

Neuegyensúlyi statisztika

- perturbációszimuláció $\rightarrow$ lineáris válasz elvete mit mérünk?

$\hookrightarrow$ fizikai mennyiség várható értéke (időfüggően átlagolva)

$\hookrightarrow$ magasabb momentumok $\rightarrow$ korrelációs függvény

- szörny: szab. fluktuációk redukálódnak

$\hookrightarrow$ szilárd test mágneses tulajdonságai: csak a mágneszettség értéke

szörny: autonóm mozg. egyenlet, a mágneszettség meghatározása a saját időbeli változásait

többi szab. fluk. $\rightarrow$ zajként jelenik meg

$\hookrightarrow$ makroszkopikus változó $\rightarrow$ irreverzibilis termodin

$\hookrightarrow$ stochasztikus folyamatok

- Egyenlenség elvete $\rightarrow$ Boltzmann - egyenlet

- számítógépes szimulációk

Első 3-ról lesz szó.

Lineáris válasz



pl. testet időf. mágn. térbe helyezel
 $\rightarrow$ mágneszettséget mértem

$f(t)$ $B(t)$ fizikai mennyiségek mennyisége

$\hookrightarrow$ zavar erőssége

($\hookrightarrow$ ha ez időben állandó $\rightarrow B$ is az lesz)
lineáris esetben

Stacionárius állapot megőrzése

pl: zavar: mágn. tér $H(t)$

fiz. menny: mágneszettség: $M(t)$

$$B(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t, t') f(t') dt' \quad \text{lineáris v.f.}$$

lineáris válaszfü.

mágn. mágn. susceptibilitás

Kausalitás: $\chi(t, t') = 0$ ha $t' > t$

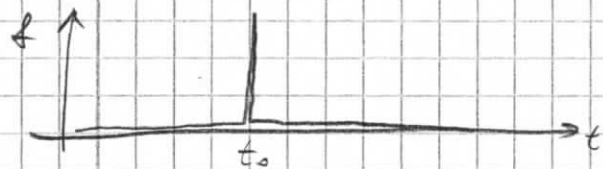
a fiz mi nem lát előre csak kétértelmű (csak a múltbeli zavarok eredménye)

stacionárius állapot: időeltolódás szimmetria van $\Rightarrow \chi(t, t') = \chi(t - t')$

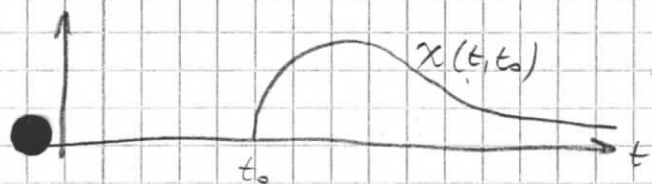
csak az időeltolódástól függ (azaz egyváltozós fu lesz)

$$f(t) = \delta(t - t_0) f_0$$

$$B(t) = \chi(t, t_0) f_0$$



pillanatnyi zavar



$$B(t) = \int_{-\infty}^t \chi(t - t') f(t') dt' = \int_0^{\infty} \chi(\tau) f(t - \tau) d\tau \quad \text{forrási időtől}$$

$t - t' = \tau$

általában: inkább meghat. frekvenciájú zavar

Monochromatikus zavar: $f(t) = f_0 e^{-i\omega t}$

$$B(t) = \int_0^{\infty} \chi(\tau) f_0 e^{-i\omega t} e^{i\omega \tau} d\tau = f_0 e^{-i\omega t} \underbrace{\int_0^{\infty} \chi(\tau) e^{i\omega \tau} d\tau}_{K(\omega) \text{ F tr.}}$$

$$B_{\omega} = f_0 K(\omega) \quad \text{konvolúció F tr-ja a F tr-el szorzata}$$

nem megfordított és fordított

$$K(\omega) = |K(\omega)| e^{i\phi(\omega)}$$

van egy fáziseltolódás a zavar és a válasz között

$\chi(t)$ valódi

$$K(\omega)^* = K(-\omega)$$

(↳ $e^{i\omega t}$ miatti)

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} K(\omega) &= \operatorname{Re} K(-\omega) & \text{par fu} \\ -\operatorname{Im} K(\omega) &= \operatorname{Im} K(-\omega) & \text{ptl fu} \end{aligned} \right\}$$

Tr. komplex fr.-ra értelmezhető

$$K(z) = \int_0^{\infty} K(\tau) e^{iz\tau} d\tau$$

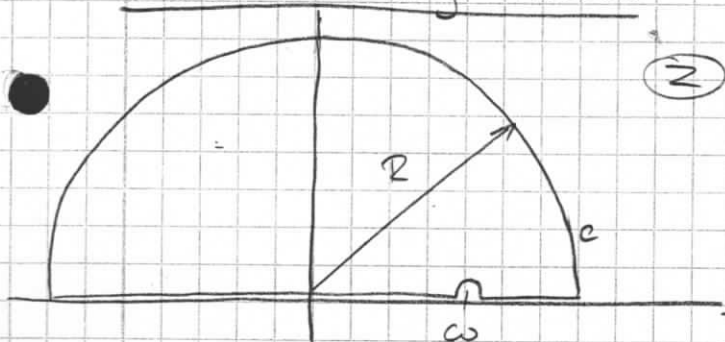
$$e^{iz\tau} = e^{i \operatorname{Re} z \cdot \tau} \cdot e^{-\operatorname{Im} z \cdot \tau}$$

$K(z)$ a felső félsíkon biztosan létezik és analitikus ($\operatorname{Im} z > 0$)

$K(\omega)$ nem mindig létezik ($e^{i\omega\tau}$ konst., $K(\tau)$ -nek elég gyorsan kell csökkennie, hogy létezzen az int.)

$\downarrow$
 $K(z)$ akkor is létezik

Travers - Kronig - reláció



$$\oint_C \frac{K(z)}{z-\omega} dz$$

(ω valós)

$$\oint_C \frac{K(z)}{z-\omega} dz = 0 \quad \text{hisztartuk a pótlást}$$

tfh: $K(z) \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty)$

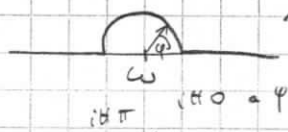
$\hookrightarrow \frac{K(z)}{z-\omega} : \frac{1}{z}$ -nel gyorsabban tart 0-hoz ($\frac{1}{z}$ -nel gyorsabban)

kontúr: $\sim R$ -rel nő

$\Rightarrow R$ sugara fellesőre az integrál $\rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$

$$0 = \int_{-\infty}^{\omega-\delta} \frac{K(\omega')}{\omega'-\omega} d\omega' + \int_{\omega+\delta}^{\infty} \frac{K(\omega')}{\omega'-\omega} d\omega' + \int_{\pi}^0 \frac{K(\omega+\delta e^{i\varphi})}{\delta e^{i\varphi}} i\delta e^{i\varphi} d\varphi$$

$$z-\omega = \delta e^{i\varphi}$$



$\delta \rightarrow 0$ határérték, relatívum a rés és esik a pontra

főérték-integrál (a pontot és kell hagyni)

$$0 = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\omega')}{\omega'-\omega} d\omega' - iK(\omega)\pi$$

Travers - Kronig rel.

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} K(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = -\pi \operatorname{Im} K(\omega)$$

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} K(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = \pi \operatorname{Re} K(\omega)$$

egyik részt (Im, v. Re) ismerem $\rightarrow$ meghatározom a másikat

$\operatorname{Im} \equiv 0 \Rightarrow$ akkor a Re rész is 0 (és fordítva)

olyan lehet mincsen, hogy sehol sincs fázistolás!

(egy-egy pontban lehet h mincs)

kauzalitás: $K(t) = 0 \quad (t < 0)$

$\downarrow$
 $K(z)$ analitikus a felső félsíkon

$\downarrow$
 Kramers - Kronig - reláció

hiszen ha nem igaz h $K(z) \rightarrow 0$, hanem véges határértéke van
 $\rightarrow$ csak ki kell venni a ω -ben vett határértéket

Titchmarsh - tételnek köszönhető a matematikusok: a fenti 3-ból 1 igaz $\rightarrow$ másik kettő is

minden rendszerre igaz.

most leszűkítjük a tárgyalást olyan rendszerre, amik Hamiltoni dinamikát követnek.

(●, kv. mek)

mi most: kv

Superek: időfüggő $H(t)$

Sch. egyenlet: $i\hbar \dot{\psi}(t) = H(t) \psi(t)$

H időfüggetlen a továbblátásban nem fogjuk ki

kezdeti feltétel: $\psi(t_0) = \psi_0$

lin. egyenlet, lin. kapcsol: $\psi(t) = \hat{U}(t, t_0) \psi(t_0)$

$\uparrow$
 unitér operátor

$$\hbar \frac{d}{dt} (\psi', \psi) = i\hbar (\dot{\psi}', \psi) + i\hbar (\psi', \dot{\psi}) = (-H\psi', \psi) + (\psi', H\psi) =$$

$$= -(\psi', H\psi) + (\psi', H\psi) = 0$$

$$(\hat{U}(t, t_0) \psi_0, \hat{U}(t, t_0) \psi_0) = (\psi_0, \psi_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\psi_0, U^\dagger(t, t_0) U(t, t_0) \psi_0) = (\psi_0, \psi_0) \quad \forall \psi_0 \text{-ra}$$

$$U^\dagger U = 1$$

$$i\hbar \dot{\psi}(t) = i\hbar \dot{U}(t, t_0) \psi_0 = H U(t, t_0) \psi_0 \quad \forall \psi_0 \text{-ra}$$

$$i\hbar \dot{U}(t, t_0) = H U(t, t_0)$$

$$\text{kezd. felt.: } U(t_0, t_0) = 1$$

Sch. egy. helyett most egy op-ra non. egyenlet

$$H \text{ ftlen az időtől: } U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} \quad (t=t_0 \rightarrow \text{ez az egységoper. teljesen})$$

$$\text{időfüggő eset: } H + V(t)$$

↑
időftlen

↑
időfüggő rész

→ ezt perturbációként szeretnénk kezelni

⇒ U-ra non. mozg. egyenletet kell így ma, hogy elkerüljünk

$$\text{elker: } U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} S(t, t_0) e^{\frac{i}{\hbar} H t_0}$$

$$S(t_0, t_0) = 1$$

$$\text{ha } V(t) = 0 \rightarrow S(t, t_0) = 1$$

(V hatására S-nek az egységoper-tól való eltérése adja)

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{U}(t, t_0) &= H S(t, t_0) e^{\frac{i}{\hbar} H t_0} + e^{-\frac{i}{\hbar} H t} i\hbar \dot{S}(t, t_0) e^{\frac{i}{\hbar} H t_0} \\ &= (H + V(t)) e^{-\frac{i}{\hbar} H t} S(t, t_0) e^{\frac{i}{\hbar} H t_0} \end{aligned}$$

$$\rightarrow i\hbar \dot{S}(t, t_0) = e^{\frac{i}{\hbar} H t} V(t) e^{-\frac{i}{\hbar} H t} S(t, t_0)$$

olyan mint egy Sch. egyenlet, csak S-re non, és az időf. meg van figyelve
V Heisenberg képletű alakjával

integrálva legyen kitéve alábbiak:

$$\int_{t_0}^t \dot{S}(t', t_0) dt' = S(t, t_0) - \underbrace{S(t_0, t_0)}_1$$

$$S(t, t_0) = 1 - \int_{t_0}^t e^{\frac{i}{\hbar} H t'} V(t') e^{-\frac{i}{\hbar} H t'} S(t', t_0) dt'$$

int. egy.

iteráció → pert. sort kapjuk először az 1-et írjuk be, utána lin. tag...

S & t → beírunk a jobb oldalra

első rendben:

$$S(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t e^{\frac{i}{\hbar} H t'} V(t') e^{-\frac{i}{\hbar} H t'} dt'$$

S helyére először 1-et írunk $\Rightarrow$

lineáris válasz:

$$V(t) = -A \cdot f(t)$$

$\uparrow$ $\uparrow$ zavar erőssége
vz fiz. mennyisége (zv: op.)

pl:

$$-P \cdot E(t)$$

$\uparrow$ polarizáció $\uparrow$ el. térerősség

$$-M \cdot H(t)$$

$\uparrow$ mágneszettség $\uparrow$ mág. térerősség

rezonancaválasz: másik rezonál kölcsönhat

most elhanyagoljuk a rez visszahatását arra a rezre, amivel zavarjuk
a külső hatást nem zavarjuk $\rightarrow$ klasszikus külső hatás
(ezért nyilván korlátozzuk az elvétel elmozdulását)

$$S(t, t_0) = 1 + \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t e^{\frac{i}{\hbar} H t'} A e^{-\frac{i}{\hbar} H t'} f(t') dt'$$

Heisenberg - képleti op.

zv rez leírása: sűrűségoperátorral

$$\langle B \rangle_t = \sum_{\alpha} p_{\alpha} (\psi_{\alpha}(t), B \psi_{\alpha}(t)) = \text{Tr}(\hat{\rho}(t) B)$$

$\uparrow$
B várh.
ért.
t időp.

$\uparrow$
széles
 ψ_{α} áll.-ban
van

$$(\sum_{\alpha} p_{\alpha} = 1)$$

$$\langle B \rangle_t = \sum_{\alpha} p_{\alpha} (U(t, t_0) \psi_{\alpha}(t_0), B U(t, t_0) \psi_{\alpha}(t_0)) =$$

$$= \sum_{\alpha} p_{\alpha} (\psi_{\alpha}(t_0), \underbrace{U^{\dagger}(t, t_0) B U(t, t_0)}_{\text{ez az az op-ra, a } t_0\text{-beli várh. értéke az} \\ \text{égen } B\text{-ra}} \psi_{\alpha}(t_0)) = \text{Tr}(\hat{\rho}(t_0) \underbrace{U^{\dagger}(t, t_0) B U(t, t_0)}_{\text{széles}})$$

a nulla időf. - r áthelyítve az op-ra, olyan mint Heis. $\Rightarrow$

spiralizáció alatt $U(t, t_0)$ - t előre hozhatom

$$= \text{Tr}(U(t, t_0) \hat{\rho}(t_0) U^{\dagger}(t, t_0) B)$$

$\Rightarrow$

$\hat{S}(t) = U(t, t_0) \hat{S}(t_0) U^\dagger(t, t_0)$ Schrödinger eq. időf.

lineáris válasz : tetszőleges B op várh. ért - t szerelvény? & szedve

$\langle B \rangle_t = \text{Tr} \left(\hat{S}(t_0) e^{-\frac{i}{\hbar} H t_0} S^\dagger(t, t_0) e^{\frac{i}{\hbar} H t} B e^{-\frac{i}{\hbar} H t} S(t, t_0) e^{\frac{i}{\hbar} H t_0} \right)$

$U = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} S(t, t_0) e^{\frac{i}{\hbar} H t_0}$ ford. nemud $U^\dagger$ $B(t)$

Szerdetben (t_0 -ban) termikus egyensúlyban van

$\hat{S}(t_0) = \frac{e^{-\beta H}}{Z} \quad Z = \text{Tr}(e^{-\beta H})$

előre ismerni a Tr alatt $\hat{S}(t_0)$ -on alternatív $e^{i \dots} \cdot e^{-i \dots} = 1$ zérus

$\langle B \rangle_t = \text{Tr} \left(\frac{e^{-\beta H}}{Z} \left(1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t A(t') f(t') dt' \right) B(t) \left(1 + \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t A(t') f(t') dt' \right) \right) =$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{S^+} \hspace{10em} \underbrace{\hspace{10em}}_S$

ez a pert. szdun 1. rendjében igaz, f^c -et dobunk el

$= \text{Tr} \left(\frac{e^{-\beta H}}{Z} \left[B(t) + \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t (B(t) A(t') - A(t') B(t)) f(t') dt' \right] \right) =$

$\text{Tr} \left(\frac{e^{-\beta H}}{Z} e^{-\frac{i}{\hbar} H t} B e^{\frac{i}{\hbar} H t} \right) = \text{Tr} \left(\frac{e^{-\beta H}}{Z} B \right) = \langle B \rangle_0$

(stac áll. áll. időeltolódás ivu.)

$\varphi_{BA}(t, t') = \frac{i}{\hbar} \text{Tr} \left(\frac{e^{-\beta H}}{Z} [B(t), A(t')] \right) = \frac{i}{\hbar} \langle [B(t), A(t')] \rangle_0$

$\frac{i}{\hbar}$ - kommutátor várh. ért.

$= \langle B \rangle_0 + \int_{t_0}^t \varphi_{BA}(t, t') f(t') dt' = \langle B \rangle_t$

↑
egyensúlyi értéke

↑
attól való eltérés → arányos a zavar erősségével

χ_{BA} utal arra az op-ra amikor a zavar lépés
- " - - " - amikor a várh. ért. - t szerelvény

$\chi_{BA}(t, t') = \begin{cases} \varphi_{BA}(t, t') & t > t' \\ 0 & t < t' \end{cases} \quad t_0 \rightarrow -\infty \quad (\int \text{alól kezdve})$

műlt éra:

● $\langle B \rangle_t = \int_{-\infty}^t \chi_{BA}(t-t') f(t') dt'$ lineáris válaszfgo.

kv. rzs: $t \rightarrow -\infty$ $\rho_0 = \frac{e^{-\beta H}}{Z}$ sűrűségop. tem. egyensúly kezdetben

$\delta H = -A f(t)$ ($A \rightarrow \chi_{BA}$ indexét hat. meg)

$\chi_{BA}(t) = \Theta(t) \varphi_{BA}(t) = \begin{cases} \varphi_{BA}(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

$\varphi_{BA}(t) = \frac{i}{\hbar} \langle [B(t), A(0)] \rangle = \frac{i}{\hbar} \text{Tr} \left(\frac{e^{-\beta H}}{Z} [B(t), A(0)] \right)$

ez jött ki, ezt az eredményt visszük tovább

első tag a kommutátorból:

● $\text{Tr} \left(\frac{e^{-\beta H}}{Z} e^{-\frac{i}{\hbar} H t} B e^{\frac{i}{\hbar} H t} e^{-\frac{i}{\hbar} H t'} A e^{\frac{i}{\hbar} H t'} \right) =$

↑
átemelhető

$= \text{Tr} \left(\frac{e^{-\beta H}}{Z} e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t')} B e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t')} A \right)$

monokromatikus zavart alkalmazunk: $f(t) = f_{\omega} e^{-i\omega t} e^{\epsilon t}$

($\epsilon \rightarrow 0$) a szimuláció végén nem tűnik el, ezért beírjuk adiabatikus bekapcsolás

● $\langle B \rangle_t = \int_0^{\infty} \varphi_{BA}(\tau) f(t-\tau) d\tau =$

$\uparrow$ poz. időkre χ helyére behelyettesítve $\varphi-t$ (ld. def.)

