1. Chadwick azt tapasztalta, hogy ^{210}Po-ból kilépõ α részecskékkel ^{9}Be céltárgyat bombázva új, áthatóló sugárzás keletkezik. Ez hidrogénben 15x akkora maximális energiával löki meg a gáz atommagjait, mint nitrogénben. Mennyi ez alapján az új sugárzás részecskéinek tömege? A nitrogén tömege 14x akkora, mint a hidrogéné

$p_0=\sqrt{(2\cdot E_H\cdot M_H)} + p_1$; $p_0=\sqrt{(2\cdot E_N\cdot M_N)} +p_2$; $p_0^2=2E_H\cdot m+p_1^2$; $p_0^2=2E_N m +p_2^2$

Ezt megoldva $x=m/M_H=1$ adódik, igazából $x=(a+\sqrt{ab})/(b-1+\sqrt{ab})$, ahol $E_H=aE_N$, $M_N=bM_H$

2.

$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$ és

$$\sigma_a\sigma_b = \delta_{ab} \cdot I + i \sum_c \varepsilon_{abc}\sigma_c.$$

Spin-operátor definíciója: $J=\hbar\sigma/2$, J^2 sajátértéke $\hbar^2 s(s+1)$, J_z sajátértéke s_z. σ^2 sajátértéke $4s(s+1)$

Egyrészecske spin modell a fenti, σ_3 sajátértéke s_z; $|\downarrow>$ és $|\uparrow>$; Ezekre hatás:

$\sigma_x|\uparrow>= |\downarrow>$; $\sigma_x|\downarrow>= |\uparrow>$; $\sigma_x^2=I$

$\sigma_y|\uparrow>=i|\downarrow>$; $\sigma_y|\downarrow>=-i|\uparrow>$; $\sigma_y^2=I$

$\sigma_z|\uparrow>= |\uparrow>$; $\sigma_z|\downarrow>= -|\downarrow>$; $\sigma_z^2=I$

Itt akkor σ^2 sajátértéke $3=4\times½(½+1)$, azaz $s=½$, ésσ_z sajátértékei (1,-1) miatt $s_z=\pm½$, tehát a fenti mátrixok az ½ spinű modellt mutatják.

----

3. Kétrészecske-állapotok bázisa: $|\uparrow\uparrow>=(1,0,0,0)$, $|\uparrow\downarrow>=(0,1,0,0)$, $|\downarrow\uparrow>=(0,0,1,0)$, $|\downarrow\downarrow>=(0,0,0,1)$, mivel $|\uparrow\downarrow>=|\uparrow>\otimes|\downarrow>$. A spin-operátor ezeken: $\sigma = \sigma_1+\sigma_2 = \sigma \otimes I+I\otimes\sigma$

σ^2 sajátértéke: $s(s+1)$; $\sigma^2= \sigma_1^2+ \sigma_2^2+2\sigma_1\sigma_2=6I^2+2(\sigma_{1x} \sigma_{2x} + \sigma_{1y} \sigma_{2y} + \sigma_{1z} \sigma_{2z})$

σ_{1x} mátrixa felírható, meg a többi is, ezek alapján a kétrészecske bázison $2\sigma_1\sigma_2$ az összes felírható:

$$\sigma_{1x} = \sigma_x\otimes I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_{2x} = I\otimes\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_{1x}\sigma_{2x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\sigma_{1y}\sigma_{2y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_{1z}\sigma_{2z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, így $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

Ennek sajátvektorai: (0,1,-1,0), (1,0,0,0), (0,1,1,0), (0,0,0,1), a sajátértékek 0 és 8,8,8. Ez az alábbi négy állapotnak felel meg, normálva (az $4s(s+1)$ alapján s=0 vagy 1)

$1/\sqrt{2}\ (|\uparrow\downarrow>-|\downarrow\uparrow>)$, $|\downarrow\downarrow>$, $1/\sqrt{2}\ (|\uparrow\downarrow>+|\downarrow\uparrow>)$ és $|\uparrow\uparrow>$

És a σ_z sajátértékei ezekre 0, -1, 0, 1, mert $\sigma_z=\sigma_z\otimes I+I\otimes\sigma_z=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, és ennek a felét vesszük.

