

$$f(x') v(x') P(x' | x_0)$$

másként:

ez jön ki a határokon a deriváltjával együtt, így jó az előbbi h.f.

$$g(x_0) = \int f(x) \left(P(x, t | x_0) + \frac{\partial P(x, t | x_0)}{\partial t} \cdot \tau + g(\tau) \right) dx$$

$f(x)$ chainak meg kell egyeznie:

$$\left[\frac{\partial P(x, t | x_0)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(v(x) P(x, t | x_0) \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\sigma^2(x)}{2} P(x, t | x_0) \right) \right]$$

Fokker-Planck egyenlet

határfeltétel: természetes h.f., vagyis:

a határokon az eloszlásf. eltűnik.

kezdeti feltétel: $P(x, t=0 | x_0) = \delta(x - x_0)$

$$P_1(x, t) = \int P(x, t | x') p_1(x', t=0) dx'$$

$\hookrightarrow \Rightarrow p_1$ is kielégíti az egyenletet.

$P_1(x, t=0) = p_0(x)$. (tehát elég h. felt.)

$$\frac{\partial P_1(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(v(x) P_1(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sigma^2(x)}{2} P_1(x, t) \right) \right)$$

Integrálás

$\int f(x) \cdot m$ -áram sűrűsége

Heisenberg - folyamat: $\psi(x) = 0$.

$$\sigma^2(x') = 2D \quad \text{nem függ } x\text{-től.}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad \text{diffúzió egyenlete}$$

ans:

$$\Phi(z) = e^{-z^2}$$

$$\Phi(z, t=0) = \int dx e^{zx} \delta(x-x') = e^{zx'}$$

def merint $\Phi(z, t) = \int dx e^{zx} P(x, t | x')$

egyenletbe téve...

$$\boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial t} = D z^2 \Phi}$$

ez már megoldható ODE!

metv. $\int_{\Phi(t=0)}^{\Phi(t)}$

$$\int_{\Phi(t=0)}^{\Phi(t)} \frac{d\Phi}{\Phi} = \int_0^t D z^2 dt \rightarrow \ln \frac{\Phi(z, t)}{\Phi(z, 0)} = D z^2 t$$

$$\Rightarrow \Phi(z, t) = \underbrace{\Phi(z, 0)}_{e^{zx'}} e^{D z^2 t} = e^{zx' + D z^2 t}$$

2 kumuláció
kül. 0-tól!

Ez Gauss...

$$\Phi(z, t) = e^{zx' + \frac{\sigma^2 t}{2} z^2}$$

$$P(x, t | x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{2\sigma^2 t}\right)$$

Bármely x -től
indulva u. az a
móvekményelos-
lás bapjib.

"független móvekményű folyamat"

Specialis Wiener folyamat:

$$W_t = X_t - X_0 \text{ (mővelmény)}$$

$$p(w, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{w^2}{2\sigma^2 t}\right)$$

$$\overline{W_t} = 0 \text{ ill. } \overline{W_t^{2n+1}} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\overline{W_t^2} = \sigma^2 t \quad ; \quad \overline{W_t^{2n}} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) (\sigma^2 t)^n$$

máskor
hatványok.

Korrelációs függvény:



$$\overline{W_t W_{t'}} = ?$$

$$\overline{W_{t'}(W_t - W_{t'})} = \overline{W_{t'}(W_t - W_{t'})} = 0 \cdot 0 = 0 \text{ egyenl.}$$

// figyelj! $t > t'$ kell ehhez...

$$\overline{W_t W_{t'}} - \overline{W_{t'}^2} \text{ másként} \rightarrow \overline{W_{t'} W_t} = \overline{W_{t'}^2} = \sigma^2 t'$$

$$\boxed{\overline{W_t W_{t'}} = \sigma^2 \min(t, t')}$$

Gauss-típusú fehérzaj:

Gauss-folyamat := csak az első 2 kumuláns számít)

$$\mathbb{B}_t \quad \overline{\mathbb{B}_t} = 0; \quad \overline{\mathbb{B}_t \mathbb{B}_{t'}} = \sigma^2 \delta(t-t') \leftarrow \text{"frekvencia def."}$$

általánosított folyamat: a kumulánsok dieret-
lőivel.

$$\overline{Y_t} = \int_0^t ds \mathbb{B}_s \quad (\text{ilyen folyamatot nézzünk})$$

$$Y_{t=0} = 0 \quad (\text{látható})$$

$$\overline{Y_t} = 0 \quad (ez is)$$

$$\overline{Y_t Y_{t'}} = \int_0^t ds \int_0^{t'} ds' \overline{\mathbb{B}_s \mathbb{B}_{s'}} = \int_0^t ds \int_0^{t'} ds' \delta(s-s') \sigma^2$$

$$\underline{t > t'}: \quad \overline{Y_t Y_{t'}} = \int_0^{t'} ds' \sigma^2 = \sigma^2 t' \quad \left. \begin{array}{l} \overline{Y_t Y_{t'}} = \sigma^2 \min(t, t') \\ \text{mint a Wiener.} \end{array} \right\}$$

$t < t'$: ugyanígy...

$$Y_t \equiv W_t$$

A fehérzaj a Wiener-folyamat deriválóján. (egyszerű def.)
mértékegysége

Sztoczasztikus differenciálegyenletek egy típusa:

Langevin - egyenlet.

(Brown - mozgás...)



Stokasztikus: $\downarrow$ véletlen erő.

$$m\ddot{x} = -\lambda \dot{x} + F(t)$$

$$\text{Felt. } \overline{F(t)} = 0 \text{ és } \overline{F(t)F(t')} \sim \delta(t-t')$$

(fehérzaj)

az általánosítottjuk.

$$\dot{X}_t = \nu(X_t) + \xi_t \quad \text{Langevin}$$

$$\overline{\xi_t} = 0, \quad \overline{\xi_t \xi_{t'}} = \sigma^2 \delta(t-t')$$

novelvény: $dX_t = X_{t+dt} - X_t = \nu(X_t)dt +$ *

$$+ \int_t^{t+dt} dt' \xi_{t'} = dW_t = W_{t+dt} - W_t$$

viszont az Wiener.

All: az X_t Markov - folyamat, és diffúzió.

Biz: Markov *-ból látszik

Diffúzió:

$$dX_t = \nu(X_t)dt + \underbrace{dW_t}_0$$

$$d\overline{X_t^2} = \underbrace{(\nu(X_t)dt)^2}_{\sim dt^2} + \underbrace{d\overline{W_t^2}}_{\sim dt} + 2 \underbrace{(\nu(X_t)dt dW_t)}_{\sim dt^{3/2}}$$

$$\overline{dX_t^2} = \sigma^2 dt. \quad \boxed{\text{qed}}$$

$$\overline{dX_t^3} = 0(dt)$$

Fokker-Planck:

↙ mest x-függ.

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (v(x)P) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

Ha σ^2 függ x-től Langevinben is:

$$\dot{X}_t = v(X_t) + \sigma(X_t) \mathcal{S}(t)$$

$$\mathcal{S}(t)\mathcal{S}(t') = \delta(t-t')$$

$$dX_t = v(X_t)dt + \int_0^t ds \sigma(X_s) \mathcal{S}(s)$$

~nem jól definiált Riemann-mal...

Mi $\int_0^t \sigma(s) dt$ -m? (?)

Az eredmény függ attól, hogy melyik intervallumból vesszük $\sigma - t$.

Ita - értelmezés: $\sigma(X_t) dW_t$ kell ~~helyett~~ $\int$ helyett

Stratonovich: $(\sigma(X_t) + \sigma(X_{t+dt})) \frac{1}{2} dW_t$ kell.

A 2 értelmezés 2féle FP egyenletet ad.

Több vektorra ált: csak formalizmus át kell írni.

8. öbádás

Féle vektoros eset:

$$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \quad p(\underline{x}, t)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\underbrace{v_i p - \sum_j D_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j}}_{J_i} \right)$$

langevin: $\dot{x}_i = v_i(x) + \xi_i \quad \leftarrow \begin{matrix} \overline{\xi_i t} = 0 \\ \overline{\xi_i t \xi_j t'} = 2 D_{ij} \delta(t-t') \end{matrix}$

szimmm. poz. def.

Stac. megoldás $p_0(x) = e^{-\Phi(x)}$

1 vektoros: $\frac{\partial}{\partial x} J(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left(v(x) p_0(x) - D \frac{\partial p_0(x)}{\partial x} \right) = 0$

$$J(x) \stackrel{\uparrow}{=} \text{átl} = 0 \quad v(x) p_0(x) = D \frac{\partial p_0(x)}{\partial x}$$

$$\boxed{p_0(x) \rightarrow 0, \text{ ha } |x| \rightarrow \infty}$$

$$\frac{1}{D} \int v(x) dx = \int \frac{dp_0}{p_0} = \ln p_0 - \ln C \Rightarrow p_0(x) = C e^{\frac{1}{D} \int v(x) dx}$$

$$\Rightarrow -\Phi(x) = \frac{1}{D} \int v(x) dx + \ln C$$

$$v(x) e^{-\Phi(x)} - D e^{-\Phi(x)} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = 0 \Rightarrow v(x) = -D \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

Több változóval: $-\sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = 0$

$$F_i = u_i p - \sum_j D_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j}$$

$$p = e^{-\phi(x)} \quad \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u_i e^{-\phi} + \sum_j D_{ij} e^{-\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) = 0$$

$$= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u_i + \sum_j D_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) e^{-\phi} = 0$$

Egyszerű konstrukció, amikor teljesül:

① $F_i \equiv 0$ a stat. állapothoz (ekkor $\text{div } F = 0$)

$$u_i = - \sum_j D_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}$$

Langewin: $\dot{x}_i = - \sum_j D_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} + \sum_j \dot{x}_j \left| \begin{array}{c} \overline{\dot{x}}_{it} = 0 \\ \sum_{j,t} \dot{x}_j \dot{x}_t = 2D \delta(t-t') \end{array} \right.$

determinantikus egyenlet:

$$\dot{x}_i = \sum_j D_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \quad ; \quad x_i(t) \text{ megoldás}$$

$$\frac{d}{dt} \phi(x(t)) = \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \dot{x}_i = - \sum_{i,j} D_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \leq 0$$

Ha m.o. minden csökken

az kvadrátikus alak!

→ a m.σ. Φ minimumát futja elböl a m.σ. ham-
tikus nem „loki ki”.

(b.) $r \frac{d}{dt} x_i = v_i + \sum_j D_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}$

↑
stationarius drift: ~~$\mathbb{E} v_i$~~

$\mathbb{E} v_i = r_{si} e^{-\Phi} = r_{si} p_0(x)$ konvektív áram.

~~$\mathbb{E} v_i$~~ kell: $\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (r_{si} e^{-\Phi}) = 0$ *

PL: $r_{si} = \sum_j Q_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}$; $Q_{ij} = -Q_{ji}$ antiszimmetrik.

*-ba:

$$\sum_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left(Q_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) e^{-\Phi} = 0$$

$$= \sum_{ij} Q_{ij} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} e^{-\Phi} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} e^{-\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) = 0$$

térnyelég jó...

antiszimmetrik + szimmetrik m.σ. m.σ. szorzatainak spúrja 0

determinantibus egyenlet:

$$\dot{x}_i = \sum_j Q_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \sum_j D_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}$$

$x_i(t)$ m.σ. ...

$$\frac{d}{dt} \Phi(x(t)) = \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \dot{x}_i = \underbrace{\sum_{ij} Q_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}}_{* \quad 0, \text{ mert } \text{Tr}(m. \cdot \text{and.}) = 0} -$$

$$- \sum_{ij} D_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \leq 0$$

↑
mert D + definit.

* miatt $\sum_{ij} Q_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}$ konzervatív mozgást definiál,
a másik pedig dissipatív mozgást.