$= f_{\omega} e^{-i\omega t} e^{\epsilon t} \int_0^{\infty} \varphi_{BA}(\tau) e^{i\omega\tau} e^{-\epsilon\tau} d\tau$

$\chi_{BA}(\omega) |_{\omega = \omega + i\epsilon}$

Fourier-tr. kompl. fr-n

$\epsilon \rightarrow 0 \rightarrow$ felső félkörrel lemegyünk a valós tengelyre

$\chi_{BA}(\omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \chi_{BA}(\omega + i\epsilon)$

$\uparrow$
valós

pl: lineáris oszcillátor

$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 + \underbrace{x f(t)}_{\text{pert. külső Ham. op.}}$

$f(t)$ kétszeres potenciálja

$$\langle x \rangle_t = \int_{-\infty}^t \varphi_{xx}(t-t') f(t') dt'$$

$\uparrow$
x v.e.-t nézzük, és a pet. is x-hez csatl.

$$\varphi_{xx}(t) \equiv \varphi(t) = \frac{i}{\hbar} \langle [x(t), x(0)] \rangle$$

↳ küls. időben nem cserélhető fel

op. idődenw. Heisenberg képen:

$$[p, x] = \frac{\hbar}{i}$$

$$\dot{x} = \frac{i}{\hbar} [H, x] = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

$$\dot{p} = \frac{i}{\hbar} [H, p] = -\frac{\partial H}{\partial x} = -m\omega_0^2 x$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x$$

a kanonikus mozgásegyenletet nem változtat attól, hogy operátorokká tesszük p -t, x -et.

Heisenberg-képen a mozgásegyenletet

$$x(t) = x(0) \cos(\omega_0 t) + \frac{p(0)}{m\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

Schrödinger-képbeli operátorok

$$[x(t), x(0)] = \frac{[p(0), x(0)]}{m\omega_0} \sin(\omega_0 t) \frac{\hbar}{i}$$

$$\varphi(t) = \frac{\sin(\omega_0 t)}{m\omega_0}$$

klasszikus oszcillátort néztünk volna $\rightarrow$ u.e. jön ki (ti kicsett a szál-mólasból)

Fourier-tr: $\int_0^\infty \frac{\sin(\omega_0 t)}{m\omega_0} e^{i\omega t} dt$ miúgy értelmezni, nem lehet 0-tól ∞ -ig int., mert

oszcilláló fgvok, ampl.-juk nem cseng le ($\sin, \cos$)
(valós és képzetes rész is)

csak az $\text{Im } z > 0$ felstíkon nézzük! (ott értelmezhető)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin(\omega_0 t)}{m\omega_0} e^{i\omega t} dt &= \frac{1}{m\omega_0} \int_0^\infty \frac{1}{2i} (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}) e^{i\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2im\omega_0} \left[\frac{e^{i(\omega_0 + \omega)t}}{i(\omega_0 + \omega)} - \frac{e^{i(-\omega_0 + \omega)t}}{i(-\omega_0 + \omega)} \right]_0^\infty = \chi(z) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2im\omega_0} \left(+\frac{1}{i(z - \omega_0)} - \frac{1}{i(z + \omega_0)} \right) = \frac{1}{2im\omega_0} \left(\frac{-1}{z - \omega_0} + \frac{1}{z + \omega_0} \right) \rightarrow$$

$\rightarrow$ ez tehát $\frac{\sin(\omega_0 t)}{m\omega_0}$ Fourier tr-ja
 $\text{Im } z > 0$ esetben

értelmes az egész z síkon
de csak a felső felstíkon a F.-tr-ja annyi

plusai vannak

meromorf függvény, plusz: $z = \pm \omega_0$

$\pm \omega_0$: szomszédos energiaszintek távolsága

plusz: a gerj. en.-val van kapcsolatban

visszatranszformálás:

$t < 0$: $e^{-izt} = e^{-i \operatorname{Re} z t}$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty-i\epsilon}^{+i\infty+i\epsilon} dz \chi(z) e^{-izt} = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0 \end{cases}$$

$|z| \rightarrow \infty \Rightarrow \operatorname{Im} z \rightarrow \infty$
 $e^{\operatorname{Im} z t} \rightarrow 0, \text{ ha } t < 0$

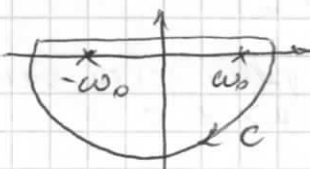
$\Rightarrow$ a kontúr be lehet zární a felső félkörön



itt analitikus fgv. int.-jait veszem $\Rightarrow 0$

$\Rightarrow$ negatív időkre = 0
KAUZALITÁS

$t > 0$: $\operatorname{Im} z < 0$



itt már vannak pluszok

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty-i\epsilon}^{+i\infty+i\epsilon} \chi(z) e^{-izt} dz = \frac{1}{2\pi} \oint_C \chi(z) e^{-izt} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\left(\frac{-1}{2m\omega_0} \right) e^{-i\omega_0 t} + \frac{1}{2m\omega_0} e^{i\omega_0 t} \right) \frac{1}{2\pi} =$$

így metrikus körbe

$$= \frac{1}{m\omega_0} \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i}$$

$$\varphi_{BA}(t) = \frac{i}{\hbar} \operatorname{Tr} \left(\frac{e^{-\beta H}}{Z} (B(t)A - AB(t)) \right) = (*)$$

$\nwarrow$ A-hoz kapcsol, a part.
 $\nearrow$ B-t mérjük

$$H\phi_n = E_n \phi_n$$

$$\hat{A} \phi_n \rightarrow (\phi_n, A \phi_m) = \langle n | A | m \rangle = A_{nm}$$

$$(*) = \frac{i}{\hbar} \sum_n \langle n | \frac{e^{-\beta H}}{Z} (B(t)A - AB(t)) | n \rangle =$$

$$= \frac{i}{\hbar} \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_n}}{Z} \left(\langle n | B(t) | m \rangle \langle m | A | n \rangle - \langle n | A | m \rangle \langle m | B(t) | n \rangle \right) =$$

$$= \frac{i}{\hbar} \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m}}{Z} \underbrace{\langle n | e^{\frac{i}{\hbar} H t} B e^{-\frac{i}{\hbar} H t} | m \rangle}_{\langle n | B | m \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_m t} e^{\frac{i}{\hbar} E_n t}} \langle m | A | n \rangle$$

$$\varphi_{BA}(t) = \frac{i}{\hbar} \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m}}{Z} \langle n | B | m \rangle \langle m | A | n \rangle e^{-i\omega_{mn}t}$$

most már explicit az időfüggés, persze az sorokat kell összeadni.

lin. oszc.: $A \rightarrow x$ -et kell írni $\rightarrow$ ott csak két szomszédos en. szint közötti különbség $\rightarrow$ 2 tagú összeg (egyszerűbb)

Fourier-tr: $\int_0^\infty e^{-i\omega_{mn}t} e^{izt} dt = \left[\frac{e^{i(z-\omega_{mn})t}}{i(z-\omega_{mn})} \right]_0^\infty = \frac{i}{z-\omega_{mn}}$

$$\int_0^\infty \chi_{BA}(t) e^{izt} dt = \int_0^\infty \varphi_{BA}(t) e^{izt} dt =$$

$$= -\frac{1}{\hbar} \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m}}{Z} \frac{\langle n | B | m \rangle \langle m | A | n \rangle}{z - \omega_{mn}} = \chi(z) \quad (\text{Im } z > 0)$$

1) egész z síkon értelmes

2) meromorf fgv. (mest csak pólusai vannak),

pólusok: $z = \omega_{mn} = \frac{1}{\hbar} (E_m - E_n)$

3) kiválasztási szabályok: $z = \omega_{mn}$ plusz jelen van (a gerj. fr-nál), ha $\langle n | B | m \rangle \langle m | A | n \rangle \neq 0$ (két mikélem $\neq 0$)

ezért ^{mem} elég 1 mérés a teljes spektrum felvételéhez (van, ami kimerad a kiv. szab. miatt)

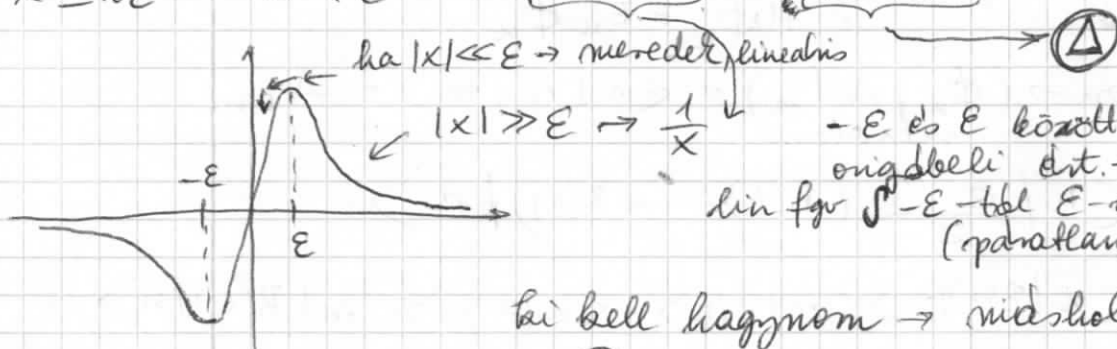
Válaszfgv. valós frekvenciákon

$$\chi_{BA}(\omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \chi_{BA}(\omega + i\epsilon) = ?$$

valós

közvetlen F-tr. $\rightarrow$ nem volt értelmes

$$\frac{1}{x \pm i\epsilon} = \frac{x \mp i\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} \mp i \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$$



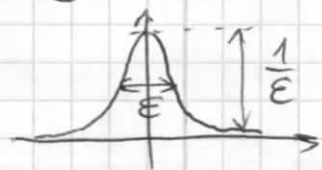
- ϵ és ϵ között integrálok: origóbeli ért.-bel helyettesíték, lin fgv $\int_{-\epsilon}^{\epsilon}$ -től ϵ -ig $\rightarrow 0$ (paratlan fgv)

ké kell hagynom $\rightarrow$ mindkét $\rightarrow \frac{1}{x}$ -szel szorozva $\int \rightarrow \mathcal{P} \frac{1}{x}$ főérték

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P} \frac{1}{x} f(x) dx = \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx \right) \epsilon \rightarrow 0$$

• origó körüli kis interv-on kihagyjuk az integrált

→ Δ : Im. rész:



Lorentz-görbe

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \begin{cases} \infty & x=0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

akkor $\delta(x)$, ha $\int = \text{konst.} (1)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\epsilon} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\epsilon}\right)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{1}{1+s^2} = \left[\arctg s \right]_{-\infty}^{\infty} = \pi$$

$$\rightarrow \pi \cdot \delta(x)$$

$$\bullet \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x \pm i\epsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{x} \mp i\pi \delta(x)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \chi_{BA}(\omega + i\epsilon) = -\frac{1}{\hbar} \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m}}{z} \langle n | B | m \rangle \langle m | A | n \rangle \cdot$$

$$\cdot \left(\underbrace{\mathcal{P} \frac{1}{\omega - \omega_{mn}}}_{\text{P tag}} - i \cdot \underbrace{\pi \delta(\omega - \omega_{mn})}_{\text{delta tag}} \right)$$

disztribúcióból lehet értelmezni a valós tengelyen
szét lehet bontani:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \chi_{BA}(\omega + i\epsilon) = \underbrace{\chi'_{BA}(\omega)}_{\text{P tag}} + i \cdot \underbrace{\chi''_{BA}(\omega)}_{\text{delta tag}}$$

olyan, mint ha valós és képzetes részre bontottuk volna, de valójában nem, a mtr. elemek ott vannak előtte, azok meg általában lehetnek komplexek.

tehát nem $\text{Re } \chi_{BA}(\omega)$ és $\text{Im } \chi_{BA}(\omega)$ felbontás!

de pl.: $B=A$ (u. a-t mértem, mint amit megzavarok)

$$\langle n | A | m \rangle \langle m | A | n \rangle = |\langle n | A | m \rangle|^2$$

akkor igen!

B megmaradó mennyiség: $[B, H] = 0$

$$\bullet B(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H t} B e^{-\frac{i}{\hbar} H t} = B \cdot \text{dll. a Schr.-képbeli értékkel egyezik meg.}$$

$$[B(t), A] = [B, A]$$

$$\chi_{BA}(t) = \frac{i}{\hbar} \text{Tr} \left(\frac{e^{-\beta H}}{Z} (BA - AB) \right) = 0$$

Ha B megm. mennyiség, akkor az δ lineáris válasza eltűnik. $\downarrow$

$$\text{Tr}(e^{-\beta H} AB) = \text{Tr}(e^{-\beta H} BA)$$

(adiabatikus invariancia) $\downarrow$
először négyzetesen változhat

pl: H (a rzs. energiája a zavar nélkül)

$$\langle H \rangle_t - \langle H \rangle_0 \sim O(\epsilon^2)$$

↑
egyensúlyi átlag

első korrekció négyzetes lehet

izoterm statikus válasz: megm. mennyiség lin. válasza $\neq 0$.

$$H' = H - A\epsilon \quad \epsilon: \text{időben fglen zavar}$$

$$\langle B \rangle = \chi_{BA}^T \epsilon$$

↑
egyensúlyi átlag
 H' -vel

↑
izoterm válaszfgv

$$\chi_{BA}^T = \int_0^\beta \langle A(\tau) B \rangle d\tau$$

$$A(\tau) = e^{\tau H} A e^{-\tau H}$$

ha $[B, H] = 0$

$$\text{Tr} \left(\frac{e^{-\beta H}}{Z} e^{\tau H} A e^{-\tau H} B \right) = \text{Tr} \left(\frac{e^{-\beta H}}{Z} AB \right) = \text{Tr} \left(\frac{e^{-\beta H}}{Z} BA \right)$$

$$\chi_{BA}^T = \frac{\langle BA \rangle}{k_B T} \quad \text{nem ellentmondás}$$

ez izoterm válasz

az előző: adiabatikus válasz $\rightarrow$ az 0 megm. mennyiségnél
izotermnél meg kell várni a bekapcs. után h. egyensúlyba
kerülhessen $\rightarrow$ közben energiát cserél a környezettel $\rightarrow$
 $\rightarrow$ megváltozhat

adiab. válasz: a zavartól eltekintve a
rész. nincs kapcsolatban a környezettel $\rightarrow$
 $\rightarrow$ nincs energiacsere

Nemegyens. statfiz (3.EA)

$$\langle H \rangle_t - \langle H \rangle_0 = \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

$$\bullet \frac{d\langle H \rangle_t}{dt} = \text{Tr}(\dot{S}(t) H) = (*) \quad H' = H - A f(t)$$

↑ időegység alatt betáplált energia

$$S(t) = U(t, t_0) S_0 U^\dagger(t, t_0)$$

$$\text{itt } U = H' U$$

U mozg. egyenlete formálisan a Schr. egy.

H' vegül az időfejléstől

$$\text{itt } \dot{S} = [H', S]$$

$$(*) = -\frac{i}{\hbar} \text{Tr}((H'S - SH')H) = -\frac{i}{\hbar} \text{Tr}(S(HH' - H'H)) =$$

$$= \frac{i}{\hbar} \text{Tr}(S[H, A]) f = \text{Tr}(S(t) \dot{A}(t)) f(t)$$

$$\bullet W = \frac{d}{dt} \langle H \rangle_t = \langle \dot{A}(t) \rangle f(t) \quad (\text{cs. sebesség} = \text{teljesítmény})$$

$$(\langle A \rangle \sim f, \langle \dot{A} \rangle \sim f \Rightarrow W \sim f^2)$$

lineáris válasz közelítő, monotonatikus zavar

$$f(t) = f_\omega \cos(\omega t) = \frac{f_\omega}{2} (e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}) \quad \text{komplex írásmód}$$

egyszerre kell kezelni a $\oplus$ és $\ominus$ ω zavarokat

$$\langle A \rangle_t = \frac{f_\omega}{2} (\chi(\omega) e^{-i\omega t} + \chi(-\omega) e^{i\omega t})$$

$$\langle \dot{A} \rangle_t = \frac{f_\omega}{2} (-i\omega \chi(\omega) e^{-i\omega t} + i\omega \chi(-\omega) e^{i\omega t})$$

$$\bullet \langle \dot{A} \rangle_t f(t) = \left(\frac{f_\omega}{2}\right)^2 \left[i\omega \chi(-\omega) - i\omega \chi(\omega) - i\omega \chi(\omega) e^{-2i\omega t} + i\omega \chi(-\omega) e^{2i\omega t} \right]$$

időben nem vált. tag.

időben oszálható tag

(en. beáramló - kiáramló)

egy periódusra időátlag

$$\overline{W} = \left(\frac{f_\omega}{2}\right)^2 (-i\omega) (\chi(\omega) - \chi(-\omega)) =$$

$$\chi(\omega) - \chi^*(\omega) = 2i \text{Im} \chi(\omega)$$

$$= \frac{f_\omega^2}{2} \omega \text{Im} \chi(\omega)$$

$\rightarrow \chi_{AA}(\omega)$ valószínűs.

A-hoz kapcsol. a zavar, A-t mértem

$\rightarrow \frac{f_\omega}{\sqrt{2}} \Rightarrow f_\omega$ effektív értéke, mivel a négyzete van ott

$$\chi_{AA}(\omega) = \chi_{AA}'(\omega) + i \chi_{AA}''(\omega)$$

↑
P...

↑
 $\delta(\dots)$

Re

Im $\rightarrow$ előző Im. helyére χ'' -t is beírhatjuk

$$\bar{W} = \frac{\hbar \omega^2}{2} \omega \sum_{n,m} \underbrace{\frac{e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m}}{Z}}_{\chi''_{AA}} |\langle n|A|m\rangle|^2 \frac{\pi}{\hbar} \delta(\omega - \omega_{mn})$$

$\omega = \frac{E_m - E_n}{\hbar}$

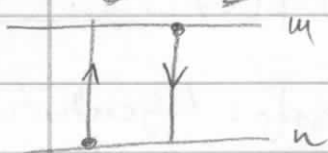
$$(e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m})(E_m - E_n) \geq 0 \text{ mindig!}$$

$\bar{W} \geq 0$ a rendszer mindig energiát nyel el.

