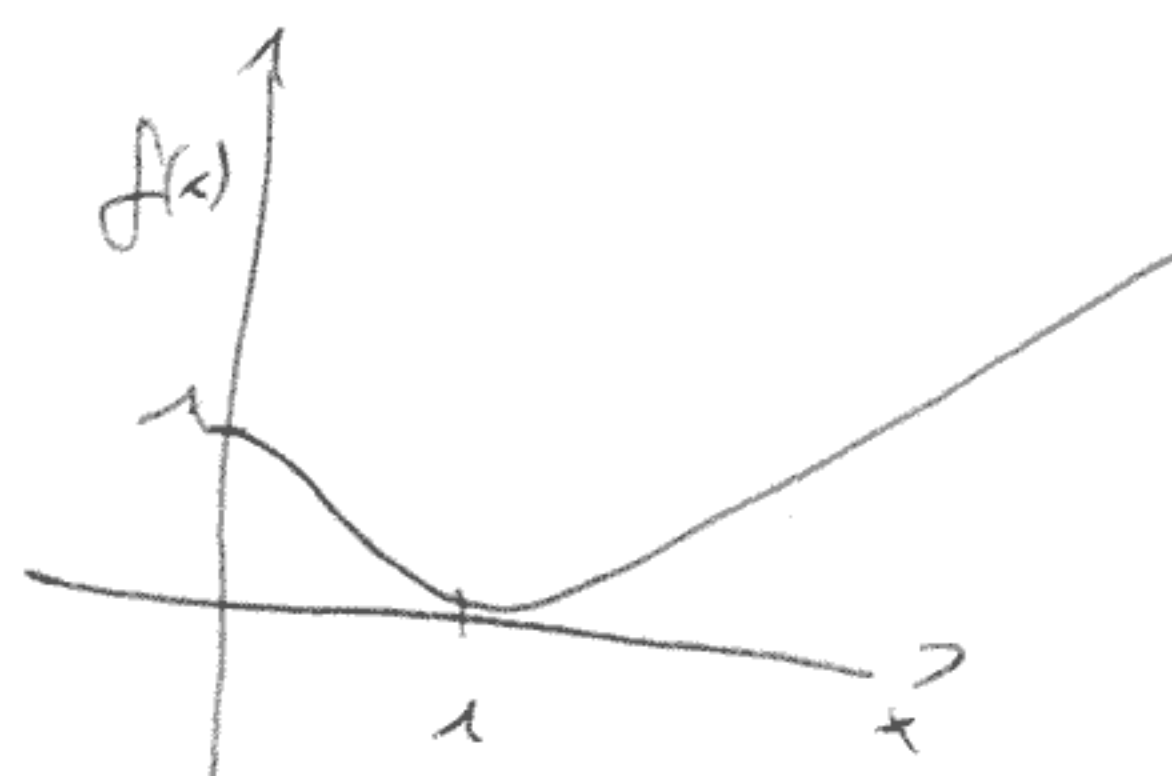
hammára minden t -et ad

$$= \sum_n p_s(n) \left[\frac{p(n,t)}{p_s(n)} \ln \left(\frac{p(n,t)}{p_s(n)} \right) - \frac{p(n,t)}{p_s(n)} + 1 \right] \geq 0$$

