

1. Milyen részecske írhatja le a mageróket?

Az elektromágneses kölcsönhatás analógiájára írjuk le az erős kölcsönhatást. Legyen a közvetítő a foton helyett egy m tömegű részecske. Ennek cseréje során az energia-bizonytalanság mc^2 . A kicserélt részecske nagyságrendileg $s = 1 \text{ fm}$ (mágnéret) utat jár be. Mivel $s = c \Delta t = c \hbar / 2 \Delta E = \hbar / 2mc$, azaz $m = \hbar / 2sc = 100 \text{ MeV}$. Nagyságrendileg ez a részecske tömege.

2. Mit tudhatunk a magerők hatótávolságáról, potenciáljáról?

Yukawa-féle gondolatmenet: keressünk megoldást a Klein-Gordon egyenletre (a Laplace-operátort általánosítva):

$$\hbar^2(c^{-2}\partial_t^2 + \Delta)\Phi = c^2 m \Phi.$$

Statikus megoldást keresve $\hbar^2 \Delta \Phi = mc^2 \Phi$. Ezt az egyenletet kell megoldani, praktikusán polárkoordinátákban. Laplace polár-koordinátákban:

$$\Delta = \partial_r^2 + 2r^{-1} \partial_r - r^{-2} L^2$$

ahol L a szögek szerinti deriváltak operátora,

$$L = \sin^{-1} \theta \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \sin^{-2} \theta \partial_\phi^2$$

Mivel gömbszimmetrikus esetre keressük a megoldást, ezért $L\Phi = 0$ itt. Az egyenletet átírva $u = r\Phi$ -re:

$$b^2 \partial_r^2 u = u$$

ahol $b = \hbar / mc$ jelölést vezettük be. Ennek megoldása exponenciális:

$$u = A e^{r/b} + B e^{-r/b}$$

ahol az első tagot elhagyjuk (mivel ekkor $r \rightarrow \infty$ esetén $u \rightarrow \infty$ lenne), így a végső megoldás:

$$\Phi = -g e^{-r/b} / r$$

Ezen kölcsönhatás hatótávolságát is megbecsülhetjük:

$$\bar{r} = \frac{\int r |\Phi|^2 dV}{\int |\Phi|^2 dV} = \frac{\int r e^{-2r/b} dr}{\int e^{-2r/b} dr} = \frac{b}{2} = a = \frac{\hbar}{2mc}$$

azaz ugyanaz jött ki, mint a határozatlansági relációnál. A potenciális energia ez alapján:

$$V = -g^2 \frac{e^{-2r/b}}{r}.$$

3. Mi a kapcsolat bomló részecskék élettartama és energiaszélessége között?

Bomló részecskék félélettartama $T_{1/2} = \ln 2 / \lambda$, ahol λ a bomlási állandó (amely az $N(t) = N(0) \exp(-\lambda t)$ egyenletben szerepel). Az átlagos élettartam az $\exp(-\lambda t)$ eloszlás mellett vett várható érték:

$$\tau = \frac{\int t e^{-\lambda t} dt}{\int e^{-\lambda t} dt} = \frac{1}{\lambda}.$$

Kvantummechanikailag a hullámfüggvény Schrödinger képből $\Psi(t) = \Psi(0) \exp(-iEt/\hbar)$. Stabil állapot esetén $|\Psi(t)|^2 = |\Psi(0)|^2$, bomló esetén $E \rightarrow E_0 - i\Gamma/2$ bevezetése miatt $|\Psi(t)|^2 = |\Psi(0)|^2 \exp(-t\Gamma/\hbar)$, tehát $\Gamma = \lambda \hbar$. A hullámfüggvény tehát $\Psi(t) = \Psi(0) \exp(-iE_0 t/\hbar) \exp(-\lambda t/2)$. Ezt próbáljuk Fourier-transzformálni ($t \rightarrow \omega$), figyelembe véve, hogy $E = \hbar \omega$ és $\Psi(t) = 0$, ha $t < 0$. Ezt kapjuk:

$$\Phi(E) = \Psi(0) i\hbar / (E - E_0 + i\Gamma/2) \sqrt{2\pi}.$$

Ebből a valószínűség:

$$P(E) = |\Phi(E)|^2 = C / ((E - E_0)^2 + \Gamma^2/4) = \Gamma / 2\pi / ((E - E_0)^2 + \Gamma^2/4)$$

a megfelelő normálás miatt. Innen tehát az energiaszélesség és az élettartam kapcsolata $\Gamma \tau = \hbar$ Segítség (Fourier-transzf. szabályok):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x[\exp(-a x) \theta(x)](\omega) &= 1 / \sqrt{2\pi} (a - i\omega) & \mathcal{F}_x[\exp(-a x)](\omega) &= \sqrt{2\pi} \delta(i a + \omega) \\ \mathcal{F}_x[\exp(-a x) \theta(-x)](\omega) &= 1 / \sqrt{2\pi} (-a + i\omega) & \mathcal{F}_x[\exp(-a |x|)](\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} a / (a^2 + \omega^2) \end{aligned}$$