(azokon a fr-kon, ahol gerj. fr. van)

(oda-vissza dramlás: minden fr-n megvan)

$$\bar{W} = \sum_{n,m} \left(\frac{e^{-\beta E_n}}{Z} - \frac{e^{-\beta E_m}}{Z} \right) \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{\hbar \omega}{2} \right)^2 |\langle n|A|m\rangle|^2 \delta(\hbar \omega - (E_m - E_n)) \cdot (E_m - E_n)$$



n és m áll. körüli átlm. vág.

a Fermi-féle arányzabály szerint időtükr. inv. miatt: oda-vissza u.a.

B, A operátorok korrelációs függvényei: (vagy változók 2. momentumai)

$$S_{BA}(t) = \langle B(t) A(0) \rangle$$

$$\tilde{S}_{BA}(t) = \langle A(0) B(t) \rangle \text{ ez másik korr. fgv.}$$

$$C_{BA}(t) = \frac{1}{2} \langle B(t) A(0) + A(0) B(t) \rangle \text{ a köztű átlm. közepe}$$

előnyei: szimmetrizálva van, észérletlen a sorrendre

$$Q_{BA}(t) = \frac{i}{\hbar} \langle B(t) A(0) - A(0) B(t) \rangle$$

4 melyik korr. fgv. közül 2 fgten van, bármelyik 2-t tudom, a másik kettőt is ki lehet számolni.

F hajtó áramát $\rightarrow$ átléltű energiadissipációra energiadissipáció:

$$S_{BA}(t) = \text{Tr} \left(\frac{e^{-\beta H}}{Z} B(t) A(0) \right) = \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_n}}{Z} \langle n|B|m\rangle \langle m|A|n\rangle e^{-i\omega_{mn}t}$$

$$\tilde{S}_{BA}(t) = \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_m}}{Z} \langle m|A|n\rangle \langle n|B|m\rangle e^{-i\omega_{mn}t}$$

Fourier - tr.:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} e^{Et} + \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} e^{-Et} = \text{(*)}$$

regularizáljuk, mert alapból nincs értelme (mégis hat. eset)

majd a végén $E \rightarrow \infty$

$t \rightarrow t'$ változók, $t = t' \rightarrow$ határolat megmarad

$$\int_0^\infty dt' e^{-i\omega t'} e^{-\epsilon t'}$$

ez. na. mint a második $\int$, csak i helyett $-i$ van, azaz konj. konj.
 $\Rightarrow v_{mi} + c.c. \Rightarrow 2 \cdot \text{Re } v_{mi}$

$$(*) = 2 \text{Re} \left[\int_0^\infty dt e^{i\omega t} e^{-\epsilon t} \right] = 2 \text{Re} \left[\frac{1}{\epsilon - i\omega} \right] = 2 \text{Re} \left[\frac{\epsilon + i\omega}{\epsilon^2 + \omega^2} \right] =$$

$$= 2 \cdot \frac{\epsilon}{\omega^2 + \epsilon^2} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 2\pi \delta(\omega) \quad \text{ez a F-tr. csak disztribúciós ként létezik és regularizálással kell}$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{i\omega t} e^{-i\omega_m t} dt = 2\pi \delta(\omega - \omega_m)$$

$$\begin{aligned} S_{BA}(\omega) &= \sum_{nm} \frac{e^{-\beta E_n}}{Z} \langle n|B|m\rangle \langle m|A|n\rangle \cdot 2\pi \delta(\omega - \omega_{mn}) \\ \tilde{S}_{BA}(\omega) &= \sum_{nm} \frac{e^{-\beta E_m}}{Z} \langle n|B|m\rangle \langle m|A|n\rangle \cdot 2\pi \delta(\omega - \omega_{mn}) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\sum_{nm}} \right\} \text{let F.tr.}$$

$$e^{-\beta E_m} = e^{-\beta E_n} e^{-\beta(E_m - E_n)} = e^{-\beta E_n} e^{-\beta \hbar \omega_{mn}}$$

összegzés kiválasztja azokat az ω_{mn} -okat (a δ - miatt), ahol $\omega_{mn} = \omega$

$\hookrightarrow$ azaz $\tilde{S}_{BA}(\omega)$ -ban $e^{-\beta E_m}$ helyére $e^{-\beta E_n} e^{-\beta \hbar \omega}$ -t írhatok

$$\Rightarrow \tilde{S}_{BA}(\omega) = e^{-\beta \hbar \omega} S_{BA}(\omega) \quad \text{nemhiv. öf. a kor. fgvel kötött}$$

$\hookrightarrow$ univerzális szorzó, fglen a fiz. ról

tehát a 4 közül csak 1 fglen. Mindent mindennel kifejezhetek

$$C_{BA}(\omega) = \frac{1}{2} (S_{BA}(\omega) + \tilde{S}_{BA}(\omega)) = \frac{1}{2} (1 + e^{-\beta \hbar \omega}) S_{BA}(\omega)$$

$$q_{BA}(\omega) = \frac{i}{\hbar} (S_{BA}(\omega) - \tilde{S}_{BA}(\omega)) = \frac{i}{\hbar} (1 - e^{-\beta \hbar \omega}) S_{BA}(\omega)$$

$$\chi_{BA}(\omega) = \int_0^\infty dt e^{i\omega t} q_{BA}(t) = \chi_{BA}'(\omega) + i \chi_{BA}''(\omega)$$

$$q_{BA}(\omega) = \frac{i}{\hbar} \sum_{nm} \frac{e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m}}{Z} \langle n|B|m\rangle \langle m|A|n\rangle 2\pi \delta(\omega - \omega_{mn}) =$$

i -t és 2 -et elhagyom $\rightarrow \chi_{BA}''$

$$= 2i \chi_{BA}''(\omega)$$

$$\frac{C_{BA}(\omega)}{\chi_{BA}''(\omega)} = \frac{\frac{1}{2} (1 + e^{-\beta \hbar \omega}) S_{BA}(\omega)}{\frac{i}{2\hbar} (1 - e^{-\beta \hbar \omega}) S_{BA}(\omega)} \rightarrow \text{Fluktuáció-dissipációs tétel}$$

Fluktuáció-dissipációs tétel

$$C_{BA}(\omega) = \hbar \cdot \underbrace{\frac{1 + e^{-\beta \hbar \omega}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}}}_{\coth\left(\frac{\beta \hbar \omega}{2}\right)} \chi_{BA}''(\omega)$$

$$C_{BA}(\omega) = \frac{1}{i} \text{th} \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \chi_{BA}''(\omega)$$

ha B és A op. u. a.

$$C_{AA}(\omega) = \frac{1}{i} \text{th} \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \text{Im} \chi_{AA}''(\omega)$$

ez a fluktuációkat jellemzi (az op. autokorr. függvénye)

$\chi_{AA}''(\omega)$ ez a disszipációt jellemzi.

Egzenstélyi állapot: időtükrözésre szimmetrikus (maga a mozg. egyenlet, nem a mo-a)

Fázistér: trajektória $\rightarrow$ időtükr. $\rightarrow$ az is mo-a a mozg. egyenlet, nem a

egzenstélyi statfiz: a két pályára egyforma valószínűség

Időtüközés: $t \rightarrow -t$

$A \rightarrow \epsilon_A A$ $\epsilon_A = 1$ vagy -1 , az adott A fiz. mennyiségtől függ

koord.: $+1$ impulzus: -1

időtüközési szimmetria:

$$\langle B(t) A(0) \rangle = \epsilon_B \epsilon_A \langle A(0) B(-t) \rangle = \epsilon_B \epsilon_A \langle A(t) B(0) \rangle$$

időtüköz. op. -t fordított sorrendben!

Fordított sorrendben mérve meg lehet a fordított pályán

$$\begin{aligned} \varphi_{BA}(t) &= \frac{i}{\hbar} \langle B(t) A(0) - A(0) B(t) \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle A(0) B(-t) - B(-t) A(0) \rangle \epsilon_B \epsilon_A = \\ &= \frac{\epsilon_B \epsilon_A}{\hbar} i \langle A(t) B(0) - B(0) A(t) \rangle \end{aligned}$$

$$\varphi_{BA}(t) = -\epsilon_A \epsilon_B \varphi_{BA}(-t) = \epsilon_B \epsilon_A \varphi_{AB}(t)$$

$$\chi_{BA}(z) = \epsilon_B \epsilon_A \chi_{AB}(z)$$

$$\varphi_{BA}(\omega) = \underbrace{\int_0^\infty dt e^{i\omega t} \varphi_{BA}(t)}_{\text{feloldalas F-tr.}} + \underbrace{\int_{-\infty}^0 dt e^{i\omega t} \varphi_{BA}(t)}_{\chi_{BA}(\omega)}$$

$\chi_{BA}(\omega)$

$$\xrightarrow{t \rightarrow -t} \int_0^\infty dt' e^{-i\omega t'} \varphi_{BA}(-t') =$$

$$= \int_0^\infty dt e^{-i\omega t} (-\epsilon_A \epsilon_B) \varphi_{BA}(t) =$$

$$= -\epsilon_A \epsilon_B \chi_{BA}(-\omega)$$

$$\chi_{BA}^*(\omega)$$

$$\rightarrow \varphi_{BA}(\omega) = \chi_{BA}(\omega) - \epsilon_A \epsilon_B \chi_{BA}^*(\omega) = \begin{cases} 2i \text{Im} \chi_{BA}(\omega) & \text{ha } \epsilon_A \epsilon_B = 1 \\ 2\text{Re} \chi_{BA}(\omega) & \text{ha } \epsilon_A \epsilon_B = -1 \end{cases}$$

attól függ tehát, h. egyformán vagy különbözően transzformálódnak

$$\varphi_{BA}(\omega) = 2i \chi_{BA}''(\omega)$$

$$\chi_{BA}''(\omega) = \begin{cases} \text{Im } \chi_{BA}(\omega) & \text{ha } E_A E_B = 1 \\ \frac{1}{i} \text{Re } \chi_{BA}(\omega) & \text{ha } E_A E_B = -1 \end{cases}$$

$$C_{BA}(\omega) = \text{tr} \text{ oth } \frac{\beta \hbar \omega}{2} \cdot \text{Im } \chi_{BA}(\omega) \quad E_A E_B = 1$$

azonos módon tr. $\rightarrow$ C mindig valós és ω -nak pos. fve (ptl. ptl)

$$C_{BA}(\omega) = \text{tr} \text{ oth } \frac{\beta \hbar \omega}{2} \frac{1}{i} \text{Re } \chi_{BA}(\omega) \quad E_A E_B = -1$$

kül. módon tr. $\rightarrow$ C tisztán képzetes és ω -nak ptl. fve

$\rightarrow$ kapcsolat a kl. mer. válaszfüggv.ivel $\rightarrow$ kl. hata'szeretet veszi át

klassz. hat. eset: $\hbar \omega \ll k_B T$

$$\text{oth} \approx \frac{1}{x}, \text{ ha } x \ll 1 \quad \text{tr} \text{ oth } \frac{\beta \hbar \omega}{2} \approx \frac{2}{\beta \hbar \omega} = \frac{2 k_B T}{\hbar \omega}$$

$$\bullet \quad C_{BA}(\omega) = \frac{2 k_B T}{\hbar \omega} \chi_{BA}''(\omega) \quad \text{az a h.z.}$$

ha $\hbar \omega \ll k_B T$ a domináns fr. tartomány $C_{BA}(\omega)$ -ban

$$C_{BA}(\omega) = \frac{2 k_B T}{\hbar \omega} \chi_{BA}''(\omega) = \frac{2 k_B T}{\hbar \omega} \frac{\varphi_{BA}(\omega)}{2i} = \frac{k_B T}{i \hbar \omega} \varphi_{BA}(\omega)$$

$$\varphi_{BA}(\omega) = \frac{i \hbar \omega C_{BA}(\omega)}{k_B T}$$

$\Downarrow$

$$\varphi_{BA}(t) = -\frac{1}{k_B T} \frac{\partial C_{BA}(t)}{\partial t} = -\frac{1}{k_B T} \langle \dot{B}(t) A(0) \rangle$$

$$\chi_{BA}(t) = \begin{cases} -\frac{1}{k_B T} \frac{\partial C_{BA}(t)}{\partial t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{klasszikus formula} \\ \text{a válaszfüggv.} \end{array}$$

$$\langle B(t) A(0) \rangle = \langle B(0) A(-t) \rangle$$

$$\langle \dot{B}(t) A(0) \rangle = -\langle B(0) \dot{A}(-t) \rangle = -\langle B(t) \dot{A}(0) \rangle$$

$$\varphi_{BA}(t) = \frac{1}{k_B T} \langle B(t) \dot{A}(0) \rangle$$

összegezőabdlók: (his t (rövid idejű) viselkedés)

$$\varphi_{BA}(t) = \frac{i}{\hbar} \langle [B(t), A(0)] \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \varphi_{BA}(\omega) e^{-i\omega t} = 2i \chi_{BA}''(\omega)$$

$$t=0: \varphi_{BA}(t=0) = \frac{i}{\hbar} \langle [B, A] \rangle = \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{BA}''(\omega) d\omega$$

$\uparrow$
azonos időben vett (egyensúlyi v. c. t. t.), egyensúlyi statfiz
módszerrel lehet kiszámítani

$$\frac{1}{\hbar} \langle [B, A] \rangle = \frac{1}{\hbar} \sum_{nm} \frac{e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m}}{2} \langle n | B | m \rangle \langle m | A | n \rangle \frac{\pi}{\hbar}$$

χ'' integrálját egy ilyen összeg adja meg, ezért hívják összegreál-nak

$$\dot{\varphi}_{BA}(t=0) = \frac{i}{\hbar} \langle [B, A] \rangle = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega) \chi_{BA}''(\omega) d\omega$$

ez megint akkor segít, ha a $\langle \rangle$ vécé-t gyorsan ki tudjuk számolni

(...) mehetünk tovább $\langle \rangle \rightarrow$ elvileg tudom, $\chi'' \rightarrow$ merem $\rightarrow$ megegyezik $\rightarrow$ ok
nem egyezik meg $\rightarrow \chi$ -t más függvényben is meg kell mérnem, ott is van jel

$$\chi_{BA}(z) = \int_0^{\infty} dt e^{izt} \varphi_{BA}(t) \underset{\text{parc. int.}}{=} \left[\frac{e^{izt}}{iz} \varphi_{BA}(t) \right]_0^{\infty} - \frac{1}{iz} \int_0^{\infty} dt e^{izt} \dot{\varphi}_{BA}(t) =$$

$$(Im z > 0) \quad - \frac{\varphi_{BA}(t=0)}{iz}$$

$\rightarrow$ második tag, megint parc. int. $\rightarrow$... aszimptotikus, ha $|z| \gg 1$

$$= - \frac{\varphi_{BA}(0)}{iz} + \frac{\dot{\varphi}_{BA}(0)}{(iz)^2} + \dots$$

Nevezetes szolg. statiz (4. EA)

$$\chi_{BA}(z) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m}}{z} \langle n|B|m\rangle \langle m|A|n\rangle \frac{1}{z - \omega_{mn}}$$

$$\chi_{BA}''(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m}}{z} \langle n|B|m\rangle \langle m|A|n\rangle \pi \delta(\omega - \omega_{mn})$$

eze volt

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\chi_{BA}''(\omega')}{z - \omega'} = \chi_{BA}(z) \quad \chi''\text{-ből így megkaphatjuk } \chi$$

$\chi'' \rightarrow$ valós tengelyre való határeset képzéséből áll elő

$\chi_{BA}(z)$: Fourier-tr. $\chi_{BA}(t)$ -nek $\text{Im } z > 0$ -ra

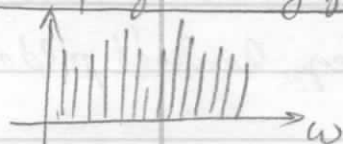
értelmes az egész z síkon, meromorf

$\hookrightarrow$ nem állítja - e elő az alsó fél síkon is van Ftr.

$\Rightarrow$ le kell csengenie $\rightarrow t > 0$ lecseng $\rightarrow$ jövőbeli zavart hat. meg...

$\rightarrow$ avanszált válaszfgv., amikor a Ftr. ja

kvázifolytonos gerjesztési spektrum (nem tudjuk felbontani)



χ_{BA}'' simitva: $\bar{\chi}_{BA}''(\omega)$



simitva látjuk, ha mérjük

$$\bar{\chi}_{BA}''(\omega) \Delta\omega = \int_{\omega}^{\omega + \Delta\omega} \chi_{BA}''(\omega') d\omega'$$

$$\chi_{BA}(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\bar{\chi}_{BA}''(\omega')}{z - \omega'} \quad \text{ez is értelmes az alsó és felső fél síkon is.}$$

$\text{Im } z > 0$ $\chi_{BA}(t)$ Fourier-tr.

$$\chi_{BA}(z = \omega \pm i\varepsilon) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\bar{\chi}_{BA}''(\omega')}{\omega - \omega'} \pm i\pi \bar{\chi}_{BA}''(\omega)$$

alsó és felső fél síkon közelítve a valós tengelyt, ez a rész u.a. lesz, a második eltér

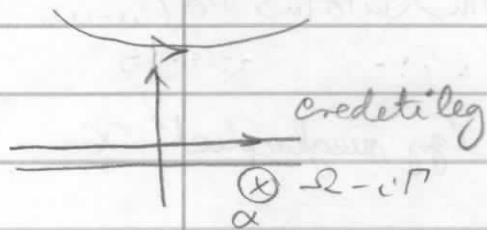
nem plusz lesz, másfajta singularitás $\Rightarrow$ ugrás

ugrás a valós tengelyen (vágás)

vissafele tr. $\rightarrow$ az alsó fél síkon lévő singularitás hat. meg az időfüggést

$\times \times \times \times \times \times \times$ $\odot$ pluszok

ahol analitikus a fgv. $\rightarrow$ a kontúr el lehet tolni, de a szing. - on


$$-2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} Q \cdot e^{-i(\Omega - i\Gamma)t} = -iQ e^{-i\Omega t} e^{-\Gamma t}$$

mel'cs: nem a valódi genjesítésről kapjuk.

c töltésű részecskék $\underline{E}(t)$ homogén elterjedésében

a ter potencijla: $-e(rE)$

(grad-ja center: -CE)

$$\underline{P} = e \sum_i \underline{r}_i \quad \text{polarizability} \quad \underline{\epsilon} = e \sum_i \underline{r}_i = e \sum_i \frac{\underline{p}_i}{m}$$

electromos
aram

Φ = $\dot{\Phi}$ polarizats' idobnival'tja

$$B \rightarrow \exists$$

$$A \rightarrow \underline{P}$$

$$f \rightarrow E$$

7 Ez a szereposztás az általános formulizumban

- $\lambda \gg L$ Ca rdsz. mikénteknél nagyobb hullámhosszú el. té.