$$f(x) = x \ln x - x + 1 \geq 0$$

$$f(x=1) = 0$$

$$f' = \ln x \Big|_{x=1} = 0 \quad f'' = \frac{1}{x} > 0$$



$$H \geq 0$$

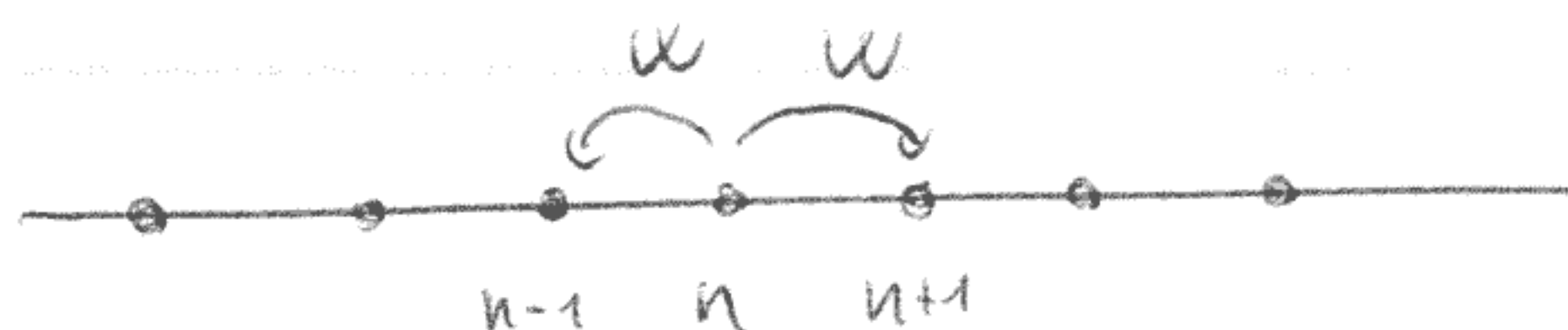
$$H = 0 \Leftrightarrow \forall \text{ tagja az összegnek } 0 \Rightarrow \frac{p(n,t)}{p_s(n)} = 1$$

$$\dot{H} = \sum_n \left(\ln \left(\frac{p(n,t)}{p_s(n)} \right) + 1 \right) \dot{p}(n,t) =$$

$$\left(\text{megőriződik a normalizáció:} \sum_n \dot{p}(n,t) = 0 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{n,m \\ (n \neq m)}} \ln \left(\frac{p(n,t)}{p_s(n)} \right) \cdot \left(w_{nm} p(m,t) - w_{nm} (p(n,t)) \right) + \sum_{\substack{n,m \\ (n \neq m)}} \ln \left(\frac{p(m,t)}{p_s(m)} \right) \left(w_{mn} p(n,t) - w_{mn} (p(m,t)) \right)$$

↑
az a δt -től ugaznak csak a csomópontok
jelölve az indexek



infinitesimális idő alatt csak a szomszédok között lehet differencia és ilyen
kisebbség esetén mi látványosabb

master-
egyenlet: $\dot{p}_n(t) = \omega(p_{n+1}(t) + p_{n-1}(t) - 2p_n(t))$ "3. azaz a szimmetria a
valószínűségeket"

$$\bar{n}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n p_n(t)$$

$$\dot{\bar{n}}(t) = \sum_n n \dot{p}_n(t) = \sum_n (n p_{n+1} + n p_{n-1} + \underbrace{2n p_n}) \omega = \omega(\bar{n} - 1 + \bar{n} + 1 - 2\bar{n})$$

$n = n+1-1$ $n = n-1+1$

$$\dot{\bar{n}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{n}(t) = \bar{n}(0)$$

$$\bar{n}^2(t) = \sum_n n^2 p_n(t)$$

$$\dot{\bar{n}^2}(t) = \sum_n (n^2 p_{n+1} + n^2 p_{n-1} - 2n^2 p_n) \omega =$$

$$n^2 = (n+1-1)^2 = (n+1)^2 - 2(n+1) + 1$$

$$n^2 = (n-1)^2 + 2(n-1) + 1$$

$$= \cancel{\omega} \omega (\bar{n}^2 - 2\bar{n} + 1 + \bar{n}^2 + 2\bar{n} + 1 - 2\bar{n}^2) = 2\omega$$

$$\bar{n}^2(t) = \bar{n}^2(0) + 2\omega t$$

$$\bar{n}^2(t) - \bar{n}^2(0) = \bar{n}^2(0) - \bar{n}^2(0) + 2\omega t$$

spec eset:

$$\bar{n}(0) = 0 \quad \bar{n}^2(0) = 0 \quad \left(\frac{?}{2} \right) p_n(0) = \sigma_{n,0}$$

$$\bar{n}^2(t) = 2\omega t$$

$$x = na \quad \bar{x} = 0 \quad \bar{x}^2 = 2\omega a^2 t \quad D = \omega a^2 \text{ (diffúziós g. állandó)}$$

jó jó, de mi a $p_n(t)$ - t?