4. Mekkora a deuteronban a magerők potenciálja a tömeghiány alapján?

Deuteron tömege: 2,014102 amu

Neutron: 1.008665 amu (939,6 MeV)

Proton: 1.007825 amu (938,3 MeV)

Deficit: 0.002388 amu = 2.2 MeV = 0.35 pJ

1 pJ = 6.24 MeV, 1 MeV = 0.160 pJ

1 amu = 1.660 565 × 10⁻²⁷ kg = 1 g / N_A = 931.5016 MeV

1 MeV = 0.00107 amu, 1 amu = 931.5 MeV

5. Mekkora az atommagban egy nukleon energiabizonytalansága?

Heisenberg: $\Delta x \Delta p_x > \hbar$, továbbá $\Delta x=R$, $\Delta p_x=mv_x$

Ebből $v_x > \hbar/mR$, azaz $E_K = 3\hbar^2/(2mR^2)$

Deuteron esetén ez $5 \text{ pJ} = 31 \text{ MeV}$

6. Hogy lehet megmérni a neutron tömegét?

Spektroszkópia lehetetlen, egyszerű kinematika segít

Neutron ütközik A maggal, $x=Mn/AMp$

Átadott/bejövő energia: $4x/(x+1)^2$, maximum: $x=1$

Valóságban H mag esetén, azaz $Mn=Mp$!

7. Mekkora a magfúzió energia-többlete?

Em bizonytalanságból, Eh a kötésből

$$E(2H) = 2Em + Eh$$

$$E(4He) = 4Em + 6 Eh$$

Deuteron tömege: 2,014102 amu ($0.35 \text{ pJ} = 2.2 \text{ MeV}$)

Neutron: 1.008665 amu

Proton: 1.007825 amu

Triton: 3.01605 amu ($1.35 \text{ pJ} = 8.4 \text{ MeV}$)

^3He : 3.01603 amu ($1.22 \text{ pJ} = 7.6 \text{ MeV}$)

^4He : 4.00260 amu ($4.52 \text{ pJ} = 28.2 \text{ MeV}$)

$D+T \rightarrow ^4\text{He}+n$ (17.6 MeV)

$D+D \rightarrow T+n$ (4.02 MeV)

$D+^3\text{He} \rightarrow ^4\text{He}+p$ (18.3 MeV)

Kötési energiák görbéje

8. Mekkora lenne a Nap, ha neutroncsillag lenne?

$$R=1,392 \times 10^6 \text{ km}$$

$$V=1,41 \times 10^{18} \text{ km}^3$$

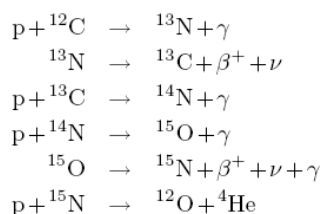
$$M=1,9891 \times 10^{30} \text{ kg}$$

Neutroncsillag-sűrűség: $3.7-5.9 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$

Atommag-sűrűség: $3 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$

9.

Bethe a következő magreakció-ciklust javasolta a Nap energiatermelésének leírására:



Számítsuk ki a földi neutrínó fluxust fenti folyamatból, ha feltételezzük, hogy neutrínók mindkét esetben átlagosan a Q reakció energia $2/3$ -át viszik el, ismert még, hogy a ^{13}N bomlása során $Q = 1,2 \text{ MeV}$, az ^{15}O bomlása során pedig $Q = 1,2 \text{ MeV}$ energia szabadul fel, illetve a napállandó értéke $\Phi_E = 1,35 \cdot 10^3 \text{ J/m}^2\text{s}$.

