

időbeli stat. fiz. folyamatok leírása: fizikailag elonlász. vagy mennyiség-
operátor időfejlődésével kéne megadni.

Más módszer: perturbációszámítás, lineáris válasz, etc.

Vagy: redukált elonlás, a vektorok egy sémében az elonlász. -t
vizsgáljuk. (gyors és lassú vektorok $\rightarrow$ a lassú vektorokat
szájként nemek figyelembe.)

Lineáris válasz elmélete:

Zavar mőrsége: $f(t)$

fizikai mennyiség: $B(t) \leftarrow$ ennek a várható értéke kéne.

[lineáris m. - len minden olyan lineáris, pl. gerjesztett rezgés,

[RLC körök, stb.

$$B(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t, t') f(t') dt'$$

a legáltalánosabb lineáris
összefüggés B és f közt.

Kausalitás: $X(t, t') \neq 0$, ha $t' > t$.

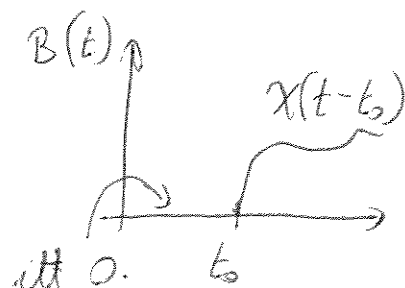
Tf. stacionárius állapotot zavarnak.

$\hookrightarrow$ akkor ha $B(t)$ időeltolási-invariáns, akkor X is az.

$$\Rightarrow \underline{X(t, t') = X(t - t')}$$

Ha $f(t) = f_0 \delta(t - t_0)$, akkor:

(először $t_0 = 0$ -ban)



$X(t) = 0$, ha $t < 0$ (kauzalitás feltétele)

$$B(t) = \int_{-\infty}^t X(t-t') f(t') dt' = \int_0^{\infty} X(\tau) f(t-\tau) d\tau$$

Monokromatikus zavar (adott ω -ja van)

$$f(t) = f_0 e^{-i\omega t} \quad \leftarrow \text{lineáris rendszámú megengedhetőség, hogy komplex } f \text{ -t is legyen.}$$

$$B(t) = \int_0^{\infty} X(\tau) f_0 e^{-i\omega t} e^{i\omega \tau} d\tau =$$

$$= \underbrace{\int_0^{\infty} X(\tau) e^{i\omega \tau} d\tau}_{X(\omega)} \cdot f_0 e^{-i\omega t} = B_{\omega} e^{-i\omega t}$$

$X(\omega)$: Fourier-transzformált.

$$B_{\omega} := X(\omega) f_0 \quad \leftarrow \text{a 2 Fourier-trafo közt lineáris kapcsolat van.}$$

$X(\omega)$ általában komplex. $X(\omega) = |X(\omega)| e^{i\phi(\omega)}$ } fázis

$X(t)$ mindig valós, most valósit valósra kapunk.

$$\Downarrow$$
$$X(\omega)^* = X(-\omega) \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} X(\omega) = \operatorname{Re} X(-\omega) \\ \operatorname{Im} X(\omega) = -\operatorname{Im} X(-\omega) \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{az } \neq \text{valós f.} \\ \text{Fourierjele'se igaz...} \end{array} \right\}$$

Fourier-tr. komplex frekvencián. (2)

$$X(z) = \int_0^{\infty} e^{izt} X(t) dt$$

$X(t)$ kulátos $\Rightarrow e^{izt} X(z)$ exp. lecsengő $t \rightarrow \infty$ -re.
deriválni is lehet...

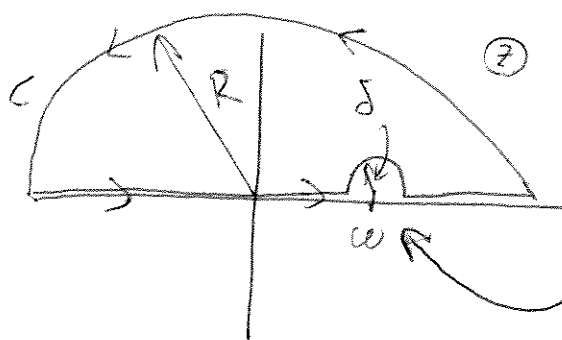
$\hookrightarrow X(z)$ analitikus $\operatorname{Im} z > 0$ fél síkon.

(Ha $X(t)$ a kulátos de nem cseng le, akkor
mincs Fourier-tr. !)

$$e^{izt} = e^{i \operatorname{Re} z t} \underbrace{e^{-\operatorname{Im} z t}}_{\text{cseng!}}$$

Kramers - Kroning reláció

- $X(z)$ analitikus fu., ha $\operatorname{Im} z > 0$.
- $X(z) \rightarrow 0$, ha $|z| \rightarrow \infty$.



A görbe beljébe van a
fu analitikus.

Ahol pólus lenne, azt
kiszárjuk.

$$\oint_C \frac{X(z)}{z-w} dz = 0$$

$R \rightarrow \infty$ - ben a félkörre vett integrál 0-hoz tart.

$$0 = \int_{-\infty}^{w-\delta} \frac{X(w')}{w'-w} dw' + \int_{w+\delta}^{\infty} \frac{X(w')}{w'-w} dw' + \int_{\pi}^0 \frac{X(w+\delta e^{i\varphi})}{w+\delta e^{i\varphi}-w} \delta e^{i\varphi} i d\varphi$$

$$z = w + \delta e^{i\varphi}$$

$\delta \rightarrow 0$... Főérték-integrál, az első 2 tagra

$$0 = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' - i\pi X(\omega)$$

$$\boxed{i X(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'}$$

ez a reláció...

$$- \operatorname{Im} X(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} X(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$

$$\operatorname{Re} X(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} X(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$

elej, ha a valós vagy az imaginárius részt ismerem.

↳ mindig van integrálás nem $\rightarrow$ van fázis!

$\operatorname{Im} X(\omega)$ és $\operatorname{Re} X(\omega)$ egymás

Hilbert-transzformáltjai.

kanonizálás $\Rightarrow$ ① $X(t) = 0$, ha $t < 0 \Rightarrow$ ② $X(z)$ analitikus, ha $\operatorname{Im} z > 0, \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ③ igaz a Kramers-Kronig.

Titchmarsh-tétel: ①, ②, ③ ekvivalens állítások.

Hörngger perturbációszámítás:

Hamilton: $H(t)$

Sch: $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$; kezdeti felt: $\psi(t_0) = \psi_0$

Le egynél lineáris, ekkor a kezdeti feltételről lineárisan függ a megoldás.

$$\psi(t) = U(t, t_0) \psi_0 ; U(t_0, t_0) = 1.$$

$U(t, t_0)$ unitár. Miért?

Ha ψ, ψ' a Sch. megoldásai.

$$\frac{d}{dt}(\psi(t), \psi'(t)) = (\psi(t), \psi'(t)) + (\psi'(t), \psi(t)) =$$

$$= \frac{1}{i\hbar} \left(-(\hat{H}\psi', \psi) + (\psi', \hat{H}\psi) \right) = 0 \quad \begin{array}{l} \text{A Sch. egyenlet} \\ \text{hermitikus} \end{array}$$

Vagyis $(\psi(t), \psi(t)) = (\psi_0, \psi_0)$

$$(\psi(t, t_0)\psi_0, \psi(t, t_0)\psi_0) = (\psi_0, \psi_0)$$

$$(\psi_0, U^\dagger U \psi_0) = (\psi_0, \psi_0) \Rightarrow \underline{U^\dagger(t, t_0)U(t, t_0) = 1.}$$

Ez $\forall \psi_0$ -ra igaz.

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(t, t_0)\psi_0 = H U(t, t_0)\psi_0 \quad \forall \psi_0.$$

Vagyis $i\hbar \frac{d}{dt} U(t, t_0) = H U(t, t_0)$ Ez az egyenlet határozza meg $U(t, t_0) - t$.

Ha H időfüggetlen: $U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}$

A QM rendszernek egy statisztikus sokasággal ^{is} jellemezhető.

$$\{\psi_\alpha(t)\} \quad , \quad P_\alpha : \text{valószínűség.}$$

$$\sum_\alpha P_\alpha = 1.$$

$$\langle A \rangle = \sum_{\alpha} P_{\alpha}(\psi_{\alpha}(t), A \psi_{\alpha}(t)) = \left(\text{Tr}(S(t) A) \right) =$$

↑ Sch.-kép, Heisenberg-kép

$$= \sum_{\alpha} P_{\alpha}(\psi_{\alpha}(t_0), U^{\dagger}(t, t_0) A U(t, t_0) \psi_{\alpha}(t_0)) =$$

$$= \text{Tr}(S(t_0) U^{\dagger}(t, t_0) A U(t, t_0))$$

$$\Rightarrow S(t) = U^{\dagger}(t, t_0) S(t_0) U(t, t_0)$$

Sűrűség-operátor
időfejlődése

perturbatív op.:

$$H' = H + V(t)$$

↑
időfüggő.

↖ zavar.

$$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} S(t, t_0) e^{\frac{i}{\hbar} H t_0}$$

Unitári transzformáció az időf. egy rendű átvisszavet az operátorokra.

$t = t_0$ -ban:

$$1 = e^{-\frac{i}{\hbar} H t_0} S(t_0, t_0) e^{\frac{i}{\hbar} H t_0} \Rightarrow S(t_0, t_0) = 1.$$

$$\text{Ha } V(t) = 0: \quad S(t, t_0) = 1.$$

$$i\hbar \dot{U} = H' U = (H + V) U$$

mindkét:

$$i\hbar \dot{U} = H e^{-\frac{i}{\hbar} H t} S(t, t_0) e^{\frac{i}{\hbar} H t_0} + e^{-\frac{i}{\hbar} H t} \dot{S}(t, t_0) e^{\frac{i}{\hbar} H t_0} - i\hbar$$

$\underbrace{\quad}_{HU} \rightarrow \text{ez kiesik.}$

$$e^{-\frac{i}{\hbar} H t} i\hbar \dot{S}(t, t_0) e^{\frac{i}{\hbar} H t_0} = V(t) e^{-\frac{i}{\hbar} H t} S(t, t_0) e^{\frac{i}{\hbar} H t_0}$$

$$i\hbar \dot{S}(t, t_0) = e^{\frac{i}{\hbar} H t} V(t) e^{-\frac{i}{\hbar} H t} S(t, t_0)$$

ért meg kell oldani ezzel: $S(t_0, t_0) = 1$.

$$\int_{t_0}^t \dot{S}(t', t_0) dt' = S(t, t_0) - S(t_0, t_0)$$

$$S(t, t_0) = 1 - i\hbar \frac{1}{\hbar} \int_{t_0}^t e^{\frac{i}{\hbar} H t'} V(t') e^{-\frac{i}{\hbar} H t'} S(t', t_0) dt'$$

Integrálegyenlet, iterációval megoldható. (reméljük)

Először az 1-et írjuk S helyére (pert. nélküli eset)

$$1.\text{-red: } S(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t e^{\frac{i}{\hbar} H t'} V(t') e^{-\frac{i}{\hbar} H t'} dt'$$

$$S(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t e^{\frac{i}{\hbar} H t'} V(t') e^{-\frac{i}{\hbar} H t'} \left(1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t'} e^{\frac{i}{\hbar} H t''} V(t'') e^{-\frac{i}{\hbar} H t''} S(t'', t_0) dt'' \right) dt'$$

és így tovább...

Konkrét alak: $V(t) = -\hat{A} f(t)$ (pl.: HB)

$\uparrow$
 fizikai
 mennyiség

$\uparrow$
 kölcsön
 erőssége

Most elhangyagoljuk a viromhatást, $f(t)$ adott.