----

4. Számítsuk ki a $\sigma_1\sigma_2$ operátor sajátértékeit (legyen x)! Számítás egyszerű.

Ellenőrzés nyilván $\sigma^2=6I^2+2\sigma_1\sigma_2 \rightarrow s(s+1)=6+2x$.

----

5. Mekkora az $1/\sqrt{2}\ (|\uparrow\downarrow>+|\downarrow\uparrow>)$ kétrészecske állapot spinje (nem a z-irányú spin-komponense, hanem a teljes spin-kvantumszáma)? Vizsgáld meg, hogy sajátállapot-e, és számold ki a sajátértéket!

----

6. A háromrészecske-állapotok spinoperátora: $\sigma = \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3 = \sigma\otimes I\otimes I+I\otimes\sigma\otimes I+I\otimes I\otimes\sigma$.

Add meg ennek hatását a $|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$, $|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle$ és $|\downarrow\uparrow\downarrow\rangle$ háromrészecske-állapotokon!

----

7. A ^{75}As+n, E_n=8 MeV ütközéses reakcióban mely parciális hullámok játszanak szerepet?
Parciális hullámok: a bejövő hullámot sorba fejtjük: $e^{ikr\cos\theta} = \sum_l i^l(2l+1)j_l(kr)P_l(\cos\theta)$.
ahol j_l a kijövő és bemenő hullám összege. Másképpen felírva (a szórási amplitúdóval): $f(\theta) = \sum_l(2l+1)f_l(k)P_l(\cos\theta) = \frac{1}{k}\sum_l(2l+1)e^{i\delta_l}\sin\delta_l\, P_l(\cos\theta)$, ahol f_l a parciális hullám amplitúdója, és $f_l = \frac{1}{k}e^{i\delta_l}\sin\delta_l$, továbbá $S_l=1+2ikf_l$. Innen a teljes hatáskeresztmetszet $\sigma = \int|f|^2 d\Omega$, azaz $\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_l(2l+1)\cos^2\delta_l$ (A Legendre polinomok integráljából). Az egyes l komponensek az impulzusmom. kvantumszámnak felelnek meg. Ekkor tehát b≈lħ/k, ha b az impakt paraméter, azaz l≤ bk/ħ játszik szerepet. Konkrétan itt: $b_{max}=R(A=75)=1{,}2\cdot 75^{1/3}=5{,}5$ fm, innen l_{max}=3,4, azaz l=0,1,2,3

----

8. A ^{128}Te+n, E_n=50 MeV ütközéses reakcióban mely parciális hullámok játszanak szerepet?
Ha a fenti reakcióban a rugalmatlan szórás teljes hatáskeresztmetszete 100 barn, akkor milyen határokat tudsz mondani a rugalmas szórás teljes hatáskeresztmetszetére?
bmax=6fm, p=316 MeV, l<9.5, l=0,1,…,9

----

9. E_n=1 keV neutronokkal bombázunk ^{12}C céltárgyat. σ_{inel}=400 barn, mennyi lesz a rugalmas szórás hkm alsó és felső határa?

$$\sigma_{\mathrm{el}} = \frac{\pi}{k^2}\sum_l(2l+1)|1-\exp(2i\delta_l)|^2$$

$$\sigma_{\mathrm{inel}} = \frac{\pi}{k^2}\sum_l(2l+1)(1-|\exp(2i\delta_l)|^2)$$

δ_l=fázistolás, δ_l valós ha rugalmatlan szórás nincs
k=√(2mE)/ ħc, ahol $m=m_1m_2/(m_1+m_2)$, azaz itt 860 MeV (12 amu/13).
itt csak l=0 van, mivel bp/ħ = 0,002, azaz egyetlen δ kell csak
Itt π/k^2=705 barn. Ekkor $1-|e^{2i\delta}|^2= \sigma_{rugalmatlan}\cdot \pi/k^2$=400/705=0.567, $e^{2i\delta}$=±0.658
Innen akkor $\sigma_{rugalmas,max}$=1938 barn, $\sigma_{rugalmas,min}$ =82 barn