$F(z, t) = \sum_n z^n p_n(t)$: generátor fu., ahol feltételeztük, hogy p_n hatványfüggvényekről gyorsabban esik le.

$$\frac{\partial F}{\partial t} F(z, t) = \sum_n \left(\frac{z^{n+1}}{z} p_{n+1} + z^n p_{n-1} - 2z^n p_n \right) \omega = \left(\frac{F(z, t)}{z} + z F(z, t) - 2F(z, t) \right) \omega$$

$$= \omega \left(\frac{1}{z} + z - 2 \right) F(z, t)$$

$$F(z, t) = F(z, 0) e^{\omega \left(\frac{1}{z} + z - 2 \right) t}$$

$$F(z, 0) = \sum_n z^n p_n(0)$$

miért jó ez a generátor fu.?

momentumok:

$$F(z=1, t) = 1$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{z=1} = \sum_n n p_n = \bar{n}$$

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right|_{z=1} = \sum_n n(n-1) p_n = \bar{n}^2 - \bar{n}$$

valószínűség

$$\frac{1}{l!} \left. \frac{\partial^l F}{\partial z^l} \right|_{z=0} = p_l(t)$$

más módon: z hatványfüggvény g. állandója



$$p_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{F(z, t)}{z^{n+1}} dz \quad \text{complex-függvénytan}$$

Specialban:

Sz. 12
V. 11

$$P_n(0) = \sigma_{n,0}$$

$$F(z,0) = \sum_n z^n \sigma_{n,0} = 1 \quad \text{ez a módosított Bessel generátora}$$

$$F(z,t) = e^{-2wt} e^{w(\frac{1}{2}+z)t}$$

$$P_n(t) = e^{-2wt} \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{e^{w(\frac{1}{2}+z)t}}{z^{n+1}} = e^{-2wt} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e^{i\varphi} \frac{e^{w(e^{-i\varphi}+e^{i\varphi})t}}{e^{in\varphi} e^{i\varphi}} =$$

$$z = e^{i\varphi}$$

$$dz = ie^{i\varphi} d\varphi$$

$$= e^{-2wt} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e^{-in\varphi} e^{2w \cos \varphi t} = e^{-2wt} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \cos(n\varphi) e^{2w \cos \varphi t} =$$

$\cos(n\varphi) - i \sin(n\varphi)$ ← páros-páratlan szimmetrikus ívvel

páros fv.

$$(P_n) = e^{-2wt} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\varphi \cos(n\varphi) e^{2w \cos \varphi t}$$

ha az ember soha nem, akkor
ennebe jut a módosított Besselfv.
"ez entitárisi sándor"
"a forrásos szétter a nép
dolgozat"

módosított Bessel:

$$I_n(z) = i^{-n} J_n(iz) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{z \cos \varphi} \cos(n\varphi) d\varphi$$

↑
sima Bessel fv.

$$P_n(t) = e^{-2wt} I_n(2wt)$$

a szimptotikus formula:

$$I_n(z) \approx \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right) \quad z \gg 1$$

végtelek:

ciszfűzés határfeltétel, majd tartunk a végtelekbe

Fourier felírás:

diszkrét Fourier
transz

$$P_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q e^{iqna} P_q$$

$$P_q = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n e^{-iqna} P_n$$

N db pont és az N+1-ik az meggyesed
az elsővel.

q : a Koordinata

$$q = \frac{2\pi}{a} \cdot \frac{m}{N} \quad m \in \mathbb{N}^+$$

$-\frac{\pi}{a} < q < \frac{\pi}{a}$ q benne van a Brillouin-zónában

$$\dot{p}_q = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{-iqna} w(p_{n+1} + p_{n-1} - 2p_n) =$$