A kölcsön rendszert klasszikusan kezeljük.

$$S(t, t_0) = 1 + \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t e^{\frac{i}{\hbar} H t'} A e^{-\frac{i}{\hbar} H t'} f(t') dt'$$

$$\begin{aligned}
 \langle B \rangle_t &= \text{Tr}(\rho(t) B) = \text{Tr}(U(t, t_0) \rho(t_0) U^\dagger(t, t_0) B) = \\
 &= \text{Tr}(\rho(t_0) U^\dagger(t, t_0) B U(t, t_0)) = \\
 &= \text{Tr} \left(\rho(t_0) e^{-\frac{i}{\hbar} H t_0} \left(1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t e^{\frac{i}{\hbar} H t'} A e^{-\frac{i}{\hbar} H t'} f(t') dt' \right) e^{\frac{i}{\hbar} H t} B \right. \\
 &\quad \left. e^{-\frac{i}{\hbar} H t} \left(1 + \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t e^{\frac{i}{\hbar} H t'} A e^{-\frac{i}{\hbar} H t'} f(t') dt' \right) e^{\frac{i}{\hbar} H t_0} \right)
 \end{aligned}$$

Tgh. berekenen de gemiddelde thermische evenwichtswaarde van:

$$\rho(t_0) = \frac{e^{-\beta H}}{Z} \quad ; \quad Z = \text{Tr}(e^{-\beta H})$$

Az $e^{-\beta H}$ - operator a Tr neemt op de eigenwaarde, is hetzelfde als $\rho(t_0) = \text{al.} \rightarrow$ eenheids.

Maakt $B(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H t_0} B e^{-\frac{i}{\hbar} H t}$

$$\begin{aligned}
 \langle B \rangle_t &= \text{Tr} \left(\frac{e^{-\beta H}}{Z} B(t) \right) + \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \text{Tr} \left(\frac{e^{-\beta H}}{Z} (B(t) A(t') - \right. \\
 &\quad \left. - A(t') B(t)) f(t') \right) + \mathcal{O}(f^2)
 \end{aligned}$$

~~$\text{Tr} \left(\frac{e^{-\beta H}}{Z} \right)$~~ Az door de Tr -shiftet aannemen, zijn de eigenwaarden behouden.

$t_0 \rightarrow -\infty$:

$$\langle B \rangle_t = \underbrace{\langle B \rangle_0}_{\text{egyensúlyi állapot}} + \int_{-\infty}^t \varphi_{BA}(t, t') f(t') dt'$$

$$\begin{aligned} \varphi_{BA}(t, t') &= \frac{i}{\hbar} \text{Tr} \left(\frac{e^{-\beta H}}{Z} [B(t), A(t')] \right) = \\ &= \frac{i}{\hbar} \langle [B(t), A(t')] \rangle_0 \end{aligned}$$

A válasz fu.:
$$\chi(t, t') = \begin{cases} \varphi_{BA}(t, t'), & \text{ha } t > t' \\ 0, & \text{ha } t < t' \end{cases}$$

2. előadás

$$\langle B \rangle_t = \langle B \rangle_0 + \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \langle [B(t), A(t')] \rangle_0 f(t') dt'$$

$\uparrow$
 $\frac{1}{Z} \text{Tr}(e^{-\beta H} B)$

$\nwarrow$ perturbáció
 $H' = H - A f(t)$

$B(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H t} B e^{-\frac{i}{\hbar} H t}$

A pert. paraméter 1. rendjélen vagyunk.
 t_0 -ban korábban egyensúlyt kényszerít fel.
 $f(t) \Rightarrow 0$, ha $t \leq t_0$; $t_0 \rightarrow -\infty$ a formuláiban.

$$\chi_{BA}(t, t') = \begin{cases} \frac{i}{\hbar} \langle [B(t), A(t')] \rangle_0, & \text{ha } t > t' \\ 0, & \text{ha } t < t' \end{cases} \rightarrow \text{kauzalitás.}$$

$$\frac{1}{Z} \text{Tr} \left(e^{-\beta H} e^{\frac{i}{\hbar} H t} B e^{-\frac{i}{\hbar} H t} e^{\frac{i}{\hbar} H t'} A e^{-\frac{i}{\hbar} H t'} \right) = \langle B(t) A(t') \rangle$$

↖ ↗
Spätes megoldás + kommutálás

vagyis a fenti = $\langle B(t-t') A(0) \rangle$, csak $t-t'$ -től függ.

$$\varphi_{BA}(t) = \frac{i}{\hbar} \langle [B(t), A(0)] \rangle \quad (\text{tehénleget időre})$$

→
vagyis: $\chi_{BA}(t) = \begin{cases} \varphi_{BA}, & \text{ha } t > 0 \\ 0, & \text{ha } t < 0. \end{cases}$

Monokromatikus zaj erején ...

$$f(t) = f_0 e^{-i\omega t} \quad (\text{vismaké' is véges, nem jö})$$

Gadiabatikus behatás

$$f(t) = f_0 e^{-i\omega t} e^{\varepsilon t}, \quad \varepsilon > 0, \text{ és } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ a mávalás végen.}$$

(∞ lassú behatás)

$$\langle B \rangle_t = \langle B \rangle_0 = \int_{-\infty}^t \varphi_{BA}(t-t') f(t') dt' =$$

$$= \int_0^{\infty} \varphi_{BA}(\tau) f(t-\tau) d\tau =$$

$$= f_0 e^{-i\omega t} e^{\varepsilon t} \int_0^{\infty} d\tau e^{i\omega \tau} e^{-\varepsilon \tau} \varphi(\tau) = *$$

↖
 $f_0 e^{i\omega t}$, $\varepsilon \rightarrow 0$.
Fourier, komplex felh, felh felh.

Nemesség!

$$* = \int_0^\infty e^{-i\omega t} \chi_{BA}(z = \omega + i\varepsilon) dz$$

↑ valódi 0-hoz kell tartani.

(Lemegjünk a valós tengelyre.)

$$* \langle B \rangle_t - \langle B \rangle_0 = \int_0^\infty e^{-i\omega t} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \chi_{BA}(\omega + i\varepsilon) d\omega$$

Példa: lineáris oszcillátor:

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2$$

$$H' = H + \underbrace{x f(t)}$$

kényszerítő potenciálja.

$$\langle x \rangle_t = 0 + \int_{-\infty}^t \varphi(t-t') f(t') dt'$$

↑
egyensúlyi
várható érték

$$\varphi(t) = \frac{i}{\hbar} \langle [x(t), x(0)] \rangle$$

Mozgásegyenlet $x(t)$ -re: $\frac{dx}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, x(t)] = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p(t)}{m}$

(Kommütátorok: $[p, x] = -i\hbar$; $[p^2, x] = -i\hbar 2p$.)

$$\frac{dp}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, p(t)] = -\frac{\partial H}{\partial x} = \underline{-m\omega_0^2 x(t)}$$

Egyenletre $\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t)$

§ megoldás

$$x(t) = x(0) \cos(\omega_0 t) + \frac{p(0)}{m\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

Korábbi feltételek: Sch.-képleti operátorok
 $(p(\cdot) = p; x(\cdot) = x.)$

$$[x(t), x(0)] = \frac{[p, x]}{m\omega_0} \sin(\omega_0 t) = \frac{\hbar}{i} \frac{1}{m\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

ez már egy függvény, nem operátor.

$$q(t) = \frac{1}{m\omega_0} \sin(\omega_0 t) \quad (\text{klasszikus oscillátorral u. ed-
kapjuk, nem operátort kell
átlagolni})$$

↓

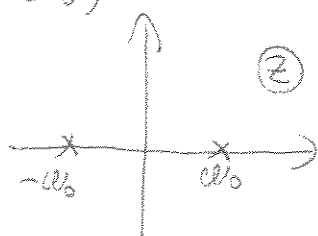
Fourier:

$$X(\omega) = \int_0^\infty e^{i\omega t} \frac{1}{m\omega_0} \sin(\omega_0 t) dt \quad \leftarrow \text{nem } \int, \text{ sin és } \cos -t \text{ kell v. ig integrálni...}$$

felv. felírás:

$$\begin{aligned} X(z) &= \int_0^\infty e^{izt} \frac{1}{m\omega_0} \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} dt = \\ &= \frac{1}{2im\omega_0} \left[\frac{e^{izt} e^{i\omega_0 t}}{i(z + \omega_0)} - \frac{e^{izt} e^{-i\omega_0 t}}{i(z - \omega_0)} \right]_0^\infty = \\ &= \frac{1}{2im\omega_0} \left(\frac{1}{z + \omega_0} - \frac{1}{z - \omega_0} \right) \end{aligned}$$

2 pólus, teljes komplex-
nukon értelmes.

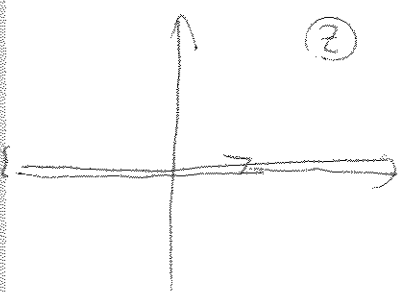


$\omega_0, -\omega_0$: pólusok.

$\hbar\omega_0$: energiamérték
kötés táv. (átmenet-) ②/3

Virma - Fourier: (felső félkörön...)

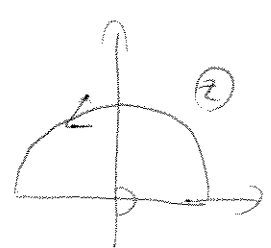
② $X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} dz e^{-izt} X(z) =$



$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-izt} \left(\frac{1}{z+i\omega_0} - \frac{1}{z-i\omega_0} \right) \frac{1}{2m\omega_0}$$

↑
körvonal

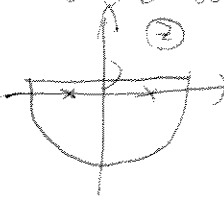
$e^{-izt} = e^{-i \operatorname{Re} z \cdot t} e^{i \operatorname{Im} z \cdot t}$ pozitív, a felső félkörön
negatív t -re tűnik el, mert

$t < 0$:  $\checkmark$ zárhatóak le ferdő körrel.
A fő félkörön $\frac{1}{z}$ -mel egyenlő-
ben tart 0-hoz.

A felső félkörön... $X(t) = 0$, ha $t < 0$.

Ha $t > 0$: akkor tart 0-hoz, ha $\operatorname{Im} z$ -vel 0-hoz tartunk.

$\rightarrow$ az alsó félkörön zárunk, és van két pólus.

②  $X(t) = \frac{1}{2\pi} \oint dz e^{-izt} \left(\frac{1}{z+i\omega_0} - \frac{1}{z-i\omega_0} \right) \frac{1}{2m\omega_0} =$

$$= \frac{1}{2\pi} (-2\pi i) \left(e^{-i(-\omega_0)t} - e^{-i\omega_0 t} \right) \frac{1}{2m\omega_0} =$$

$$= \frac{1}{m\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

A hurokalítás a két pólus biztosítja.

Valamfűggvény ábrázolása: (energia) $H|m\rangle = E_m|m\rangle$

$$\frac{\hbar}{i} \psi_{BA}(t) = \frac{1}{Z} \text{Tr} \left(e^{-\beta H} \left(B(t) A(0) - A(0) B(t) \right) \right) =$$

$$= \cancel{\frac{1}{Z} \text{Tr}} \frac{1}{Z} \sum_{m,n} e^{-\beta E_m} \langle m|B(t)|m\rangle \langle m|A(0)|n\rangle -$$

$$- \frac{1}{Z} \sum_{m,n} e^{-\beta E_m} \langle m|A(0)|n\rangle \langle m|B(t)|m\rangle =$$

$$= \frac{1}{Z} \sum_{m,n} \left(e^{-\beta E_m} - e^{-\beta E_n} \right) \langle m|B(t)|m\rangle \langle m|A(0)|n\rangle$$

Energiaábrázolásban az időfüggés explicité tehető.

$$\langle m|B(t)|m\rangle = \langle m|e^{\frac{i}{\hbar} H t} B e^{-\frac{i}{\hbar} H t}|m\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} E_m t} e^{\frac{i}{\hbar} E_m t} \langle m|B|m\rangle$$

$$\omega_{mn} := \frac{1}{\hbar} (E_m - E_n)$$

$$\frac{\hbar}{i} \psi_{BA}(t) = \sum_{m,n} \frac{e^{-\beta E_m} - e^{-\beta E_n}}{Z} \langle m|B|m\rangle \langle m|A|n\rangle e^{-i\omega_{mn}t}$$

Nem másképp is a valant, de az időfüggést kiemeltük.