6) $\sigma_{\text{elast}} \ll \sigma_{\text{elast}}^{\text{homogen}}$)

az elmelet alkalmazhatóságát követeli

isohdp ndeben: $\langle \underline{P} \rangle \parallel \underline{E}$

<五> 11 七

$$\langle \Xi \rangle_t = \int_{-\infty}^t \varphi_{\Xi P}(t-t') E(t') dt'$$

$$\chi_{\Xi P}(t) = \frac{i}{\hbar} \langle [\Xi(t), P(0)] \rangle \quad (t > 0)$$

drámsűrűség: $j = \frac{\Xi}{V}$

$$\langle j \rangle_t = \frac{1}{V} \int_{-\infty}^t \varphi_{jP}(t-t') E(t') dt' = \int_{-\infty}^t \sigma(t-t') E(t') dt'$$

$$\sigma(t) = \frac{1}{V} \chi_{\Xi P}(t)$$

vez. káposseg

időtükörözés: $\epsilon_{\Xi} = -1$

$$\epsilon_P = 1$$

$$\chi_{\Xi P}''(\omega) = \frac{1}{i} \text{Re } \chi_{\Xi P}(\omega) = \frac{V}{i} \text{Re } \sigma(\omega)$$

$$\chi_{\Xi P}(t) = \frac{i}{\hbar} \langle [\underbrace{\Xi(t)}_{\dot{P}(t)}, P(0)] \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \chi_{PP}(t)$$

$$\chi_{\Xi P}(\omega) = -i\omega \chi_{PP}(\omega)$$

disszipáció: $\bar{W} = \frac{E\omega^2}{2} \omega \text{Im } \chi_{PP}(\omega) =$

$$E(t) = E\omega \cos(\omega t)$$

egys. idő alatt felvett energia

$$= \frac{E\omega^2}{2} \omega \chi_{PP}''(\omega) =$$

$$= \frac{E\omega^2}{2} \frac{1}{(-i)} \chi_{jP}''(\omega) = V \cdot \frac{E\omega^2}{2} \text{Re } \sigma(\omega)$$

egys. térfogatra ($E^2 \sigma$ oldalból ism.)

Összegezályok: $\varphi_{BA}(t=0) = \frac{i}{\hbar} \langle [B, A] \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{BA}(\omega) d\omega =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2i \chi_{BA}''(\omega) d\omega$$

jobb oldal: $\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{\Xi P}''(\omega) d\omega = \frac{V}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re } \sigma(\omega) d\omega$

$\sum a \text{ részekre } 1 = N$

bal oldal: $\frac{i}{\hbar} \langle [e \sum_i \frac{p_i}{m}, e \sum_j x_j] \rangle = \frac{i}{\hbar} \frac{e^2}{m} \langle \sum_{ij} [p_i, x_j] \rangle = \frac{e^2}{m} N$

azonos részre marad csak meg a kommutátor, az ott $\frac{\hbar}{i}$

$$n = \frac{N}{V} \rightarrow \frac{m e^2}{m} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re } \sigma(\omega) d\omega$$

a disszipációt adó rész a vez. káposseg ($\text{Re } \sigma(\omega)$) $\rightarrow \int \rightarrow$ univerz menny.
a többi egyéb részleteitől nem függ (milyen a ka, a rész, bört stb.)

klasszikus hat. eset (közelítés) } $\Rightarrow$ meghatározható
 (relaxációs idő közelítés) ezt tkp.

2. feladat

$$\varphi_{FP}(t) = -\frac{1}{k_B T} \langle \dot{F}(t) F(0) \rangle = \frac{1}{k_B T} \langle F(t) \dot{F}(0) \rangle$$

áram fluktuáció

$$|t| \rightarrow \infty : \langle F(t) F(0) \rangle \rightarrow 0$$

$$\langle F(t) F(0) \rangle = \langle F^2 \rangle e^{-|t|/\tau}$$

ez az időfeloldást feleltetve
 ezt jelenti a rel. idő konst.

$$\langle F^2 \rangle = \langle \left(\sum_i e v_i \right) \left(\sum_j e v_j \right) \rangle = e^2 \sum_{ij} \langle v_i v_j \rangle = (*)$$

Maxwell seb. eloszlás
 a kül. mozg. sebessége egymástól független

$\delta_{ij} \langle v^2 \rangle$ csak akkor kül. 0-tól, ha u_i a u_j a u_k

$$\delta_{ij} \langle v^2 \rangle = \delta_{ij} \frac{k_B T}{m} \quad \left(\frac{1}{2} m v^2 = \frac{k_B T}{2} \right)$$

$$(*) = N e^2 \frac{k_B T}{m}$$

$$\langle F(t) F(0) \rangle = \frac{N e^2}{m} k_B T e^{-|t|/\tau}$$

$$\sigma(t) = \frac{1}{V} \varphi_{FP}(t) = \frac{1}{V k_B T} \langle F(t) F(0) \rangle = \frac{n e^2}{m} e^{-t/\tau}$$

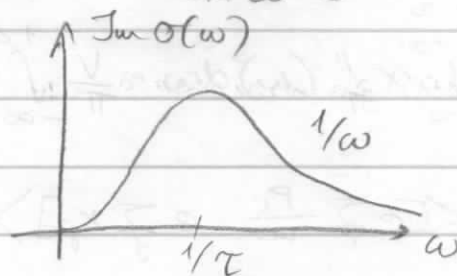
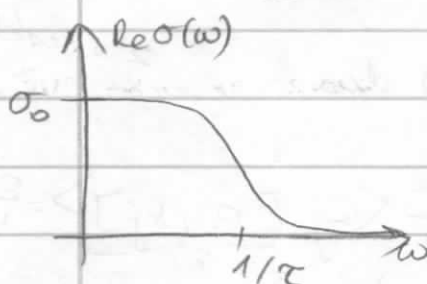
$$\sigma(\omega) = \int_0^\infty dt e^{i\omega t} e^{-t/\tau} \frac{n e^2}{m} = \frac{n e^2}{m} \tau \frac{1}{1 - i\omega\tau}$$

$\frac{1}{\frac{1}{\tau} - i\omega} = \frac{\tau}{1 - i\omega\tau}$ Drude-modell eredményével egyezik meg.

Egzenáramú vezetőképesség: $\omega = 0$

$$\sigma_0 = \frac{n e^2}{m} \tau$$

$$\frac{1}{1 - i\omega\tau} = \frac{1 + i\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \rightarrow \text{Re } \sigma(\omega) = \sigma_0 \frac{1}{1 + \omega^2\tau^2}$$



$\text{Re } \sigma(\omega) \rightarrow$ disszipációs mérő

kes fr-u : -||- van

megy -||- : nincs disszipáció

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re } \sigma(\omega) d\omega = \frac{n e^2 \tau}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{1 + \omega^2 \tau^2} \stackrel{s = \omega\tau}{=} \frac{n e^2}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{1 + s^2} = \frac{\pi n e^2}{m}$$

$[\arctg s]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$

Alumínium a vezetés: e^- -kra.

↳ olyan a spektrumuk, mint a szob. e^- -nak, csak effektív tömeget kell beírni.

(összege szabály nem teljesül)

(...)

Lokális operátorok: $A(r)$ helyől függ

pl. a részecskék sűr. op.-a:

$$\rho(r) = \sum_{i=1}^N \delta(r-r_i)$$

ezt egy tartományra $\int \rightarrow$ összerendeljük, le. hogy rest. koordinátákra
csak abba a tartományba

sűrűség: $\Xi(r) = \frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{p_i}{m} \delta(r-r_i) + \delta(r-r_i) \frac{p_i}{m} \right)$

$$\sum_i \frac{p_i}{m} \delta(r-r_i)$$

← nem felcserélhető, időtani közepet vesszük

másodkvantált formalizmus: $\rho = \Psi^\dagger(r) \Psi(r)$

stb.

Ezek F.tr.-ja hasznos, amikor transzformáción. rest-t vizsgálunk.

$$\hat{A}(r) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_q e^{iqr} \hat{A}_q \quad \text{formális F sor képre}$$

$$\hat{A}_q = \frac{1}{\sqrt{V}} \int d^3r e^{-iqr} \hat{A}(r)$$

pl. $\hat{\rho}_q = \frac{1}{\sqrt{V}} \int d^3r e^{-iqr} \sum_{i=1}^N \delta(r-r_i) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{i=1}^N e^{-iqr_i}$

$$\hat{\Xi}_q = \frac{1}{2\sqrt{V}} \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i}{m} e^{-iqr_i} + e^{-iqr_i} \frac{p_i}{m} \right)$$

részecskék dráma és sűrűsége nem füglen $\rightarrow$ kont. egyenlet kell felírni

$$\dot{\hat{\rho}}_q = \frac{i}{\hbar} [H, \hat{\rho}_q] = \frac{i}{\hbar} \left[\sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}, \hat{\rho}_q \right] = \left[\sum_i \frac{p_i^2}{2m}, \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_j e^{-iqr_j} \right] =$$

$$= \sum_i \left[\frac{p_i^2}{2m}, e^{-iqr_i} \right] \frac{1}{\sqrt{V}} = (*)$$

kül. rész i imp.-ai és coord.-i felcserélhető, csak azonosra lesz $\neq 0$.

$$\rightarrow \frac{p^2}{2m} e^{-iqr} - e^{-iqr} \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m} (p e^{-iqr} p + p (-iq) e^{-iqr} \frac{\hbar}{i} - \frac{\hbar}{i} \nabla(e^{-iqr}) p)$$

$$[p, g(r)] = \frac{\hbar}{i} \nabla g(r)$$

$$p = \frac{\hbar}{i} \nabla$$

$$= -p e^{-iqr} + \frac{\hbar}{i} (-iq e^{-iqr}) p =$$

$$= \frac{\hbar}{i} \frac{1}{2m} (-iq) (p e^{-iqx} + e^{-iqx} p)$$

minden i indexű tag ezt az eredményt hozza

$$\textcircled{*} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{V}} (-iq) \sum_i \left(\frac{p_i}{m} e^{-iqx_i} + e^{-iqx_i} \frac{p_i}{m} \right) = -iq \mathbb{F}_q$$

$$\dot{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = -\nabla \mathbb{F}(\mathbf{r})$$

ez pont a kontinuitási egyenlet $\mathbb{F}$ -traja

$$\rightarrow \langle A(\mathbf{r}) \rangle = \langle A(\mathbf{r}+\mathbf{a}) \rangle = \langle A(\mathbf{r}=0) \rangle \text{ helytől független a val.h.ét. transzl. invar.}$$

$$\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_q e^{iqx} \langle A_q \rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_q e^{iqx} e^{iq\mathbf{a}} \langle A_q \rangle$$

$$\langle A_q \rangle = e^{iq\mathbf{a}} \langle A_q \rangle \text{ tetszőleges a esetben}$$

$$\langle A_q \rangle = 0, \text{ ha } q \neq 0$$

$$\rightarrow \langle B(\mathbf{r}) A(\mathbf{r}') \rangle = \langle B(\mathbf{r}+\mathbf{a}) A(\mathbf{r}'+\mathbf{a}) \rangle = \langle B(\mathbf{r}-\mathbf{r}') A(0) \rangle$$

belwa a $\mathbb{F}$ komponensét is átlagolunk

$$\frac{1}{V} \sum_q \sum_{q'} e^{iqx} e^{iq'\mathbf{r}'} \langle B_q A_{q'} \rangle = \frac{1}{V} \sum_q \sum_{q'} e^{iqx} e^{iq'\mathbf{r}'} e^{i(q+q')\mathbf{a}} \langle B_q A_{q'} \rangle$$

a $\mathbb{F}$ előállítás egyértelműségéből következik, hogy

$$\langle B_q A_{q'} \rangle = e^{i(q+q')\mathbf{a}} \langle B_q A_{q'} \rangle$$

$$\langle B_q A_{q'} \rangle = 0, \text{ ha } q+q' \neq 0$$

$$\text{ha } 0 \rightarrow \langle B_q A_{q'} \rangle \text{ lehet } \neq 0$$

$$\langle B_q A_{q'} \rangle = \delta_{q,-q'} \langle B_q A_{-q} \rangle$$

transzlációsinvariancia miatt $\rightarrow$ val.h.ét. akkor lesz 0-tól

különböző, ha a hull. számok összege 0. (többre is igaz)

$\Rightarrow$ köv. lin. válasz során a $\mathbb{F}$ komponensét nem keverednek.

Fourier
előállítás

• lokális op.: $A(\underline{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\underline{q}} e^{i\underline{q}\underline{r}} A_{\underline{q}}$

transzláció szimmetria: $\langle A(\underline{r}) \rangle = \langle A(0) \rangle$

következmény $\langle B(\underline{r}) A(\underline{r}') \rangle = \langle B(\underline{r} - \underline{r}') A(0) \rangle$

$\langle B_{\underline{q}} A_{\underline{q}} \rangle = \delta_{\underline{q}, -\underline{q}'} \langle B_{\underline{q}} A_{-\underline{q}} \rangle$

F. komponensekkel

$\mathcal{H}' = \mathcal{H} - \int d^3r A(\underline{r}) f(\underline{r}, t) = \mathcal{H} - \sum_{\underline{q}} A_{\underline{q}} f_{-\underline{q}}(t)$

lineáris válasz miatt az egyes zavarok superponálódhatnak

• $\langle B(\underline{r}) \rangle_t = \langle B(\underline{r}) \rangle_0 + \int_{-\infty}^t d^3r' \int_{-\infty}^t \varphi_{BA}(\underline{r} - \underline{r}', t - t') f(\underline{r}', t') dt'$
 $\uparrow$ $\uparrow$
 $\underline{r}$ -től független $\uparrow$ $\uparrow$
 szup. pont. a zavarok hatását

eredmény:

$\varphi_{BA}(\underline{r}, t) = \frac{i}{\hbar} \langle [B(\underline{r}, t), A(0, 0)] \rangle$

• $\langle B_{\underline{q}} \rangle_t = \langle B_{\underline{q}} \rangle_0 + \int_{-\infty}^t dt' \varphi_{BA}(\underline{q}, t - t') f_{\underline{q}}(t')$
 nincs összegzés

$\varphi_{BA}(\underline{q}, t - t') = \frac{i}{\hbar} \langle [B_{\underline{q}}(t), A_{-\underline{q}}(0)] \rangle$
 nem önadj!

• $A(\underline{r}) = A^\dagger(\underline{r})$

$\sum_{\underline{q}} e^{-i\underline{q}\underline{r}} A_{\underline{q}}^\dagger = \sum_{\underline{q}} e^{i\underline{q}\underline{r}} A_{\underline{q}} \rightarrow A_{\underline{q}}^\dagger = A_{-\underline{q}}$

külső zavar: külső potenciál $\rightarrow$ zavar erősségét jelzi

$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \sum_{i=1}^N \Phi(\underline{r}_i, t)$

pot. en.-t adtuk hozzá

$\int d^3r \sum_{i=1}^N \delta(\underline{r} - \underline{r}_i) \Phi(\underline{r}, t) = \int d^3r \hat{\rho}(\underline{r}) \Phi(\underline{r}, t) =$

sűr. op. $\hat{\rho}(\underline{r})$

$= \sum_{\underline{q}} \hat{\rho}_{\underline{q}} \Phi_{-\underline{q}}(t)$

$\ominus \Phi$ lesz a zavar

$$\langle S_q \rangle_t = \langle S_q \rangle_0 + \int_{-\infty}^t \varphi_{SS}(q, t-t') (-\phi_q(t')) dt'$$

↑
csak $q=0$ komponens $\neq 0$

$$\varphi_{SS} = \frac{i}{\hbar} \langle [S_q(t), S_{-q}(0)] \rangle$$

$$\triangleright \varphi_{SS}(q, \omega) = \frac{i}{\hbar} \sum_{\substack{n, m \\ \text{en. áll.}}} \frac{e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m}}{Z} \underbrace{\langle n | S_q | m \rangle \langle m | S_{-q} | n \rangle}_{|\langle n | S_q | m \rangle|^2} 2\pi \delta(\omega - \omega_{nm})$$

$$\triangleright \chi''_{SS}(q, \omega) = \frac{\varphi_{SS}}{2i} \quad (\chi'' \text{ való}, S_q \in S_{-q} \text{ időtükrösre aronosan viselkednek})$$

$$S(q, t) = \langle S_q(t) S_{-q}(0) \rangle$$

időelt. miatt

$$\tilde{S}(q, t) = \langle S_{-q}(0) S_q(t) \rangle = \langle S_{-q}(t) S_q(0) \rangle = S(-q, -t)$$

↓ F.tr.

op-ör felcserélés általában ezt hozza ki

$$\tilde{S}(q, \omega) = e^{\beta \hbar \omega} S(q, \omega) = S(-q, -\omega) \quad (*) \rightarrow$$

$$\langle S(\underline{r}, t) S(\underline{r}, 0) \rangle = \langle S(\underline{r}, 0) S(\underline{r}, -t) \rangle = \langle S(-\underline{r}, t) S(\underline{r}, 0) \rangle = S(-\underline{r}, t)$$

$$S(\underline{r}, t) = S(-\underline{r}, t) \xrightarrow{\text{F.tr.}} S(q, t) = S(-q, t)$$

$$S(q, \omega) = S(-q, \omega) \quad (+ \text{ szembe fordított F.tr.}) \quad (*) \Rightarrow$$

~~$$S(q, \omega) = S(q, -\omega)$$~~

$$\varphi(q, \omega) = \frac{i}{\hbar} (S(q, \omega) - \tilde{S}(q, \omega)) = \frac{i}{\hbar} (S(q, \omega) - S(q, -\omega))$$

összegezzük:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(q, \omega) e^{-i\omega t} d\omega = \varphi(q, t)$$

$$\varphi(q, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(q, \omega) d\omega = 0$$

↓

$$\frac{i}{\hbar} \langle [S_q, S_{-q}] \rangle = 0$$

$$\varphi(q, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (-i\omega) \varphi(q, \omega) d\omega = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega (S(q, \omega) - S(q, -\omega)) \omega = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega (-\omega) S(q, -\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \omega S(q, \omega)$$

$$= \frac{1}{\pi \hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} S(q, \omega) \omega d\omega$$

$$\chi''(q, \omega) = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{p}_q, \hat{p}_{-q}] \rangle \quad \hat{p}_q = -i \hbar \nabla_q$$

$$= \frac{i}{\hbar} \langle [q \nabla_q, \hat{p}_{-q}] \rangle$$

$$[q \nabla_q, \hat{p}_{-q}] = \frac{1}{2V} \left(\sum_i \left\{ \frac{q p_i}{m} e^{-i q r_i} + e^{-i q r_i} \frac{q p_i}{m} \right\} \sum_j e^{i q r_j} - \right.$$

$$\left. - \sum_j e^{i q r_j} \sum_i \left(\frac{q p_i}{m} e^{-i q r_i} + e^{-i q r_i} \frac{q p_i}{m} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2V} \sum_i \left[\frac{q p_i}{m} e^{-i q r_i} e^{i q r_i} + e^{-i q r_i} \frac{q p_i}{m} e^{i q r_i} - e^{i q r_i} \frac{q p_i}{m} e^{-i q r_i} - e^{i q r_i} e^{-i q r_i} \frac{q p_i}{m} \right] =$$

$$\left(e^{-i q r_i} e^{i q r_i} \frac{q p_i}{m} + \frac{\hbar}{i} \frac{q(iq)}{m} e^{-i q r_i} e^{i q r_i} \right) - \left(e^{i q r_i} e^{-i q r_i} \frac{q p_i}{m} + \frac{\hbar}{i} \frac{q(-iq)}{m} e^{i q r_i} e^{-i q r_i} \right) = 2 \frac{\hbar}{m} q^2$$

$$\chi''(q, 0) = \frac{1}{\hbar} \langle [q \nabla_q, \hat{p}_{-q}] \rangle = \frac{1}{\hbar} \frac{N}{V} \frac{\hbar q^2}{m}$$

$$\frac{N}{V} \frac{\hbar q^2}{m} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(q, \omega) \omega d\omega$$

ideális Fermi-gáz ($\frac{1}{2}$ spin)

mágneses susceptibilitás (paramágnes)

ellenyagoknál h. a mágneset is befolyásolja a mágneses tő

$$\mathcal{H} = \sum_{k, \sigma} \epsilon_k a_{k\sigma}^\dagger a_{k\sigma}, \quad \sigma = \uparrow, \downarrow$$

mágnesezettség z' komponense: m

sűrűsége: $m(\underline{r}) = \tilde{\mu} (\psi_{\uparrow}^{\dagger}(\underline{r}) \psi_{\uparrow}(\underline{r}) - \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\underline{r}) \psi_{\downarrow}(\underline{r}))$
(nem μ elektronai pot.!)
mágn. mom.