Megoldás Feltételezzük, hogy a $4p \rightarrow ^4\text{He}$ folyamat során a felszabaduló energia minden formája végül elektromágneses sugárzássá alakul és hozzáadódik a napállandóhoz, kivéve a neutrínók által elvitt energiát. Az egy fúziós ciklus alatt felszabadult és a napállandóhoz hozzájáruló energia a négy proton és a ^4He tömegének a különbsége, kivonva belőle a két neutrínó által elvitt átlagos energiát: $E = (4 \cdot m_p - m_{He}) - \frac{2}{3}Q_{\nu_1} - \frac{2}{3}Q_{\nu_2} = (4\Delta_p - \Delta_{He}) - \frac{2}{3}Q_{\nu_1} - \frac{2}{3}Q_{\nu_2} = 4 \cdot 7,289 \text{ MeV} - 2,425 \text{ MeV} - \frac{2}{3}1,2 \text{ MeV} - \frac{2}{3}1,68 \text{ MeV} = 24,81 \text{ MeV}$. A napállandó $1,35 \cdot 10^3 \text{ J/m}^2\text{s} = 8,55 \cdot 10^{15} \frac{\text{MeV}}{\text{m}^2\text{s}}$. Ezzel pedig a neutrínó fluxus: $\Phi_{\text{neutr.}} = 2 \cdot \frac{\Phi_E}{E} = 6,89 \cdot 10^{14} \text{ 1/m}^2\text{s}$.

10.

Egy nagyon vékony Cs forrásból kilépő elektronok spektrumában $B\rho=3390$ Gauss·cm értéknél intenzív csúcs jelentkezik a spektrográfban. Számítsuk ki a K héj kötési energiáját, ha tudjuk, hogy a belső konverzió a 0,664 MeV-es magnívóhoz tartozik!

Megoldás Először néhány mértékegységet fejezünk ki másképp: 1 Gauss = 10^{-4} T, azaz 1 Gauss·cm = 10^{-6} Tm, valamint 1 eV = 1.60210^{-19} J és p [” MeV”] = pc = $3 \cdot 10^8 p$ [kg m/s]. Relativisztikusan is igaz, hogy $p=e \cdot \rho \cdot B$, a haladási irányra merőleges, homogén mágneses térben haladó részecskére. Behelyettesítve: $p = 1,6 \cdot 10^{-19} C \cdot 3390 \cdot 10^{-6} T m = 5,42410^{-22}$ kg m/s = $1,01610^{66}$ eV” ≈ 1 ” MeV”. $E_m = E_{kin} + E_k$, $E_{kin} = \sqrt{p^2 + m^2} - m = \sqrt{(1 \text{ MeV})^2 + (0,5 \text{ MeV})^2} - 0,5 \text{ MeV} = 618 \text{ keV}$. Innen: $E_k = E_m - E_{kin} = 664 \text{ keV} - 618 \text{ keV} = 46 \text{ keV}$.

11.

Egy $A = 100$ tömegszámú hipotetikus céltárgyra $3,2 \mu\text{A}$ áramú 5 MeV -es ${}^3\text{He}$ nyalábot irányítunk. A rugalmas szórás izotróp, a totális hatáskeresztmetszet $\sigma_{tot} = 1,25$ barn. A kijövő ${}^3\text{He}$ részecskéket egy $2,5 \text{ mm} \times 4 \text{ mm}$ keresztmetszetű, 10 cm távolságban elhelyezett 100% hatásfokú detektorral figyeljük, $\theta_{lab} = 20^\circ$ -ban. A céltárgy vastagsága 1 mg/cm^2 , sűrűsége 1 g/cm^3 . Mekkora a detektor beütésszáma?