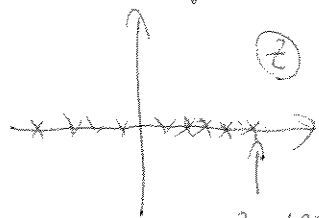
Fourier:

$$\int_0^\infty e^{izt} e^{-i\omega_{mn}t} dt = \left[\frac{e^{izt} e^{-i\omega_{mn}t}}{i(z - \omega_{mn})} \right]_0^\infty = \dots \quad \text{Im } z > 0 \quad \infty\text{-ben elhanyagolható}$$

$$\dots = \frac{1}{i(z - \omega_{mn})}$$

$$\chi_{BA}(z) = -\frac{1}{\hbar} \sum_{m,n} \frac{e^{-\beta E_m} - e^{-\beta E_n}}{z} \frac{\langle n|B|m\rangle \langle m|A|n\rangle}{z - \omega_{mn}}$$

az egy meomorf függvény (nagypólusok)



Mint a lén. me.

$$z = \omega_{mn} = \frac{1}{\hbar} (E_m - E_n)$$

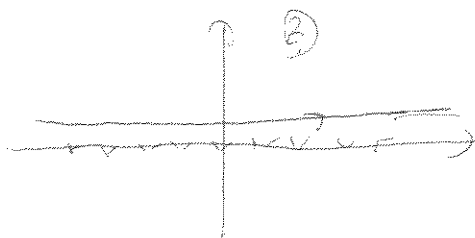
Kivételként: másképp: akkor jelenik meg az energiatmenet pólusoként, ha $\langle B \rangle \langle A \rangle \neq 0$.

(eddig retardált válaszok -t néztünk)

↳ múltban lévő zavarok.

~~Avan~~ Avanszált: jövőben lévő zavarok. → első félretek. Fourierreduk.

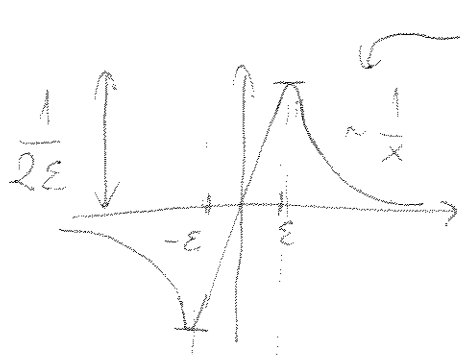
Vismakap.



első félretek.

A valószínűségi disztribúcióként értelmezhető a transformált.

$$\frac{1}{x + i\varepsilon} = \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} - i \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$$

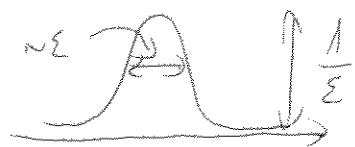


$[-\varepsilon, \varepsilon]$ -on kívül $\frac{1}{x}$ értékeket és egy próbafe.-et növe.

$$\varepsilon \rightarrow 0 : \mathcal{P} \frac{1}{x}$$

Az $x=0$ pontot ki kell hagyni.

képzetes rész: Lorentz-görbe.



$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \begin{cases} \infty, & \text{ha } x=0 \\ 0, & \text{ha } x \neq 0 \end{cases}$$

Az alábbi terület konstans?

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{1}{s^2 + 1} = \arctan s \Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi$$

$\Rightarrow \epsilon \rightarrow 0$ esetén $\pi \delta(x)$ len a képzetes rész.

Vagyis: $\frac{1}{x+i\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{P} \frac{1}{x} - i\pi \delta(x)$

ezen disztribúciók regularizáltja a bal oldal függvénye.

$$\frac{1}{\omega+i\epsilon - \omega_{mn}} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{P} \frac{1}{\omega - \omega_{mn}} - i\pi \delta(\omega - \omega_{mn})$$

$$X_{BA}(\omega) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} X_{BA}(\omega + i\epsilon) = X'_{BA}(\omega) + iX''_{BA}(\omega)$$

$$X'_{BA}(\omega) = -\frac{1}{\hbar} \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m}}{Z} \langle m|B|m \rangle \langle m|A|n \rangle \mathcal{P} \frac{1}{\omega - \omega_{mn}}$$

$$X''_{BA}(\omega) = \frac{1}{\hbar} \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m}}{Z} \langle m|B|m \rangle \langle m|A|n \rangle \pi \delta(\omega - \omega_{mn})$$

A mtrix- elemek komplexek. $X_{BA} = X' + iX''$ nem komplex és valódi rész! Csak ha $B=A$.

Ha $B=A$, akkor.

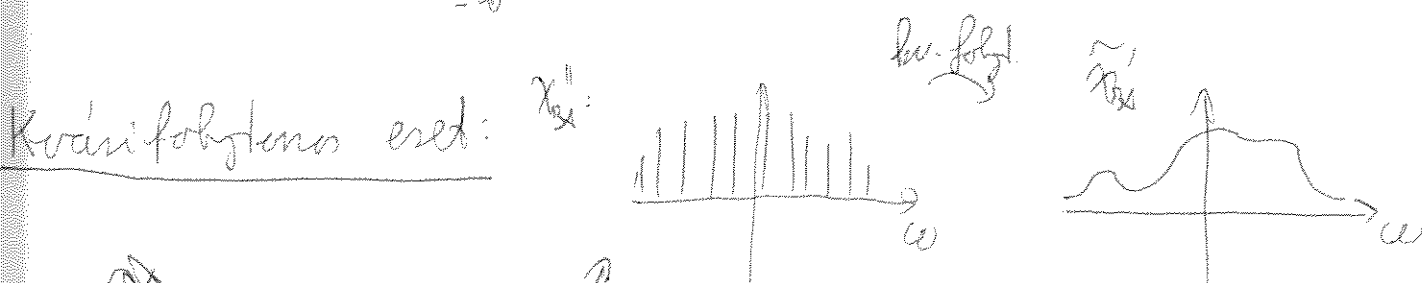
$$\langle m|B|m\rangle \langle m|A|m\rangle = |\langle m|A|m\rangle|^2$$

$$\Rightarrow X'_{AA} = \text{Re } X_{AA} ; \quad X'' = \text{Im } X_{AA}.$$

X''_{BA} meghatározva a feljes $X_{BA}(z)$ -t.

$$[1]: X_{BA}(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X''_{BA}(w')}{z-w'} dw'$$

mindkét félreken
szimmetrikus kifejezés.



~~X_{BA}~~

jó, ha a frek. felbontás
kint a δ -k körti távolodnak
képest.

[1] akkor is jó, ha pontosan látni mérjük a frekvenciát.

a való. tengelyen:

$$X_{BA}(z = w \pm i\varepsilon) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}''_{BA}(w') \left(\mathcal{P} \frac{1}{w-w'} \mp i\pi \delta(w-w') \right) dw'$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P} \frac{X''_{BA}(w)}{w-w'} dw' \mp \frac{1}{\pi} i\pi \tilde{X}''_{BA}(w)$$

$$\frac{\downarrow +\varepsilon}{\uparrow -\varepsilon} \text{Re}(z)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (X_{BA}(w+i\varepsilon) - X_{BA}(w-i\varepsilon)) =$$

Nem mindegy, honnan
közelítjük.

$$= \text{Li } \tilde{X}''_{BA}(w) \quad \text{A pólusok helyzetét
válasz vani át.}$$

← A való. tengelyen
másként van.

A makedár miatt nem zárhatjuk be alul a kontúr.

Analitikus folytatás kell...

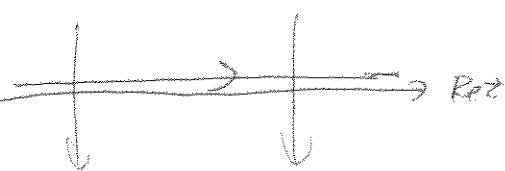
Vinna - Eourier:

(2)

A felsőt analitikusan

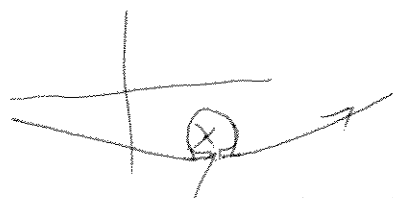
folytatjuk alul.

A görbét elbőrdjük lefelé felni.

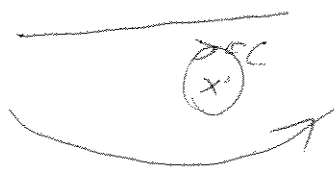


analitikus folyt.

Az alvó felületen találjuk egy pólust! (x)



a z határmakam
u. az a járulékat
adnak



körbezárjuk a pólust.

1 pólus járuléka: $\frac{1}{2\pi} \oint_C e^{-izt} \frac{Re z}{z - (R - i\Gamma)} dz$ =
(t) 0 ered... $\leftarrow$ egyenes pólus

$$= \frac{1}{2\pi} (-2\pi i) Re^{-i(R - i\Gamma)t} = -i Re^{-iRt} e^{-\Gamma t}$$

(?)

végző élettadami elemi g
(elemi gsz u. kvádrinémaorke)

(?)

→ kvádr. eredben X viselkedését az analitikus foly-
tatás singularitásai határozzák meg.

→ végző élettadami rendszer spektrumát kapjuk, nem a
valódi spektrumot.

Nemesség!

3. kövadás

Megmaradás mennyiség valami lineáris rendszer o.

mind:

$$\frac{i}{\hbar} \langle [B(t), A(0)] \rangle = ?$$

$$B(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H t} B e^{-\frac{i}{\hbar} H t}, \quad [B, H]$$

$$\langle B A \rangle = \frac{1}{Z} \text{Tr} \left(e^{-\beta H} B A \right) = \langle A B \rangle \Rightarrow \langle [A, B] \rangle = 0.$$

Pl.: a rendszer energiája.

$$\langle H \rangle_t - \langle H \rangle_0 = \mathcal{J}(\rho^i) \quad \text{disszipációt viszont}$$

pont is adnia meg...

$$\frac{d}{dt} \langle H \rangle_t = \frac{d}{dt} \text{Tr} \left(\rho(t) H \right) = \text{Tr} \left(\dot{\rho}(t) H \right) = \text{5 m. egyen-}$$

bőlet beírjuk.

$$= -\frac{i}{\hbar} \text{Tr} \left([H', \rho] H \right) = -\frac{i}{\hbar} \text{Tr} \left((-\rho H' + H' \rho) H \right) =$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \text{Tr} \left(\rho (H H' - H' H) \right) = \dots$$

$H' = H - A f$ → csak a 2. taggal nem kommutál a H !

$$= +\frac{i}{\hbar} \text{Tr} \left(\rho (H A - A H) \right) f = \text{Tr} \left(\rho \dot{A} \right) f = \langle \dot{A} \rangle_t f.$$

mindha sebesség zero lenne. (3/1)

$$\langle \dot{A} \rangle_t \sim f \Rightarrow \frac{d}{dt} \langle H \rangle_t \sim f^2$$

$$W := \frac{d}{dt} \langle H \rangle_t = \langle \dot{A} \rangle_t f$$

Monochromatikus raven: $f(t) = f_0 \cos(\omega t) = f_0 \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$

$$\langle A \rangle_t = \frac{f_0}{2} X(-\omega) e^{i\omega t} + \frac{f_0}{2} X(\omega) e^{-i\omega t}$$

$$\langle \dot{A} \rangle_t = \frac{f_0}{2} (i\omega X(-\omega) e^{i\omega t} - i\omega X(\omega) e^{-i\omega t})$$

$$\langle \dot{A} \rangle_t f(t) = \frac{f_0^2}{4} (i\omega X(-\omega) - i\omega X(\omega) + i\omega X(\omega) e^{2i\omega t} -$$

$$- i\omega X(\omega) e^{-2i\omega t})$$

időben állandó rész, idő-
átlagban eltűnik; ami
energiát bejuttat, az
vissza is kapom.