----

10. r_1, r_2 helyen két részecske.
integrálás: $d^3r_1d^3r_2$
áttérés átlagra és különbségre:
$r = r_2-r_1$, $R= (m_1r_1+m_2r_2)/(m_1+m_2)$
Ekkor $d^3r_1d^3r_2= d^3Rd^3r$
Ellenőrzés:
6x6-os mátrix, $x=(r_{1x},r_{1y},r_{1z}, r_{2x},r_{2y},r_{2z})$; $X=(r_1,r_2,r_3, R_1,R_2,R_3)$ dx/dX determinánsa kell.

----

11. 5 MeV-es neutronokkal bombázunk protonokat. Milyen a rugalmas szórás szögeloszlása?
l_{max}=1/40, tehát l=0 játszik csak szerepet. Itt viszont $P_0(x)=1$, gömbszimmetria a tkp-i rendszerben.
$\sigma_{sz}(\theta)\approx 1/4k^2\, |\Sigma(2l-1)(1-\eta_l)P_l(\cos(\theta))|^2 \rightarrow (1-\eta_0)$=const. -> $\sigma=1/4k^2(1-\eta_0)$

----

12. A spin-pálya kölcsönhatás minden l>0 nívót felhasít két nívóra, ahol j=l±½. Mennyi az energiaváltozás súlyozva a betöltésszámmal?
(A betöltési tényező 2j+1, azaz 2l és 2l+2. A spin-pálya kölcsönhatás:
$V=V(r)\cdot½\cdot(j(j+1)-l(l+1)-s(s+1))$ mivel $j^2=l^2+s^2+2ls$. Ez j=l+½ esetén l, l−½ esetén −l−1. Ez alapján *<V>=V(r)·½ ·(−(l+1)2l+l(2l+2))=0, azaz összesen nincs változás)*

----

13. Milyen multipól sugárzás köti össze az alábbi állapotokat:

$1^+ \rightarrow 1^-$	0…2	yes	E1
$0^+ \rightarrow 2^+$	2…2	no	E2
$1^- \rightarrow 0^-$	1…1	no	M1, E2
$2^+ \rightarrow 3^-$	1…5	yes	E1
$3^+ \rightarrow 1^-$	2…4	yes	M2, E3
$1^+ \rightarrow 0^-$	1…1	yes	E1

$7/2^+ \rightarrow 3/2^+$ (^{23}Na 2. gerjesztett állapotából alapállapotba, 2,08 MeV)

TABLE 9.1 γ-Ray Selection Rules and Multipolarities

Radiation Type	Name	$l = \Delta I$	$\Delta\pi$
E1	Electric dipole	1	Yes
M1	Magnetic dipole	1	No
E2	Electric quadrupole	2	No
M2	Magnetic quadrupole	2	Yes
E3	Electric octupole	3	Yes
M3	Magnetic octupole	3	No
E4	Electric hexadecapole	4	No
M4	Magnetic hexadecapole	4	Yes

Multipól sugárzás: E1, E2, E3, M1, M2, M3 stb… (E0 és M0 nincs a foton vektorrészecske jellege miatt – kell hogy legyen spinje). Több összege van, de valamelyik dominál tipikusan. Szögeloszlás: $P_l(\cos\theta)$. Paritásváltozás: $\Delta\pi=\pi_i/\pi_f=(-1)^l$ vagy $(-1)^{l+1}$ elektromos illetve mágneses esetben (töltéseloszlás- vagy árameloszlás-beli változás). Eggyel nagyobb multipól 10^{-3} nagyságrenddel elnyomódik, ezért a nem tiltott sugárzás legalacsonyabb komponense fog számítani. A J^π állapotok közötti impulzusmomentum változására $|J_i-J_f| \le l \le |J_i+J_f|$, de a legalacsonyabb tag számít többnyire. $0\to 0$ átmenet nem lehetséges emiatt. Mágneses többnyire elnyomott az elektromoshoz képest, illetve E1 és M2 kb azonos bomlási állandóval rendelkezik.