Ornstein-Uhlenbeck folyamat:

$$V(x) = -\gamma x \quad ; \quad \dot{x} = -\gamma x + \xi$$

$$\text{F-P: } \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (-\gamma x p) + D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad \left| \begin{array}{l} \bar{\xi}_t = 0 \\ \overline{\xi_t \xi_{t'}} = 2D \delta(t-t') \end{array} \right.$$

stac. eloszlás: $p_0 = e^{-\Phi}$

$$V(x) = -D \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Rightarrow -\gamma x = -D \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$\Phi = \frac{\gamma}{D} \frac{x^2}{2} - \ln C \Rightarrow \left| p_0(x) = C e^{-\frac{\gamma}{D} \frac{x^2}{2}} \right. \quad \text{Gauss-eloszlás.}$$

$$\bar{x} = 0 \quad \bar{x^2} = \frac{D}{\gamma}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (-\gamma x p) + D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

Hatásföldétel: $p(x, t) \rightarrow 0$, ha $|x| \rightarrow \infty$.

Kerdföld $\therefore p(x, t=0 | x') = \delta(x-x')$

generátorf. $\phi(z, t) := e^{\overline{z}x} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\overline{z}x} p(x, t | x') dx$

$$\int e^{\overline{z}x} \frac{\partial p}{\partial t} dx = \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

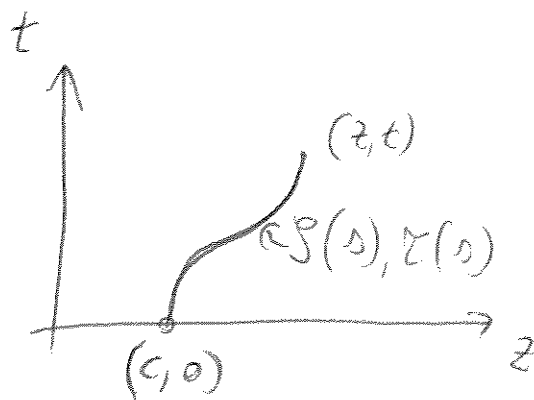
$$\int e^{\overline{z}x} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} dx = 2\text{-rer parc. int} = \overline{z}^2 \int e^{\overline{z}x} p dx = \overline{z}^2 \phi$$

$$\int e^{\overline{z}x} \frac{\partial}{\partial x} (x p) dx = -\overline{z} \int e^{\overline{z}x} x p dx = -\overline{z} \frac{\partial \phi}{\partial \overline{z}}$$

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\overline{z} \frac{\partial \phi}{\partial \overline{z}} + D \overline{z}^2 \phi}$$

ez már első-
rendű...

$$\phi(z, t=0) = \int e^{\overline{z}x} \delta(x-x') dx = e^{\overline{z}x'} \quad (\text{kerdföld})$$



s: param
S, z: koordináták

$\bar{\Phi}(s) := \phi(S(s), z(s))$
enne írását az
egyenletet

$$\frac{d\bar{\Phi}}{ds} = \frac{\partial \phi}{\partial \overline{z}} \frac{\partial S}{\partial s} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Tfr. } ① \frac{\partial \tau}{\partial s} &= 1. \\ ② \frac{\partial \gamma}{\partial s} &= \gamma \gamma \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \gamma \gamma + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \uparrow \overset{\gamma^2(s)}{\bar{\Phi}(s)}$$

* are equal
minus...

$$\frac{d\bar{\Phi}}{\bar{\Phi}} = D \gamma^2(s) ds$$

* - but hell megoldani, hogy ezt megkapjuk.

$$①: \tau(s) = s \quad 0 \leq s \leq t$$

$$\tau(0) = 0 \quad \tau(t) = t$$

$$②: \gamma(s) = \gamma(0) e^{\gamma s} = C e^{\gamma s}$$

$$\gamma(t) = C e^{\gamma t} = z \Rightarrow C = z e^{-\gamma t}$$

↳ integrálás...

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d\bar{\Phi}}{\bar{\Phi}} &= D \int_0^t \gamma^2(s) ds = D \int_0^t C^2 e^{2\gamma s} ds = \\ &= D C^2 \left[\frac{e^{2\gamma s}}{2\gamma} \right]_0^t = \frac{D C^2}{2\gamma} (e^{2\gamma t} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\Phi}(0)}^{\bar{\Phi}(t)} \frac{d\bar{\Phi}}{\bar{\Phi}} &= \ln \frac{\bar{\Phi}(t)}{\bar{\Phi}(0)} \Rightarrow \sqrt{\bar{\Phi}(t)} = \sqrt{\bar{\Phi}(0)} = \sqrt{\bar{\Phi}(0)} = \dots \\ &= \ln \frac{\Phi(z, t)}{\Phi(z, 0)} = \frac{D C^2}{2\gamma} (e^{2\gamma t} - 1) = \dots \end{aligned}$$

$$= \frac{D}{2\gamma} z^2 (1 - e^{-2\gamma t})$$

$$\phi(0,0) = e^{cx'} = e^{zx'e^{-\gamma t}}$$

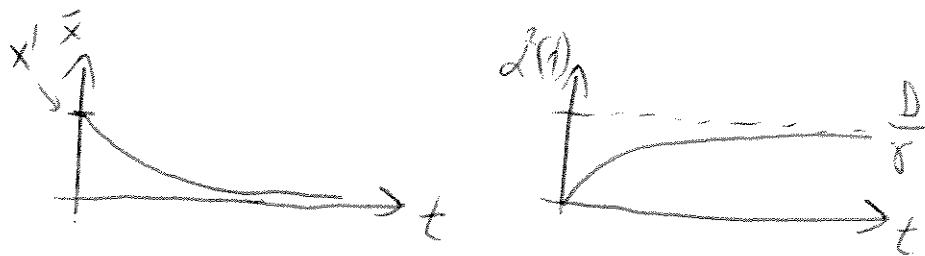
$$\phi(z,t) = e^{zx'e^{-\gamma t} + \frac{D}{2\gamma} z^2 (1 - e^{-2\gamma t})} \quad \text{és nincs több
buzuláns...}$$

$P(x,t|x')$ Gauss; ehébe:

$$\bar{x} = x'e^{-\gamma t} \quad \bar{x}^2 - \bar{x}^2 = \frac{D}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \equiv \alpha^2(t)$$

$$P(x,t|x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha^2(t)}} \exp\left(-\frac{(x - x'e^{-\gamma t})^2}{2\alpha^2(t)}\right)$$

$\bar{x}$ 0-hoz tartó kezdeti feltételtől főlénül (?)



korreláció fu. stat. állapotban:

$$\overline{X_t X_0} = \int dx dx' \underbrace{P_2(x,t|x'0)}_{P(x,t|x')P_0(x')} xx' =$$

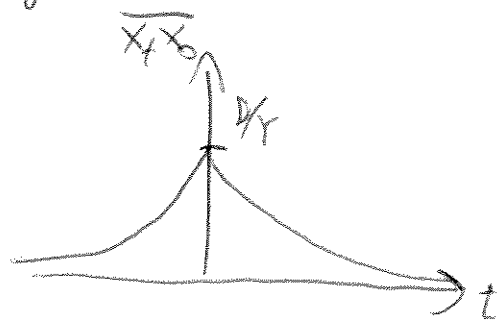
$(t > 0)$

$$= \int dx' x' \left[\underbrace{\int dx x P(x,t|x')}_{x'e^{-\gamma t}} \right] P_0(x') = e^{-\gamma t} \underbrace{\int dx' x'^2 P_0(x')}_{D/\gamma}$$

$$\overline{X_t X_0} = \frac{D}{\gamma} e^{-\gamma t}$$

$$t < 0: \overline{X_t X_0} = \overline{X_0 X_{-t}}$$

Tedniölaps t -re. $\overline{X_t X_0} = \frac{D}{\gamma} e^{-\gamma |t|}$



Rénecske mozgása hőterályaiban:
(Brown-mozgás potenciálban)

x koordinát, p impulzus. (2 m. változó) ← kétféle.

Langewin: $\dot{x} = \frac{p}{m} \quad \dot{p} = -\frac{\partial U}{\partial x} - \gamma p + \xi(t)$

hht a hőterályul.

egyensúlyi eloszlás: $p_0(x, p) \approx e^{-\mathcal{H}(p, x) \frac{1}{k_B T}}$

$$\mathcal{H}(x, p) = \frac{p^2}{2m} + U(x)$$

$$\Phi(x, p) = \frac{\mathcal{H}(x, p)}{k_B T}$$

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = k_B T \frac{\partial \Phi}{\partial p} \quad ; \quad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} - \gamma m \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} + \xi =$$

$$= -k_B T \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \gamma m k_B T \frac{\partial \Phi}{\partial p} + \xi$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & k_B T \\ -k_B T & 0 \end{pmatrix}}_{\text{antimimm.} \rightarrow \text{konervatív mozgás}} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\gamma m k_B T \end{pmatrix}}_{\text{mimm.} \rightarrow \text{dissipatív mozgás}} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix}$$

A $\overline{\xi(t)\xi(t')} = 2\gamma m k_B T \delta(t-t')$ birtokaitja, hogy az egyenlehi dőlés a $e^{-\phi}$ len.

"Einstein - reláció". $\boxed{D = \gamma m k_B T}$
mobilitási együttható.

→ ezután a Langevinekkel is dolgozhatunk.

13 dőlés

$$\dot{x} = \frac{p}{m} \quad \dot{p} = -\frac{\partial u}{\partial x} - \gamma p + \xi \quad (\text{Langevin})$$

$$\overline{\xi_t} = 0 \quad ; \quad \overline{\xi_t \xi_{t'}} = 2\gamma m k_B T \delta(t-t')$$

$$\begin{aligned} \text{F-P.:} \quad \frac{\partial P}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{m} P \right) - \frac{\partial}{\partial p} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \gamma p \right) P \right] + \\ & + \gamma m k_B T \frac{\partial^2 P}{\partial p^2} \quad P(x, p, t) \end{aligned}$$

Teilenerwartungswert:

$$\dot{p} \approx 0 \Rightarrow p = \left(-\frac{\partial U}{\partial x} + \xi \right) \frac{1}{\gamma}$$

$$\dot{x} = -\frac{1}{\gamma m} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\xi}{\gamma m} \quad (\text{Langevin})$$

F-P.: $P = P(x, t)$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\gamma m} \frac{\partial U}{\partial x} P \right) + \frac{1}{\gamma m} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} k_B T$$

2. ord.: $-U=0$ (Brown-motion) [1]

$$-U = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \quad [2]$$

[1]: $m\ddot{x} = -\lambda \dot{x} + \xi$ Stokes-Formel.

eigenständiger Prozess: Maxwell-fälle selbst.

$$P_0(v) = C e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

$$\overline{\xi(t)} = 0; \quad \overline{\xi(t)\xi(t')} = 2\lambda k_B T \delta(t-t')$$

Erkenntnis: es gibt Ornstein-Uhlenbeck Prozess.

$$\dot{x} = -\frac{\lambda}{m} x + \frac{\xi}{m} \quad (\text{Brown})$$

$$\dot{x} = -\gamma x + \xi$$

(O-U Prozess)

} ohne
hell
wenn

$$\gamma \leftrightarrow \lambda/m$$

$$D \leftrightarrow \lambda k_B T \frac{1}{m^2}$$

$$e^{-\frac{\gamma}{D} x^2 \frac{1}{2}} \leftrightarrow$$

$$e^{-\frac{\lambda m^2 v^2}{m^2 \lambda^2 \tau^2}}$$

(eredmény)

Differenllet megoldás (formálisan):

$$\dot{v} = -\frac{\lambda}{m} v + \frac{\xi}{m} \quad (\text{tph } \xi \text{ jól viselkedik})$$

homogén rën ált m.o.: $v(t) = v_0 e^{-\frac{\lambda}{m}(t-t_0)}$

(v_0 a t_0 -beli sebesség)

↑ kezdeti feltételt
csupéntünk bele

'állandó' variálásával...