Átlaglag:

$$\bar{W} = (-i\omega) \frac{f_0^2}{4} (X(\omega) - \underbrace{X(-\omega)}_{X^*(\omega)}) = \frac{f_0^2}{2} \omega \operatorname{Im}(X(\omega))$$

$2 \operatorname{Im} X(\omega)$ $\nearrow$

$$\boxed{\bar{W} = \frac{f_0^2}{2} \omega \operatorname{Im} X_{AA}(\omega)}$$

$X_{AA}(\omega)$ ω páros fu.

$$\frac{f_0}{\sqrt{2}} = f_{\text{eff}}$$

Folytatás: $\text{Im } X_{AA}(\omega) = X_{AA}^0(\omega)$

Smitt,
whelyett'

Energiaábrázolásban:

$$\overline{W} = \frac{\int_0^2}{2} \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_m} - e^{\beta E_n}}{Z} |\langle n | A | m \rangle|^2 \frac{\pi}{\hbar} \delta(\omega - \omega_{mn}) \frac{E_m - E_n}{\hbar}$$

Energiaábrázolás csak akkor van, ha az egyik rezonanciánál vagyunk.

(Oscilláló átadás van, de időábrázolás nincs, ha nem rezonanciánál vagyunk).

1 tagra: $\frac{n \rightarrow m}{W_{nm}} = \frac{e^{-\beta E_m}}{Z} \underbrace{\frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{f_0}{2}\right)^2 |\langle m | A | n \rangle|^2 \delta(\hbar\omega - (E_m - E_n))}_{n-m \text{ átmenet m.-e.}}$

$E_m - E_n$ $\uparrow$
n-en lévő m.-e.

A kifejezés = Energia $\times$ átmenet m.-e.

$m \rightarrow m$:

$$\dots + \frac{e^{-\beta E_m}}{Z} \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{f_0}{2}\right)^2 |\langle m | A | m \rangle|^2 \delta(\hbar\omega - (E_m - E_m)) (E_m - E_m)$$

Így:

$$W = \sum_{n,m} W_{nm}$$

Latni: $(e^{-\beta E_m} - e^{-\beta E_n})(E_m - E_n) \geq 0 \Rightarrow \boxed{\overline{W} \geq 0}$ mindig disszipáció van.

$\omega \rightarrow 0$ esetén is 0 a valószínűségi mennyiség.

$\hookrightarrow$ az adiabátikus valószínűség.

egyensúly $\leftrightarrow$ izoterm valószínűség.

Korrelációs függvények.

$$S_{BA}(t) = \langle B(t)A(0) \rangle \quad C_{BA} = \frac{1}{2} \left(\langle B(t)A(0) \rangle + \langle A(0)B(t) \rangle \right) =$$

$$\tilde{S}_{BA}(t) = \langle A(0)B(t) \rangle \quad = \frac{1}{2} \left(S_{BA}(t) + \tilde{S}_{BA}(t) \right)$$

$$C_{BA}(t) = \frac{i}{\hbar} \left(\langle B(t)A(0) \rangle - \langle A(0)B(t) \rangle \right) = \frac{i}{\hbar} \left(S_{BA}(t) - \tilde{S}_{BA}(t) \right)$$

Bármely 2. két követhet a másik 2.

Fluktuáció - disszipáció tétel:

$$S_{BA}(t) = \text{Tr} \left(\frac{e^{-\beta H}}{Z} B(t) A(0) \right) = \sum_{mm} \frac{e^{-\beta E_n}}{Z} \langle n|B|m \rangle e^{-\frac{i}{\hbar}(E_m - E_n)t} \langle m|A|n \rangle$$

Fourier-transzformáció:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega_{mm}t} e^{i\omega t}$$

$\leftarrow$ nem létezik, csak distribúciós értelemben.

(regularizálni kell)

(jelzettek)

$$\int_{-\infty}^0 dt e^{i(\omega - \omega_{mm})t} e^{\epsilon t} + \int_0^{\infty} dt e^{i(\omega - \omega_{mm})t} e^{-\epsilon t} = *$$

1. tag: $t \leftrightarrow -t$ is változik.

$$\int_0^{\infty} dt' e^{-i(\omega - \omega_{mn})t'} e^{\varepsilon t'} \leftarrow \text{ez a második tag konjugáltja!}$$

$$* = 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-i(\omega - \omega_{mn})t} e^{\varepsilon t} dt = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{e^{i(\omega - \omega_{mn})t} e^{\varepsilon t}}{i(\omega - \omega_{mn}) + \varepsilon} \right]$$

határeset:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega - \omega_{mn})t} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2 \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{i} \underbrace{\frac{1}{\omega - \omega_{mn} + i\varepsilon}}_{\delta_{\omega}} \right\} =$$

$$= 2\pi \delta(\omega - \omega_{mn})$$

$$S_{BA}(\omega) = \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_m}}{Z} \langle n|B|m\rangle \langle m|A|n\rangle 2\pi \delta(\omega - \omega_{mn})$$

$$\tilde{S}_{BA}(\omega) = \operatorname{Tr} \left(\frac{e^{-\beta H}}{Z} A(0) B(t) \right) =$$

$$= \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_m}}{Z} \langle m|A|m\rangle \langle n|B|m\rangle e^{-i\omega_{mn}t}$$

$\leftarrow$ csak ebben tér el S_{BA} -tól...

$$\Rightarrow \tilde{S}_{BA}(\omega) = \sum_{n,m} e^{-\beta E_m} \frac{1}{Z} \langle n|B|m\rangle \langle m|A|m\rangle 2\pi \delta(\omega - \omega_{mn})$$

$$e^{-\beta E_m} = e^{-\beta E_n} e^{-\beta(E_m - E_n)} = e^{-\beta E_n} e^{-\beta \hbar \omega_{mn}} = e^{-\beta E_n} e^{-\beta \hbar \omega}$$

$\uparrow$
 δ miatt $\omega \rightarrow$
 ismétlés...

$$\tilde{S}_{BA}(\omega) = e^{-\beta \hbar \omega} S_{BA}(\omega) \quad \text{F-D tétel}$$

$$C_{BA}(\omega) = \frac{1}{2} (S_{BA}(\omega) + \tilde{S}_{BA}(\omega)) = \frac{1}{2} S_{BA}(\omega) (1 + e^{-\beta \hbar \omega})$$

$$\varphi_{BA}(\omega) = \frac{i}{\hbar} (S_{BA}(\omega) - \tilde{S}_{BA}(\omega)) = \frac{i}{\hbar} S_{BA}(\omega) (1 - e^{-\beta \hbar \omega}) =$$

$$= \frac{i}{\hbar} \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_m} - e^{-\beta E_n}}{2} \langle m|B|m\rangle \langle m|A|m\rangle 2\pi \delta(\omega - \omega_{mn}) =$$

$$= 2i \chi''_{BA}(\omega)$$

$$\frac{C_{BA}(\omega)}{\varphi_{BA}(\omega)} = \frac{C_{BA}(\omega)}{2i \chi''_{BA}(\omega)} = \frac{\hbar}{2i} \frac{1 + e^{-\beta \hbar \omega}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}} = \frac{\hbar}{2i} \coth\left(\frac{\beta \hbar \omega}{2}\right)$$

F-D tétel:

$$C_{BA}(\omega) = \hbar \coth\left(\frac{\beta \hbar \omega}{2}\right) \chi''_{BA}(\omega)$$

↑
 termikus egyensúlyban
 mármint

↑
 termikus egyensúlyból
 kiindulva mármint

$$B=A \text{ eset: } C_{AA}(\omega) = \hbar \coth\left(\frac{\beta \hbar \omega}{2}\right) \chi''_{AA}(\omega)$$

↑
 auto. fu. → fluktuáció-terhelés → dissipáció adja.

Egenskaps: alla är idotukörin-invariant.

(är idotukörin på alla arconer m. - e.)

idotukörin.

$$\tilde{B} = \varepsilon_B B$$

$$\varepsilon_B = \pm 1.$$

$$\tilde{A} = \varepsilon_A A$$

$$\langle B(t) A(0) \rangle = \langle \tilde{A}(0) \tilde{B}(-t) \rangle = \varepsilon_A \varepsilon_B \langle A(0) B(-t) \rangle$$

$$\underline{\varphi_{BA}(t)} = \frac{i}{\hbar} \left(\langle B(t) A(0) \rangle - \langle A(0) B(t) \rangle \right) =$$

$$= \varepsilon_A \varepsilon_B \frac{i}{\hbar} \left(\langle A(0) B(-t) \rangle - \langle B(-t) A(0) \rangle \right) =$$

$$= -\varepsilon_A \varepsilon_B \frac{i}{\hbar} \left(\langle B(-t) A(0) \rangle - \langle A(0) B(-t) \rangle \right) = \underline{\underline{-\varepsilon_A \varepsilon_B \varphi_{BA}(-t)}}$$

Markipp $\underline{\underline{\varphi_{BA}(t)}} = \varepsilon_A \varepsilon_B \frac{i}{\hbar} \left(\langle A(t) B(0) \rangle - \langle B(0) A(t) \rangle \right) = \underline{\underline{\varepsilon_A \varepsilon_B \varphi_{AB}(t)}}$

positiv idotukörin...

$$\boxed{\chi_{BA}(t) = \varepsilon_A \varepsilon_B \chi_{BA}(t)}$$

$$\varphi_{BA}(\omega) = \int_{-\infty}^0 dt e^{i\omega t} \varphi_{BA}(t) + \underbrace{\int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} \varphi_{BA}(t)}_{\chi_{BA}(\omega)}$$

$t' = -t \dots$ etc.

$$\underline{\varphi_{BA}(\omega) = X_{BA}(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{-i\omega t'} \varphi_{BA}(-t') = X_{BA}(\omega) - \varepsilon_A \varepsilon_B \underbrace{X_{BA}(-\omega)}_{- \varepsilon_A \varepsilon_B \varphi_{BA}(\omega)}$$

$$\varphi_{BA}(\omega) = X_{BA}(\omega) - \varepsilon_A \varepsilon_B X_{BA}^*(\omega)$$

2. eset: ① $\varepsilon_A = \varepsilon_B \dots$ $\varphi_{BA}(\omega) = X_{BA}(\omega) - X_{BA}^*(\omega) = 2i \operatorname{Im} X_{BA}(\omega)$

② $\varepsilon_A \neq \varepsilon_B$

$$\varphi_{BA}(\omega) = X_{BA}(\omega) + X_{BA}^*(\omega) = 2 \operatorname{Re} X_{BA}(\omega)$$

eredet omenezve: $\varphi_{BA}(\omega) = 2i X_{BA}''(\omega)$ (?)

$$X_{BA}''(\omega) = \begin{cases} \operatorname{Im} X_{BA}(\omega), & \text{ha } \varepsilon_A \varepsilon_B = 1 \\ \frac{1}{i} \operatorname{Re} X_{BA}(\omega), & \text{ha } \varepsilon_A \varepsilon_B = -1. \end{cases}$$

Vagyis a $X_{BA}(\omega) = X_{BA}'(\omega) + i X_{BA}''(\omega)$ valós + képzetes, ha a 2 menüjesség azonosan transzformálódik.