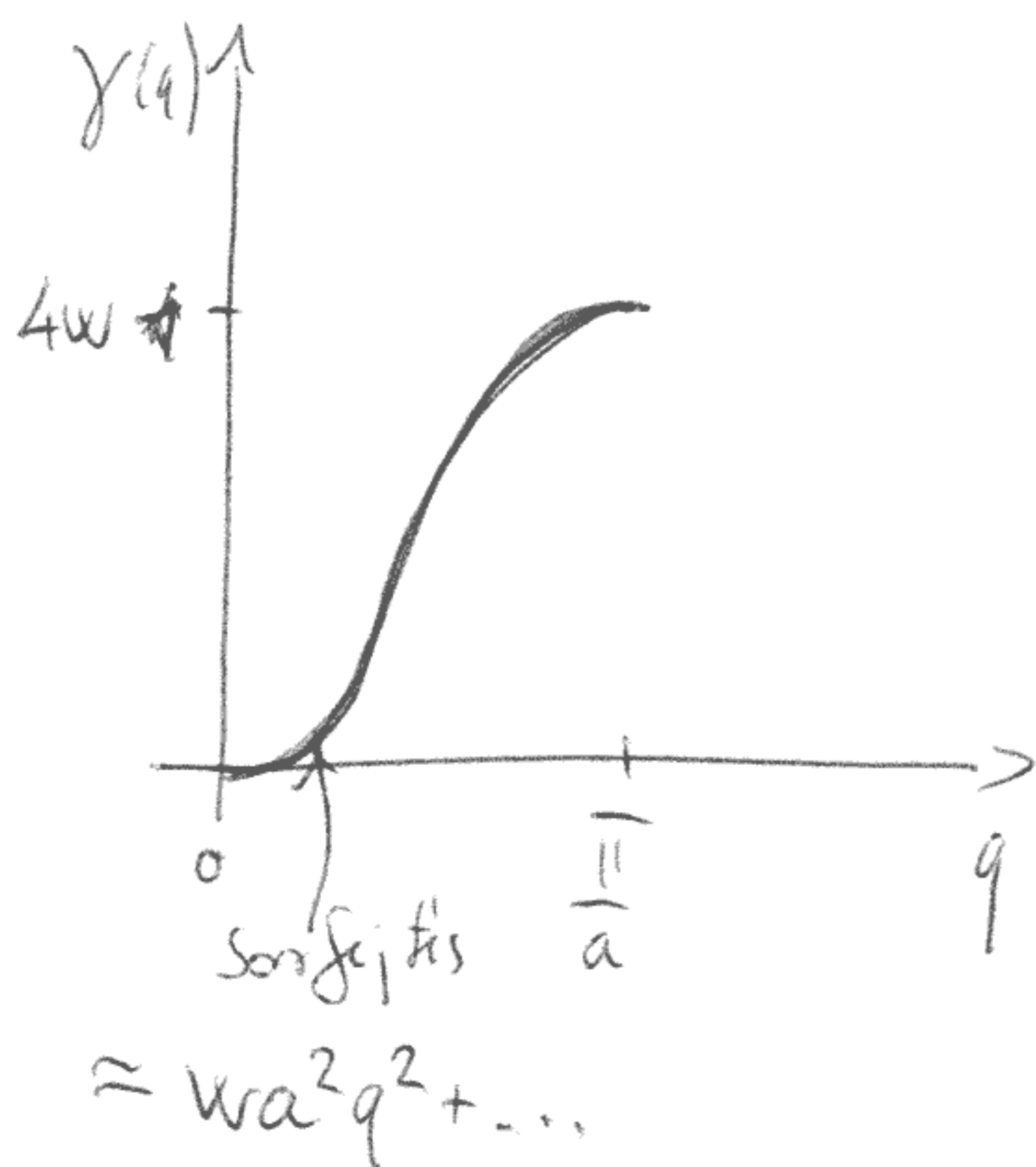
$$e^{-iqna} = e^{-iq(n+1)a} e^{iqa}$$

$$e^{-iqna} = e^{-iq(n-1)a} e^{-iqa}$$

$$= \underbrace{(e^{iqa} + e^{-iqa} - 2)}_{2\cos} p_q \cdot w \Rightarrow \dot{p}_q = -\gamma(q) p_q$$

$$-2(1 - \cos(qa)) = \gamma(q)$$

$$\gamma(q) := 2w(1 - \cos(qa)) = 4w \sin^2\left(\frac{qa}{2}\right)$$



$$p_q(t) = e^{-\gamma(q)t} p_q(0)$$

Spec.:

$$p_n(t=0) = \delta_{n,0} \quad p_q = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n e^{-iqna} \delta_{n,0} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$$p_n(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q e^{iqna} \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-\gamma(q)t}$$