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{\lambda}{m}(t-t_0)} + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt' e^{-\frac{\lambda}{m}(t-t')} \xi(t')$$

Sebesség átlag:

$$\overline{v(t)} = v_0 e^{-\frac{\lambda}{m}(t-t_0)}$$

(a kezdeti felt. egy
idő után irreleváns lesz)
 $t-t_0 \gg \frac{m}{\lambda}$

Stac. állapot. $t_0 \rightarrow -\infty$.

$$v(t) = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^t dt' e^{-\frac{\lambda}{m}(t-t')} \xi(t')$$

$$2k_B T \delta(v-v')$$

↓

↳ korrelációs fun:

$$\overline{v(t)v(t')} = \frac{1}{m^2} \int_{-\infty}^t ds \int_{-\infty}^{t'} ds' e^{-\frac{\lambda}{m}(t-s)} e^{-\frac{\lambda}{m}(t'-s')} \xi(s)\xi(s') = \dots$$

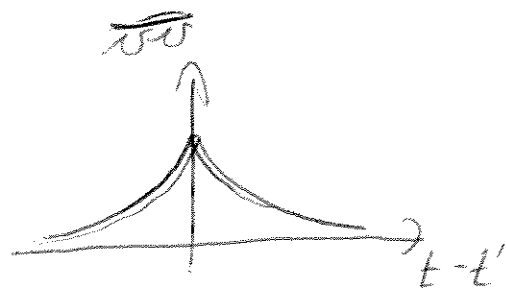
$$= \frac{1}{m^2} (2\lambda k_B T) e^{-\frac{\lambda}{m}(t-t')} \int_{-\infty}^t ds \int_{-\infty}^{t'} ds' e^{\frac{\lambda}{m}(s+s')} \delta(s-s') = \dots$$

Ha $t > t'$: (előbb az s' -integrál...)

$$I = \int_{-\infty}^{t'} ds' 2 e^{-\frac{\lambda}{m}s'} = \left[\frac{e^{-\frac{\lambda}{m}s'}}{-\frac{\lambda}{m}} \right]_{-\infty}^{t'} = \frac{e^{-\frac{\lambda}{m}t'}}{-\frac{\lambda}{m}} = \frac{e^{-\frac{\lambda}{m}t'}}{-\frac{\lambda}{m}}$$

$$= \frac{1}{m^2} \frac{2\lambda k_B T}{-\frac{\lambda}{m}} e^{-\frac{\lambda}{m}(t-t')} = \frac{k_B T}{m} e^{-\frac{\lambda}{m}(t-t')}$$

$$\overline{v(t)v(t')} = \frac{k_B T}{m} e^{-\frac{\lambda}{m}|t-t'|}$$



hisz $t' > t$ -re is jó legyen... (?)

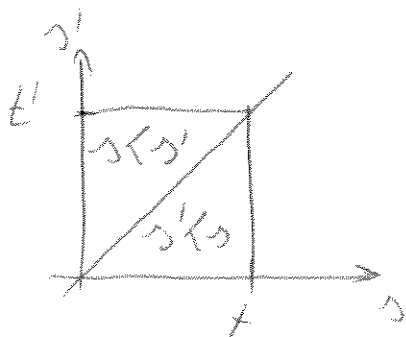
Helyre: $\dot{x} = \frac{p}{m} = v$.

$$x(t) = x(0) + \int_0^t ds v(s)$$

$$\overline{x(t) - x(0)} = 0$$

$$\overline{(x(t) - x(0))^2} = \int_0^t ds \int_0^t ds' \underbrace{v(s)v(s')}_{\frac{k_B T}{m} e^{-\frac{\lambda}{m}|s-s'|}} = *$$

Integrálain
kard:



$s \leftrightarrow s'$ szimmetrikus.

$$\begin{aligned} * &= 2 \cdot \frac{k_B T}{m} \int_0^t ds \int_0^s ds' e^{-\frac{\lambda}{m}s} e^{\frac{\lambda}{m}s'} = 2 \frac{k_B T}{m} \int_0^t ds e^{-\frac{\lambda}{m}s} \left(\frac{e^{\frac{\lambda}{m}s} - 1}{\lambda/m} \right) = \\ &= 2 \frac{k_B T}{m} \frac{m}{\lambda} \int_0^t ds \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}s} \right) = 2 \frac{k_B T}{\lambda} \left[t - \frac{e^{-\frac{\lambda}{m}t} - 1}{-\frac{\lambda}{m}} \right] \end{aligned}$$

$$\overline{(x(t) - x(0))^2} = 2 \frac{k_B T}{\lambda} \left(t - \frac{m}{\lambda} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m} t} \right) \right)$$

$T_{flh} \frac{1}{m} t \gg t$ (homonidö...)

$$\overline{(x(t) - x(0))^2} \approx 2 \frac{p_{BT}}{\lambda} t; \quad D_{diff} = \frac{p_{BT}}{\lambda} \quad (\text{Einstein-relação})$$

$$T_{\text{Pl}} \quad t \ll \frac{m}{\Lambda} \quad (\text{unfreezing bell})$$

$$\left[t - \frac{m}{\lambda} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m} t} \right) \right] \approx t - \frac{m}{\lambda} \left(1 - 1 + \frac{\lambda}{m} t - \frac{1}{2} \frac{\lambda^2 t^2}{m^2} + \dots \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\lambda^2 t^2}{m^2} \frac{m}{\lambda} \Rightarrow \overline{(x(t) - x(0))^2} \approx \frac{k_B T}{m} t^2 = \overline{v_0^2} t^2$$

Tal millapitottag $\leftrightarrow E \gg \frac{m}{A}$

$$m v = -2u + \frac{1}{2}$$

$$v \approx 0 \rightarrow x = v = \frac{\rho}{\lambda}$$

x-re er Wiener-fohjanud,
nah raj van.

$$\frac{\overline{\xi(t)\xi(t')}}{\lambda^2} = \frac{2\lambda k_B T \delta(t-t')}{\lambda^2}$$

$D_{\text{diff}} = \frac{k_B T}{\lambda}$ ugyan az, mint a $\# t \gg$ - határeseteké volt.

mozgási jelenségek:

(független töltéshordozók)

$$\dot{p} = -\frac{p}{\tau} + \xi \quad \text{vagy} \quad m\dot{v} = -\frac{m}{\tau} v + \xi$$

$$\lambda = \frac{m}{\tau} \quad \tau: \text{relaxáció idő} \dots = \frac{m}{A}$$

EM tér: $\dot{p} = -\frac{p}{\tau} + \xi + eE(t)$

$\sqrt{m \cdot \sigma} \quad m\dot{v} = -\frac{m}{\tau} v + \xi + eE(t)$

$$v(t) = \int_{-\infty}^t ds e^{-\frac{t-s}{\tau}} \left(\frac{\xi}{m} + \frac{e}{m} E(s) \right)$$

Áramsűrűség: $j = \sum_i e v_i$

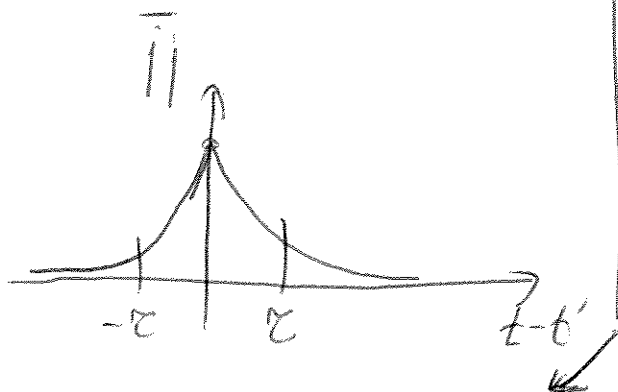
$$\overline{j(t)} = \sum_i e \overline{v_i(t)} = \underbrace{ne}_{\text{sűrűség}} \underbrace{\frac{e}{m}}_{\rightarrow} \int_{-\infty}^t ds e^{-\frac{t-s}{\tau}} E(s) \quad \text{lineáris kapcsolat.}$$

$$\sigma(t) = \frac{ne^2}{m} e^{-t/\tau} \quad (t > 0) \quad \text{Drude - elmélet eredménye.}$$

$$\overline{j(t)j(t')} = \sum_{ij} e^2 \overline{v_i(t)v_j(t')} = \frac{ne^2}{m} k_B T e^{-\frac{|t-t'|}{\tau}}$$

$$\delta_{ij} \overline{v(t)v(t')} = \delta_{ij} k_B T \frac{1}{m} e^{-\frac{|t-t'|}{\tau}}$$

fileneh!



Dirac-delta len, ha:

$$\frac{e^{-\frac{|t|}{\tau}}}{2\tau} \underset{\tau \rightarrow 0}{\sim} \delta(t)$$

Ha...

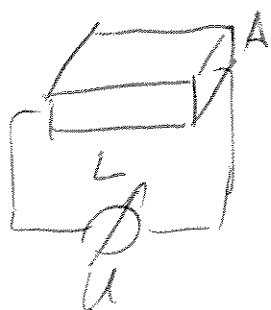
$$|t-t'| \gg \tau \Rightarrow \overline{j(t)j(t')} \approx \frac{ne^2}{m} k_B T 2\tau \delta(t-t') =$$

fehértájszennyezés -

$$= 2k_B T \sigma_0 \delta(t-t') \quad \text{"termikus zaj van az áramban"}$$

Nyquist - zaj.

Mérés: Johnson, féműrtézfolytatásokkal.



$$U = \frac{j(t)}{\sigma_0} L$$

$$\overline{U(t)U(t')} = \frac{L^2}{\sigma_0^2} \overline{j(t)j(t')} = \frac{L^2}{\sigma_0^2} 2k_B T \sigma_0 \delta(t-t') =$$

$$= 2k_B T \underbrace{(LA)}_V \underbrace{\frac{L}{A\sigma_0}}_{R \text{ ellenállás}} \delta(t-t')$$

lin. mc. hőtartályban:

$$\dot{x} = \frac{P}{m}$$

$$\dot{p} = -m\omega_0^2 x - \gamma p + \xi$$

$$\xi(t)\xi(t') = 2\gamma m k_B T \delta(t-t')$$

(Nem lin. egyenlet $\rightarrow$ a Fourier-komponensek közt
lin. viselkedés)

Stac. állapot:

$$\ddot{x} = \frac{\dot{p}}{m} = -\omega_0^2 x - \gamma \dot{x} - \frac{\xi}{m} + \frac{f(t)}{m}$$

determinisztikus kényszerítés: $f(t)$ beletermelés

Fourier: $(-i\omega)^2 X_\omega = -\omega_0^2 X_\omega + \gamma i\omega X_\omega + \frac{\xi_\omega}{m} + \frac{f_\omega}{m}$

$$X_\omega = \frac{\frac{\xi_\omega}{m} + \frac{f_\omega}{m}}{\omega_0^2 - i\omega\gamma - \omega^2}$$

partikuláris m. o.
kannfamaálja-

$$\bar{X}_\omega = \frac{1}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - i\omega\gamma - \omega^2} f_\omega$$

X_ω : valószínűség

γ jelzi, hogy a
m. folyamatosan ener-
giát vesz a környe-
zettel.