F-D tétel: $C_{BA}(\omega) = \operatorname{tch} \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) X_{BA}''(\omega) = \dots$

$$= \begin{cases} \operatorname{tch} \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \operatorname{Im} X_{BA}(\omega), & \text{ha } \varepsilon_A \varepsilon_B = 1 \\ \frac{1}{i} \operatorname{tch} \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \operatorname{Re} X_{BA}(\omega), & \text{ha } \varepsilon_A \varepsilon_B = -1. \end{cases}$$

ch ω -nak páros fu.-e $\Rightarrow \varepsilon_A \varepsilon_B = 1$ esetén $C(\omega)$ valós, páros

$\Rightarrow \varepsilon_A \varepsilon_B = -1$ esetén $C(\omega)$ képzetes, páros. (9/8)

Klasszikus határeset: $\beta \hbar \omega = \frac{\hbar \omega}{k_B T} \ll 1$.

$$\hbar \coth\left(\frac{\beta \hbar \omega}{2}\right) \approx \hbar \frac{2}{\beta \hbar \omega} = \frac{2 k_B T}{\omega} \quad \text{ah} \ x \approx \frac{1}{x}, \text{ ha } x \ll 1.$$

$$C_{BA}(\omega) = \frac{2 k_B T}{\omega} \chi''_{BA}(\omega) \quad [1]$$

lehet, hogy $C_{BA}(\omega)$ -t csak klasszikus tartománybeli ω -k haddörökh meg! $\rightarrow$ ehhez $\forall$ lényeges frekvenciára igaz. a [1]

$$C_{BA}(\omega) = \frac{2 k_B T}{\omega} \frac{\varphi_{BA}(\omega)}{2i} \Rightarrow -i \omega C_{BA}(\omega) = -k_B T \varphi_{BA}(\omega)$$

Virma - Fourier: $\frac{\partial C_{BA}(t)}{\partial t} = -k_B T \varphi_{BA}(t)$

$$\chi_{BA}(t) = \begin{cases} -\frac{1}{\hbar T} \frac{\partial C_{BA}(t)}{\partial t}, & \text{ha } t > 0. \\ 0, & \text{ha } t < 0 \end{cases} \quad \text{recept klasszikus rendszer esetére.}$$

4. előadás

Klasszikus eset:

$$\langle B(t) A(0) \rangle = \langle B(0) A(t) \rangle \quad \left(\frac{d}{dt} \right)$$

$$\langle \dot{B}(t) A(0) \rangle = - \langle B(0) \dot{A}(-t) \rangle = \langle B(t) \dot{A}(0) \rangle$$

$$-\frac{1}{k_B T} \langle \dot{B}(t) A(0) \rangle = \frac{1}{k_B T} \langle B(t) \dot{A}(0) \rangle$$

Fourier: $\chi_{BA}(\tau) = -\frac{1}{k_B T} \int_0^\infty dt e^{it\tau} \langle \dot{B}(t) A(0) \rangle = \dots$ par. int...

$$= \left[-\frac{1}{k_B T} e^{i\omega t} \langle B(t) A(0) \rangle \right]_0^\infty + \frac{i\omega}{k_B T} \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \langle B(t) A(0) \rangle =$$

$$= \underbrace{\langle BA \rangle}_{\text{statisches}} + \frac{i\omega}{k_B T} \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \langle B(t) A(0) \rangle$$

statisches
värde.

Örnegmalbelyok:

$$\varphi_{BA}(t) = \frac{i}{\hbar} \langle [B(t), A(0)] \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \underbrace{\varphi_{BA}(\omega)}_{\text{Li } X_{BA}''(\omega)} =$$

$$= \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} X_{BA}''(\omega) \quad \left/ \frac{d}{dt} \right.; t=0 \dots$$

$$\underbrace{\frac{i}{\hbar} \langle [B, A] \rangle}_{\text{egyenlőség, most } t=0 \dots} = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega X_{BA}''(\omega) \underset{\uparrow}{=} \frac{i}{\pi \hbar} \sum_{n,m} \frac{e^{-\beta E_n} + e^{-\beta E_m}}{2} \langle n | B | m \rangle \langle m | A | n \rangle$$

X_{BA}'' -ben van $\delta(-)$ integrálandó.

$$\left. \frac{d^{(n)} \varphi_{BA}(t)}{dt^n} \right|_{t=0} = \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega (-\omega)^n X_{BA}'(\omega) \quad (\text{ha } \mathcal{F} \text{ egyértelmű!})$$

PL (örnégmalbelyok):

$$C_{BA}(t=0) = \frac{1}{2} \langle BA + AB \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega C_{BA}(\omega) \stackrel{\downarrow}{=} \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hbar \coth\left(\frac{\beta \hbar \omega}{2}\right) X_{BA}''(\omega)$$

F-D képlet...

Elektromos vezetős: (N db töltéshordozó)

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} - \sum_{i=1}^N e \underline{r}_i \underline{E}(t) \quad \text{minősítményhatás}$$

(a töltéssűrűséget nem befolyásolja a megmozdítás).

$E(t)$ hullám λ -ja $\gg$ a rendszer mérete.

(nem lehet túl nagy frekvencia)

Szerepeltetés: $A \rightarrow \sum_i e \underline{r}_i$ (polárizáció) $\underline{P}$

$B \rightarrow \underline{I}(t)$ (ed mágnes) $\underline{I} = \sum_e e \underline{v}_i = \sum_i e \frac{\underline{p}_i}{m}$ (áram)

Izotrop rendszer: $\underline{I} \parallel \underline{E}$, $\underline{P} \parallel \underline{E}$ (elhagyjuk a vektorjelölést.)

$$I(t) = \int_{-\infty}^t dt' \chi_{IP}(t-t') E(t') ; \text{ ahol } \chi_{IP} = \frac{i}{\hbar} \langle [I(t), P(0)] \rangle$$

Áramsűrűség:
$$j(t) = \frac{I(t)}{V} = \int_{-\infty}^t dt' \phi(t-t') E(t')$$

$$\Rightarrow \phi(t) = \frac{\chi_{IP}(t)}{V}$$

Hőtelvezetés: $\epsilon_P = 1$; $\epsilon_I = -1$. $\Rightarrow \chi_{IP}''(\omega) = \frac{1}{i} \text{Re} \chi_{IP}(\omega)$

$$\chi_{IP}(t) = \frac{i}{\hbar} \langle [I(t), P(0)] \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \frac{i}{\hbar} \langle [P(t), P(0)] \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \chi_{PP}(t)$$

$\uparrow$
 $\dot{P}(t)$

$$\Rightarrow \chi_{IP}(\omega) = -i\omega \chi_{PP}(\omega) \Rightarrow \chi_{IP}''(\omega) = -i\omega \chi_{PP}'(\omega) = -i\omega \text{Im} \chi_{PP}^*(\omega)$$

Dissipáció:

$$\overline{W} = \langle \dot{P} \rangle_t \cdot E(t) = \langle I(t) \rangle E$$

monochromatikus zavar. $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$

$$\begin{aligned} \overline{W} &= \frac{E_0^2}{2} \omega \operatorname{Im} \chi_{pp}(\omega) = \frac{E_0^2}{2} i \chi_{IP}''(\omega) = \frac{E_0^2}{2} \operatorname{Re} \chi_{IP}(\omega) = \\ &= V \frac{E_0^2}{2} \operatorname{Re} \epsilon(\omega) \end{aligned}$$

örönm.: $\varphi_{BA}(0) = \frac{1}{\hbar} \langle [B, A] \rangle = \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{BA}''(\omega) d\omega =$

$$= \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{IA}''(\omega) d\omega = \frac{1}{\hbar} \langle [I, P] \rangle$$

$$\frac{1}{i} \operatorname{Re} \chi_{IP}(\omega) = \frac{V}{i} \operatorname{Re} \epsilon(\omega)$$

$$[I, P] = \sum_i \sum_j \left[e \frac{p_i}{m}, e x_j \right] = \frac{e^2}{m} \sum_{i=1}^N \frac{\hbar}{i} = \frac{\hbar}{i} \frac{e^2}{m} N.$$

Lejegy: nem számít,
hogy mi a töltött ré-
snek Hamiltonja.

$$\frac{V}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \epsilon(\omega) d\omega = \frac{e^2}{m} N$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \epsilon(\omega) d\omega = \frac{\hbar e^2}{m} n \quad ; \quad n := \frac{N}{V}$$

Minden vezetős elme-
let elsőj. igazság. kell
lennie.

Klassikus közelítésben...

$$\chi_{IP}(t) = \frac{1}{\hbar_B T} \langle \underline{I(t)} \underline{I(0)} \rangle \quad \underline{(t)_0}$$

áramerősség korrelációs függvénye.

Relaxációs idő közelítés: $\langle I(t) I(0) \rangle = \langle I^2 \rangle e^{-t/\tau}$

exp-lecseng

devis

ha $t \rightarrow \infty$, elhanyagolható

$$\langle I^2 \rangle = \sum_i \sum_j \langle e v_i e v_j \rangle = e^2 \sum_{ij} \langle v_i v_j \rangle \stackrel{\downarrow}{=} \frac{\hbar_B T}{m} e^2 N$$

$\sum_{ij} \langle v_i^2 \rangle \leftarrow$ (egymástól füglenek a részecskék sebességei)

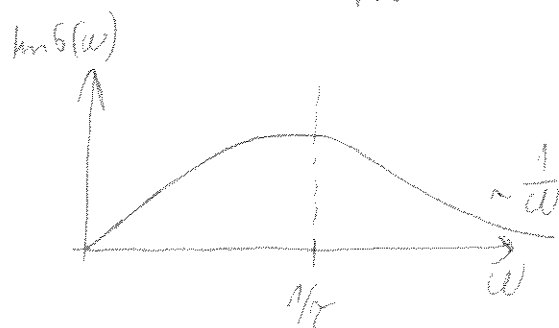
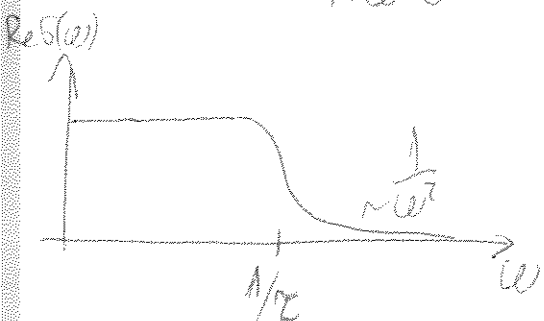
$$\sigma(t) = \frac{1}{V} \chi_{IP}(t) = \frac{ne^2}{m} e^{-t/\tau}$$

$$\sigma(\omega) = \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \frac{ne^2}{m} e^{-t/\tau} = \frac{ne^2}{m} \frac{1}{1/\tau - i\omega} = \frac{ne^2}{m} \tau \frac{1}{1 - i\omega\tau}$$

(ugyanaz, mint a Drude-modell ...)

$$\omega=0\text{-ban } \sigma_0 = \frac{ne^2}{m} \tau$$

$$\text{Re } \sigma(\omega) = \sigma_0 \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad ; \quad \text{Im } \sigma(\omega) = \sigma_0 \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$



$$\frac{ne^2}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re } \sigma d\omega = \frac{ne^2}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{1 + \omega^2 \tau^2} d\omega = \frac{ne^2}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{ne^2}{m} [\arctan y]_{-\infty}^{\infty} = \frac{ne^2}{m} \pi$$

Törési ϵ -ok mozgása: optikai módusok...