határelonlások

$$t \rightarrow \infty \quad p_n(t) \rightarrow \frac{1}{N} \cdot 1$$

$$N \rightarrow \infty \quad p_n(t) = \frac{a}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} dq e^{iqna} e^{-2w(1-\cos(qa))t} =$$

$$\sum_q \dots = \frac{Na}{2\pi} \int dq \dots$$

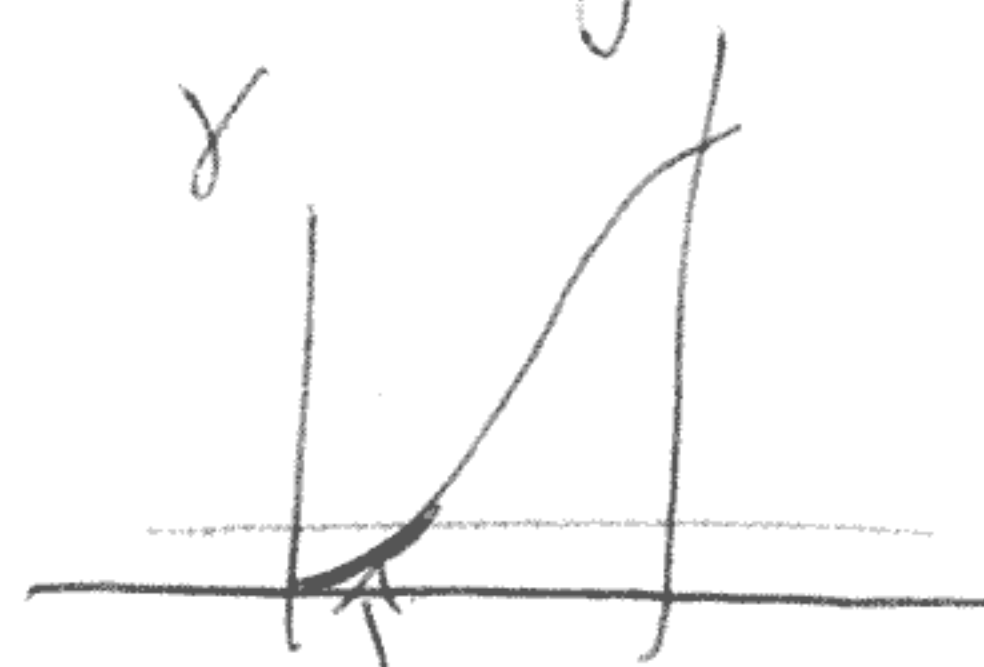
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i n \varphi} e^{2 i t \cos \varphi} e^{-2 i t} = I_n(2 i t) e^{-2 i t}$$

$$l = a q$$

hosszideji viselkedés:

γ -val meg lehet adni az $\frac{1}{\gamma(q)}$ relaxációs időt

bármilyen időt mondok, mindig én olyan Fourier-dekompozíciót
meg nem csúszhat le



$$t > t_0$$

$$\gamma(q) < \frac{1}{t_0} \text{ komponenseket elég azérni}$$

nagy t -re elég sokat várni

$$P_n(t) \approx \frac{a}{2\pi} \int_{-q_0}^{q_0} dq e^{i q n a} e^{-\omega a^2 q^2 t} = \frac{a}{2\pi} \int_{-q_0}^{q_0} dq \cos(q n a) e^{-\omega a^2 q^2 t}$$

páros páratlan értékek
- $q_0 - q_0$ helyett $\sim$ gyors lecsengés miatt δ -fokozat

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \cos(bx) e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{b^2}{4\alpha}}$$

$$= \frac{a}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\omega a^2 t}} e^{-\frac{(n a)^2}{4 \omega a^2 t}} = a \frac{1}{\sqrt{4\pi \omega a^2 t}} e^{-\frac{(n a)^2}{4 \omega a^2 t}}$$

$$(n a)^2 = 2 \omega a^2 t$$

$$D = \omega a^2$$

hosszú hullámhosszú komponensek $\rightarrow$ száraz

Wiener-folyamat

a Wiener-folyamatok másképpen is el juthatnak ugyan.

$$\dot{P}_n(t) = \omega (P_{n+1}(t) + P_{n-1}(t) - 2P_n(t))$$

ha jól idő eltelte és P_n nagyon közel van P_n -hez
akkor a fenti az a Laplace-transzformáció