Megoldás A nyaláb részecskéinek kinetikus energiája három nagyságrenddel kisebb nyugalmi tömegüknél ($5 \text{ MeV} \ll 3 \text{ GeV}$), ezért a feladatban klasszikusan számolhatunk. Továbbá, a nyaláb részecskéinek 3 -as tömegszáma két nagyságrenddel kisebb a céltárgy atommagjainak 100 -as tömegszámánál, ezért a tömegközépponti és a labor rendszerben közel azonosak a fizikai paraméterek. A tömegközépponti rendszerben izotróp szórás tehát jó közelítéssel a laborrendszerben is az. A detektor keresztmetszete által lefedett térszög $\Delta\Omega = \frac{A}{R^2} = \frac{2,5 \text{ mm} \cdot 4 \text{ mm}}{(10 \text{ cm})^2} = 10^{-3}$, tehát a $\Delta\Omega$ térszögbe szórás hatáskeresztmetszete az izotróp szórás miatt: $\Delta\sigma = \Delta\Omega \frac{\sigma_{total}}{4\pi} = 10^{-3} \frac{1,25 \text{ barn}}{4\pi} = 9,95 \cdot 10^{-33} \text{ m}^2$. Az $A = 100$ tömegszámú anyag moláris tömege kb. $M = 100 \text{ g/mol}$, ebből a $\rho_m = 1 \text{ mg/cm}^2$ céltárgy vastagság felhasználásával $\rho_F = N_A \frac{\rho}{M} d = 610^{18} \text{ db/cm}^2$ felületi részecskeszám sűrűség adódik. Jelöljük D -vel a nyaláb keresztmetszetét a céltárgyon. A D felület mögött $D \cdot \rho_F$ részecske van a céltárgyban, amelyek együttesen $D_R = \Delta\sigma \cdot D \cdot \rho_F = D \cdot 5,97 \cdot 10^{-10}$ felületen szórják a nyalábrészecskéket a detektorba. Az $I = 3,2 \mu\text{A}$ áramú nyaláb $I_N = \frac{I}{2e} = \frac{3,2 \cdot 10^{-6} \text{ C/s}}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 10^{13} \text{ db/s}$ részecskeáramot jelent. Az $\eta = 100\%$ hatásfokú detektor beütésszáma tehát $\dot{N}_D = \eta \frac{D_R}{D} \dot{N} = 5,97 \cdot 10^3 \text{ 1/s}$.

12.

$A = 165$ tömegszámú $\rho = 10 \text{ g/cm}^3$ sűrűségű anyagból $0,1 \text{ mm}$ vastag céltárgyat készítünk. Ezt $10 \mu\text{A}$ áramú α^{++} részecskékkel bombázzuk. A $\sigma = 1$ barn ($= 10^{-24} \text{ cm}^2$) hatáskeresztmetszettel végbemenő reakció során 10 perc felezési idejű izotóp keletkezik a céltárgyban. 5 perc-es besugárzás után mekkora lesz a 20 perc-ig magára hagyott céltárgy aktivitása?

Megoldás Először meghatározzuk a céltárgy felületi részecske-sűrűségét. Az $A = 165$ tömegszámú anyag moláris tömege kb. $M = 165 \text{ g/mol}$, ebből a $\rho = 10 \text{ g/cm}^3$ sűrűség és a $d = 0,1 \text{ mm}$ céltárgy vastagság felhasználásával $\rho_F = N_A \frac{\rho}{M} d = 3,36 \cdot 10^{20} \text{ db/cm}^2$ felületi részecskeszám sűrűség adódik. Jelöljük D -vel a nyaláb keresztmetszetét a céltárgyon. A D felület mögött $D \cdot \rho_F$ részecske van a céltárgyban, amelyek együttesen $D_R = \sigma D \rho_F = D \cdot 3,36 \cdot 10^{-4}$ felületen lépnek magreakcióba a nyalábrészecskékkel, azaz jelen esetben ekkora felületen keletkeznek izotópok a céltárgyban. Az $I = 10 \mu\text{A}$ áramú nyaláb $I_N = \frac{I}{2e} = \frac{10^{-5} \text{ C/s}}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 3,125 \cdot 10^{15} \text{ db/s}$ részecskeáramot jelent. A céltárgyban tehát $S = I_N \frac{D_R}{D} = 1,134 \cdot 10^{10} \text{ db/s}$ rátával keletkeznek az izotópok. Az izotópok számának változását az $\dot{N}(t) = S(t) + A(t)$ differenciálegyenlet írja le, ahol $A(t) = \lambda N(t)$ a bomlási ráta, azaz az aktivitás λ bomlási állandóval. Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet megoldását $S(t) = \text{const.}$ esetén a legegyszerűbben az állandók variálásával kaphatjuk meg: $N(t) = \frac{C}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t})$. A λ bomlási állandó értékét a 10 perces felezési időből kapjuk: $\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = 1,15 \cdot 10^{-3} \text{ 1/s}$. Az aktivitás tehát az 5 perces besugárzás végén $A(5 \text{ perc}) = \lambda N(5 \text{ perc}) = C (1 - e^{-\lambda(5 \text{ perc})}) = 3,32 \cdot 10^9 \text{ Bq}$ lesz. A besugárzás után az S forrástag nulla és az aktivitás exponenciálisan csökken: $A(t + 5 \text{ perc}) = A(5 \text{ perc}) \cdot e^{-\lambda t}$, tehát 20 perc után a minta aktivitása $A = 8,35 \cdot 10^8 \text{ Bq}$ lesz.