Drude: m helyett effektív m , m helyett a vezetési ϵ -ok rendszere (3)

Asimptotikus kifejtés:

$$\varphi_{BA}(\underline{z}) = \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \varphi_{BA}(t) = \left[\frac{e^{i\omega t}}{i\omega} \varphi_{BA}(t) \right]_0^\infty - \frac{1}{i\omega} \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \dot{\varphi}_{BA}(t) =$$

felvétel... parc. int

$$= -\frac{\varphi_{BA}(0)}{i\omega} - \frac{1}{i\omega} \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \dot{\varphi}_{BA}(t) = -\frac{\varphi_{BA}(0)}{i\omega} + \frac{\dot{\varphi}_{BA}(0)}{(i\omega)^2} +$$

$$+ \frac{1}{(i\omega)^2} \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \ddot{\varphi}_{BA}(t)$$

Alkalmazható lokális operátorokra: $\hat{A}(\underline{r})$

Fourier-elválítás: $A(\underline{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\underline{q}} e^{i\underline{q}\underline{r}} A_{\underline{q}}$ periodikus
h. felt. $\rightarrow \underline{q}$ disk.
érték...

$$\underline{q}_x = \frac{2\pi}{L} m_x \quad (m_x \in \mathbb{Z})$$

$$A_{\underline{q}} = \frac{1}{\sqrt{V}} \int d\underline{r} e^{-i\underline{q}\underline{r}} A(\underline{r})$$

pl.: rezonátor - rendszere: $\hat{S}(\underline{r}) = \sum_{\alpha=1}^N \delta(\underline{r} - \underline{r}_\alpha)$

$\rightarrow$ másodkvantáltak: $\hat{S}(\underline{r}) = \sum_{\alpha=1}^N \psi_{\alpha}^+(\underline{r}) \psi_{\alpha}(\underline{r})$

$\rightarrow$ Fourier: $S_{\underline{q}} = \frac{1}{\sqrt{V}} \int d\underline{r} e^{-i\underline{q}\underline{r}} \sum_{\alpha=1}^N \delta(\underline{r} - \underline{r}_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\alpha} e^{-i\underline{q}\underline{r}_\alpha}$

Kommutator - Nullvektor:

← hier symmetrisch
antisymmetrisch liegen.

$$\underline{J} = \frac{1}{i} \sum_{\alpha} \left(\frac{p_{\alpha}}{m} \delta(r - r_{\alpha}) + \delta(r - r_{\alpha}) \frac{p_{\alpha}}{m} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{V}} \sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{p_{\alpha}}{m} e^{-iqr_{\alpha}} + e^{-iqr_{\alpha}} \frac{p_{\alpha}}{m} \right)$$

Kontinuierlich: $\underline{\dot{S}}_q = \frac{i}{\hbar} [H, \underline{S}_q] = \frac{i}{\hbar} \left[\sum_{\alpha} \frac{p_{\alpha}^2}{2m}, \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\alpha'} e^{-iqr_{\alpha'}} \right] =$

$$= \frac{i}{\hbar} \sum_{\alpha} \left[\frac{p_{\alpha}^2}{2m}, e^{-iqr_{\alpha}} \right] \frac{1}{\sqrt{V}} = \dots *$$

$$\left[\frac{p^2}{2m}, e^{-iqr} \right] = p^2 e^{-iqr} - e^{-iqr} p^2 + p e^{-iqr} p - p e^{-iqr} p =$$

$$= p \cdot [p, e^{-iqr}] + [p, e^{-iqr}] p = \frac{\hbar}{i} \left(p \nabla(e^{-iqr}) + \nabla(e^{-iqr}) p \right) =$$

$$\boxed{[p, g(r)] = \frac{\hbar}{i} \nabla g(r)} \quad \nearrow$$

$$= \frac{\hbar}{i} (-iq) \cdot (p e^{-iqr} + e^{-iqr} p)$$

$$* \dots = (-iq) \left(\frac{1}{2\sqrt{V}} \sum_{\alpha} \left(\frac{p_{\alpha}}{m} e^{-iqr_{\alpha}} + e^{-iqr_{\alpha}} \frac{p_{\alpha}}{m} \right) \right) = \underline{\underline{-iq \underline{J}_q}}$$

Helzepr.: $\boxed{\dot{S}(r) = -\nabla \underline{J}(r)}$

Spinműködés: ($\frac{1}{2}$ spin) $S_z = \frac{\hbar}{2} \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha,z} \delta(\underline{r} - \underline{r}_{\alpha})$

→ másodkvantálva $S_z = \frac{\hbar}{2} \sum_{\sigma'} \psi_{\sigma'}^{\dagger}(\underline{r}) (\sigma_z)_{\sigma\sigma'} \psi_{\sigma'}(\underline{r})$
olyan, mint egy kvadrátikus alak.

Transzlációinvariancia ~~op.~~

$$\langle A(\underline{r}) \rangle = \langle A(\underline{r} + \underline{a}) \rangle \quad \forall \underline{a} = n\underline{a}.$$

$$\langle B(\underline{r}) A(\underline{r}') \rangle = \langle B(\underline{r} + \underline{a}) A(\underline{r}' + \underline{a}) \rangle \stackrel{\substack{\text{op.} \\ \underline{a} = -\underline{r}'}}{=} \langle B(\underline{r} - \underline{r}') A(0) \rangle$$

Fourier:

$$\frac{1}{V} \sum_{\underline{q}, \underline{q}'} e^{i\underline{q}\underline{r}} e^{i\underline{q}'\underline{r}'} \langle B_{\underline{q}} A_{\underline{q}'} \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\underline{q}, \underline{q}'} e^{i\underline{q}\underline{r}} e^{i\underline{q}'\underline{r}'} e^{i(\underline{q} + \underline{q}')\underline{a}} \langle B_{\underline{q}} A_{\underline{q}'} \rangle$$

$$\Rightarrow \langle B_{\underline{q}} A_{\underline{q}'} \rangle = e^{i(\underline{q} + \underline{q}')\underline{a}} \langle B_{\underline{q}} A_{\underline{q}'} \rangle \quad \forall \underline{a} = n\underline{a}.$$

$$\underline{q} + \underline{q}' \neq 0 \rightarrow e^{i(\underline{q} + \underline{q}')\underline{a}} \text{ nem } 1 \quad \forall \underline{a} = n\underline{a}.$$

$$\Rightarrow \langle B_{\underline{q}} A_{\underline{q}'} \rangle = 0$$

Vagyis $\langle B_{\underline{q}} A_{\underline{q}} \rangle = \delta_{\underline{q}, -\underline{q}'} \langle B_{\underline{q}} A_{-\underline{q}} \rangle$ (tehát legegyszerűbben op.-m is igaz.)

Zavar --- $H' = H - \int d^3r A(\underline{r}) f(\underline{r}, t) = \dots$ Fourier ---

$$= \frac{1}{V} \sum_{\underline{q}, \underline{q}'} \int d^3r e^{i\underline{q}\underline{r}} e^{i\underline{q}'\underline{r}} A_{\underline{q}} f_{\underline{q}'}(t) = *$$

$$\int d^3r e^{i(q+q')\cdot r} = V \delta_{q, -q'}$$

$$* = \sum_q A_q f_{-q}(t)$$

egyenletj. n. értéke. ←

$$\langle B_q \rangle_t = \sum_{q'} \int_{-\infty}^t \frac{1}{\hbar} \langle [B_q(t), A_{q'}(t')] \rangle f_{-q'}(t') dt' = \dots$$

széles a transzláció-invariancia, de az egyenletben még igaz.

egyenletj. kezd 0. ①

$$= \int_{-\infty}^t \frac{1}{\hbar} \langle [B_q(t), A_q(0)] \rangle f_q(t') dt'$$

diagonális! → zavar és hirtelen hullám nemai nem keverednek.

Helyrep.:

$$\langle B(r) \rangle_t = \int d^3r' \int dt' \frac{1}{\hbar} \langle [B(r, t), A(r', t')] \rangle f(r', t')$$

csak $r-r'$ -ből függ, ha transzlációinvariancia van.
(konvolúció)

5. előadás

$\frac{1}{2}$ spinű fermion gáz paramágnessége.

$$\hat{H} = \sum_{k, \sigma} \epsilon_k a_{k\sigma}^+ a_{k\sigma} \quad \left(\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \text{ de bármi lehet} \right)$$

$$m(r) = \mu_m \cdot \left(\underbrace{\psi_{\uparrow}^+(r) \psi_{\uparrow}(r)}_{\text{felfelé állók}} - \underbrace{\psi_{\downarrow}^+(r) \psi_{\downarrow}(r)}_{\text{lefelé állók}} \right)$$

↑
magn. sűrűség

felfelé állók
magn. ...

Fourier: $\psi_0^+(\underline{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\underline{q}} e^{-i\underline{q}\underline{r}} a_{\underline{q}0}^+$

~~$m_{\underline{k}} =$~~
 $m_{\underline{k}} = \frac{1}{\sqrt{V}} \int d^3r e^{-i\underline{k}\underline{r}} m(\underline{r}) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{V}} \int d^3r e^{-i\underline{k}\underline{r}} \mu_m \sum_{\underline{q}, \underline{q}'} e^{-i\underline{q}\underline{r}} e^{i\underline{q}'\underline{r}} (a_{\underline{q}\uparrow}^+ a_{\underline{q}'\uparrow} - a_{\underline{q}\downarrow}^+ a_{\underline{q}'\downarrow}) \frac{1}{V}$$

$$\int d^3r e^{-i\underline{q}\underline{r}} e^{i\underline{q}'\underline{r}} e^{-i\underline{k}\underline{r}} = V \delta_{\underline{q}', \underline{k} + \underline{q}}$$

↳ belátjuk...

$$m_{\underline{k}} = \frac{\mu_m}{\sqrt{V}} \sum_{\underline{q}} (a_{\underline{q}\uparrow}^+ a_{\underline{q}\uparrow} - a_{\underline{q}\downarrow}^+ a_{\underline{q}\downarrow})$$

Perturbáció: $-\int d^3r m(\underline{r}) B(\underline{r}, t) = -\sum_{\underline{k}} m_{\underline{k}} B_{-\underline{k}}(t)$

↑
 $\underline{r}$ komp. -re a
 mágneses térmező.

$$X(\underline{k}, t) = \frac{i}{\hbar} \left[m_{\underline{k}}(t), m_{-\underline{k}}(0) \right] \quad (t > 0).$$

hell: $\dot{a}_{\underline{k}5} = \frac{i}{\hbar} [H, a_{\underline{k}5}] = \frac{i}{\hbar} \varepsilon_{\underline{k}} \underbrace{[a_{\underline{k}5}^+, a_{\underline{k}5}]}_{\substack{a_{\underline{k}5}^+ a_{\underline{k}5} a_{\underline{k}5} - a_{\underline{k}5} a_{\underline{k}5}^+ a_{\underline{k}5} \\ 0 \quad 1 - a_{\underline{k}5}^+ a_{\underline{k}5}}}$

Megoldás: $a_{\underline{k}5}(t) = a_{\underline{k}5} e^{-\frac{i}{\hbar} \varepsilon_{\underline{k}} t}$

↑
 sz. képleti

heltől: $a_{\underline{k}5}^+(t) = a_{\underline{k}5}^+ e^{\frac{i}{\hbar} \varepsilon_{\underline{k}} t}$ (adjungálással...)

$$m_L(t) = \frac{\mu_m}{\sqrt{V}} \sum_q \left(a_{q\uparrow}^+ a_{k+q\uparrow} - a_{q\downarrow}^+ a_{k+q\downarrow} \right) e^{-\frac{i}{\hbar}(\epsilon_{k+q} - \epsilon_q)t}$$

$$\begin{aligned} [m_L(t), m_L(0)] &= \frac{\mu_m^2}{V} \sum_{q, q'} e^{-\frac{i}{\hbar}(\epsilon_{k+q} - \epsilon_q)t} \left[(a_{q\uparrow}^+ a_{k+q\uparrow} - \right. \\ &\quad \left. - a_{q\downarrow}^+ a_{k+q\downarrow}), (a_{q'\uparrow}^+ a_{-k+q'\uparrow} - a_{q'\downarrow}^+ a_{-k+q'\downarrow}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\underbrace{a_{q\uparrow}^+ a_{k+q\uparrow} a_{q'\uparrow}^+ a_{-k+q'\uparrow}}_{\delta_{q', k+q} - a_{q'\uparrow}^+ a_{k+q\uparrow}} - \underbrace{a_{q'\uparrow}^+ a_{-k+q'\uparrow} a_{q\uparrow}^+ a_{k+q\uparrow}}_{\delta_{q, -k+q'} - a_{q\uparrow}^+ a_{-k+q'\uparrow}} = \\ &= \delta_{q', k+q} a_{q\uparrow}^+ a_{-k+q'\uparrow} - \delta_{q, -k+q'} a_{q'\uparrow}^+ a_{k+q\uparrow} + \text{höher} \end{aligned}$$

$$\langle [m_L(t), m_L(0)] \rangle = \frac{\mu_m^2}{V} e^{-\frac{i}{\hbar}(\epsilon_{k+q} - \epsilon_q)t} \left\{ \sum_{q, q'} \delta_{q, q'} f(\epsilon_q) - \delta_{q, q-k} f(\epsilon_{k+q}) \right\} \cdot 2$$

$$\Rightarrow \chi(k, t) = \frac{2i}{\hbar} \frac{\mu_m^2}{V} \sum_q e^{-\frac{i}{\hbar}(\epsilon_{k+q} - \epsilon_q)t} (f(\epsilon_q) - f(\epsilon_{k+q}))$$

↑
(t > 0 - na) ...