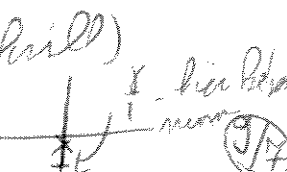
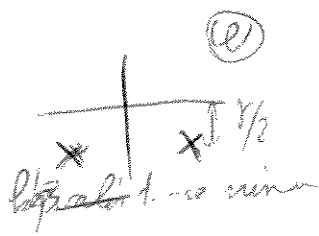
Pólusok: $\omega^2 + i\gamma\omega - \omega_0^2 = 0$

$$\omega = -i\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{-\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \omega_0^2}$$

$$\omega_0^2 > \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2$$

$$\omega_0^2 < \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \text{ (kritikus)}$$

$$\omega_0^2 = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2$$



Korr. fu., ha nincs külső hatás...

$$\overline{X_{\omega} X_{\omega'}} = \frac{1}{m^2} \frac{\overline{\xi_{\omega} \xi_{\omega'}}}{(\omega_0^2 - i\omega\gamma - \omega^2)(\omega_0^2 - i\omega'\gamma - \omega'^2)}$$

$$\overline{\xi_{\omega} \xi_{\omega'}} = ?$$

— ehhez... matek intermezzo...

$$C(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')} \tilde{C}(\omega) = * \text{ (egyváltóris-
nak tekintem)}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\omega \int d\omega' e^{-i\omega t} e^{-i\omega' t'} C(\omega, \omega') \text{ (2 vált.)}$$

$$* = \frac{1}{(2\pi)} \int d\omega \int d\omega' e^{-i\omega t} e^{-i\omega' t'} \tilde{C}(\omega) \delta(\omega' + \omega)$$

Fourier - előállítás egyértelműsége miatt:

$$C(\omega, \omega') = 2\pi \delta(\omega + \omega') \tilde{C}(\omega) \quad \text{az } 0, \text{ ha } \omega' = -\omega.$$

$$\overline{X_{\omega} X_{\omega'}} = \frac{1}{m^2} \frac{1}{(-)(-)} \cdot 2\pi \delta(\omega + \omega') 2\gamma m k_B T =$$

$$= \frac{1}{m^2} \frac{2\pi \delta(\omega + \omega') 2\gamma m k_B T}{(\omega_0^2 - i\omega\gamma - \omega^2)(\omega_0^2 + i\omega\gamma - \omega^2)}$$

$$\overline{X_{\omega} X_{-\omega}} = \frac{1}{m^2} \frac{1}{(-)(-)} 2\gamma m k_B T$$

Pólusok.

x	x
x	x

azok, amik X-nél...

Flukt. dim. tétel érvényesülése:

$$\frac{2k_B T}{\omega} \operatorname{Im} X = \frac{2k_B T}{\omega} \frac{1}{m} \frac{\omega \gamma}{|\omega_0^2 - i\omega\gamma - \omega^2|^2}$$

10. előadás

Hajtörőben lineáris egyenletek:

stac. eloszlás: $P_S(\underline{x}) = e^{-\Phi(\underline{x})}$; $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$

$$\bar{x}_i = 0.$$

Pl.: mikrobakanonikus. $-\Phi(\underline{x}) = \frac{S(\underline{x})}{k_B} \leftarrow \text{entropia}$

kanonikus: $\Phi(\underline{x}) = \frac{F(\underline{x})}{k_B T} \leftarrow \text{szabad-energia}$

hajtörő: $x_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$

Morgan-egyenlet: $\dot{x}_i = \sum_j L_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \xi_i$

$$L_{ij} = L_{ij}^{(a)} + L_{ij}^{(b)}$$

T-fh ξ_i Gauss-típusú zaj: $\bar{\xi}_i = 0$; $\overline{\xi_i(t) \xi_j(t)} = 2L_{ij}^{(a)} \delta(t)$

$L_{ij}^{(a)}$ -nek pozitív nemidefinitnek kell lennie.

Megjegyzés: hogy a stac. eloszlás időfüggő inv. legyen.

stac állapotban:

$$\overline{X_i X_j} = \delta_{ij}$$

hagyományos $\nearrow$ változó.

$$\frac{\int dx_1 \dots dx_n \frac{\partial \phi}{\partial x_i} x_j e^{-\phi(x)}}{\int dx_1 \dots dx_n e^{-\phi(x)}} = ?$$

$$\int dx_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} x_j e^{-\phi} \stackrel{\text{par. int.}}{=} \underbrace{\left[-e^{-\phi} x_j \right]}_{\substack{\text{ifh. 0} \\ \phi=0 \text{ a } \alpha\text{-ben...}}} + \int dx_i e^{-\phi} \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \underbrace{\int dx_i e^{-\phi} \delta_{ij}}_{\delta_{ij}}$$

Többi változó szerint: $\rightarrow$ jobb oldal a nembőlő len,
a bal megg δ_{ij} -be... QED

Hőtűbörös-invariancia:

- a mozgásegyenlet nem invariáns (mivel mtochaordikus)
- a stac állapotot megköveteljük.

Korreláció fu.-ek: $\overline{X_i(t) X_j(0)} = \epsilon_i \epsilon_j \overline{X_j(0) X_i(-t)} = \text{inv!}$
 $= \epsilon_i \epsilon_j \overline{X_j(t) X_i(0)}$ ennek teljesülése kell a megoldásokban.

Ha a t -ben érvényes:

$$\overline{\dot{X}_i(t) X_j(0)} = \epsilon_i \epsilon_j \overline{\dot{X}_j(t) X_i(0)}$$

mozgásegyenlet: $\sum_p L_{ip} \overline{X_p(t) X_j(0)} + \overline{\dot{X}_i(t) X_j(0)} = \dots$

$$= \epsilon_i \epsilon_j \sum_l L_{jl} \overline{X_l(t) X_i(0)} + \overline{S_j(t) X_i(0)}$$

$$\text{If } t > 0 \Rightarrow \overline{S_i(t) X_j(0)} = \underbrace{\overline{S_i(t)}}_0 \overline{X_j(0)} = 0$$

A z az korábbi időpillanatra nem hat.

$$\underline{t \rightarrow 0} : \sum_l L_{il} \underbrace{\overline{X_l X_j}}_{\delta_{lj}} = \sum_l L_{jl} \underbrace{\overline{X_l X_i}}_{\delta_{li}} \epsilon_i \epsilon_j$$

$$\boxed{L_{ij} = \epsilon_i \epsilon_j L_{ji}}$$

Onsager - relációk

Ha $\epsilon_i \epsilon_j = 1$, akkor $L_{ij} = L_{ji}$

Ha $\epsilon_i \epsilon_j = -1$, akkor $L_{ij} = -L_{ji}$

$\epsilon_i = 1$	$\epsilon_j = -1$	
nimm.	antim.	$\epsilon_i = 1$
antim.	nimm.	$\epsilon_j = 1$

így rendszer a változhat...

Vagyis $L_{ij}^{(1)} = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{///} & \circ \\ \hline \circ & \text{///} \\ \hline \end{array} \quad L_{ij}^{(2)} = \begin{array}{|c|c|} \hline \circ & \text{///} \\ \hline \text{///} & \circ \\ \hline \end{array}$

A z az korrelációját a szimmetrikus nem határozta meg.
(Mágneses térben: $L_{ij}(H) = \epsilon_i \epsilon_j L_{ji}(-H)$)

Sztochasztikus mező:

hővezetés, energiátáransport.

$e(r, t)$: energiasűrűség.

egyensúlyi állapotban: $e(r, t) = e_0$.

kontinuitás: $\frac{\partial e(r, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot j_e(r, t)$.

$$j_e = -D_T \nabla e(r, t) \quad \left| \begin{array}{l} \text{A nagyobb sűrűségű helyről} \\ \text{áramlik a kis sűrűségű felé.} \end{array} \right.$$

(↑ hődiffúziós áh.)

$$\frac{\partial e(r, t)}{\partial t} = D_T \Delta e(r, t)$$

$$e(r, t) = S(r, t) u(r, t) \quad \text{egységnyi tömeg energiája.}$$

$$S(r, t) \approx S_0.$$

$$du = c_p dT + \left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)_T dp \quad \leftarrow dp \approx 0 \quad \text{'állandó nyomás.}$$

$$S_0 c_p \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = D_T S_0 c_p \Delta T(r, t)$$

$$\text{Hővezetési - egyenlet: } \left[\frac{\partial T}{\partial t} = D_T \Delta T \right] \quad \left. \vphantom{\frac{\partial T}{\partial t}} \right\} D_T = \frac{\lambda}{S_0 c_p}$$

$$\text{Hőáram sűrűség: } j_e = - \underbrace{D_T S_0 c_p}_{\lambda} \nabla T$$

λ . hővezetési együttható.

Ebbe illesztünk fluktuációkat. ↓

$$j_e(r, t) = -D_T \nabla e(r, t) + \underline{S}(r, t)$$

$$\text{Legyen } \underline{S} \text{ Gauss - zaj!} \quad \overline{S_\alpha(r, t)} = 0$$

$$\overline{S_\alpha(r, t) S_{\alpha'}(r', t')} = 2A \delta_{\alpha\alpha'} \delta(r-r') \delta(t-t') \quad \text{időben és térben fehérzaj.}$$

(10/3)

$\delta_{\alpha\alpha'}$: isotrop horeg miatt.

$$\frac{\partial e(r, t)}{\partial t} = D_T \Delta e(r, t) - \nabla \cdot \underline{S}$$

Fourier: $\dot{e}_q(t) = -D_T q^2 e_q(t) - i \underbrace{q \cdot \underline{S}_q(t)}$

$$-i \sum_{\alpha} q_{\alpha} S_{\alpha q}(t) = S_q(t)$$

$$-i \sum_{\alpha} q_{\alpha} \overline{S_{\alpha q}(t)} = 0 \dots$$

$$\overline{\left(-i \sum_{\alpha} q_{\alpha} S_{\alpha q}(t) \right) \left(-i \sum_{\alpha'} q'_{\alpha'} S_{\alpha' q'}(t') \right)} = - \sum_{\alpha \alpha'} q_{\alpha} q'_{\alpha'} \underbrace{\overline{S_{\alpha q}(t) S_{\alpha' q'}(t')}} =$$

$$\overline{S_{\alpha}(r, t) S_{\alpha'}(r', t')} = 2A \delta_{\alpha\alpha'} \delta(r-r') \delta(t-t')$$

1.1

$$\hookrightarrow 2A \delta_{\alpha\alpha} \delta_{q-q'} \delta(t-t')$$

$$= 2A \delta_{\cancel{\alpha}\alpha} \delta_{q-q'} \delta(t-t') \underbrace{\left[\sum_{\alpha} q_{\alpha}^2 \right]}_{q^2}$$

$$\overline{S_q(t) = 0}; \quad \overline{S_q(t) S_{q'}(t')} = 2A \delta_{q-q'} \delta(t-t') q^2$$

$$\dot{e}_q = -D_T q^2 e_q + S_q(t)$$

ez egy Ornstein-Uhlenbeck! $\left| \begin{array}{l} Y_{OU} = D_T q^2 \\ D_{OU} = A q^2 \end{array} \right.$

$$\overline{e_q(t) e_{q'}(t)} = \frac{D_{0q}}{\gamma_{0q}} e^{-\gamma_{0q} |t-t'|} \frac{A}{D_T} e^{-D_T q^2 |t-t'|}$$

← (!)