$\downarrow$ F.T.r.

$$m_{\underline{k}} = \frac{\tilde{\mu}}{\sqrt{V}} \int e^{-i\underline{q}\cdot\underline{r}} m(\underline{r}) d^3r = \frac{\tilde{\mu}}{\sqrt{V}} \frac{1}{V} \sum_{\underline{q}} \sum_{\underline{q}'} \int e^{-i\underline{q}\cdot\underline{r}} e^{i\underline{q}'\cdot\underline{r}} e^{-i\underline{k}\cdot\underline{r}} (a_{\underline{q}\uparrow}^{\dagger} a_{\underline{q}'\uparrow} - a_{\underline{q}\downarrow}^{\dagger} a_{\underline{q}'\downarrow}) d^3r$$

$$\psi_{\uparrow}(\underline{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\underline{q}} e^{i\underline{q}\cdot\underline{r}} a_{\underline{q}\uparrow}$$

pers. hat. felt. $\neq 0$, ha $(\dots) = 0$

$$\int e^{i(\underline{k}-\underline{q}+\underline{q}')\cdot\underline{r}} d^3r = V \delta_{\underline{q}', \underline{k}+\underline{q}}$$

$\uparrow$
0-át eld. - om

$$m_{\underline{k}} = \frac{\tilde{\mu}}{\sqrt{V}} \sum_{\underline{q}} (a_{\underline{k}-\underline{q}\uparrow}^{\dagger} a_{\underline{q}\uparrow} - a_{\underline{k}-\underline{q}\downarrow}^{\dagger} a_{\underline{q}\downarrow})$$

feltét. - elhárított m. s. hullámsűrűség követhezik (kiv. $k=0$)

perturbáció: $-\int d^3r m(\underline{r}) \mathcal{H}(\underline{r}, t) = -\sum_{\underline{k}} m_{\underline{k}} B_{-\underline{k}}(t)$
mágn. indukció.

$$X(\underline{k}, t) = \frac{i}{\hbar} \langle [m_{\underline{k}}(t), m_{-\underline{k}}(0)] \rangle$$

$$\langle m_{\underline{k}} \rangle_t = \int_{-\infty}^t X(\underline{k}, t-t') B_{\underline{k}}(t') dt'$$

mágnesezettség k hullámsűrűség komponense + időben

ezt szeretnénk kiszámítani

$$\dot{a}_{\underline{k}0} = \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}, a_{\underline{k}0}] = \frac{i}{\hbar} [\epsilon_{\underline{k}} a_{\underline{k}0}^{\dagger} a_{\underline{k}0}, a_{\underline{k}0}] = -\frac{i}{\hbar} \epsilon_{\underline{k}} a_{\underline{k}0}$$

$$a_{\underline{k}0}^{\dagger} a_{\underline{k}0} \cdot a_{\underline{k}0} - a_{\underline{k}0} a_{\underline{k}0}^{\dagger} a_{\underline{k}0} = -a_{\underline{k}0}$$

fenniról = 0 antikommut. rel. $\Rightarrow 1 - a_{\underline{k}0}^{\dagger} a_{\underline{k}0}$

$$\dot{a}_{\underline{k}0}(t) = a_{\underline{k}0} e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon_{\underline{k}} t}$$

(Sch. lépteli op.)

$$a_{\underline{k}0}^{\dagger}(t) = a_{\underline{k}0}^{\dagger} e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon_{\underline{k}} t}$$

$$m_k(t) = \frac{\tilde{\mu}}{V} \sum_q a_{q\uparrow}^+ a_{k+q\uparrow} - a_{q\downarrow}^+ a_{k+q\downarrow} \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon_q t} e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon_{k+q} t}}_{e^{-\frac{i}{\hbar} (\epsilon_{k+q} - \epsilon_q) t}}$$

$$\chi(k, t) = \frac{\tilde{\mu}^2}{V} \sum_q \sum_{q'} e^{-\frac{i}{\hbar} (\epsilon_{k+q} - \epsilon_q) t} \underbrace{\frac{i}{\hbar} \langle [a_{q\uparrow}^+ a_{q+k\uparrow} - a_{q\downarrow}^+ a_{q+k\downarrow}], (a_{q'\uparrow} a_{q'-k\uparrow} - a_{q'\downarrow} a_{q'-k\downarrow}) \rangle}_{\text{addüggés felhozható}}$$

$$(a_{q'\uparrow}^+ a_{q'-k\uparrow} - a_{q'\downarrow}^+ a_{q'-k\downarrow}) \rangle =$$

$$= \frac{\tilde{\mu}^2}{V} \sum_{qq'} e^{-\frac{i}{\hbar} (\epsilon_{q+k} - \epsilon_q) t} \frac{i}{\hbar} \langle [a_{q\uparrow}^+ a_{q+k\uparrow}, a_{q'\uparrow}^+ a_{q'-k\uparrow}] + [a_{q\downarrow}^+ a_{q+k\downarrow}, a_{q'\downarrow}^+ a_{q'-k\downarrow}] \rangle$$

$$a_{q\uparrow}^+ a_{q+k\uparrow} a_{q'\uparrow}^+ a_{q'-k\uparrow} - a_{q'\uparrow}^+ a_{q'-k\uparrow} a_{q\uparrow}^+ a_{q+k\uparrow} =$$

$$\delta_{q', q+k} a_{q\uparrow}^+ a_{q+k\uparrow} \quad \delta_{q, q'-k} a_{q\uparrow}^+ a_{q+k\uparrow} \quad ;$$

$$= \delta_{q', q+k} a_{q\uparrow}^+ a_q - a_{q'\uparrow}^+ a_{q\uparrow} \delta_{q, q'-k} -$$

$$- a_{q\uparrow}^+ a_{q'\uparrow} a_{q+k\uparrow} a_{q'-k\uparrow} + a_{q'\uparrow}^+ a_{q\uparrow} a_{q'-k\uparrow} a_{q+k\uparrow}$$

$$(-a_{q\uparrow}^+ a_{q'\uparrow}) (-a_{q+k\uparrow} a_{q'-k\uparrow}) \rightarrow \ominus \cdot \ominus = \oplus$$

antikommut.

$$\chi(k, t) = \frac{\tilde{\mu}^2}{V} \sum_q e^{-\frac{i}{\hbar} (\epsilon_{k+q} - \epsilon_q) t} \frac{i}{\hbar} \langle (a_{q\uparrow}^+ a_{q\uparrow} - a_{q+k\uparrow}^+ a_{q+k\uparrow} + a_{q\downarrow}^+ a_{q\downarrow} - a_{q+k\downarrow}^+ a_{q+k\downarrow}) \rangle$$

q' összegelst a δ -kal clo.

$$\langle a_{q\uparrow}^+ a_{q\uparrow} \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_q - \mu)} + 1} = f(\epsilon_q)$$

$$\chi(k, t) = 2 \frac{\tilde{\mu}^2}{V} \frac{i}{\hbar} \sum_q e^{-\frac{i}{\hbar} (\epsilon_{k+q} - \epsilon_q) t} (f(\epsilon_q) - f(\epsilon_{k+q}))$$

Susceptibilitás

Nemegyz. stat. fiz. (G. EA)

Ideális Fermi-gáz spin-susceptibilitása

$$\chi(\underline{k}, t) = \frac{i}{\hbar} \frac{2\tilde{\mu}^2}{V} \sum_q e^{-\frac{i}{\hbar} (E_{k+q} - E_q) t} (f(E_q) - f(E_{k+q})) \quad (t > 0)$$

$E_q \rightarrow$ egyrész. energia: $H = \sum_q E_q a_{q0}^+ a_{q0}$

$$f(E) = \frac{1}{e^{(\beta(E-\mu))} + 1}$$

$\tilde{\mu} \rightarrow$ megn. mom. abs. érték

Fourier tr.: csak $\oplus$ időkre kell, mert χ akkor $t > 0$ -ra a fele, $t < 0$ -ra 0 a χ .

$$\int_0^\infty e^{-\frac{i}{\hbar} (E_{k+q} - E_q) t} e^{izt} dt \stackrel{\text{Im } z > 0}{=} -\frac{1}{iz - \frac{i}{\hbar} (E_{k+q} - E_q)}$$

$$\chi(\underline{k}, z) = -\frac{1}{\hbar} \frac{2\tilde{\mu}^2}{V} \sum_q \frac{f(E_q) - f(E_{k+q})}{z - \frac{i}{\hbar} (E_{k+q} - E_q)}$$

meromorf fgv., gerj. en. - nál plusz

termodin. hat. eset: $\frac{1}{V} \sum_q \rightarrow \int dq$ át lehet térni

$\underline{k} = 0 \rightarrow \chi(\underline{k} = 0, z) = 0$ a mágnesszettség megn. mennyisége,
megn. menny. válasza pedig 0.

valós frekvenciát határesetek: $z = \omega + i\varepsilon \quad \varepsilon \rightarrow 0$

$$\chi(\underline{k}, \omega) = -\frac{1}{\hbar} \frac{2\tilde{\mu}^2}{V} \sum_q (f(E_q) - f(E_{k+q})) \left(\mathcal{P} \frac{1}{\omega - \frac{i}{\hbar} (E_{k+q} - E_q)} - i\pi \delta(\omega - \frac{1}{\hbar} (E_{k+q} - E_q)) \right)$$

stabilis válasz: $\omega \rightarrow 0$

$$\text{Im } \chi(\underline{k}, \omega = 0) = 0$$

$$\delta\left(\frac{1}{\hbar} (E_{k+q} - E_q)\right) \rightarrow E_{k+q} = E_q \rightarrow f(E_q) - f(E_{k+q}) = 0$$

Im χ pte. fgv. $\rightarrow 0$ -ban el kell tűnnie, ezt is várjuk!

$$\text{Re } \chi(\underline{k}, \omega = 0) = (*)$$

$$f(E_q) - f(E_{k+q}) \approx \frac{\partial f(E)}{\partial E} \Big|_{E_q} (E_q - E_{k+q}) \quad \text{itt nem lesz 0...}$$

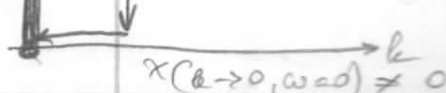
$$(*) = \frac{2\tilde{\mu}^2}{V} \sum_q \frac{f(E_q) - f(E_{k+q})}{E_{k+q} - E_q} \quad \text{stabilis válasz fgv.}$$

most nézzük meg a $\underline{k} \rightarrow 0$ határesetet: (nem $\underline{k} = 0$, csak $\underline{k} \rightarrow 0$)

$$\text{Re } \chi(\underline{k} \rightarrow 0, \omega = 0) = -\frac{2\tilde{\mu}^2}{V} \sum_q \frac{\partial f(E)}{\partial E} \Big|_{E_q}$$

$\chi(\underline{k} = 0, \omega = 0)$

$\underline{k} = 0$ -ban $\chi = 0$, de a $\underline{k} \rightarrow 0$, h.c. - ben nem 0!



izoterm szuszceptibilitás

homogén mágn. tér: $B \uparrow$

mágnesezettség: $M = V \cdot m = \tilde{\mu} \sum_q (\langle a_{q\uparrow}^+ a_{q\uparrow} \rangle - \langle a_{q\downarrow}^+ a_{q\downarrow} \rangle) = (*)$
teszt. mágn. sűr. felfele álló spinek száma - hf. állapot $\rightarrow \tilde{\mu} \rightarrow M$

$$E_q \mp \tilde{\mu} B$$

$$(*) = \tilde{\mu} \sum_q (f(E_q - \tilde{\mu} B) - f(E_q + \tilde{\mu} B)) \approx \tilde{\mu} \sum_q \left. \frac{\partial f}{\partial E} \right|_{E_q} (-\tilde{\mu} B) \cdot 2$$

kis mágn. tér, B -ben lin. rendig alakult számolni

$$m = - \frac{2\tilde{\mu}^2}{V} \sum_q \left. \frac{\partial f}{\partial E} \right|_{E_q} B$$

$\chi_T \rightarrow$ adott hőm.-en kísérlemelhető intenzitás.

adiabatikusan változtatjuk a res. állapotát $k=0 \rightarrow$ megfigyelés az intenzitás és az adiabatikus $\downarrow$
mágn. menny.

$k \neq 0 \rightarrow$ nem u.a. a resket feltétel, amit elhárítottam $\rightarrow$ relaxáció van a rendszerben. $\rightarrow$ látnánk olyat, h. különbözik az adiabat. és az intenzitás között mint mennyiség (pl. kompresszibilitás)

$$\chi_T = \chi(k \rightarrow 0, \omega = 0)$$

$k=0 \rightarrow \chi=0 \rightarrow$ megmaradó mágnesezettség

eddig: teljes körű elmélet, teljes fiz. tör.

de gyakran: csak kevés változó változását akarjuk expliciten vizsgálni

$\hookrightarrow$ ezzel mondjuk lassúak (lassú időbeli vált.)

amikor a háttérben vannak gyors vált.

$\rightarrow$ szétválasztás

$\Downarrow$ ezzel $\Rightarrow$ zaj.

Stochasztikus folyamatok:

x fizikai mennyiség $x(t)$ időfüggő

mérés során $\rightarrow$ időpont állapotunk meg: $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)$

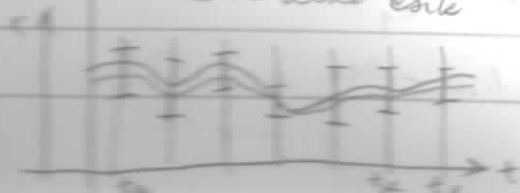
azonos körülmények között $\rightarrow$ u.a. az idősor: determinisztikus

$\hookrightarrow$ mindig u.a. $\rightarrow$ stoch.

$\hookrightarrow$ statisztikát kell csinálni

$$\text{zaj: } P(x_1 < x(t_1) < x_1 + dx_1, \dots, x_n < x(t_n) < x_n + dx_n) = (*)$$

ezt közel esik



több pálya lehetséges $\rightarrow$ nem tudunk kiértékelni

$$(*) = P_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) dx_1 \dots dx_n$$

vsz sűrűség
feltesszük, h. van

●

$$P_1(x_1, t_1)$$

$$P_2(x_1, t_1, x_2, t_2)$$

$$\vdots$$

$$P_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n)$$

$$\vdots$$

pl. ha akarom tudni t -ben: $\langle x(t) \rangle = \int P_1(x, t) x dx$ vagy $\langle x \rangle$ -et
vagy: korrelációs fgv.:

$$\langle x(t_1) x(t_2) \rangle = \int P_2(x_1, t_1, x_2, t_2) x_1 x_2 dx_1 dx_2$$

követelmények: - normáltság: $\int P_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) dx_1 \dots dx_n = 1$
itt: x lehetséges értékeire (ált. $-\infty$ -tól $+\infty$ -ig)

● - kompatibilitás: $P_{n-1}(x_1, t_1, \dots, x_{i-1}, t_{i-1}, x_{i+1}, t_{i+1}, \dots, x_n, t_n) =$
 $= \int P_n(x_1, t_1, \dots, x_i, t_i, \dots, x_n, t_n) dx_i$
 i -edik nem érdekelt

vagyis szintén ismerem az előző fgv-t. $\rightarrow$ a korábbiakat is tudom

P_1
 P_2
 $\vdots$
 P_n

- valahol ismerem $\left. \begin{array}{l} \text{ezt is megvan} \\ \text{ezek megvannak} \end{array} \right\} \rightarrow$ már más, külön feladat

diszkrét változók:

$x(t) \rightarrow m(t)$ egész értékű változó

$$P_n(m_1, t_1, \dots, m_n, t_n) \quad \int dx \rightarrow \sum_m$$

● Van-e olyan, ami ezeket kielégíti?

$\hookrightarrow$ minden esetben Gauss-eloszlás

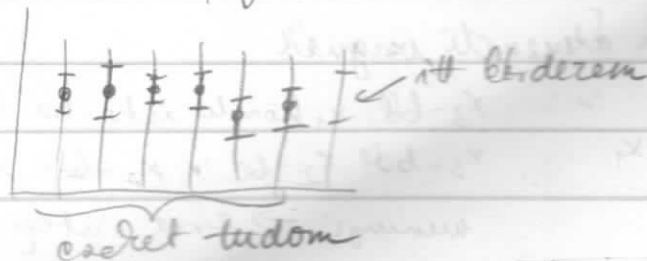
$\hookrightarrow$ mindegyik független eloszlás $\rightarrow$ az az állítás, az egész
(1-re $\int \rightarrow$ a többi nem bef.)