----

14. Határozd meg a maganyag sűrűségét a cseppmodell alapján!

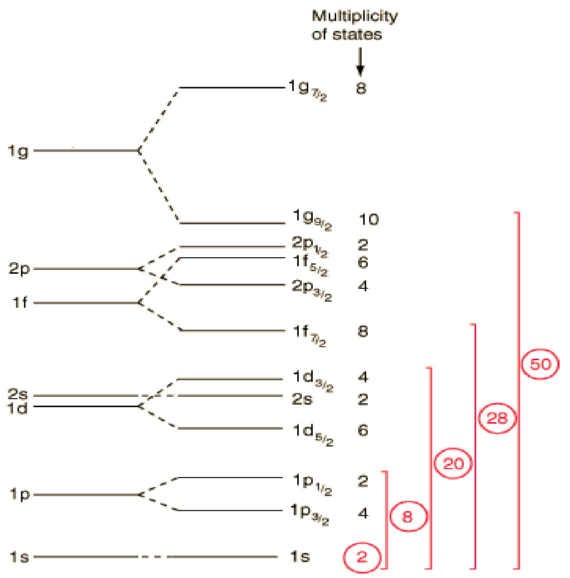
A cseppmodell alapján a maganyag sűrűsége állandó. 12C-re számítsuk ki például! Tömeg: 12 amu, 1 amu = 1,66E-27 kg. Így a sűrűség: $m/V=A{*}1amu/(4\pi r^3)=A{*}1amu/(4\pi r_0^3A)= 3amu/(4\pi r_0^3)=2{,}3E17$ kg/m^3. Ez alapján egy köbmilliméter maganyag 230 000 tonna lenne. A folyadékmodell hiányossága: hiperdeformált magok, nem-vibrációs gerjesztési nívók, mágikus számok

----

15. Mennyi a ^{7}Li, ^{13}C, ^{31}P, ^{33}S, ^{43}Sc illetve ^{67}Zn atommagok alapállapotának spinje és paritása?

Megoldás: Átlagtér-közelítésben az elektronhéjhoz hasonló modellt dolgozhatunk ki, ez a héjmodell (a Pauli elv miatt megnő a szabad úthossz). Az energia az $N=2n+l-2$ számtól függ, $E=(N+{}^3/_2)h f$. Felhasadás jön létre a spin-pálya kcsh. miatt. Az egyes állapotok sorrendje látható a bal oldali ábrán (az 's' állapotokban nincs odaírva a spin, hiszen csak ½ lehet). Ez alapján (a páratlanul maradt nukleont besorolva):

^{7}Li (Z=3):	*n=1, l=1(p), j=$^3/_2$,*
^{13}C (N=7):	*n=1, l=1(p), j=$^1/_2$*
^{31}P (Z=15):	*n=2, l=0(s), j=$^1/_2$*
^{33}S (N=17):	*n=1, l=2(d), j=$^3/_2$*
^{43}Sc (Z=21):	*n=1, l=3(f), j=$^7/_2$*
^{67}Zn (N=37):	*n=1, l=3(f), j=$^5/_2$*

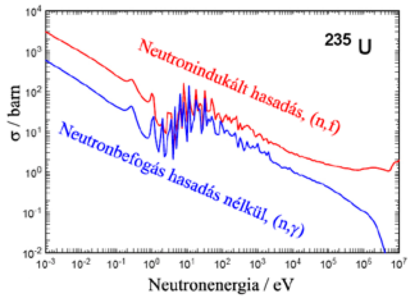


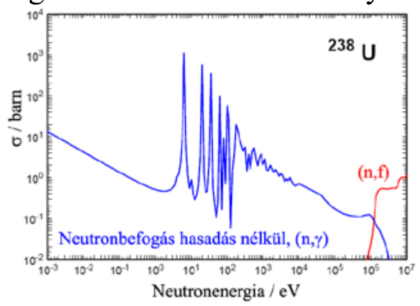
16. Mennyi a ^{23}Na, ^{29}Si, ^{35}Cl, ^{39}K, ^{55}Mn illetve ^{95}Mo atommagok alapállapotának spinje és paritása?