Más eljárás: (egyenlet megoldása)

$$e_q(t) = \int_{-\infty}^t ds e^{-D_T q^2 (t-s)} \dot{e}_q(s) \quad \text{stac. állapotban.}$$

$$\overline{e_q(t) e_{q'}(t')} = \delta_{q, -q'} \left(\frac{D_T}{A} \right)^{-1} e^{-D_T q^2 |t-t'|}$$

Az „A” értéket az egyensúlyi eloszláshoz kell igazítani.
 T hőmérsékleten: $\overline{\Delta E^2} = k_B T^2 C$ ($\delta e := e - e_0$)

$$\int \delta e(\underline{r}, t) d\underline{r} \int \delta e(\underline{r}', t) d\underline{r}' = k_B T^2 \rho_0 V C \quad \text{(fajhő)}$$

$$\int d\underline{r} d\underline{r}' \overline{\delta e(\underline{r}, t) \delta e(\underline{r}', t)} = \left(\frac{D_T}{A} \right)^{-1} V$$

$$\overline{e_q(t) e_{q'}(t)} = \delta_{q, -q'} \left(\frac{D_T}{A} \right)^{-1}$$

$$\overline{\delta e(\underline{r}, t) \delta e(\underline{r}', t)} = \left(\frac{D_T}{A} \right)^{-1} \delta(\underline{r} - \underline{r}')$$

Egyszerűsítés: $\left(\frac{D_T}{A} \right)^{-1} V = k_B T^2 \rho_0 V C$

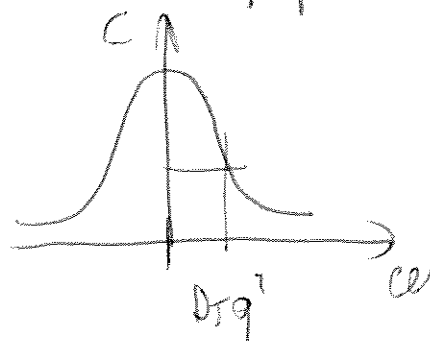
$$A = k_B T^2 \rho_0 C D_T = k_B T^2 \Lambda$$

$$\overline{e_q(t) e_{q'}(t)} = \delta_{q, -q'} k_B T^2 \rho_0 C e^{-D_T q^2 |t-t'|} =: C(q, t)$$

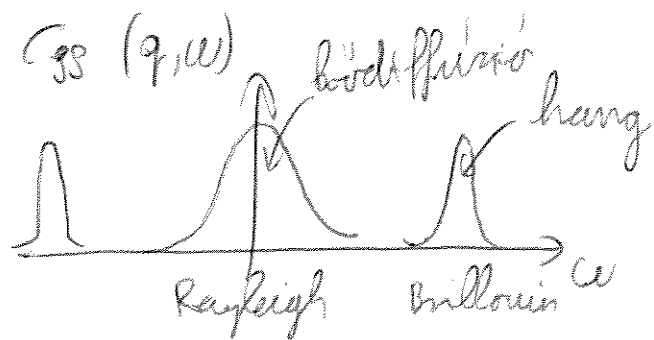
L^{II} - Fourier:

$$C(q, \omega) = k_B T^2 \rho_0 c \left(\underbrace{\int_{-\infty}^0 dt e^{i\omega t}}_{\int_{-\infty}^0 dt e^{-i\omega t'}} e^{D_T q^2 t} + \underbrace{\int_0^{\infty} dt e^{i\omega t}}_{\frac{1}{D_T q^2 - i\omega}} e^{-D_T q^2 t} \right) =$$

$$C(q, \omega) = k_B T^2 \rho_0 c \frac{2D_T q^2}{(D_T q^2)^2 + \omega^2}$$



Mérés: fényrészecskés (szekeldromos allandó ha váltórh.)



$\Phi(r, t)$: rendparaméter sűrűség (pl.: mágneszettség)

$$\frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial t} = -\gamma \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Phi} + \zeta(r, t) \quad \left| \begin{array}{l} \zeta(r, t) = 0 \\ \zeta(r, t) \zeta(r', t) = 2\delta^3(r-r')\delta(t-t') \end{array} \right.$$

$$\mathcal{H} = \int d^3r \left\{ \frac{\chi_0}{2} \Phi^2 + \frac{u}{4} \Phi^4 + \frac{1}{2} c (\nabla \Phi)^2 \right\}$$

stac. állapot. $P_0 \sim e^{-\mathcal{H}}$

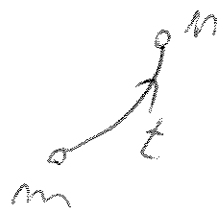
Vörösi!

11. előadás

Ugró folyamatok dinamikai értékelése.

váltakozó. n (egyen szám)

átmeneti ar.: $P(n, t | m)$



infinitesimális időkre:

$$P(n, t | m) \simeq \delta_{nm} + w_{nm} t + \mathcal{O}(t^2) \quad (t > 0)$$

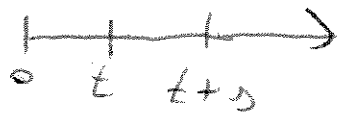
$n \neq m$: $w_{nm} \geq 0$ (mivel w_{nm} valószínűség)

normális: $\sum_n P(n, t | m) = 1 + \sum_{n \neq m} w_{nm} t + \mathcal{O}(t^2) \equiv 1$

$$\Rightarrow \sum_n w_{nm} = 0 \Rightarrow \sum_{n \neq m} w_{nm} = -w_{mm}$$

Chapman-Kolmogorov:

$$P(m, t+s | m) = \sum_{\tilde{m}} \underbrace{P(m, s | \tilde{m})}_{*} P(\tilde{m}, t | m)$$



$$\downarrow$$
$$P(m, t | m) + \frac{\partial P(m, t | m)}{\partial t} s + \mathcal{O}(s^2)$$

*-ba: $\delta_{m\tilde{m}} + w_{m\tilde{m}} s + \mathcal{O}(s^2)$

$$\boxed{\frac{\partial P(m, t | m)}{\partial t} = \sum_{\tilde{m}} w_{m\tilde{m}} P(\tilde{m}, t | m)}$$

beredeti feltétel. $P(n, 0 | m) = \delta_{nm}$.

gyűjtőn p -bre:

$$\frac{\partial p(n, t)}{\partial t} = \sum_{\tilde{n}} w_{n\tilde{n}} p(\tilde{n}, t) \quad \text{Master-egyenlet.}$$

$$\sum_{\substack{\tilde{n} \\ \tilde{n} \neq n}} w_{n\tilde{n}} p(\tilde{n}, t) + \underbrace{w_{nn} p(n, t)}_{-\sum_{\substack{\tilde{n} \\ \tilde{n} \neq n}} w_{\tilde{n}n}}$$

$$\frac{\partial p(n, t)}{\partial t} = \sum_{\substack{m \\ m \neq n}} [w_{nm} p(m, t) - w_{mn} p(n, t)]$$

átmenetparabol ír le...

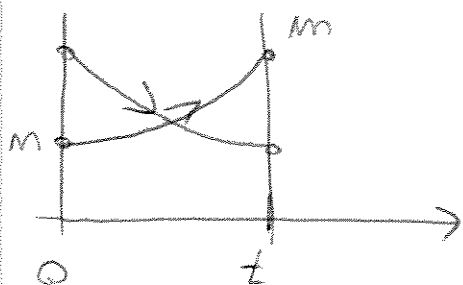
 a fordított irány is benne van.

Stac. állapotok: $\sum_{\substack{m \\ m \neq n}} (w_{nm} p_s(m) - w_{mn} p_s(n)) = 0$

Rögzített egyensúly: $w_{nm} p_s(m) = w_{mn} p_s(n)$

(detailed balance)

Ha $p_s(m)$ -ben időtűl inv. van, akkor csak rögzített egyensúly lehet az állapotok stacionárius? 11/2



$$P_2(mt, m_0) = P_2(mt, m_0)$$

(er az invariancia)

'átmeneti' az:

$$P(mt | m) p_0(m) = P(mt | m) p_0(m)$$

$$J_{mm} + W_{mm}t \quad J_{mm} + W_{mm}t$$

Ha $m \neq m$: $W_{mm} p_0(m) = W_{mm} p_0(m)$ bijekt.

H-tétel:

markov-egyenlet

- stacionárius eloszlása ismert
- teljesül a visszefutás egyenlősége.
- az állapotok nem reparálhatóak.

(bármely állapotokhoz ok közt van átmenet)

$\Rightarrow$ ekkor $p_0(m)$ stabil stac. eloszlás, azaz:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(m, t) = p_0(m)$$

$$H(t) := \sum_m p(m, t) \ln \left[\frac{p(m, t)}{p_0(m)} \right]$$

ha lenne, ha
 $p_0(m) = 0$ lenne.
 De a nem-reparálhatóság
 miatt ez nem lehet! (11/2)

el: $H \geq 0$, egyenlőség áll fenn, ha $p(n, t) = p_0(n)$.

Biz:

$$H = \sum_n \left(p(n, t) \ln \frac{p(n, t)}{p_0(n)} - \cancel{p(n, t)} + p_0(n) \right) =$$

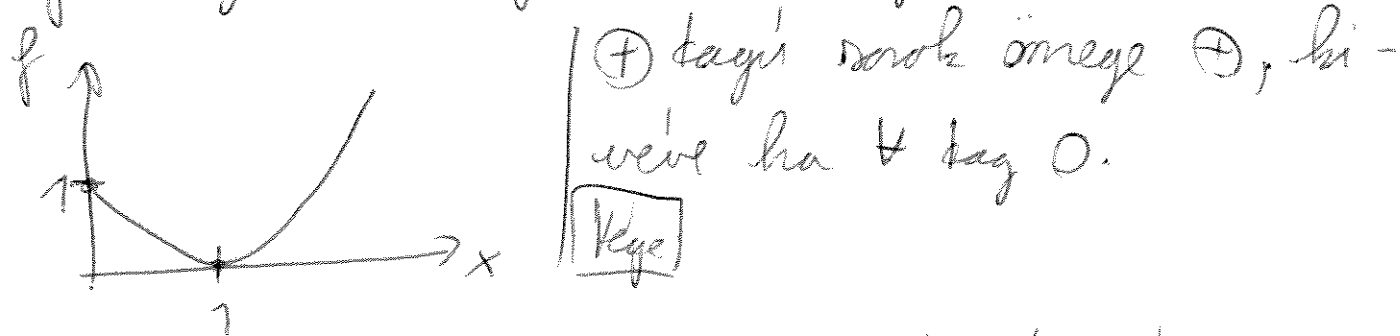
← $\cancel{p(n, t)}$ és $p_0(n)$ összege...

$$= \sum_n p_0(n) \left[\frac{p(n, t)}{p_0(n)} \ln \frac{p(n, t)}{p_0(n)} - \frac{p(n, t)}{p_0(n)} + 1 \right]$$

$$f = x \ln x - x + 1. \quad \leftarrow f(x=1) = 0$$

$$f' = \ln x \quad ; \quad f'' = \frac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases} f'(x=1) = 0 \\ f''(x=1) > 0, \text{ ha } x > 0. \end{cases}$$

→ az első derivált állandóan növekszik, vagyis a
 fur $\forall x$ az érintője fölött megy.



der: $\dot{H} \leq 0$, és $= 0 \Leftrightarrow$ a 2 oldalán szor, és...

Biz:

$$\dot{H}(t) = \sum_n \dot{p}(n, t) \left[\ln \frac{p(n, t)}{p_0(n)} + 1 \right] = \dots$$

p_0 az mindig!

Mivel $\sum_n p(n, t) = 1$, ezért $\sum_n \dot{p}(n, t) = 0$.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{n, m \\ (n \neq m)}} \ln \frac{p(n, t)}{p_0(n)} \left(w_{nm} p(n, t) - w_{mn} p(m, t) \right) = \\
&= \sum_{\substack{n, m \\ (n \neq m)}} \left[\ln \frac{p(n, t)}{p_0(n)} \left(w_{nm} p(n, t) - w_{nm} p(m, t) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \ln \frac{p(m, t)}{p_0(m)} \left(w_{mn} p(m, t) - w_{mn} p(n, t) \right) \right] \frac{1}{2} = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{n, m \\ n \neq m}} \left(w_{nm} p(n, t) - w_{mn} p(m, t) \right) \ln \left(\frac{p(n, t) p_0(m)}{p_0(n) p(m, t)} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{n, m \\ n \neq m}} w_{nm} p(n, t) \left[1 - \frac{w_{mn} p(m, t)}{w_{nm} p(n, t)} \right] \ln \left(\frac{p(n, t) p_0(m)}{p_0(n) p(m, t)} \right) \\
&\quad \uparrow \\
&\quad \frac{w_{mn}}{w_{nm}} = \frac{p_0(m)}{p_0(n)} \quad (\text{stat. denkle})
\end{aligned}$$

Az eger $x > 0$ pozitív szám $\cdot \underbrace{(1-x) \ln x}_{\leq 0}$, azaz ≤ 0 , ha $x=1$.