+ ↓ spin-beállítás...

Höbeli Fourier:

$$\int_0^\infty dt e^{i\omega t - \frac{i}{\hbar}(\epsilon_{k+q} - \epsilon_q)t} = - \frac{1}{i\omega - \frac{i}{\hbar}(\epsilon_{k+q} - \epsilon_q)}$$

$$\chi(k, z) = -\frac{1}{\hbar} \frac{2\mu_m^2}{V} \sum_q \frac{f(\epsilon_q) - f(\epsilon_{k+q})}{z - \frac{1}{\hbar}(\epsilon_{k+q} - \epsilon_q)}$$

$k=0$:

a mágneszettség megmarad, mivel $\hat{H}$ spinfüggetlen.

$$\chi(k=0, z) = 0$$

$$m_{k=0} = \sum_q (a_{q\uparrow}^\dagger a_{q\uparrow} - a_{q\downarrow}^\dagger a_{q\downarrow}) \Rightarrow [m_{k=0}, H] = 0$$

valós frekvencia

$$z = \omega + i\varepsilon; \varepsilon \rightarrow 0. \quad (\varepsilon > 0)$$

2 félrész felírás.

$$\frac{1}{\omega + i\varepsilon - \frac{1}{\hbar}(\epsilon_{k+q} - \epsilon_q)} = \mathcal{P} \left(\frac{1}{\omega - \frac{1}{\hbar}(\epsilon_{k+q} - \epsilon_q)} \right) - i\pi \delta \left(\omega - \frac{1}{\hbar}(\epsilon_{k+q} - \epsilon_q) \right)$$

$$\text{Im} \chi(k, \omega) = \frac{1}{\hbar} \frac{2\mu_m^2}{V} \sum_q \left(f(\epsilon_q) - f(\epsilon_{k+q}) \right) \pi \delta \left(\omega - \frac{1}{\hbar}(\epsilon_{k+q} - \epsilon_q) \right)$$

$$\left(\underline{\omega=0}: \text{Im} \chi(k, \omega=0) = 0 \quad (\text{Im} \chi \text{ csak } \omega \text{-nak ...}) \right)$$

$$\text{Re} \chi(k, \omega) = -\frac{1}{\hbar} \frac{2\mu_m^2}{V} \sum_q \frac{f(\epsilon_q) - f(\epsilon_{k+q})}{\omega - \frac{1}{\hbar}(\epsilon_{k+q} - \epsilon_q)}$$

$\omega=0; k=0$: ebben a sorrendben végezz a limeszket...

$$\text{Re} \chi(k=0, \omega=0) = ? \quad \text{szükség van ...}$$

$$f(\epsilon_k) - f(\epsilon_{k+q}) \downarrow = -f'(\epsilon_q)(\epsilon_{k+q} - \epsilon_q)$$

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \operatorname{Re} \chi(\hbar, \omega=0) = \frac{2\mu_m^2}{V} \sum_q \left(-f'(\epsilon_q) \right) \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{nem } 0! \end{matrix} \quad (\text{adiabatikus válfüggvény})$$

Vagyis:

$$\chi(\hbar, \omega + i\varepsilon) \xrightarrow{\hbar=0} 0$$

$$\downarrow \omega \rightarrow 0$$

$$\chi(\hbar, \omega=0) \xrightarrow{\hbar=0} \text{nem } 0.$$

~~Ben János~~ Mi köze ennek a Pauli-munc.-hoz?

Statikus (izoterm) muncceptibilitás: egyenlő várható értékek.

$$M = \mu_m \sum_q (\langle a_{q\uparrow}^\dagger a_{q\uparrow} \rangle - \langle a_{q\downarrow}^\dagger a_{q\downarrow} \rangle) = \dots$$

$$\dots = \sum_q \mu_m \left(f(\epsilon_q - \underbrace{\mu_m B}_{\text{Zeeman}}) - f(\epsilon_q + \mu_m B) \right) \approx$$

híri B-re:

$$\approx \mu_m \sum_q (-f'(\epsilon_q)) \cdot 2\mu_m B = 2\mu_m^2 \sum_q (-f'(\epsilon_q)) B = V \chi_T B$$

$$\boxed{\chi_T = 2\mu_m^2 \frac{1}{V} \sum_q (-f'(\epsilon_q))}$$

ezt kaptuk a dirac-ninkai számolásból is.

Részecskeendrésen külső potenciálban: $\Phi(\underline{r}, t)$ (pl.: e^- -ek és el-tér)

$$H' = H + \sum_{\alpha=1}^N \Phi(\underline{r}_{\alpha}, t) = H + \int d^3\underline{r} \hat{\rho}(\underline{r}) \Phi(\underline{r}, t)$$

$$\hat{\rho}(\underline{r}) := \sum_{\alpha=1}^N \delta(\underline{r} - \underline{r}_{\alpha}) \quad \text{sűrűség}$$

$\uparrow$
 $\hat{A}$ $\uparrow$
 $-f$

Algán, mint egy rava... (?)

amikor:

$$H' = \sum_q \hat{S}_q \Phi_{-q}(t) + H$$

A Fourier-komponensek nem keverednek...

$$\langle \delta \hat{S}_q \rangle_t = \underbrace{\langle \hat{S}_q \rangle_t - \langle \hat{S}_q \rangle_0}_{\hat{S}_{q,0} \langle \hat{S}_{q=0} \rangle} = \int_{-\infty}^t \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{S}_q(t'), \hat{S}_{-q}(t')] \rangle (-\Phi_q(t')) dt'$$

$\uparrow$
sűrűség-sűrűség valószínűségi
 $\chi_{SS}(t-t')$

Dissipáció: $\bar{W} = \langle \dot{A} \rangle_t f(t)$ (általában)

most:

$$\bar{W} = \langle \dot{\hat{S}}_q \rangle_t (-\Phi_q(t)) = -iq \langle \hat{J}_q \rangle_t (-\Phi_q(t))$$

$-iq \hat{J}_q$ áram-sűrűség

(kontinuitásból)

$$\bar{W}_{\text{tot}} = \sum_q \left(-iq \langle \hat{J}_q \rangle_t (-\Phi_q(t)) \right) = \int d^3\underline{r} \quad \text{valószínűségi}$$

$$= \sum_q \langle \hat{J}_q \rangle_t (iq \Phi_q(t)) = \int d^3\underline{r} \langle \hat{J}(\underline{r}) \rangle_t \underbrace{(\nabla \cdot \Phi(\underline{r}, t))}_{\text{erő}}$$

valószínűségi
térben diss = erő * áram-sűrűség.

Szórás határértékmetre. (sűrűségkorreláció fu. ②)

$$S(q, t) = \langle S_q(t) S_q(0) \rangle =$$

$$= \sum_{mm} \frac{e^{-\beta E_m}}{Z} \langle m | S_q | m \rangle \langle m | S_{-q} | m \rangle e^{-i\omega_{mm}t}$$

↓ Fourier:

$$\underline{S(q, \omega)} = \sum_{mm} \frac{e^{-\beta E_m}}{Z} \langle m | S_q | m \rangle \langle m | S_{-q} | m \rangle 2\pi \delta(\omega - \omega_{mm}) =$$

$$= \sum_{mm} \frac{e^{-\beta E_m}}{Z} e^{+\beta(E_m - E_n)} \langle m | S_{-q} | n \rangle \langle n | S_q | m \rangle 2\pi \delta(-\omega - \omega_{mm}) =$$

$$= \underline{e^{\beta \hbar \omega} S(-q, -\omega)}$$

Hőtükrös + téltükrös:

$$S(\vec{r}, t) = \langle S(\vec{r}, t) S(0, 0) \rangle \stackrel{\text{invariancia}}{=} \langle S(0, 0) S(\vec{r}, -t) \rangle = \underbrace{\langle S(-\vec{r}, t) S(0, 0) \rangle}_{S(-\vec{r}, t)}$$

Fourierben $r \leftrightarrow -r$ -nel, $k \leftrightarrow -k$ felel meg.

$$S(q, t) = S(-q, t)$$

$$\boxed{S(q, \omega) = S(-q, \omega)}$$

$$\Rightarrow \underline{S(q, \omega) = e^{\beta \hbar \omega} S(q, -\omega)}$$

Diagramanalyse:

$$\textcircled{1} \quad \frac{i}{\hbar} \underbrace{\langle [S_q, S_q] \rangle}_{=0} = \psi_{SS}(t=0)$$

$$\psi_{SS}(r, t) = \frac{1}{\hbar} \left(\cancel{S(r, t)} \langle S(r, t), S(0, 0) \rangle - \langle S(0, 0) S(r, t) \rangle \right) =$$

herleidend: $\langle S(-r, -t) S(0, 0) \rangle$

$$= \frac{1}{\hbar} (S(r, t) - S(-r, -t))$$

↓
Fourier: $\psi_{SS}(q, \omega) = \frac{1}{\hbar} (S(q, \omega) - S(-q, -\omega))$

$$\psi_{SS}(t=0) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \psi_{SS}(\omega) = \frac{1}{2\pi\hbar} \left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\omega S(q, \omega)}_{0} - \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S(q, -\omega) \right]$$

↕
ω ↔ -ω omgekeerd
laten... (44)

$$\textcircled{2} \quad \dot{\psi}_{SS}(t=0) = \frac{i}{\hbar} \langle [S_q, S_{-q}] \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [-iq \mathcal{M}_q, S_{-q}] \rangle$$

er nem 0, $\mathcal{M}$ -len van impulzen is, nem csak hőrd.

Marrént: $\dot{\psi}_{SS}(t=0) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega (-i\omega) \psi_{SS}(q, \omega) =$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega (-i\omega) \frac{1}{\hbar} (S(q, \omega) - S(-q, -\omega)) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega (\omega S(q, \omega) - \omega S(q, -\omega)) = \dots$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\hbar} 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega S(q, \omega)$$

Az első írásból: $\dot{\varphi}_{SS}(t=0) = \frac{1}{\hbar} \langle [\varphi, \hat{T}_q, S-q] \rangle$ ez egy
mám.

$$\langle [\varphi, \hat{T}_q, S-q] \rangle = \frac{\hbar q^2}{m} \frac{N}{V}$$

Összerakva:

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega S(q, \omega) = \frac{\hbar q^2}{m} \frac{N}{V} \right|$$

Meggy: $[\varphi, \hat{T}_q, S-q] = \frac{1}{2V} \sum_{\alpha=1}^N \left[\left(\frac{q p_{\alpha}}{m} e^{-iq r_{\alpha}} + e^{-iq r_{\alpha}} \frac{q p_{\alpha}}{m} \right) e^{iq r_{\alpha}} - \right.$
 $\left. - e^{iq r_{\alpha}} \left(\frac{q p_{\alpha}}{m} e^{-iq r_{\alpha}} - e^{-iq r_{\alpha}} \frac{q p_{\alpha}}{m} \right) \right] = *$ ↑
ez szereljük
majd fel.