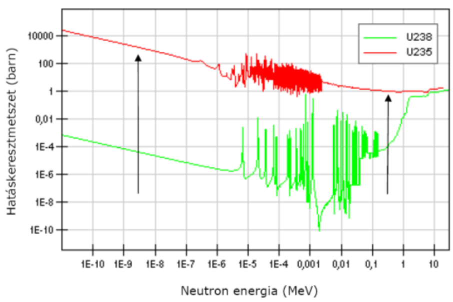
	Z	N	A	Utolsó p.	j	l	π
Na	**11**	12	23	1d 5/2	5/2	2	1
Si	14	**15**	29	2s 1/2	1/2	0	1
Cl	**17**	18	35	1d 3/2	3/2	2	1
K	**19**	20	39	1d 3/2	3/2	2	1
Mn	**25**	30	55	1f 7/2	7/2	3	-1
Mo	42	**53**	95	1g 9/2	9/2	4	1

----

17. Ha a gyors neutron (~1 MeV) általi hasadás hatáskeresztmetszete ^{238}U-ra 0,024 barn, míg a befogásra 0,25 barn, ^{235}U-ra pedig 1,28 barn és 0,4 barn, akkor a természetes aránynál (99,3%:0,7%) mekkora a hasadás valószínűsége? Mekkora dúsítási aránynál lesz 50%?







$$\sigma_{tot} = 0{,}993\sigma_{h,238} + 0{,}993\sigma_{b,238} + 0{,}007\sigma_{h,235} + 0{,}007\sigma_{b,235}$$
$$\sigma_{has} = 0{,}993\sigma_{h,238} + 0{,}007\sigma_{h,235}$$

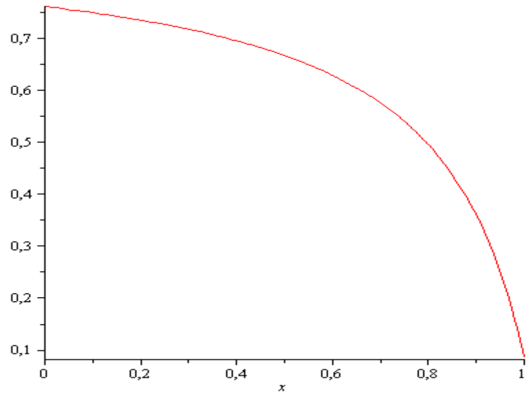
$$\dot{N}_{tot} = jN\sigma_{tot}, \qquad \dot{N}_{has} = jN\sigma_{has}$$

$$P_{has} = \frac{\dot{N}_{has}}{\dot{N}_{tot}} = \frac{jN\sigma_{has}}{jN\sigma_{tot}} = \frac{0{,}993\sigma_{h,238} + 0{,}007\sigma_{h,235}}{0{,}993\sigma_{h,238} + 0{,}993\sigma_{b,238} + 0{,}007\sigma_{h,235} + 0{,}007\sigma_{b,235}}$$

$$P_{has} = \frac{0{,}0238 + 0{,}0090}{0{,}0238 + 0{,}2483 + 0{,}0090 + 0{,}0028} = \frac{0{,}0328}{0{,}2839} = 0{,}1155$$

Paraméterekkel:

$$P_{has} = \frac{x\sigma_{h,238} + (1-x)\sigma_{h,235}}{x\sigma_{h,238} + x\sigma_{b,238} + (1-x)\sigma_{h,235} + (1-x)\sigma_{b,235}} = \frac{-1{,}256x + 1.28}{-1{,}406x + 1.68}$$



50%-os ^{235}U esetén 66,7% az esély, 20,5%-os ^{235}U esetén 50%.