$\Rightarrow \dot{H}(t) \leq 0$, $\Leftrightarrow$ tagorékelt állítás

$\hookrightarrow w_{nm} = 0$ (nincs átmenet) (1)

$\hookrightarrow \frac{p}{p} = 1$ (2)

Mivel az állapotok ^{reparálható} (2) ^{és} végén mindig
átmenettel érkeztethető állapotokba igaz.

$$\frac{p(m, t)}{p_0(m)} = \frac{p(m, t)}{p_0(m)} = C \quad \forall m \text{-re:}$$

$\mathbb{P}(C=1, \text{normalis miall-})$

Vege

of - $H \geq 0 \quad \Leftrightarrow p(n, t) = p_0(n)$

$$\dot{H} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad p(n, t) = p_0(n)$$

H absolut balanciert, es cröhen, wazjes $\exists$ limese
 $t \rightarrow \infty$ -ben; $\lim_{t \rightarrow \infty} H = 0 \implies t \rightarrow \infty$ -re a $p(n,t) \rightarrow p_\beta(n)$

$H(t)$ szemléletes jelentése:

füge ich ein und vereine H additiv.

$$P_{ij} \cdot Q_{jn} \quad \sum_i P_{in} = 1; \quad \sum_n Q_{in} = 1.$$

$$\sum_{nm} P_m Q_n \ln \frac{P_m Q_n}{P_m Q_{nm}} = \sum_m P_m \ln \frac{P_m}{P_m} \left(\sum_n Q_n \right) + \sum_n Q_n \ln \frac{Q_n}{Q_{nm}} \left(\sum_m P_m \right)$$

Mikrobanonikus sobarany (er ledgen a star all.)

$$P_D(m) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2(E, \delta E)}} & E < E_m < E + \delta E \\ 0, & \text{and elsewhere} \end{cases}$$

birkó's átmenete: $w_{nm} = 0$, ha E_n, E_m nincs egyenre $(E, E + \delta E)$ -ben.

$$H(t) = \underbrace{\sum_n p(n, t) \ln p(n, t)}_{-\frac{1}{k_B} S_{\text{inf}}} - \underbrace{\sum_n p(n, t) \ln p_0(n)}_{-\sum_n p(n, t) \ln \frac{1}{Z} = \ln Z(E, \delta E)}$$

↓

- $\frac{1}{k_B} S_{\text{inf}}$ - $\sum_n p(n, t) \ln \frac{1}{Z} = \ln Z(E, \delta E)$
 miután: $\frac{1}{k_B} S_{\text{m.b.}}$

$$k_B H(t) = -S_{\text{inf}} + S_{\text{m.b.}}$$

Mivel H nem negatív, ezért $S_{\text{inf}} < S_{\text{m.b.}}$

$H \leftrightarrow$ „nem egyensúlyi entropia”

Kanonikus sokaság: $p_0(n) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_n}$

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$$

rendszer egyensúly: $w_{nm} e^{-\beta E_m} = w_{mn} e^{-\beta E_n}$

$$\frac{w_{nm}}{w_{mn}} = e^{-\beta(E_m - E_n)}$$

$$H(t) = \sum_n p(n, t) \ln p(n, t) - \sum_n p(n, t) \ln p_0(n)$$

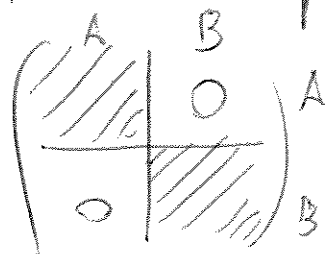
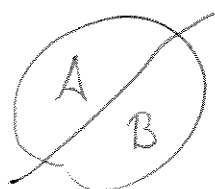
$$\ln p_s(m) = -\beta E_m - \ln Z$$

$$H(t) = -\frac{S_{\text{inf}}}{k_B} + \frac{1}{k_B T} \sum_m \underbrace{p(m,t) E_m}_{\text{energia várh. értéke}} + \ln Z$$

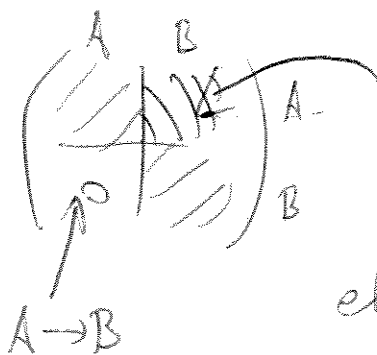
$$k_B T H(t) = \underbrace{\bar{E} - T S_{\text{inf}}}_{F[p(m,t)] - \text{Fegyenmely}} + k_B T \ln Z. \quad \left| \begin{array}{l} \text{ez pozitív,} \\ \text{növekszik tart 0-hoz.} \end{array} \right.$$

Szeparálható fázisterek:

A-ra B-re fktlan Markov eq.-k lennek.
átmeneti mtrix:



Egyéb esetek:



B-ből lehet A-ba fordítva nem lehet.

ehhez B "hiányzik"

Monte-Carlo módszer: ismét elemzéssel kell átlagolni.
→ elemző új állapotokba kerülésük → olyan Markov-folyamatot konstruálunk, amelynek B-re az elemzés mellett átlagolunk.

Metropolis algor:

$$\underbrace{n \neq m \dots}_{nm} w_{nm} = \underbrace{g(n \rightarrow m)}_{\text{bizálatlan m.-e.}} \underbrace{A(n \rightarrow m)}_{\text{elfogadás m.-e. pl.}}$$

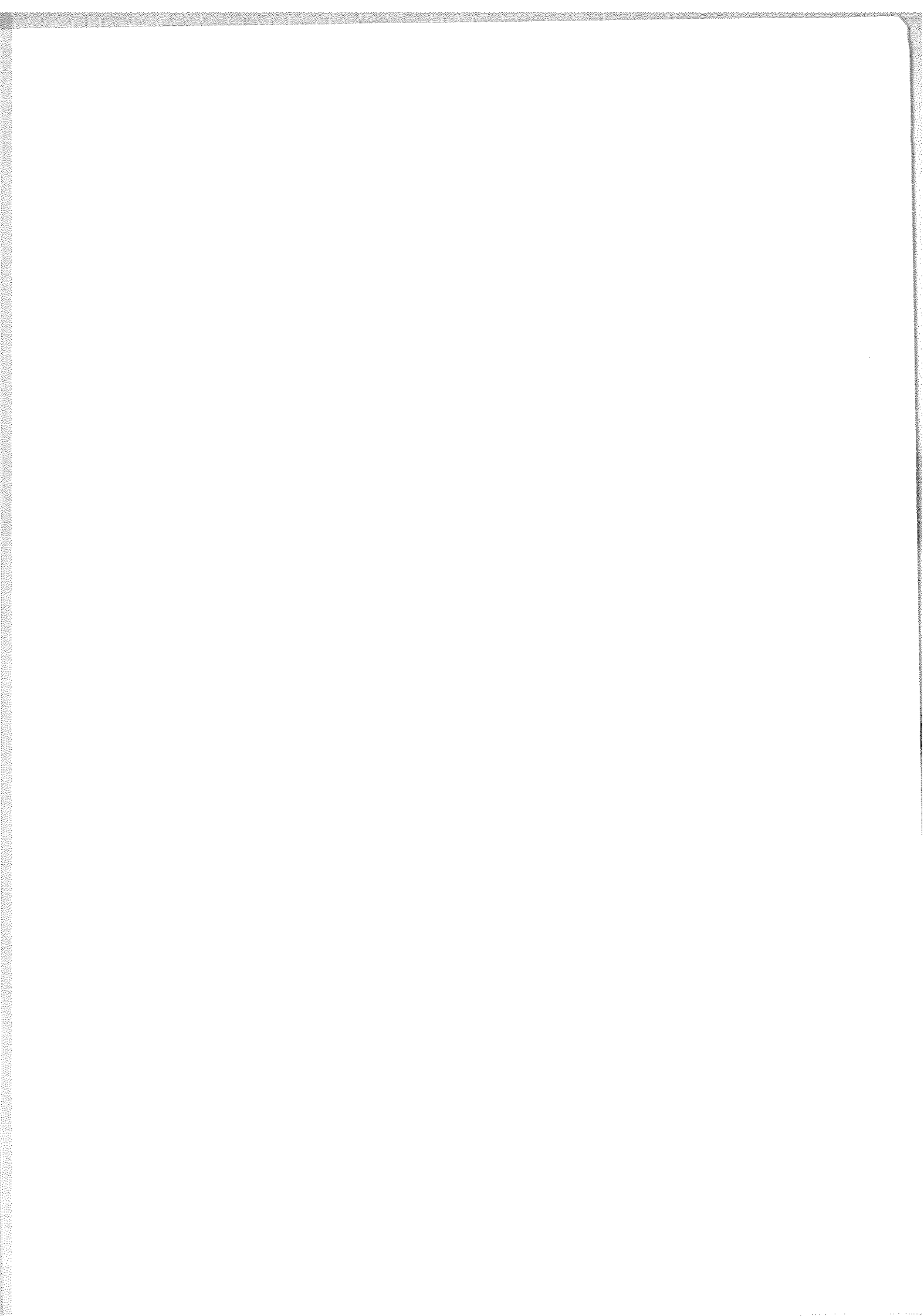
$$\frac{w_{nm}}{w_{mn}} = \frac{g(n \rightarrow m) A(n \rightarrow m)}{g(m \rightarrow n) A(m \rightarrow n)} \stackrel{\text{pl.}}{=} e^{-\beta(E_n - E_m)}$$

van N lehetséges állapot.

$$g(n \rightarrow m) = \frac{1}{N} ; A(n \rightarrow m) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \Delta E = E_m - E_n \leq 0 \\ e^{-\beta \Delta E}, & \text{ha nem.} \end{cases}$$

normaliz:

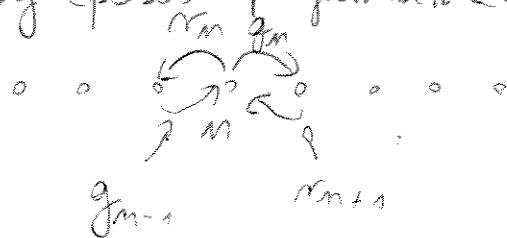
$$w_{nm} = \sum_{n \neq m} w_{nm} = \frac{1}{N} \sum_n A(m \rightarrow m) < 1$$



Vemegy!

11. előadás

Egylépűs folyamatok:



Master-egyenlet: $\dot{P}_m = r_{m+1}P_{m+1} + g_{m-1}P_{m-1} - (r_m + g_m)P_m$

hogyongás. $r_m = g_m = w$. (n-től főkerek)

(milletés - halálkor: m alulról körletes...)



(∞ lunc)

$\leftrightarrow$ a: rárallandó

$$\dot{P}_m = w(P_{m+1} + P_{m-1} - 2P_m) = -2w \left[P_m - \frac{P_{m+1} + P_{m-1}}{2} \right]$$

"primitár" a rarrmedok áttagara.

$$\bar{n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_m m$$

$$\dot{\bar{n}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} m \dot{P}_m = w \sum_{m=-\infty}^{\infty} m (P_{m+1} + P_{m-1} - 2P_m)$$

$$\sum_m m P_{m+1} = \sum_m (m+1-1) P_{m+1} = \bar{n} - 1$$

$$\sum_m m P_{m-1} = \sum_m (m-1+1) P_{m-1} = \bar{n} + 1$$

$$\Rightarrow \dot{\bar{n}} = w(\bar{n} - 1 + \bar{n} + 1 - 2\bar{n}) = 0$$

$$\text{vagyis } \bar{n}(t) = \bar{n}(0)$$

$$\begin{aligned}\ddot{\bar{m}^2} &= \sum_n \ddot{m^2} \dot{p}_n = w \sum_n m^2 (p_{n+1} + p_{n-1} - 2p_n) = \\ &= w \left[(\bar{m}^2 - 2\bar{m} + 1) + \bar{m}^2 + 2\bar{m} + 1 - 2\bar{m}^2 \right] = \underline{\underline{2w}}.\end{aligned}$$

(võrdel järele): $(n+1-1)^2 = (n+1)^2 - 2(n+1) + 1$
 $(n-1+1)^2 = (n-1)^2 + 2(n-1) + 1$

Vaagim $\ddot{\bar{m}^2} = 2w \Rightarrow \underline{\bar{m}^2(t) = \bar{m}^2(0) + 2wt.}$

Spec. eret: ees eelnevalt...