$P_n(t) = F(x=u_n, t)$ $F(x, t)$ lassan váltakozó fr. esállandóság: félkörök

$$P_{n+1}(t) = a F(x=u_n + a, t) = a \left(F(x=u_n, t) + F'(x=u_n, t) a + \frac{1}{2} F''(x=u_n, t) a^2 + \dots \right)$$

$$\dot{P}_n(t) = a \dot{F}(x=u_n, t) = a (F''(x=u_n, t) a^2 \omega)$$

$$\frac{\partial F(x, t)}{\partial t} = a \omega^2 \frac{\partial^2 F(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{: continuum limit}$$

általánosítható: ha az ágras véget vehető és fűtke véges akkor
 az ágras nem véges ágrasok is a
 ??? szorítva mérve ennek lesz
 végesnek lennie

$$(na)^2 \sim t \quad \text{ha}$$

$$\text{ha nem véges akkor (anomaly's diff.)}$$

$$na^2 \sim t^2 \quad \text{ha}$$

ha fraktálon bolyongunk (vagy (fűtke (gráf is?)) akkor sem
 $\sim t$ len lehet más szorítás.

Szűrőkérdés: kina a Boltzmann zenit

frakcionális master-zenit? utfi?

egyszerűsített szűrőkérdés, a $pl \ a = \begin{pmatrix} \text{impulzus} \\ \sigma \\ \text{spin} \end{pmatrix}$

algoritot a betöltési számok szűrő
 jelleme: $n_a = 0 \dots 1$

az az algoritot: $A = \{ \dots n_a \dots \}$

master-zenit:

$$p(A, t) \quad \frac{\partial p(A, t)}{\partial t} = \sum_{A' \neq A} (W(A, A') p(A') - W(A', A) p(A, t))$$

Boltzmann-zenit: szűrőkérdés

$$\begin{aligned} \text{a betöltési } \overline{n_b}(t) &= \sum_A p(A) n_b(A) & \dot{\overline{n_b}} &= \sum_A (n_b(A) \dot{p}(A, t)) = \\ &= \sum_{A' \neq A} (W(A, A') p(A') n_b(A) - \dots) \end{aligned}$$

$$\overline{n}_b(t) = \sum_A p(A) n_b(A)$$

$$\dot{\overline{n}}_b = \sum_A \left(n_b(A) \cdot p(A, t) \right) = \sum_{\substack{A, A' \\ (A' \neq A)}} \left(W(A, A') p(A') n_b(A) - W(A', A) p(A) n_b(A') \right)$$

$$\dot{\overline{n}}_b = \sum_{\substack{A, A' \\ (A' \neq A)}} W(A, A') p(A') (n_b(A) - n_b(A'))$$

most elosaltas, hogyan jön ki a master-egyenlet a mikroszkopikus egyenletből. Nagyjából arról van szó, hogy a master-egyenlet az kell, hogy ne legyen diagonális elemek a szűcső mátrixban.

volt valami habala arról is, hogy az egyrekeses hullámfüggvény tartalmazhat több rekeszes hullámfüggvényt, de ezt en nem értem.

Most arról van szó, hogy mi a W ? Honnan jön? Néhány lehet szódcentrum meg áthozás van mi. De majd jövő héten meglátjuk.

Boltzmann-egyenlet

függvény

$$A = \{ \dots u_a \dots \}$$

$$a = (\phi, \sigma)$$

$$\dot{P}(A, t) = \sum_{\substack{A' \\ (A' \neq A)}} (W(A, A') P(A', t) - W(A', A) P(A, t))$$

$$\dot{n}_b = \sum_{\substack{A, A' \\ (A \neq A')}} W(A, A') P(A') (u_b(A) - u_b(A'))$$

mi a W ?

egyszerű példa: infinitesimális idő alatt csak egy részecske átvihet
két állapot között

$$A = \{ \dots \overset{b}{0} \dots \overset{a}{1} \dots \}$$

v.