Markov-tulajdonság:

$$\text{Feltételes valószínűség: } P(x_1, t_1 | x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = (*)$$

ezt kéndezem, feltéve, h. ezt tudom

(a folyamat értékét a korábbi időp.-ban



$$(*) = \frac{P_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n)}{P_{n-1}(x_2, t_2, \dots, x_n, t_n)}$$

Markov-tul.: a feltételek közül csak a legnagyobb időargumentumúval számít, az összes többi nem

$$P(x_1, t_1 | x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = P(x_1, t_1 | x_2, t_2)$$

↳ $(x_3, t_3, \dots, x_n, t_n)$ -től nem függ

Markov-tul-gal rendelkező folyamat $\Rightarrow$ Markov-folyamat

$P(x_1, t_1 | x_2, t_2)$ átmeneti valószínűség is hívjuk

x_2, t_2 áll.-ból milyen valószínűséggel megy át x_1, t_1 áll.-ba

$$P_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) = P(x_1, t_1 | x_2, t_2) P_{n-1}(x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = \\ = P(x_1, t_1 | x_2, t_2) P(x_2, t_2 | x_3, t_3) \dots P(x_{n-1}, t_{n-1} | x_n, t_n) \cdot p_1(x_n, t_n)$$

$$P(x, t | x', t')$$

$$p_1(x, t)$$

ez a két closely függ, van, ezért hat. meg a Markov-folyamatot.

↳ ez hat. meg a folyamatot

↳ ez kezd. felt.-ként kezelhető

Markov-folyamatnál tehát fölfelé is lehet építkezni (általában nem)

$$p_2(x_1, t_1, x_2, t_2) = P(x_1, t_1 | x_2, t_2) p_1(x_2, t_2)$$

$$\downarrow \int dx_2$$

$$p_1(x_1, t_1) = \int P(x_1, t_1 | x_2, t_2) p_1(x_2, t_2) \quad t_1 > t_2$$

Chapman - Kolmogorov - egyenlet

↳ milyen feltételeket kell eleget tennie az átmeneti valószínűségi Markov-folyamat legyen?

$$p_3(x_1, t_1, x_2, t_2, x_3, t_3) = P(x_1, t_1 | x_2, t_2) P(x_2, t_2 | x_3, t_3) p_1(x_3, t_3)$$

$$\downarrow \int dx_2$$

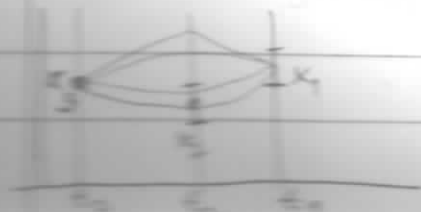
$$p_2(x_1, t_1, x_3, t_3) = \left[\int P(x_1, t_1 | x_2, t_2) P(x_2, t_2 | x_3, t_3) dx_2 \right] \cdot p_1(x_3, t_3)$$

másrészt $\hookrightarrow P(x_1, t_1 | x_3, t_3) p_1(x_3, t_3)$ tetszőleges p_1 -re igaz

$$P(x_1, t_1 | x_3, t_3) = \int P(x_1, t_1 | x_2, t_2) P(x_2, t_2 | x_3, t_3) dx_2$$

ez a Ch.-Kol.-egyenlet

ezt kell tudnia az átmeneti valószínűségi



x_3 -ből x_1 körüli útv.-ba érekem.

x_3 -ből x_2 -be • x_2 -ből x_1 -be, de x_2 mindegy,

amennyi $\rightarrow$ arra integrálok

Gyakran: a folyamatok időeltolódásra invariánsak
 homogén Markov-folyamat: $P(x_1, t_1 | x_2, t_2) = P(x_1, t_1 + \tau | x_2, t_2 + \tau)$
 $\tau = -t_2$ helyettesítéssel: $= P(x_1, t_1 - t_2 | x_2, 0)$

vizsg. intr. lossra

stacionárius állapot (folyamat): $p_1(x, t) = p_1(x, t + \tau)$ τ -ra
 időtől fglen az elözl. fgr. $= p_1^*(x)$

ergodikus Markov-folyamat

$\lim_{t \rightarrow \infty} P(x, t | x') = p^*(x)$ (x' -től fglen!)

$$p_1(x, t) = \int P(x, t | x') p_1(x', 0) dx'$$

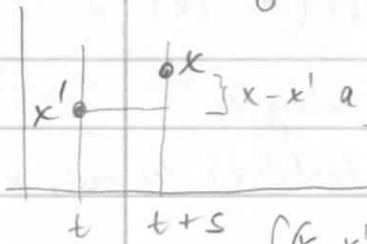
$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1(x, t) = \int p^*(x) p_1(x', 0) dx' = p^*(x) \underbrace{\int p_1(x', 0) dx'}_1 = p^*(x)$$

p_1 -nek van egy határelőzl.-a, amireh. tart

Diffúzió folyamatok:

↳ olyan folyamatok, amikben nincs ugrás (folytonosak)

def: növekedések momentumai (feltétel)



$$\int (x-x')^n P(x, s | x') dx = \begin{cases} v(x') \cdot s + O(s) & (n=1 \text{ első mom.}) \\ \sigma^2(x') \cdot s + O(s) & (n=2 \text{ második mom.}) \\ O(s) & (n \geq 3 \text{ magasabb mom.-okra}) \end{cases}$$

infinitesimális intr. $\rightarrow$ első két mom. küll. nullától, többi 0

→ ez a Gauss eloszlásra jellemző

a trajektória valhatban folytonos ($\sim s$ miatt)

↳ de: sehol nem deriválható (deriv $\rightarrow \infty$ mindenhütt)

ilyen görbe van

ha a fgr. diffható: nem csak előre, de hátra is látok $\rightarrow$ ez nem felel meg a Markov-folyamattal

544re a Markov-folyamattal

↳ az: ismerem a jelenet $\rightarrow$ ism. a jövőt

de: semmit nem tudok a múltjából

ez csak úgy lehet, ha nem diffható

$$\overline{(x-x')} = v(x') s$$

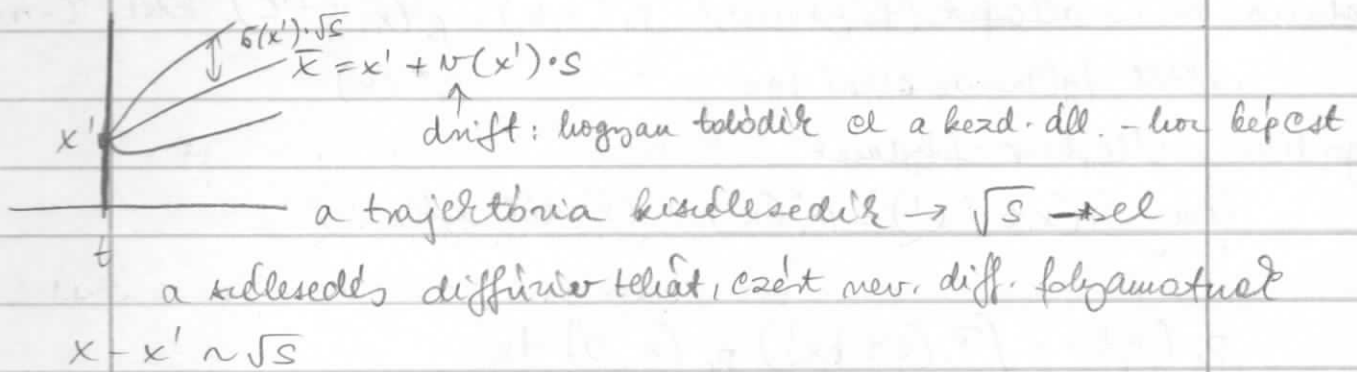
$$\overline{(x-x')^2} - (\overline{(x-x')})^2 = \sigma^2(x') \cdot s + O(s)$$

↳ $O(s)$

Gauss kor inf. időkre

$$P(x, s | x') \cong C \cdot e^{-\frac{(x - x' - v(x') \cdot s)^2}{2 \sigma^2(x') \cdot s}}$$

↑
infinitesimális s



$$x - x' \sim \sqrt{s}$$

$$\frac{\sqrt{s}}{s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \rightarrow \text{deriv} \rightarrow \infty \quad \text{nem deriválható}$$

Chapman - Kolmogorov - egyenlet $\rightarrow$ leszűkíttem diffúziós folyamatra $\rightarrow$
 $\rightarrow$ Fokker - Planck - egyenlet (ez még inkább mozgásról egyenlet)

$$P(x, t | x') : \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (v(x) P) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2(x) P)$$

avval lehet diff. folyamat, ha ezt kielégíti.

$$P(x, t=0 | x') = \delta(x' - x) \quad \text{0 idő alatt nem történik semmi, } x' = x$$

ez a kezdeti feltétel lesz

Stokasztikus folyamatok

↳ Markov-folyamat

diffúziós folyamatok: $\int (x-x')^n P(x,s|x') dx =$
 ... (ugrós folyamat)

↳ ... többi

$$= \begin{cases} v(x')s + \mathcal{O}(s) & n=1 \\ \sigma^2(x')s + \mathcal{O}(s) & n=2 \\ \mathcal{O}(s) & n \geq 3 \end{cases}$$

milyen meglévő egyenletet tudunk felírni a P átmeneti valószínűségről?

feltételes valószínűségi sűrűség:



$$\int f(x) P(x, t+s | x') dx = (*)$$

$f(x)$ v. d.-e azaz a feltétellel, h. t időben x' volt a folyamat értéke

$$(*) = \int f(x) \left[P(x, t | x') + \frac{\partial P(x, t | x')}{\partial t} s + \mathcal{O}(s) \right] dx, \text{ vagy}$$

Chapman-Kolmogorov egyenlet

$$(*) = \int dx f(x) \int d\tilde{x} P(x, s | \tilde{x}) P(\tilde{x}, t | x') =$$

↑ inf. időre de az eloszlás, ezért sorbfejthjük.

$$f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})(x-\tilde{x}) + \frac{1}{2} f''(\tilde{x})(x-\tilde{x})^2 + \dots$$

$$= \int d\tilde{x} \left[f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x}) v(\tilde{x})s + \frac{1}{2} f''(\tilde{x}) \sigma^2(\tilde{x})s + \mathcal{O}(s) \right] P(\tilde{x}, t | x') =$$

most, hogy már ki van fejtve az int. → kevesebb az $\tilde{x}$ -ot x -re, mindegy, mivel fejtünk az int. változót, a végső eredmény nem függ tőle

pac. int. bel, mert még nem tudjuk a határok felbontását összerakni

↑ természetes hat. felt.: $x \rightarrow \pm \infty$

$$= \int dx f(x) \left[P(x, t | x') - \frac{\partial}{\partial x} (v(x) P(x, t | x')) s + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2(x) P(x, t | x')) s + \mathcal{O}(s) \right]$$

most már össze lehet venni, feltételezve $f(x)$ -re igaz $\Rightarrow [\cdot] = [\cdot]$

$$\frac{\partial P(x, t | x')}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (v(x) P(x, t | x')) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\sigma^2(x)}{2} P(x, t | x') \right)$$

Fokker-Planck egyenlet.

ennek a mo-i a „j6” átmeneti valószínűség

↳ amit kielégítik a feltételt

természetes határfeltétel, kezdeti feltétel: $P(x, t=0 | x') = \delta(x-x')$

● Green-fgtt kell megkeresni

F-P egyenletben:

1.) tag: drift $\rightarrow$ v. d. eltolódása

2.) tag: szélesedést írja le (diffúziós egyenlet szerinti, helyi diff. áll.)

$$p_1(x,t) = \int dx' P(x,t|x') p_1(x',t=0)$$

$p_1(x,t)$ kielégíti a Fok-egyenletet,
ami ma's kezd. feltételnek tesz eleget

Továbbiakban: egyenlet $\rightarrow$ olyan problémát nézünk, ahol $\sigma^2(x)$ nem
függ x -től!

Wiener-folyamat: $N(x) \equiv 0$ $\sigma^2 = 2D$ (ha $a \rightarrow 2$ est elvige)

szim diffúziós folyamat

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \text{ diffúziós egyenlet}$$

minden diff. folyamat erre visszavezethető

megoldás: generátorfüggvény módszer $\rightarrow$ ISM.

gen. fgv: $p(x)$ valószínűség sűrűség

$$\Phi(z) = \overline{e^{zx}} = \int dx p(x) e^{zx} \text{ momentum generátor fgv.}$$

$$\hookrightarrow \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} z^l \overline{x^l}$$

$$\left. \frac{\partial^l \Phi(z)}{\partial z^l} \right|_{z=0} = \overline{x^l} \quad \Phi \text{ deriváltjai az origóban a momentumokat határozzák meg}$$

$\ln \Phi(z)$ kumulációs-generátor fgv.

$$\ln \Phi(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} z^l b_l \quad \hookrightarrow \text{kumulációk}$$

$$(\Phi(z=0) = \int dx p(x) = 1 \rightarrow \ln 1 = 0 \rightarrow \sum 1\text{-től kezdve})$$

$$\left. \frac{\partial^l \ln \Phi}{\partial z^l} \right|_{z=0} = b_l$$

$$\frac{\partial \ln \Phi}{\partial z} = \frac{1}{\Phi} \Phi' \quad z=0 \rightarrow b_1 = \overline{x} \quad 1. \text{ kum: } \overline{x}$$

$$\frac{\partial^2 \ln \Phi}{\partial z^2} = \frac{\Phi''}{\Phi} - \frac{1}{\Phi^2} \Phi' \cdot \Phi' \quad z=0 \rightarrow b_2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2 \quad 2. \text{ kum: } \text{szórás négyzet}$$

$$\frac{\partial^3 \ln \Phi}{\partial z^3} = \frac{\Phi'''}{\Phi} + \frac{2}{\Phi^2} \Phi' \Phi'' - \frac{1}{\Phi^3} 2 \Phi' \cdot \Phi'' \cdot \Phi' \quad z=0 \rightarrow b_3 = \overline{x^3} - 3\overline{x} \overline{x^2} + 2\overline{x}^3 = \overline{x^3} - 3\overline{x}(\overline{x^2} - \overline{x}^2) - \overline{x}^3$$

Itt lehetne meg. mert beolvasható

1
Ezért az összes lehetséges módon
(most 3) az alacsonyabb rendű
kumulációkra kifejtett képlet.

pl. Gauss-eloszlás: $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta} e^{-\frac{x^2}{2\Delta}}$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{x^2}{2\Delta}} e^{zx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2\Delta}(x-\Delta z)^2} e^{\frac{1}{2}\Delta z^2}$$

1. meg kell adni a Gauss

$$-\frac{1}{2\Delta}(x^2 - 2\Delta z x + \Delta^2 z^2 - \Delta^2 z^2)$$

$$\phi(z) = e^{\frac{1}{2}\Delta z^2} \quad k_1 = 0, k_2 = \Delta, k_l = 0 \quad (l \geq 0)$$

Gauss-csoportok 2.-nél magasabb rendű kumulációja nincs.

(ha $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta}}$, tehát nem az origóba van középpontja,
 akkor: $\phi(z) = e^{x_0 z + \frac{\Delta}{2} z^2}$ ennyi változik az eltolás miatt)

Momentanok: $\phi(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \frac{\Delta^l z^{2l}}{2^l} = (*)$

$$\overline{x^l} = \begin{cases} 0 & \text{ha } l \text{ páros} \\ \neq 0 & \text{ha } l \text{ páros} \end{cases}$$

csak pár hatványt szerepelhet a sorban

$$(*) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l)!} \frac{\Delta^l z^{2l}}{2^l} (2l)! \rightarrow \overline{x^{2l}} = \Delta^l \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l-1)$$

c.h. $\rightarrow$ összes hatvány $\Rightarrow$ összes p.h.
 $(2l)! \rightarrow$ összes hatvány
 $l! \rightarrow$ összes p.h.

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad P(t=0) = \delta(x-x')$$

$$\phi(z, t=0) = \int e^{zx} \delta(x-x') dx = e^{zx'}$$

$$\int e^{zx} \frac{\partial P}{\partial t} dx = \frac{\partial}{\partial t} \phi(z, t)$$

$$\int e^{zx} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} dx = z^2 \int e^{zx} P dx = z^2 \phi(z, t)$$

↑
parc. int.

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial t} = D z^2 \phi(z, t) \quad \text{minden } z\text{-re egyenlő differenciálható d.e.}$$

$$\frac{\partial \phi}{\phi} = D z^2 dt$$

$$\ln \frac{\phi(z, t)}{\phi(z, 0)} = D z^2 t \rightarrow \phi(z, t) = \phi(z, 0) e^{D z^2 t} = e^{zx' + D z^2 t}$$

beírva $D z^2 t$

$$\bar{x} = x'$$

$$\bar{x}^2 - \bar{x}'^2 = 2Dt = \sigma^2 t$$

vagy a hővez. egyenlet
 diff. egy. alapmója (amikor a kezd. felt.
 egy pontra van koncentrálni)

$$P(x, t | x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(x-x')^2}{2\sigma^2 t}}$$

Wiener-folyamat növekedésére szeretnénk átírni a formulákat.

$\hookrightarrow W(t)$ -vel jelöljük, $W(t=0) = 0$

$$P(w, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{w^2}{2\sigma^2 t}}$$

$\overline{W} = 0$, és $\overline{W^{2L+1}} = 0$ mert centrált Gauss-eloszlás

$\overline{W^{2L}} = (\sigma^2 t)^L \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2L-1)$ magasabb mom. -ok t magasabb korr-val megnövekszik

Korrelációs fgv: $\overline{W(t) W(t')}$ $t, t' > 0$

ami a korr-fgv-nél nem lehetem fel, h csak az időkül-től függ

↳ van egy kitüntetett kezdeti időpont $\Rightarrow$ nincs időbeli transzláció szimmetria

$$\overline{W(t) W(t')}_{t > t'} = \int dw dw' p_z(w, t, w', t') ww' =$$

$P(w, t-t' | w')$ átmeneti vár. $P(w', t' | 0)$ egyszerűt. eloszlás

↳ ha 0-ból indul a folyamat, most spec. pont megnézük

$$= \int dw' \left(\int dw w P(w, t-t' | w') \right) P(w', t' | 0) w' = \int dw' w'^2 P(w', t' | 0) = \sigma^2 t'$$

t' lett volna a nagyobb, itt $\sigma^2 t$ állna

elengedő a $t > t'$ feltétel: $\overline{W(t) W(t')} = \sigma^2 \cdot \min(t, t')$ a kisebbet kell beírni

$$\overline{(W(t) - W(t')) W(t')} = \overline{W(t) - W(t')} \cdot \overline{W(t')} = 0$$

egymástól független

a növekedés ilyen

$t > t'$

$$\overline{W(t) W(t')} - \overline{W(t')^2} = 0$$

$\sigma^2 t'$ megkapjuk az ar. ar. eredményt.