~~$\frac{q p_{\alpha}}{m}$~~ ~~$\frac{q p_{\alpha}}{m}$~~ tagok kiejtése egymást. (2 db)

maradnak belőlük:

$$\frac{q p_{\alpha}}{m} + \left(e^{-iq r_{\alpha}} \frac{q}{m} \frac{\hbar}{i} (\nabla e^{iq r_{\alpha}}) \right) = \frac{\hbar q^2}{m}$$

↑
másképp: $[p, g(r)] = \frac{\hbar}{i} \nabla g(r)$

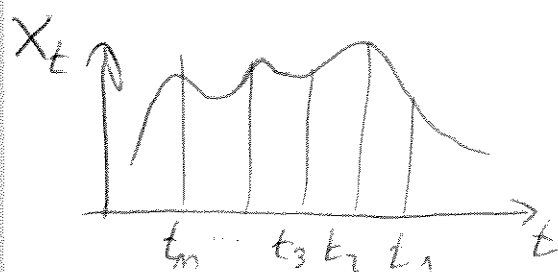
$$* = \left(\frac{1}{2V} \frac{\hbar q^2}{m} \cdot 2 \right) \cdot N. \text{ bejött.}$$

Van egy:

6. előadás

Stokasztikus folyamatok.

(klasszikus változókra hármasfajta)

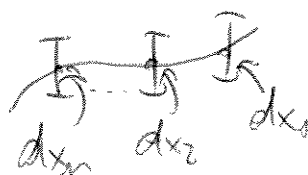


Hörsz: $X(t_1), \dots, X(t_n)$

Stokasztikus hely, mert mindenkor mindig
más értékek lennek.

t_1 valószínűségeloszlás.

$$P_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) dx_1 \dots dx_n = P(X_{t_1} \in [x_1, x_1 + dx_1])$$



Egyváltozós on: $P_1(x, t)$
 2 változós) -> $P_2(x_1, t_1, x_2, t_2)$
 ↑
 n változós) $P_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n)$

elrendezés
hierarchiája.

Normalizációs felt.: $\int dx_1 \dots dx_n P_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) = 1$

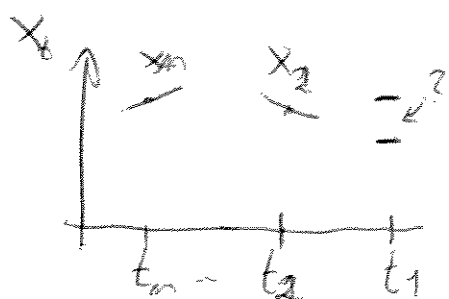
Kompatibilitási felt.: $\int P_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) dx_{p+1} \dots dx_n = P_{n-1}(x_1, t_1, \dots, x_p, t_p, \dots, x_n, t_n)$

Ha P_2, P_1 -ek megegyeznek, etc, akkor a fenti feltételek teljesülnek.

Feltételek on:

$$P(x_1, t_1 | x_2, t_2, x_3, t_3, \dots, x_n, t_n) \quad t_1 > t_2 > \dots > t_n$$

azaz azaz, hogy t_1 feltevése, hogy t_3 -ban x_3 -at megnézzük,
 x_1 körül dx_1 -ben vanunk.



$$P(-|-)=$$

$$= \frac{P_m(x_1 t_1, \dots, x_n t_n)}{P_{m-1}(x_2 t_2, \dots, x_n t_n)}$$

Markov folyamatok: a feltételcsoporthoz, aminek a múltbeli kihatását tartalmazzuk, csak a legközelebbi számít.

← átmeneti m.

$$P(x_1 t_1 | x_2 t_2 x_3 t_3 \dots x_n t_n) = P(x_1 t_1 | x_2 t_2)$$

Ha tudjuk a jelenet, akkor a jövő független a múlttól.

$$P_m(x_1 t_1, \dots, x_n t_n) = P(x_1 t_1 | x_2 t_2) P_{m-1}(x_2 t_2, \dots, x_n t_n) = \\ = P(x_1 t_1 | x_2 t_2) P(x_2 t_2 | x_3 t_3) P_{m-2}(x_3 t_3, \dots, x_n t_n) = \text{etc} \dots$$

Vagyis Markov-folyamatok esetén $P_1(x, t)$ és $P(x, t | x', t')$ kell a hierarchia ismeretéhez.

$$P_1(x, t) = \int P_2(x, t, x', t') dx' = \int P(x, t | x', t') P_1(x', t') dx' \quad (t' < t)$$

~~Feltétel~~
Feltétel $P(-|-)$ -re (kompatibilis):

$$P_3(x_1 t_1, x_2 t_2, x_3 t_3) = P(x_1 t_1 | x_2 t_2) P(x_2 t_2 | x_3 t_3) P_1(x_3 t_3)$$

$$P_2(x_1 t_1, x_3 t_3) = \int P(x_1 t_1 | x_2 t_2) P(x_2 t_2 | x_3 t_3) P_1(x_3 t_3) dx_2$$

mar felírás $\hookrightarrow P(x_1 t_1 | x_3 t_3) P_1(x_3 t_3)$

$$P(x_1 t_1 | x_3 t_3) = \int P(x_1 t_1 | x_2 t_2) P(x_2 t_2 | x_3 t_3) dx_2$$

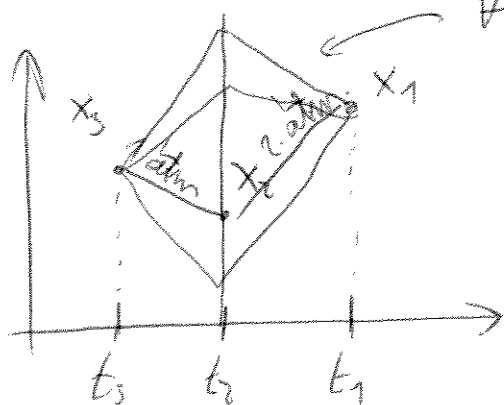
↳ Chapman - Kolmogorov - egyenlet.

(feltétel Markov - folyamat)

[Nem Markovra:

$$P_3(x_1 t_1 | x_2 t_2 | x_3 t_3) = P(x_1 t_1 | x_2 t_2 | x_3 t_3) P(x_2 t_2 | x_3 t_3) p_1(x_3 t_3)$$

x_t & pályára integrálás



Homogén Markov folyamat: $P(x t | x' t') = P(x t + \tau | x' t' + \tau)$
Höelbolár invariancia. $\forall \tau \in \mathbb{R}$

$$\tau \mapsto -t'. \quad P(x t | x' t') = P(x, t - t' | x', 0)$$

Ergodikus Markov folyamat:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(x t | x') = p^*(x) \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{feltételről} \\ \text{független.} \end{array}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1(x t) = \underbrace{\int \lim_{t \rightarrow \infty} P(x t | x') p_1(x', 0) dx'}_{p^*(x)} = p^*(x) \underbrace{\int p_1(x') dx'}_1$$

$$\frac{d^2 \ln \Phi}{dz^2} = \left(\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{dz^2} - \frac{1}{\Phi^2} \frac{d\Phi}{dz} \frac{d\Phi}{dz} \right) \Big|_{z=0} = m_2 - m_1^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$$

módusnégyzet.

$$\frac{d^3 \ln \Phi}{dz^3} = \left(\frac{1}{\Phi} \frac{d^3 \Phi}{dz^3} - \frac{1}{\Phi^2} \frac{d\Phi}{dz} \frac{d^2 \Phi}{dz^2} - 2 \frac{d\Phi}{dz} \frac{d^2 \Phi}{dz^2} \frac{1}{\Phi^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\Phi^3} \frac{d\Phi}{dz} \frac{d^2 \Phi}{dz^2} \right) \Big|_{z=0} = m_3 - m_1 m_2 - 2 m_1 m_2 + 3 m_1^3 =$$

$$= m_3 - 3 m_1 (m_2 - m_1^2) - 3 m_1^3 + 2 m_1^3 = m_3 - 3 m_1 (m_2 - m_1^2) - m_1^3 =$$

$$= m_3 - 3 h_1 h_2 - h_1^3 \Rightarrow m_3 = h_3 + 3 h_1 h_2 + h_1^3$$

Gauss-elmélet:
(centrális).

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

generátor:

$$\phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} dx = \dots \left| \begin{array}{l} -\frac{x^2}{2\sigma^2} + zx = \\ = -\frac{1}{2\sigma^2} (x^2 - 2\sigma^2 xz + (\sigma^2 z)^2) - \\ -(\sigma^2 z)^2 \end{array} \right.$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (x - \sigma^2 z)^2\right) dx e^{\frac{\sigma^2}{2} z^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$

$$\phi(z) = e^{\frac{1}{2} \sigma^2 z^2} \quad h_l = 0, \text{ ha } l \geq 3$$

momentumok:

$$\phi(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \frac{1}{2^l} (\sigma^2)^l z^{2l}$$

$m_n = 0$, ha n páratlan.

$$m_{2\ell} = \frac{1}{\ell!} \frac{1}{2^\ell} (6^2)^\ell (2\ell)! = \underbrace{(2\ell-1) \dots 3 \cdot 1}_{\text{pálan számok szorzata}} (6^2)^\ell$$

norm. centrális:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\Phi(z) = e^{\overline{zx}} = e^{\overline{z(x-x_0)}} e^{zx_0} \quad \begin{array}{l} \text{előzőre} \\ \text{visszatérve...} \end{array}$$

$$\Phi(z) = \exp\left(zx_0 + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2\right)$$

Diffúzió: 1. és 2. kumuláció $\sim t$, a magasabbik kumulációk nullák. $\rightarrow$ Gauss len. (?)

inf. időre $P(x,t|x') \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(x')t}} \exp\left(-\frac{(x-x'-v(x')t)^2}{2\sigma^2(x')t}\right)$

v és σ rövid időre meghatározva az eltolást.
(hosszú időre átmeneteli mozgással és inf. felbontással adódik egy egyenlet...)

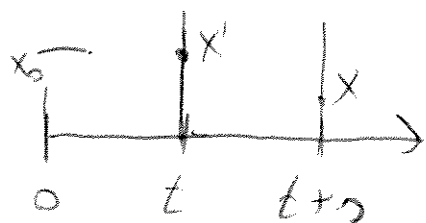
7. előadás

Markov-folyamat: ~~P(x,t|x')~~ $\supset$ Diffúziós folyamat.

$$\int (x-x')^n P(x,t|x') dx = \begin{cases} v(x')t + \sigma^2(t) & n=1 \text{ drift.} \\ \sigma^2(x')t + \sigma^2(t) & n=2 \text{ melexedés} \\ \sigma^2(t) & n \geq 2 \end{cases}$$

Chapman-Kolmogorov egyenlet:

$$P(x_1, t_1 | x_3, t_3) = \int P(x_1, t_1 | x_2, t_2) P(x_2, t_2 | x_3, t_3) dx_2$$



← erre igazuk fel, majd s-et infinitesimálisan kicsinek.

$$\int f(x) \underbrace{P(x, t+s | x_0)}_{C-K.} dx =: g(x_0) ; f(x) \text{ tetszőleges f.}$$

$$\int P(x, s | x') P(x', t | x_0) dx'$$

infinitesimális s-re $P(x, s | x')$ éves eloszlás.

fejlesztés: $f(x) = f(x') + f'(x')(x - x') + \dots$

$$g(x_0) = \int dx dx' \left(f(x') + f'(x')(x - x') + \frac{f''(x')}{2} (x - x')^2 \right) \cdot$$

$$\cdot P(x, s | x') P(x', t | x_0) =$$

$$= \int dx' \left[f(x') + f'(x') \cdot \underbrace{w(x') \cdot s}_{\text{várható érték}} + \frac{f''(x')}{2} \underbrace{\sigma^2(x') \cdot s}_{\text{variancia}} + o(s) \right] \cdot$$

$$\cdot P(x', t | x_0) = \text{parc. int.} \dots \text{ t. h. a határérték végtelen 0.}$$

$$= \int dx' \left(f(x') - f(x') \cdot \frac{\partial P(x', t | x_0)}{\partial x'} + f(x') \cdot \frac{\partial^2 P(x', t | x_0)}{\partial x'^2} \cdot \frac{\sigma^2(x')}{2} \right) +$$

deriváltakban vanak!