$$A = \{ \dots \overset{b}{1} \dots \overset{a}{0} \dots \}$$

$$A' = \{ \dots 1 \dots 0 \dots \}$$

$$A' = \{ \dots 0 \dots 1 \dots \}$$

$$b \rightarrow a$$

$$u_b(A) - u_b(A') = -1$$

így beírva ide: (ez az $a \rightarrow b$)

$$\sum_a W(b, a) \sum_{A'} P(A') (1 - u_b(A')) u_a(A')$$

$$a \rightarrow b$$

$$u_b(A) - u_b(A') = 1$$

$$b \rightarrow a$$

$$- \sum_a W(a, b) \sum_{A'} P(A') (1 - u_a(A')) u_b(A')$$

$$\dot{n}_b = \sum_{\substack{a \\ (a \neq b)}} W(b, a) \sum_{A'} P(A') (1 - u_b(A')) u_a(A') - \sum_{\substack{a \\ (a \neq b)}} W(a, b) \sum_{A'} P(A') (1 - u_a(A')) u_b(A')$$

$$\dot{n}_b = \sum_{\substack{a \\ (a \neq b)}} (W(b, a) (1 - u_b) u_a - W(a, b) (1 - u_a) u_b)$$

konkrét példa: rugalmas növekedés szimmetriája

$$W(b, a) = \frac{2\pi}{h} \delta(\epsilon_b - \epsilon_a) |\langle b | U | a \rangle|^2 = w(a, b)$$

$$\dot{\bar{n}}_b = \sum_{\substack{a \\ (a \neq b)}} W(b, a) (\bar{n}_a - \bar{n}_b)$$

lineáris sűrűsítés

$$\overline{u_b u_a} = \bar{u}_b \cdot \bar{u}_a$$

↑
klasszikus esetben ezt molekuláris sűrűsítésként hívják

$$\dot{\bar{n}}_b = \sum_a \left(W(b, a) (1 - \bar{n}_b) \bar{n}_a - W(a, b) (1 - \bar{n}_a) \bar{n}_b \right) \leftarrow \text{Boltzmann-egyenlet fermion gázra}$$

klasszikus határeset ha $\bar{n}_a \ll 1$

$$\dot{\bar{n}}_b = \sum_a \left(W(b, a) \bar{n}_a - W(a, b) \bar{n}_b \right)$$

a "szövetes" lépés a két részre való felbontással

két részre való felbontás

$$b_1 a_1 \Rightarrow a_2, a_3 \quad \vee \quad a_2, a_3 \Rightarrow b_1 a_1$$

az a_1, a_2, a_3 ilyen jelölésű indexek azért vannak azért, hogy a leírásnál (az a jelölés, hogy a b-ből, mindegyik vagy oda megy át)

$$\dot{\bar{n}}_b = \sum_{a_1, a_2, a_3} \left[W(b, a_1; a_2, a_3) \bar{n}_{a_2} \bar{n}_{a_3} (1 - \bar{n}_b) (1 - \bar{n}_{a_1}) - W(a_2, a_3; b, a_1) \bar{n}_b \bar{n}_{a_1} (1 - \bar{n}_{a_2}) (1 - \bar{n}_{a_3}) \right]$$

(b, a₁, a₂, a₃ szimbólum)

df a Boltzmann-gezet (linearisan szorotabara)

$$\dot{\bar{n}}_v = \sum_{a_1 a_2 a_3} \left[w(b, a_1; a_2, a_3) \bar{n}_{a_2} \bar{n}_{a_3} (1 - \bar{n}_v) (1 - \bar{n}_{a_1}) - w(a_2, a_3; b, a_1) \bar{n}_v \bar{n}_{a_1} (1 - \bar{n}_{a_2}) (1 - \bar{n}_{a_3}) \right]$$

klassikus határeset:

$$\dot{\bar{n}}_v = \sum_{a_1 a_2 a_3} \left[w(b, a_1; a_2, a_3) \cdot \bar{n}_{a_2} \cdot \bar{n}_{a_3} - w(a_2, a_3; b, a_1) \bar{n}_v \bar{n}_{a_1} \right]$$

$$f(\underline{r}, \underline{p}, t) \quad \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} f(\underline{r}, \underline{p}, t) = n(\underline{r})$$

hatalmas határeset

$$f(\underline{r}, \underline{p}, t) d^3 r d^3 p = f\left(\underline{r} + \frac{\underline{p}}{m} dt, \underline{p} + \frac{\underline{F}}{m} dt\right) d^3 r' d^3 p' \quad \text{Liouville - tétele}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \underline{r}} \cdot \frac{\underline{p}}{m} + \frac{\partial f}{\partial \underline{p}} \cdot \frac{\underline{F}}{m} = 0 \quad \text{inhomogén Boltzmann-gezet}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \underline{r}} \cdot \frac{\underline{p}}{m} + \frac{\partial f}{\partial \underline{p}} \cdot \frac{\underline{F}}{m} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{athónus}}$$