$$\bar{m}(0) = 0 ; \bar{m}^2(0) = 0$$

$$(t=0\text{-el} \quad p_n = \delta_{n0})$$

$$\bar{m}^2(t) = 2wt \quad \text{idolen lineaarset n\u00f5} \\ \text{(diff\u00ferv\u00e4r\u00e4r m\u00f5rg\u00e1s)}$$

Hom\u00f5r\u00e4g: $x = ma$

$$\ddot{x} = a^2 \ddot{m}^2 = 2wa^2 t$$

$$\uparrow \\ \boxed{D = wa^2}$$

At\u00f5meti val\u00f5m\u00f5n\u00f5r\u00e4g\u00e4r: generaator\u00f5\u00f5\u00f5\u00f5\u00f5\u00f5

$$F(z) = \sum_n z^n p_n$$

Tel.: $F(1) = \sum_n p_n = 1$

$$F'(1) = \sum_n n z^{n-1} p_n \Big|_{z=1} = \bar{n}$$

$$F''(1) = \sum_n n(n-1) z^{n-2} p_n \Big|_{z=1} = \bar{n}^2 - \bar{n}$$

$$\frac{F(z)}{z^{m+1}} = \sum_l \frac{z^l p_l}{z^{m+1}} \quad \begin{array}{l} z - t \text{ komplex számok} \\ \text{felhasznál...} \end{array}$$

$$\oint \frac{F(z)}{z^{m+1}} dz = 2\pi i p_m \quad (\text{Residuum-mal...})$$

Master-egyenlet megoldása...

$$\sum_n z^n \dot{p}_n = w \sum_n z^n (p_{n+1} + p_{n-1} - 2p_n) = w F(z)$$

$$\left(\frac{1}{z} + z - 2 \right) \dot{F}(z)$$

Megoldás: $F(z, t) = e^{w \left(\frac{1}{z} + z - 2 \right) t} F(z, t=0)$

$t=0$: $p_n(t=0) = \delta_{n0}$

$$F(z) = \sum_n z^n \delta_{n0} = 1.$$

$$F(z, t) = e^{w \left(\frac{1}{z} + z - 2 \right) t}$$

$$P_m = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{w(\frac{1}{z} + z)t}}{z^{m+1}} dz e^{-2wt} =$$

$$z = e^{i\varphi}; \quad \frac{1}{z} = e^{-i\varphi}; \quad dz = ie^{i\varphi} d\varphi$$

$$= e^{-2wt} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{w(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})t}}{e^{i\varphi} e^{im\varphi}} ie^{i\varphi} d\varphi \cdot \frac{1}{2\pi i} =$$

$$= e^{-2wt} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{2wt \cos \varphi}}{\cancel{e^{i\varphi} e^{im\varphi}}} (\cos m\varphi - i \sin m\varphi) d\varphi \cdot \frac{1}{2\pi} =$$

↑
páros fu. → elhanyagolható...

$$= e^{-2wt} \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2wt \cos \varphi} \cos m\varphi d\varphi =$$

páros fu. + integrálunk...

$$= e^{-2wt} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{2wt \cos \varphi} \cos m\varphi d\varphi = e^{-2wt} I_m(2wt)$$

↑
módosított Bessel-fu.

$$I_m(z) = i^{-m} J_m(iz) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{z \cos \Theta} \cos(m\Theta) d\Theta$$

↑
integral előállítás

Nagy z -re exponenciális lecsengés

(az eredeti $J(z)$ oscillál nagy z -re)

Más út:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & N \end{matrix} + \text{periodikus h. felt.: } p_{n+1} = p_n.$$

$$\dot{p}_n = w(p_{n+1} + p_{n-1} - 2p_n)$$

mtx-alak:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1-2 & 1 & 0 & & 1 \\ & 0 & 1-2 & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots \\ 1 & 0 & & 1-2 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{p}_1 \\ \vdots \\ \dot{p}_N \end{pmatrix}$$

erőtel határozható, ha nem periodikus a h. feltétel, $\rightarrow$ más len a spektrum, ha N véges, megmarad a spektrum, ha $N \rightarrow \infty$.

Fourier:
$$p_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q e^{iqna} p_q$$

$$p_q = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n e^{-iqna} p_n$$

$$\dot{p}_q = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n e^{-iqna} \dot{p}_n = \frac{w}{\sqrt{N}} \sum_n e^{-iqna} (p_{n+1} + p_{n-1} - 2p_n) =$$

$$= (e^{iqa} p_q + e^{-iqa} p_q - 2p_q) w = -2(1 - \cos(qa)) w p_q =$$

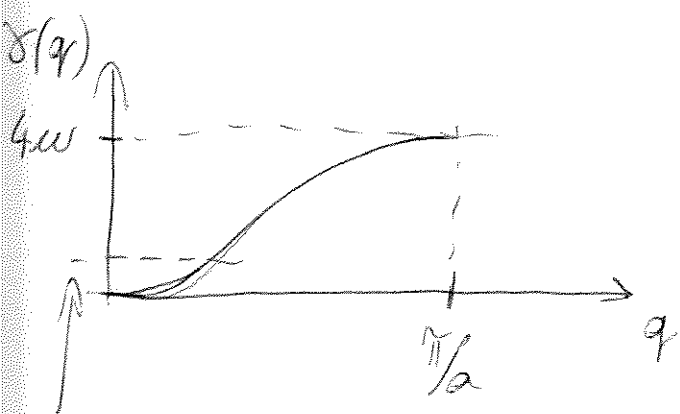
$$= -\gamma(q) p_q \xRightarrow[\text{oldin}]{\text{meg.}} p_q(t) = p_q(t=0) e^{-\gamma(q)t}$$

exp. lecsengés, kivéve $q=0$ -t.

$$\delta(q=0)=0 \rightarrow \underline{P_{q=0}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n P_n = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{N}}}}$$

$\rightarrow \infty$ -re egyenletes eloszlás lesz...

$$\underline{P_m^{(stat)}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{N}} = \underline{\underline{\frac{1}{N}}}$$



$$-\frac{\pi}{a} < q < \frac{\pi}{a} \quad (\text{Brillouin zóna})$$

adott T -ig vizsgálva csak az adott $\frac{1}{T}$ -mel kiselte $\delta(q)$ -khal kell foglalkoznunk.

Termodinamikai határeset:

$$qNa = 2\pi m \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$q = \frac{2\pi}{a} \frac{m}{N} \quad -\frac{N}{2} < m < \frac{N}{2}$$

$$P_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q e^{iqna} P_q(0) e^{-\delta(q)t}$$

$$\underline{t=0}: \quad P_m = \delta_{m0} \quad P_q(0) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n e^{-iqna} \delta_{n0} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

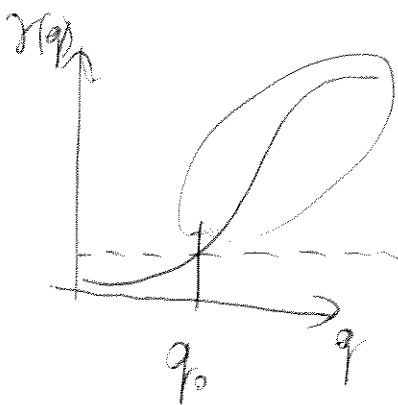
$$\rightarrow P_m = \frac{1}{N} \sum_q e^{iqna} \frac{e^{-2wt}}{e^{2wt \cos(qa)}} \approx$$

$$\approx \frac{1}{N} \frac{Na}{2\pi} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dq e^{iqna} \frac{e^{2wt \cos(qa)}}{e^{2wt}}$$

$$\varphi := qa \dots$$

$$P_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \underbrace{e^{i m \varphi}}_{\rightarrow \cos(m\varphi) + i \sin(m\varphi)} e^{2i\omega t \cos \varphi} e^{-2i\omega t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \cos(m\varphi) e^{2i\omega t \cos \varphi} e^{-2i\omega t}$$

$$= e^{-2i\omega t} I_m(2\omega t) \quad (\text{u. az az eredmény})$$

Hornú időke:  $r(q)$ q q_0 $\frac{1}{E}$ $\leftarrow$ ezek már lecsúsztak.

csak a q_0 -nál
kisebbség q -hat kell
figyelembe venni.

$$\underline{qa \ll 1}: \quad r(q) = 2\sqrt{1 - \cos(qa)} \approx 2\sqrt{1 - 1 + \frac{(qa)^2}{2} + \dots} =$$

$$= \omega a^2 q^2$$

$$P_m \approx \frac{a}{2\pi} \int_{-q_0}^{q_0} dq e^{i q n a} e^{-2\omega a^2 q^2 t} \approx \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{i q n a} e^{-2\omega a^2 q^2 t} =$$

$$= \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \cos(qna) e^{-2\omega a^2 q^2 t} = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega a^2 t}} e^{-(na)^2 \frac{1}{4\omega a^2}} \frac{a}{2\pi}$$

~~$\cos(qna) + i \sin(qna)$~~
példán!

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \cos(bx) e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}} \quad \nearrow$$

$$\frac{P_m}{a} \approx \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega a^2 t}} e^{-\frac{(ma)^2}{4\omega a^2 t}}$$

Gauss,
mélység $\sim t$.

(! homi időz, homi hullámok!)

$ma = x$; és $\frac{P_m}{a}$ m-laman változó fv.-e, ...

m.
nlr:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega a^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4\omega a^2 t}}$$

Vn.-o annak, hogy
t idő múlva x-ben va-
gyunk.

Algas, mint egy Wiener

$$D = \omega a^2 \neq \text{Wienerben}$$

$$\bar{x}^2 = 2\omega a^2 t$$

$$\dot{P}_m = \omega (P_{m+1} + P_{m-1} - 2P_m)$$

Algas, mint egy diszkrétizált Δ .

$$P_m = F(ma) \cdot a \quad F(x) \text{ sima fv.}$$

$$P_{m\pm 1} = \left[F(ma) \pm F'(ma)a + \frac{1}{2} F''(ma)a^2 \right] a$$

$$\dot{F}(ma)a = (F''(a)a^2\omega)a$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \omega a^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

diffúzió's egyenlet,
(innen is látni...)

Altalánosítás:



+ periodikus
h. felt.

$$\dot{P}_m = \sum_{\substack{l \\ (l=0)}} w_l P_{m-l} - \sum_{\substack{l \\ (l \neq 0)}} w_l P_m$$

Feltétel: $\sum_{\substack{l \\ (l \neq 0)}} w_l < 1.$

$$e^{-iq(m-l)a} e^{iqla}$$

Fourier: $\dot{P}_q = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_m e^{-iqna} \dot{P}_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{l \\ (l \neq 0)}} \sum_m \left(e^{-iqna} w_l P_{m-l} - \right.$

$$\left. - w_l e^{-iqna} P_m \right) = \left[\sum_{\substack{l \\ (l \neq 0)}} e^{-iqla} w_l \right] P_q - \left[\sum_{\substack{l \\ (l \neq 0)}} w_l \right] P_q =$$

$$= -\gamma(q) P_q \quad \gamma(q) = \sum_{\substack{l \\ l \neq 0}} w_l (1 - e^{-iqla})$$

$qa \ll 1$:

$$\gamma(q) \approx \sum_{\substack{l \\ (l \neq 0)}} w_l \left(1 - 1 + iqla - \frac{(iqla)^2}{2} \right) = \sum_{\substack{l \\ (l \neq 0)}} w_l l^2 \frac{(qa)^2}{2}$$

↙ med...

↪ Ffh $w_l = w_{-l}$ (mindegyre, hogy jobbra v. balra ugrott)

$$\sum_l w_l l = 0$$

$$D = \frac{1}{2} \left(\sum_l w_l l^2 \right) a^2$$

infinitesimális idő alatt az amplitúdus "s" néh. változó értéke.

$$\overline{x^2} = (\overline{ma})^2 = 2Dt$$

ha $w_0 = 0$, ha $l > 1$, $\rightarrow D = \frac{1}{2}(w_1 + w_{-1})a^2 = wa^2$

$\sum_e w_e l^2$ ha nem véges, (∞) akkor anomális dif-

fúzió lép fel: $\overline{x^2} \sim t^\gamma$ $\gamma > 1$; $\gamma < 2$.