Diffúzió's folyamat $\Rightarrow$ furcsa eloszlás, nincs deriv.

Wiener-fgy. $\rightarrow$ sinus

általánosított elemekben van:

Gauss-típusú fehér zaj: általánosított stoch. folyamat

általánosított fgv. $\rightarrow$ disztribúció

a mom-ok / cumulánsok $\rightarrow$ disztribúciók

Gauss-típusú: csak 1. és 2. cumuláns

fehér zaj: $\xi \rightarrow \overline{\xi(t)} = 0$ átlagosan 0.

$$\overline{\xi(t) \xi(t')} = \sigma^2 \delta(t-t')$$

ilyen korr. fgv. a fizikában nem fordulhat elő.

de gyorsan leszeng a korr. idő, 0-nál felülmúl a vizsgálatok képest

$\xi(t)$ -vel formálisan úgy bármint számolhatunk, mint egy fgv-nel.

$$Y(t) = \int_0^t \xi(s) ds \quad Y(t): \text{Gauss-eloszlású (mert G-el.-ok összege)}$$

$$Y(t=0) = 0$$

$$\gamma(t) = 0 \quad t > t' \text{ if.} \quad \delta\text{-vel } t \text{ int.} = 1$$

$$\gamma(t) \gamma(t') = \int_0^t ds \int_0^{t'} ds' \overline{\xi(s) \xi(s')} = \int_0^t ds \int_0^{t'} ds' \sigma^2 \delta(s-s') = \sigma^2 \int_0^t ds = \sigma^2 t'$$

• t, t' szimmetrikus helyreállítva:

$$\gamma(t) \gamma(t') = \sigma^2 \min(t, t')$$

$$\gamma(t) = w(t)$$

Ez az ξ w korlát.

Langevin-egyenlet: $\dot{x}(t) = v(x(t))$

fiz. mennyiség adott időbeli értéke meglehet. a további időfejlődést (autómata d.e.) fiz. $\rightarrow$ gyorsan van ritka

$$\dot{x}(t) = v(x(t)) + \xi(t)$$

• determinisztikus zaj $\xi(t)$ Gauss-típusú felületi zaj
maga egy.

$$\overline{\xi(t)} = 0$$

$$\xi(t) \xi(t') = \sigma^2 \delta(t-t')$$

ha az időskálát csökkentjük $\rightarrow$ kis időinterv. $\rightarrow$ kis x vált. $\rightarrow$ ezalatt nagyon sok véletlen zavar éri $\rightarrow$ centralis határolás - tétel: eset Gauss-eloszlást követnek
Erőlt. hasonl. a Gauss.

Gond: $\xi(t)$ körösleges függvény mindezen.

értelmezés: $dx(t) = x(t+dt) - x(t) = v(x(t))dt + dw(t)$
 $w(t+dt) - w(t)$

• $dx(t) = v(x(t))dt + dw(t) + O(dt)$
 $\hookrightarrow \sqrt{dt}$ nagyságrendű

bármely feladat, stochasztikus de-ek

második alakot használjuk

$x(t)$: Markov-folyamat

$x(t+dt)$ - t meghatározása: $x(t), dw(t)$ független $t' < t$ eseményektől
ez a Markov-folyamat definíciója

$x(t)$ diffúziós folyamat:

$$dx(t) = v(x(t))dt + \overline{dw(t)} + O(dt)$$

$\overline{dw(t)} = 0$

• módszer v.e.-e

$$dx(t)^2 = (v(x(t))dt + dw(t))^2 = \underbrace{(v(x(t))dt)^2}_{O(dt)} + v(x(t))dt \underbrace{dw(t)}_{=0} + \overline{dw(t)^2} =$$

$$= \sigma^2 dt + \mathcal{O}(dt)$$

$$dx(t)^3 = (v(x(t))dt + dw(t))^3 = \mathcal{O}(dt)$$

$$dx(t)^n = \mathcal{O}(dt) \quad (n \geq 3) \text{ valóban diffúziós folyamatot ír le.}$$

F-P egyenlete:
$$\frac{\partial P}{\partial t} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x}(vP)}_{\downarrow} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\sigma^2}{2}P\right)}_{\uparrow \text{ zaj kor. fg. c.l.}}$$

Langevin-egyenletben: det. mozg. egy. jobb oldala

Fokker-Planck egy. $\Leftrightarrow$ Langevin egyenlet egymással felváltó megfogalmazások

Ha σ^2 függ x -től: értelmezési problémák:

I -nál általában $\rightarrow$ $\uparrow \Pi$ miredegy li. a kis intro-on belül melyik értelmezést vesszük.
diffúziós folyamatoknál $\rightarrow$ nem miredegy!

értelmezési kérdések: $\rightarrow$ Ito-féle értelmezés $\rightarrow$ intro. közepén
 $\rightarrow$ Stratonovich-féle $\rightarrow$ elején

adott Langevin-egyenlet $\rightarrow$ a befűtési st. elterjed FP-ra vezet és fordítva

$$\dot{x}(t) = v(x(t)) + \alpha(x(t)) \xi(t)$$

$\nwarrow$
expl. x fgv.

$$dx(t) = v(x(t))dt + \alpha(x(t))dw(t) \quad \text{Ito-féle}$$

$$+ \alpha\left(\frac{x(t) + x(t+dt)}{2}\right)dw(t) \quad \text{Str.-féle}$$

Langevin-egyenlet $\rightarrow$ többféle értelmezés is van.

Ha közvetve csinalom a d. egyenlet értelmezését $\rightarrow$ n.a.
a statisztikát írja le a best körül. (1984)

Wieneggy. Statfiz (F.ET)

Langevin - egyenlet: $\dot{x} = v(x) + \xi(t)$

$$\overline{\xi(t)} = 0, \quad \overline{\xi(t) \xi(t')} = \sigma^2 \delta(t-t') = 2D \delta(t-t')$$

Fokker - Planck egyenlet: $\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (v(x)P) + D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$
állapot / fizikai mennyiség időbeli változását követjük

(hasonló: Sch - Heisenberg kép)

több változó: $\underline{\dot{x}} = \underline{v}_i(x) + \underline{\xi}_i(t)$

$$\overline{\xi_i(t)} = 0, \quad \overline{\xi_i(t) \xi_j(t')} = 2D_{ij} \delta(t-t')$$

$D_{ij} = D_{ji}$ szimmetrikus mtrx

pozitív definit (kvadrátgyököt vehetünk)

F-P egyenlet: $P(\underline{x}, t | \underline{x}')$

kont. egy. alárú

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i(x) P) + \sum_{ij} D_{ij} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j} = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[v_i P - \sum_j D_{ij} \frac{\partial P}{\partial x_j} \right]$$

Ξ : vörzi áramlás

Stacionárius mo.: $p_s(x, t) = p_s(x)$ (t-től fglen)

egyváltozó cloosé-fgr.

$$p_s(x) = e^{-\phi(x)}$$

1 változó esetén: F-P: $0 = -\frac{\partial}{\partial x} (v(x) p_s(x) - D \frac{\partial p_s}{\partial x})$

$\Xi(x) = \text{állandó}$

$$v(x) p_s(x) - D \frac{\partial p_s}{\partial x} = \text{állandó} = 0$$

$$p_s(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \pm \infty) \quad \uparrow$$

a vörzi áramlás 0-nak kell lennie

$$D \frac{\partial p_s(x)}{\partial x} = v(x) p_s(x) \rightarrow \ln \frac{p_s}{C} = \frac{1}{D} \int v(x) dx$$

$$p_s(x) = C \cdot e^{\frac{1}{D} \int v(x) dx}$$

$$D \frac{\partial p_s(x)}{\partial x} = v(x) p_s(x) \rightarrow \text{beírva } p_s = e^{-\phi} \rightarrow$$

$$-D \frac{\partial \phi}{\partial x} e^{-\phi} = v e^{-\phi}$$

$$\boxed{v = -D \frac{\partial \phi}{\partial x}}$$

több vektorszó:

$$-\sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \quad \text{vektorok, div-ja} = 0 \quad \text{a vektorok} = 0$$

felhatalmazás a számok

$$P_S = e^{-\phi}$$

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[v_i + \sum_j D_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right] e^{-\phi} = 0$$

F_{ij}

(A) legyen $F_i = 0$ e.s.-i alapt $\rightarrow$ vizsgál me a számok

$$v_i = -\sum_j D_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \quad \text{u.a-t kapjuk vissza, mint a vekt-nál}$$

(B) másik eset $F_i \neq 0$ itt több eset van

$$\text{egy pl.: } v_i = \underbrace{\sum_j Q_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}}_{\text{antiszimm.}} - \underbrace{\sum_j D_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}}_{\text{sz. def. szimmetrikus}}$$

itt is v lin. komb.-ja a ϕ deriváltaknak, de feltételeztük szim. e antiszimm. részre

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_j Q_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right] e^{-\phi} = \sum_{ij} \left(Q_{ij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} e^{-\phi} - Q_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} e^{-\phi} \right) = 0$$

$\text{szim.} \cdot \text{a.s.} \quad \text{szim.} \cdot \text{a.s.} + \text{a.s.} \cdot \text{szim.}$

$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$
 $S_p \rightarrow 0 \quad \leftarrow S_p$

3 spec. esetként A-t tartalmazza

determinisztikus egyenlet: $\dot{x}_i = v_i(x)$ elég ezt vizsg.

$x_i(t)$ megoldás $\phi(x(t))$

$$\frac{d\phi(x(t))}{dt} = \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_i \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} v_i \right) = \sum_{ij} Q_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}$$

$\text{a.s.} \quad \text{szim.}$

$$-\sum_{ij} D_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \leq 0$$

sz. def. $\Rightarrow 0 \Leftrightarrow$ lehet, ha a deriváltak 0-k

ϕ változása:

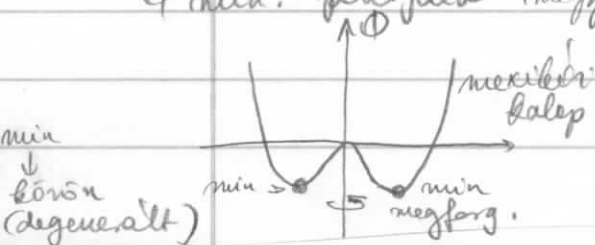
konzeratív (ϕ értéket megfő) mozgásnak felel meg

2 tag: dissipatív mozg. $\dot{\phi} \leq 0$, ϕ nő

ϕ minimum pontjába vezet a determinisztikus mozgás.

első tag: lehet mozgás $\rightarrow$ csak konzeratív: nem l min. van, degenerált,

ϕ min. pontjain megy a mozg.



$$x = (x_1, x_2)$$



pl. lineáris folyamat: $v(x) = -\gamma x$

Langevin-eg: $\dot{x} = -\gamma x + \xi$, $\overline{\xi(t)} = 0$, $\overline{\xi(t)\xi(t')} = 2D\delta(t-t')$

F-P-eg: $\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\gamma x P) + D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$, $P(x, 0|x') = \delta(x-x')$

stac. eloszlás: $\Phi = \frac{1}{D} \int v(x) dx = -\frac{\gamma}{D} \int x dx = -\frac{\gamma}{D} \frac{x^2}{2}$

$$P_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot D/\gamma}} e^{-\frac{\gamma}{2D} x^2}$$

generátorfgv: $G(z, t) = \overline{e^{zx}}$ $G(z, 0) = e^{zx'}$

$$\int \frac{dP}{dt} e^{zx} dx = \frac{\partial}{\partial t} G(z, t)$$

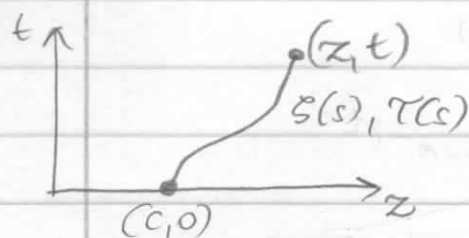
$$\int \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} e^{zx} dx = \int P z^2 e^{zx} dx = z^2 G(z, t)$$

$$\int \frac{d}{dx} (xP) e^{zx} = -\int xP e^{zx} dx \cdot z = -z \frac{\partial}{\partial z} G(z, t)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} &= -\gamma z \frac{\partial G}{\partial z} + D z^2 G \\ G(z, 0) &= e^{zx'} \end{aligned} \right\}$$

elrendű d.e. lett

G kétváltozós $\rightarrow$ ábr. síkban a 2 vált-t



(barátságiábrák megoldása)

$$\xi(s=0) = C$$

$$\xi(s=1) = z$$

így paraméterezzük a görbét

$$\tau(s=0) = 0$$

$$\tau(s=1) = t$$

$$G(z = \xi(s), t = \tau(s)) \equiv G(s)$$

$$\frac{dG}{ds} = \frac{\partial G}{\partial z} \frac{d\xi}{ds} + \frac{\partial G}{\partial t} \frac{d\tau}{ds} = +\gamma \xi \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial t} = D \xi^2 G$$

$$\frac{d\xi}{ds} = +\gamma \xi, \quad \frac{d\tau}{ds} = 1$$

z változó szerepét időre

$$\frac{dG(s)}{ds} = D \xi^2(s) G(z, s)$$

$$\tau = s$$

$$\xi(s) = C e^{\gamma s}$$

(z, t) pont: $\tau(s) = t$
 $S(s) = z$

$s = t$
 $z = c \cdot e^{\gamma t}$

$$\frac{dG}{G} = D S^2(s) ds$$

$$\ln \frac{G(s)}{G(0)} = D \int_0^s S^2(s') ds' = D \int_0^s c^2 e^{2\gamma s'} ds' = D c^2 \frac{e^{2\gamma s} - 1}{2\gamma}$$

$$G(s) = G(0) e^{\frac{D}{2\gamma} c^2 (e^{2\gamma s} - 1)} = G(S(t), \tau(t))$$

$$\phi(c, 0) = e^{cx'} \quad s=t, \quad c = z \cdot e^{-\gamma t}$$

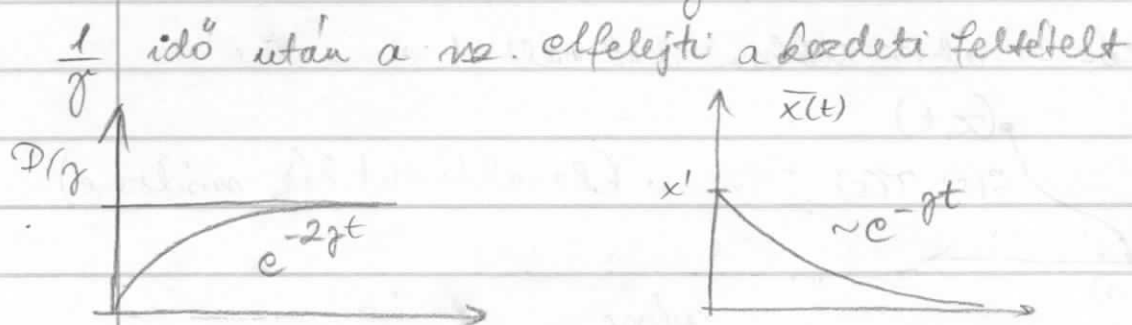
$$\phi(z, t) = e^{zx' e^{-\gamma t} + \frac{D}{2\gamma} z^2 e^{-2\gamma t} (e^{2\gamma t} - 1)}$$

$$\phi(z, t) = \exp \left\{ \underbrace{zx' e^{-\gamma t}}_{\bar{x}} + \underbrace{\frac{z^2}{2} \frac{D}{\gamma} (1 - e^{-2\gamma t})}_{\bar{x}^2 - \bar{x}^2} \right\}$$

$$P(x, t | x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha^2(t)}} e^{-\frac{(x - x' e^{-\gamma t})^2}{2\alpha^2(t)}}$$

Gauss-eloszl.

$$\alpha^2(t) = \frac{D}{\gamma} (1 - e^{-2\gamma t})$$



Ornstein-Uhlenbeck folyamat

ergodikus: minden kezdeti eloszlás a stac. eloszlásba fut be

$$P(x, t | x') \rightarrow P_S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{D}{\gamma}}} e^{-\frac{\gamma}{2D} x^2}$$

Brown - mozgás

lombos részecske mozgását a körülötte lévő folyadék véletlenszerű hatása befolyásolja

máshogy is el lehet képzelni, hőtanálgy stb.

$$(x, p)$$

$$\dot{x} = \frac{p}{m}$$

$$\dot{p} = \underbrace{-\frac{\partial u(x)}{\partial x}}_{\text{konervatív mozgás}} - \underbrace{\gamma p}_{\text{collaptás}} + \underbrace{\xi(t)}_{\text{véletlen erő}}$$

$\xi(t)$: Gauss-típusú fehér zaj

$$\overline{\xi(t)} = 0 \quad \overline{\xi(t)\xi(t')} = 2D\delta(t-t')$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(x) \quad \text{Ham. fgv.}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} - \gamma m \frac{\partial H}{\partial p} + \xi \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{zajt elhanyagolva} \rightarrow H \text{ deriv. v. elsőrendű fgv.} \\ \text{szerepelnek} \end{array} \right\}$$

egyensúly (stac. állapot): $\xi \leftarrow$ hőforrás

$$e^{-H/k_B T} = e^{-\phi/C} \quad \phi = \frac{H}{k_B T}$$

$$\dot{x} = k_B T \frac{\partial \phi}{\partial p}$$

$$\dot{p} = -k_B T \frac{\partial \phi}{\partial x} - \gamma m k_B T \frac{\partial \phi}{\partial p} + \xi$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_B T \\ -k_B T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial p} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma m k_B T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix}$$

konervatív

disszipatív

$$D = \gamma m k_B T$$

$$p(t+dt) = p(t) - \frac{\partial u}{\partial x} dt - \gamma p(t) dt + dW_t$$

Wiener-folyamat megvalósítása

$$\text{stac. állapotban: } \overline{p(t+dt)^2} = \overline{p^2(t)} + \overline{dW_t^2} - 2 \overline{p(t) \frac{\partial u}{\partial x} dt} -$$

$$- 2 \gamma \overline{p^2(t)} dt + \underbrace{2 \overline{p(t) dW_t}}_{\overline{p(t)} \cdot \overline{dW_t} = 0} - 2 \underbrace{\overline{\frac{\partial u}{\partial x} dt dW_t}}_{\frac{\partial u}{\partial x} \overline{dW_t} = 0} - 2 \gamma \underbrace{\overline{p(t) dW_t}}_0 dt$$

$$\overline{p(t) \frac{\partial u}{\partial x}} = 0$$

$$0 \text{ imp. v. d.} = 0$$

$$\text{stac. állapot} \rightarrow \overline{p^2(t+dt)} = \overline{p^2(t)} \quad \text{meg kell egyezzen!}$$

$$\text{ezért: } \overline{dW_t^2} = 2 \gamma \overline{p^2(t)} dt$$

$$2D$$

$$p\text{-re nem lehet hárni: az adott elváltatás feltétele} \rightarrow \overline{p(t)^2} = k_B T m$$

$$D = \gamma m k_B T$$

F-P-egyenlet: $\dot{x} = v$

$$\dot{v} = -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{m} - \gamma v + \frac{\xi}{m}$$

$$\frac{\langle \xi(t) \xi(t') \rangle}{m^2} = 2 \frac{\gamma k_B T}{m}$$

$P(x, v, t | \dots)$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (vP) - \frac{\partial}{\partial v} \left(-\frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{m} - \gamma v \right) + \frac{\gamma k_B T}{m} \frac{\partial^2 P}{\partial v^2}$$

F-P-egyenlet

Túlcsillapított mozgás:

egy oszcillációt sem érünk el

$\dot{p} \approx 0$ formálisan ezt jelent

p -t a hely határozza meg

$$-\frac{\partial u}{\partial x} - \gamma \underset{\uparrow m\dot{x}}{P} + \xi = 0$$

$$\boxed{\dot{x} = -\frac{1}{\gamma m} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\xi}{\gamma m}} \quad \text{Langevin-egyenlet}$$

nem a gyorsulást, hanem a sebességet határozza meg az erő

$P(x, t | \dots)$

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\gamma m} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{k_B T}{\gamma m} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}}$$

túlcsillapított mozgás, F-P-egyenlet

Kramers-egyenlet

$$\frac{\langle \xi \rangle}{\gamma m} \cdot \frac{\langle \xi \rangle}{\gamma m} = \frac{2\gamma m k_B T}{(\gamma m)^2}$$

vizsgált idő $\gg$ korrelációs idő $\Rightarrow$ korr. lecsengés $\rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \text{ tag} = 0$
 $\rightarrow$ diffúziós mozgás lesz.