↑
eddig ismeretlen (mivel az itthoni fogat)

klassikus gáz:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{athónus}} = \int d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3 \left(w(p_1, p_2; p, p_3) f(\underline{r}, p_2, t) f(\underline{r}, p_3, t) - w(p_2, p_3; p, p_1) f(\underline{r}, p, t) f(\underline{r}, p_1, t) \right)$$

relaxációs idő bevezetése

Szsf2
V.18.

$$f_0(z, p, t) \quad \text{stac. megoldás} \quad \left(\frac{\partial f_0}{\partial t} \right)_{\text{stac}} = 0$$

$$f = f_0 + g$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{stac}} \approx - \frac{g}{\tau} = - \frac{f - f_0}{\tau}$$

nézzük ennek egy alkalmazását: elektronok vezetése

$$f_0(\epsilon(p)) \quad \epsilon = \frac{p^2}{2m}$$

$$-e \underline{E} \frac{\partial f}{\partial p} = - \frac{f - f_0}{\tau}$$

gerjesztek:

$$-e \underline{E} \frac{\partial f_0}{\partial p} = - \frac{f - f_0}{\tau}$$

$$f = f_0 + e \tau \underline{E} \frac{\partial f_0}{\partial p} = f_0 + e \tau \frac{\partial f}{\partial \epsilon} (\underline{v} \underline{E})$$

$$\underline{j} = -e \underline{v} = -e \int d^3p f(\epsilon(p)) \frac{\underline{p}}{m} =$$

$$= e \int d^3p f_0(\epsilon(p)) \frac{\underline{p}}{m} - e^2 \tau \int d^3p \frac{\partial f}{\partial \epsilon} (\underline{v} \underline{E}) \underline{v}$$

Klasszikus lineáris rendszer

$$f_0 = n \exp\left(-\frac{p^2}{2m k_B T}\right)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} = - \frac{1}{k_B T} f_0$$

$$\underline{\sigma}_{\text{Dr}} = \frac{e^2 \tau}{k_B T} \int d^3p f_0 \underline{v} \underline{v} = \frac{e^2 n}{m} \tau \underline{\sigma}_{\text{Dr}} \quad (\text{Drude - elmélet})$$

$$n \overline{v_x v_x} = n \overline{v_x^2} = n \frac{k_B T}{m}$$

masses pelda: degenerált elektronok $\tau(\epsilon)$

$$\sigma_{13} = e^2 \int d^3p \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right) v_x v_B \tau(\epsilon) = e^2 \int dp p^2 \int d\Omega \left(\frac{v_x v_B}{v^2} \right) v^2 \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right) \tau(\epsilon) =$$

$$\int d\Omega \frac{v_x v_B}{v^2} = \int d\Omega \frac{1}{3} 4\pi$$

$$v_z = v \cos \vartheta$$

$$v_x = v \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi$$

$$v_y = v \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$= e^2 \int d\Omega \frac{4}{3} \pi \int dp p^2 \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right) \tau(\epsilon) \left(\frac{p}{m} \right)^2 =$$

$$\int dp 4\pi p^2 = \int d\epsilon \underbrace{D(\epsilon) \frac{h^3}{2}}_{d(\epsilon)}$$

$$= e^2 \int d\Omega \frac{1}{3} \int d\epsilon \underbrace{\left(-\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right) \tau(\epsilon)}_{\delta(\epsilon - \epsilon_F)} \frac{\epsilon}{m} d(\epsilon) =$$

ahogy δ_0 az ϵ_F -re van.

$$= \int d\Omega \frac{e^2}{m} \frac{1}{3} \tau(\epsilon_F) d(\epsilon_F)$$