(más néven superdiffúzió) $\leftrightarrow$ Lévy - flight.

13. előadás

Boltzmann - egyenlet:

fermion - gáz

egyrészes állapota: $a = (p, \overset{\text{spin}}{\sigma})$
impulzus $\nearrow$

A rendszer állapota: $A = (\dots, m_a \dots)$ $m_a = 0, 1$.

Előfordulási valószínűség: $P(A)$

Master - egyenlet: $\dot{P}(A) = \sum_{A' \neq A} (W(A, A') P(A') - W(A', A) P(A))$

$$\dot{\overline{m_e}} = \sum_A P(A) \dot{m_e}(A) \quad (\text{ez érdekel minket})$$

$$\begin{aligned} \dot{\overline{m_e}} &= \sum_{\substack{A, A' \\ (A \neq A')}} (W(A, A') P(A') m_e(A) - W(A', A) P(A) m_e(A)) = \\ &= \sum_{\substack{A, A' \\ (A \neq A')}} W(A, A') P(A') (m_e(A) - m_e(A')) \end{aligned}$$

Tíbb Δt idő alatt 1 fermion állapota változik!

(Rd.: nemnyesésen mérődik az e^-)

egyi:

$$\left\{ \begin{array}{l} A' = \left(\begin{array}{c|c} b & a \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \\ A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & b \end{array} \right) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{elkor.} \\ m_e(A) - m_e(A') = 1 \\ \text{ennek m.-e legyen } w(a,b) \end{array}$$

másk:

$$\left\{ \begin{array}{l} A' = \left(\begin{array}{c|c} b & a \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right) \\ A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 0 & a \end{array} \right) \end{array} \right\} \begin{array}{l} w(a,b) \\ m_e(A) - m_e(A') = -1. \end{array}$$

$$\sum_a \sum_{(a \neq b) A'} w(b,a) P(A') (1 - m_b) m_a \quad \rightarrow \text{erre hivatkozottam}$$

(1. tag...)

a b - len 0, a - len 1 állapotokat...

$$\dot{m}_e = \sum_a \sum_{(a \neq b) A'} w(b,a) P(A') (1 - m_b) m_a -$$

$$- \sum_a \sum_{(a \neq b) A'} w(a,b) P(A') m_b (1 - m_a)$$

$$\dot{m}_e = \sum_a \left(w(b,a) \underbrace{\sum_{A'} P(A') (1 - m_b) m_a}_{(1 - m_b) m_a \text{ várható érték...}} - w(a,b) \sum_{A'} P(A') m_b (1 - m_a) \right)$$

$$\dot{\bar{n}}_e = \sum_a \left(w(b, a) \overline{(1 - n_e) n_a} - w(a, b) \overline{n_e (1 - n_a)} \right)$$

$$\overline{n_e n_a} \approx \bar{n}_e \bar{n}_a \quad (\text{bizeltes!})$$

$$\dot{\bar{n}}_e = \sum_a \left(w(b, a) \bar{n}_a (1 - \bar{n}_e) - w(a, b) \bar{n}_e (1 - \bar{n}_a) \right)$$

Boltzmann-egyenlet...

Hőkövetési egyenletek...: $w(a, b) = w(b, a)$
(pl. szabályos mátrix nem egyezik...)

$$\dot{\bar{n}}_e = \sum_a w(a, b) (\bar{n}_a - \bar{n}_e)$$

Klasszikus határeset: $\bar{n}_a \ll 1 \rightarrow a$ hirtelen elv
minta nem is lenne.

$$\dot{\bar{n}}_e = \sum_a \left(w(b, a) \bar{n}_a - w(a, b) \bar{n}_e \right)$$

Két rétegre ütközés:

$$\begin{array}{l} A' = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} & b & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \right) \\ A = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} & b & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \right) \end{array} \quad \left| \quad n_a(1) - n_a(2) = 1 \right.$$

maximál:

$$A' = \begin{pmatrix} l & a_1 & a_2 & a_3 \\ \dots & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a_1, a_2, a_3 az összes lehetséges állapotot foglalja.

$$\dot{\bar{n}}_e = \sum_{\substack{a_1, a_2, a_3 \\ \text{(születési/halál)}}} w(l, a_1, a_2, a_3) \sum_{A'} P(A') n_{a_2} n_{a_3} (1 - n_e) (1 - n_{a_1}) -$$

$$- \sum_{a_1, a_2, a_3} w(a_2, a_3; l, a_1) \sum_{A'} P(A') n_e n_{a_1} (1 - n_{a_2}) (1 - n_{a_3})$$

$$\dot{\bar{n}}_e = \sum_{a_1, a_2, a_3} w(l, a_1, a_2, a_3) \overline{(1 - n_e) (1 - n_{a_1}) n_{a_2} n_{a_3}} -$$

$$- \sum_{a_1, a_2, a_3} w(a_2, a_3; l, a_1) \overline{n_e n_{a_1} (1 - n_{a_2}) (1 - n_{a_3})}$$

Ellen a Boltzmann:

$$\dot{\bar{n}}_e = \sum_{a_1, a_2, a_3} \left[w(l, a_1, a_2, a_3) (1 - \bar{n}_e) (1 - \bar{n}_{a_1}) \bar{n}_{a_2} \bar{n}_{a_3} - \right. \\ \left. - w(a_2, a_3; l, a_1) \bar{n}_e \bar{n}_{a_1} (1 - \bar{n}_{a_2}) (1 - \bar{n}_{a_3}) \right]$$

klassikus határeset.

$$\dot{\bar{m}}_e = \sum_{a_1, a_2, a_3} \left(w(l, a_1; a_2, a_3) \bar{m}_{a_2} \bar{m}_{a_3} - w(a_2, a_3; l, a_1) \bar{m}_l \bar{m}_{a_1} \right)$$

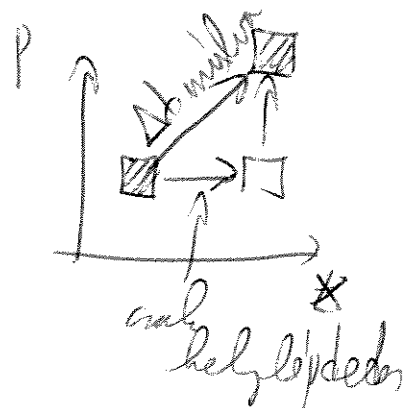
Kvantumklassikus térbeli mozgás...

$f(\underline{r}, \underline{p}, t) d^3\underline{r} d^3\underline{p}$: $d^3\underline{r} d^3\underline{p}$ -ben lévő részecskék száma.

Ha nincs ütközés:

$$\underline{r} \rightarrow \underline{r} + \frac{\underline{p}}{m} \Delta t$$

$$\underline{p} \rightarrow \underline{p} + \frac{\underline{F}}{\cancel{m}} \Delta t$$



Liouville:

~~$$f(\underline{r}, \underline{p}, t) d^3\underline{r} d^3\underline{p} = f\left(\underline{r} + \frac{\underline{p}}{m} \Delta t, \underline{p} + \frac{\underline{F}}{\cancel{m}} \Delta t, t + \Delta t\right) d^3\underline{r} d^3\underline{p}'$$~~

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \underline{r}} \frac{\underline{p}}{m} + \frac{\partial f}{\partial \underline{p}} \underline{F} = 0$$

Ha nincs ütközés!

(a fázisterfogatban a részecskék száma nem változik.

Ha változik: $\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{itt}}$ ütközési integrál nem 0!

Relaxáció idő kirelitéi:

tfh. $\exists$ stac. megoldás: $f_0(r, p)$

megoldás: $f(r, p, t) = f_0(r, p) + g(r, p, t)$

$\hookrightarrow$ tfh. hirt.

Δ kirelitéi: $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{ütk}} = -\frac{1}{\tau}(f - f_0) = -\frac{1}{\tau}g(r, p, t)$

Verdők elektronok gára:

f helyzet $\underline{v}$... $\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \underline{r}} \underline{v} + \frac{\partial f}{\partial \underline{p}} \underline{F} = \dots$

Verdőképesség...

Stac. állapot: (homogén térben homogén elemek...)

$$-eE \frac{\partial f}{\partial p} = -\frac{1}{\tau}(f - f_0)$$

$$f = f_0 + \tau eE \frac{\partial f}{\partial p}$$

$$\approx \frac{\partial f_0}{\partial p}$$

f_0 egyenlő, csak az energia függvénye.

$$f(\varepsilon) \sim f\left(\frac{p^2}{2m}\right)$$

$$\Rightarrow f = f_0 + \tau \frac{e}{\hbar} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} (E \underline{v})$$

áramsűrűség: $\underline{j} = -e \underline{v} = -e \int \underline{v} f \frac{d^3 p}{h^3} = -e \underbrace{\int \underline{v} f_0 \frac{d^3 p}{h^3}}_0 - e \tau \int \frac{d^3 p}{h^3} \tau \underline{v} (E \underline{v}) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}$

$$\vec{j} = \sigma_{\alpha\beta} E_{\beta}; \quad \sigma_{\alpha\beta} = e^2 \int \frac{d^3 p}{h^3} \tau v_{\alpha} v_{\beta} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right)$$

τ függhet p -től, ezért hagytuk az integrálban.

① klasszikus eset: $f_0 = \frac{1}{g} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}$

$$\int f_0 \frac{d^3 p}{h^3} = n \quad (\text{''n''}) \rightarrow \text{enne normal a } g$$

$$n = \frac{1}{g} \frac{1}{h^3} \int e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} d^3 p \stackrel{\text{Gauss}}{=} \frac{1}{g h^3} \sqrt{\frac{\pi}{\beta/2m}} = \frac{1}{g h^3} (2\pi m k_B T)^{3/2}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = e^2 \int \frac{d^3 p}{h^3} \tau v_{\alpha} v_{\beta} \frac{e^{-\beta p^2/2m}}{g} \cdot (-\beta) =$$

$$= \frac{e^2 \tau}{k_B T} \sigma_{\alpha\beta} \underbrace{\int d^3 p v_{\alpha}^2 \frac{e^{-\beta p^2/2m}}{g h^3}}_{\substack{\overline{v_{\alpha}^2} = \frac{k_B T}{m} n \\ \uparrow \\ \text{ekvip.}}}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} \frac{e^2 \tau n}{m}$$

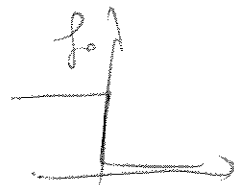
Mint a Drude - modellben.

② Degenerált fermion gáz:

$$\frac{2 d^3 p}{(2\pi h)^3} = 2 \underbrace{\frac{4\pi p^2 dp}{h^3}}_{D(\varepsilon)} \frac{d\varepsilon}{4\pi} = D(\varepsilon) d\varepsilon \frac{d\varepsilon}{4\pi}$$

$$G_{\alpha\beta} = e^2 \int \frac{d^3k}{4\pi} \int d\varepsilon D(\varepsilon) \frac{v_{\alpha} v_{\beta}}{v^2} \underbrace{v^2}_{\downarrow} \chi(\varepsilon) \left(- \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) =$$

$$= e^2 \int \frac{d^3k}{4\pi} \frac{v_{\alpha} v_{\beta}}{v^2} \int d\varepsilon D(\varepsilon) \frac{2\varepsilon}{m} \chi(\varepsilon) \delta(\varepsilon - \varepsilon_F) \approx$$



Nur hit. irány:

$$\# \int \frac{d^3k}{4\pi} \frac{v_{\alpha} v_{\beta}}{v^2} = \delta_{\alpha\beta} \int \frac{d^3k}{4\pi} \frac{v^2}{v^2} = \delta_{\alpha\beta} \frac{1}{3}$$

$$G_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \frac{e^2}{3} \frac{2\varepsilon_F}{m} D(\varepsilon_F) N(\varepsilon_F)$$