Newton, statisztika (9. EA)

$$\dot{x} = \frac{p}{m} \quad \dot{p} = -\frac{\partial u}{\partial x} - \gamma p + \xi \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \dot{x} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} = -\frac{\partial u}{\partial x} - \gamma p + \xi \end{matrix}} \right\} P_S(x, p) \sim e^{-\frac{H}{k_B T}} \quad H = \frac{p^2}{2m} + u(x)$$

$$\overline{\xi(t)} = 0 \quad \overline{\xi(t)\xi(t')} = 2\gamma m k_B T \delta(t-t')$$

Spec. eseteket vizsgálhatunk. (mit kötünk meg u -ra)

1) Szabad Brown - mozgás $u(x) \equiv 0$

$$m\dot{v} = -\gamma m v + \xi$$

$$\overline{\xi\xi} = 2\gamma k_B T \delta(t-t')$$

→ a determin. változóban lineáris → Ornstein-Uhlenbeck-folyamat.

$$\dot{v} = -\gamma v + \xi/m$$

$$\overline{\frac{\xi}{m} \frac{\xi}{m}} = 2 \frac{\gamma}{m} k_B T \delta(t-t')$$

Brown ↔ Orn. megfeleltetés

$$\gamma \leftrightarrow \gamma$$

$$\frac{\gamma k_B T}{m} \leftrightarrow D$$

így meg lehetne oldani, de most máshogy csináljuk! (Fok, Planck mo-benne)

más megoldási mód: Langevin-egyenletet oldjuk meg

$$v(t) = \underbrace{v_0 \cdot e^{-\gamma(t-t_0)}}_{\text{hom. egy. mo-ja}} + \underbrace{\frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt' e^{-\gamma(t-t')} \xi(t')}_{\text{partikuláris mo-ja}}$$

partikuláris mo-ja az inhom. egy.-nek (állandók vándorlásával pl. kijön)

$$t = t_0 \Rightarrow v(t_0) = v_0 \text{ a kezdeti feltétel (beh.} \rightarrow \text{látszik)}$$

első tag: lecseng $1/\gamma$ idő alatt

második: $e^{-\dots} \rightarrow 1/\gamma$ ideig emlékszik $\xi(t')$ -re (am, h. milyen véletlen hatások értek)
mert az exp. lecseng

$$\overline{v(t)} = v_0 \cdot e^{-\gamma(t-t_0)}$$

$1/\gamma$ idő után beáll a stac. állapot

formálisan a stac. állapotot így eljűk el, h. $t_0 \rightarrow -\infty$

$$v(t) = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^t dt' e^{-\gamma(t-t')} \xi(t')$$

$$\overline{v(t)} = 0$$

$$\overline{v(t)v(t')} = \frac{1}{m^2} \int_{-\infty}^t ds \int_{-\infty}^{t'} ds' e^{-\gamma(t-s)} e^{-\gamma(t'-s')} \underbrace{\overline{v(s)v(s')}}_{2\gamma m k_B T \delta(s-s')} =$$

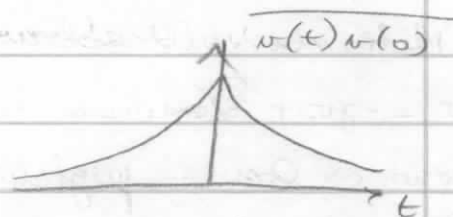
$t > t'$ esetet vizsgáljuk (szimmetrikus persze $t \leftrightarrow t' - re$)

$$= \frac{2\gamma m k_B T}{m^2} e^{-\gamma(t+t')} \int_{-\infty}^{t'} ds' e^{2\gamma s} = \frac{2\gamma m k_B T}{m^2} \frac{1}{2\gamma} e^{-\gamma(t-t')} =$$

$$\left[\frac{e^{2\gamma s}}{2\gamma} \right]_{-\infty}^{t'} = \frac{e^{2\gamma t'}}{2\gamma}$$

$$\overline{v(t)v(t')} = \frac{k_B T}{m} e^{-\gamma|t-t'|} \quad (\text{met szim. } t \leftrightarrow t' - bea)$$

$$t = t' = \overline{v(t)^2} = \frac{k_B T}{m}$$



még x statisztikus tulajdonságait nem ismerjük. Becsülni tudni, mennyit mozdult el

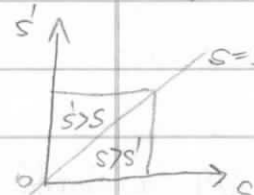
$$\downarrow x(t) - x(0) = \int_0^t ds v(s)$$

$\hookrightarrow$ Gauss-eloszlás $\Rightarrow x(t) - x(0)$ is Gauss

$$\overline{x(t) - x(0)} = 0 \quad \text{stac. állapotban}$$

$$\overline{(x(t) - x(0))^2} = \int_0^t ds \int_0^t ds' \overline{v(s)v(s')} = \frac{k_B T}{m} \int_0^t ds \int_0^t ds' e^{-\gamma|s-s'|} =$$

$$= 2 \frac{k_B T}{m} \int_0^t ds \int_0^s ds' e^{-\gamma(s-s')} = (*)$$



a két tartomány u.a. $\rightarrow 2$

$$\int_0^s ds' e^{\gamma s'} = \left[\frac{e^{\gamma s'}}{\gamma} \right]_0^s = \frac{e^{\gamma s} - 1}{\gamma}$$

$$(*) = 2 \frac{k_B T}{m} \frac{1}{\gamma} \int_0^t ds (1 - e^{-\gamma s}) = 2 \frac{k_B T}{m} \frac{1}{\gamma} \left[t - \frac{1}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \right]$$

aszimptotikus viselkedés.

$t \ll \frac{1}{\gamma} \quad (\gamma t \ll 1) \quad e^{-\gamma t} = 1 - \gamma t + \frac{1}{2} \gamma^2 t^2$

$\downarrow$ kicsi $\quad$ ez is $\quad$ ez marad

$$\overline{(x(t) - x(0))^2} \approx 2 \frac{k_B T}{m} \frac{1}{\gamma} \frac{1}{2} \gamma^2 t^2 \frac{1}{\gamma} = \frac{k_B T}{m} t^2$$

tipikus elmozdulás $\rightarrow$ ennek a gyöke $\sim t$

$v_0 t \rightarrow$ elmozdulás his időkre v_0 kezd. seb.

$$\hookrightarrow \overline{(v_0 t)^2} = v_0^2 \cdot t^2 = \frac{k_B T}{m} t^2 \quad \checkmark$$

$t > \frac{1}{\gamma} \quad (\gamma t \gg 1)$

$$\overline{(x(t) - x(0))^2} \approx 2 \frac{k_B T}{\gamma m} t \quad \text{lineárisan változik } t\text{-vel, mint diffúzióval}$$

$\rightarrow$ Brown-mozgás diffúziós el-jai: $D = \frac{k_B T}{\gamma m}$

$$m\dot{v} = -\lambda v \rightarrow \dot{v} = -\frac{\lambda}{m} v \Rightarrow \boxed{D = \frac{k_B T}{\lambda}} \quad \text{Einstein-rel.}$$

Mozgékonyság fogalma:

$$m\dot{v} = -\lambda v + f \quad \text{determ. konstans erő}$$

végsebesség: $v = \frac{1}{\lambda} f \quad \frac{1}{\lambda} = \mu = \text{mozgékonyság}$

$\boxed{D = k_B T \mu}$ Einstein-reldob ez is (pl. szil. test, töltéshordozók)

$-\lambda v$: Stokes-tv. determinisztikus fékzőerő

$$\lambda = 6\pi\eta a$$

a : a gömb sugara (gömb alakú részecske)

$$\overline{\Delta x^2} = \frac{k_B T}{3\pi\eta a} \cdot t$$

Szilárd testbeli vezetés $\rightarrow$ töltéshordozók mozognak, szennyezést $\rightarrow$ ütközések véletlenszerűen.

Brown-mozgás $\rightarrow$ cl. vezetés leírása

$$\dot{v} = -\gamma v + \frac{E}{m} + \underbrace{\frac{CE(t)}{m}}_{\text{külső cl. tőlbeli gőn}}$$

stac. állapot

$$v(t) = \int_{-\infty}^t dt' e^{-\gamma(t-t')} \left(\frac{E(t)}{m} + \frac{CE(t')}{m} \right)$$

$$\overline{v(t)} = \frac{e}{m} \int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-t')} E(t') dt'$$

$$\bar{j} = e \bar{v} n \quad \uparrow \text{ sűrűség}$$

$$\text{áramsűr.} = \frac{ne^2}{m} \int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-t')} E(t') dt'$$

vezetőképesség: $\sigma(t) = \frac{ne^2}{m} e^{-\gamma t} \quad (t > 0)$

$$\sigma(\omega) = \frac{ne^2}{m} \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} e^{i\omega t} dt = \frac{ne^2}{m} \frac{1}{\gamma - i\omega} = \frac{ne^2}{m} \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 - \frac{i\omega}{\gamma}}$$

Drude-elm.

ennyi ideig emlékszik a rendszer a múltbeli hatásokra. $\frac{1}{\gamma} = \tau$ relaxációs idő

stac. állapot $E=0$

$$\overline{j(t) j(0)} = \left(\frac{e}{m} \overline{v_i(t)} \right) \left(\frac{e}{m} \overline{v_j(0)} \right) e^2 = \frac{e^2}{m^2} \overline{v_i(t) v_j(0)} = e^2 n \overline{v(t) v(0)} =$$

tölt.hord.h. sűrűsége $\delta_{ij} \overline{v(t) v(0)}$

$$= e^2 n \frac{k_B T}{m} e^{-\gamma(t-t')} \quad \text{drum korr. fgv. exp. lefutásuk}$$

$$= \frac{e^2 n}{m} \frac{1}{\gamma} k_B T \gamma e^{-\gamma(t-t')} = 2 \frac{e^2 n}{m} \frac{1}{\gamma} k_B T \frac{\gamma}{2} e^{-\gamma(t-t')}$$

$\gamma \rightarrow \infty (\tau \rightarrow 0 \text{ gyors relaxáció})$

$\hookrightarrow \delta(t-t')$ mindenütt $\rightarrow 0$ kivéve $t=t'$ és az $\int$ -ja 1... $\rightarrow$

→ $e^{-\gamma|t|} \cdot \frac{\gamma}{2} \quad \gamma \rightarrow \infty \Rightarrow \delta$

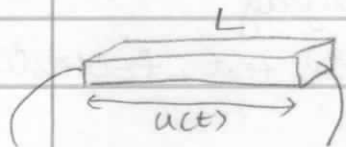


a rel. idő rövid akkor az időhöz képest, amire a vizsgálatokat végezzük

alacsony frekvencián: ($\omega \ll \gamma$)

$$\overline{j(t)j(0)} \approx 2\sigma_0 k_B T \delta(t)$$

↑ egyenáramú vez. képsége $\frac{ne^2}{m}$



$$\frac{u(t)}{L} = \text{teljesítmény} = \frac{j(t)}{\sigma_0}$$

$$u(t) = L \cdot \frac{j(t)}{\sigma_0}$$

$$\overline{u(t)u(0)} = \frac{L^2}{\sigma_0^2} \overline{j(t)j(0)} = \frac{L^2}{\sigma_0^2} 2\sigma_0 k_B T \delta(t) = \dots$$

áramfluktuációk $\Rightarrow$ feszültségfluktuációk

$$P = \frac{L}{A \sigma_0} \rightarrow (*) = LA^2 \frac{L}{A \sigma_0} k_B T \delta(t) = \underline{\underline{2V R k_B T \delta(t)}}$$

Nyquist-zaj ő származik ki

Johnson-zaj ő mérte ki

felír a spektrum alacsony frekvencián.

2.) Brown-mozgás potenciálban $\rightarrow$ lineáris oszcillátor T hőm. - ű környezetben.

$$\dot{x} = \frac{p}{m}$$

$$U(x) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2$$

$$\dot{p} = -m\omega_0^2 x - \gamma p + \xi \quad \xi\xi = 2\gamma m k_B T \delta(t-t')$$

hom. egy. $\rightarrow$ csillapodás $\rightarrow$ lecsengés $\rightarrow$ inhom $\rightarrow$ stac. mo.

Stac. állap. F. tr. módszer P/m p kiküszöbölésével ilyen lesz a mozg. egyenlet.

$$\ddot{x} = \frac{\dot{p}}{m} = -\omega_0^2 x - \gamma \dot{x} + \frac{\xi}{m}$$

$$+ \frac{f(t)}{m} \quad \text{def. m. erő (kényszerrezgés)}$$

Fourier - tr.: $(i\omega)^2 x_\omega = -\omega_0^2 x_\omega + \gamma i\omega x_\omega + \frac{\xi_\omega}{m} + \frac{f_\omega}{m}$

$$x_\omega = \frac{\xi_\omega/m + f_\omega/m}{\omega_0^2 - i\omega\gamma + (i\omega)^2}$$

válaszfgv: $\bar{x}_\omega = \frac{1}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - i\omega\gamma - \omega^2} f_\omega$

$X(\omega)$ lin. oszc. válaszfgve.

kv. oszc. $\rightarrow$ ott más (pluszok: $\pm \omega_0$) $\rightarrow$ az volt volna a körny-től, a zavarok ellenére

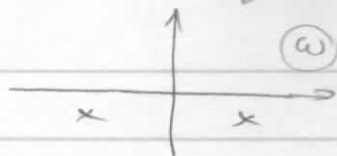
most nem

$\hookrightarrow$ állandó kh. a T hőm. környezetben $\rightarrow$ csillapítás

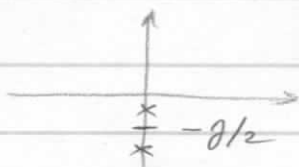
pólusok most: $\omega^2 + i\gamma\omega - \omega_0^2 = 0$

$$\omega = \frac{-i\gamma \pm \sqrt{-\gamma^2 + 4\omega_0^2}}{2} = -\frac{i\gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

• $\omega_0^2 > \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2$



$\omega_0^2 < \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2$



$$= -\frac{i\gamma}{2} \pm i\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$$

túlcsillapított oszcillátor

$$\overline{x(t) x(t')} = C(t-t')$$

$$C(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')} \tilde{C}(\omega) = \text{ha egyvált. - nál tekintem}$$

de tekinthetünk 2 változósnál is:

$$C(t-t') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} e^{-i\omega t} e^{-i\omega' t'} C(\omega, \omega')$$

2x F.tr.

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} e^{-i\omega t} e^{-i\omega' t'} \tilde{C}(\omega) \cdot 2\pi \delta(\omega + \omega')$$

$$C(\omega, \omega') = 2\pi \delta(\omega + \omega') \tilde{C}(\omega) \quad \text{bármilyen korr. fgv-re igaz}$$

↳ véletlen cs korr. fgv. $\Xi(t) \Xi(t') = 2\gamma m k_B T \delta(t-t')$
 F.tr. egyenlően ($\tilde{C}$ -nál megf.)

$$2\gamma m k_B T 2\pi \delta(\omega + \omega') = \Xi_{\omega} \Xi_{\omega'}$$

$$(F(\delta) = 1)$$

$$\overline{x_{\omega} x_{\omega'}} = \frac{1}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2} \frac{\Xi_{\omega}}{m} \frac{\Xi_{\omega'}}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - i\gamma\omega' - \omega'^2} =$$

($\neq 0$)
 nincs külső
 hatás

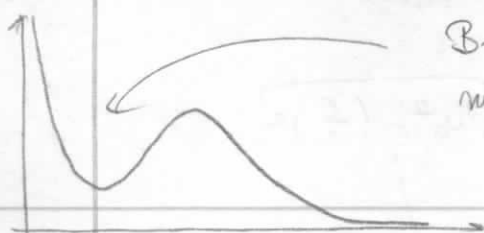
$$= 2\pi \delta(\omega + \omega') \frac{2\gamma m k_B T}{|\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2|^2} \frac{1}{m^2}$$

δ miatt a két $\frac{1}{\dots}$ egymás konjug. párja, ja pont $\overline{x(t) x(0)}$ F.tr.-ja

$$X = \frac{1}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2} \quad \text{Fluktuáció - disszipáció tétel teljesül}$$

$$\frac{2k_B T}{m} \text{Im} X = \frac{2k_B T}{\omega} \frac{1}{m} \frac{\gamma\omega}{|\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2|^2}$$

• ha megkövetelünk a flukt-diss. tétel ilyen formáját $\Rightarrow$ a véletlen erő korr. fgv. alakja olyan lesz, mint fent (és fordítva)



Brown-morg, ebben a pot-ban
meny, idő alatt jön ki olyan fluktuációval.