13. Atomi méretek

Egy m^3 vizet forraljunk fel! Ezt úgy is megtehetjük, hogy „molekulányi” részecskékre daraboljuk a vizet, azaz a felületi feszültség ellen dolgozunk. A víz forráshőjéből és felületi feszültségéből kiindulva, mekkora egy vízmolekula mérete? Ugyanez mekkora héliumra? Az adatok:

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3 \text{ (He: } 130 \text{ kg/m}^3)$$

$$\gamma = 72 \text{ mJ/m}^2 \text{ (He: } 0,014 \text{ mJ/m}^2)$$

$$L = 2250 \text{ kJ/kg} \text{ (He: } 25 \text{ kJ/kg)}$$

Válasz: A nagy kocka élhossza a , egy molekula mérete d . Ha a/d vágást csinálunk mindegyik síkban, akkor összesen $2a^2 \times 3a/d$ felületnövekedést értünk el. Az ehhez szükséges energia $\gamma \times 6a^3/d$, vagy a forráshővel $\text{La}^3 \rho$. Innen $d = 6\gamma/\rho L$. Ez vízre $0,2 \text{ nm}$, héliumra $0,026 \text{ nm}$ – nagyságrendi egyezés a kísérleti/elméleti adatokkal!

14. Mágneses momentum, Schmidt vonalak

A mágneses momentum definíciója egy adott térfogat-elemre $\mu = r \times J/2$, ahol J az áramsűrűség itt. Egy proton áramsűrűsége $e p/M$ a proton helyén, és itt p az impulzus. Innen tehát egy protonra $\mu = e/2M \cdot r \times p$, vagy $e\hbar/2M \cdot j$ (mivel $r \times p$ a perdület). A magok mágneses momentumát könnyű kiszámolni abban az esetben, ha a momentum kizárólag a páratlan nukleonból adódik, és a többiek pályamomentuma és spinből eredő momentuma mind páronként kiesik. Ez a Schmidt modell. Ekkor $j = l + s$ (azaz csak ezt az egy nukleont kell figyelembe venni), és $\mu = e\hbar/2Mc \cdot (g_l + g_s s)$, ahol proton esetén $g_s = g_p = 5.59$ és $g_l = 1$, neutron esetén $g_s = g_n = -3.83$ és $g_l = 0$. Mivel $s = 1/2$ mindenképpen, ezért $j = l \pm 1/2$ mindenképpen. Az effektív mágneses momentum valójában $\mu_{\text{eff}} = e\hbar/2Mc \cdot [g_l \langle l_j \rangle / I^2 + g_s \langle s_j \rangle / j^2] j$, ahol

$$\langle l_j \rangle / j^2 = (j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)) / (2j(j+1))$$

$$\langle s_j \rangle / j^2 = (j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)) / (2j(j+1))$$

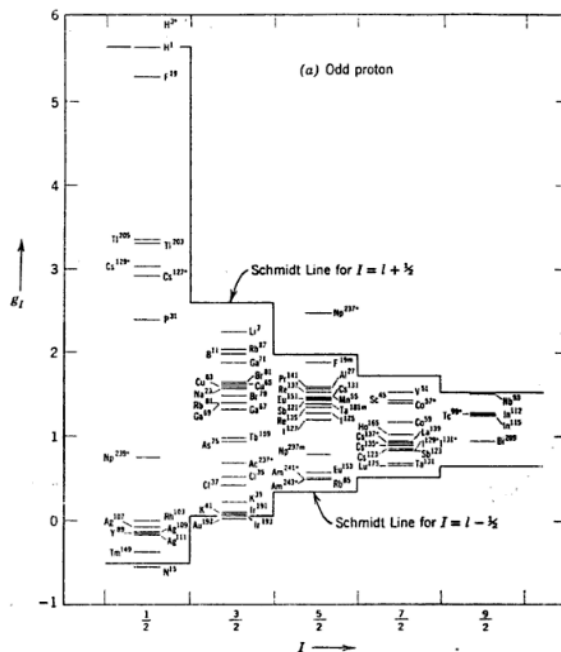
azaz $j = l + 1/2$ esetén: $\mu = g_j \mu_N = [g_s/2 + l g_l] \mu_N$

és $j = l - 1/2$ esetén: $\mu = g_j \mu_N = [-g_s/2 + (l+1)g_l] \mu_N$

Ténylegesen azonban a konkrét mágneses momentum értékek a fenti két eset közé esnek, lásd a fenti ábrán (a példa a páratlan protonra vonatkozik).

Néhány g-faktor (feladat: számoljuk ki!)

Mag	páratlan nukleon	l, j	g_{elm}	$g_{\text{mért}}$
^1H	proton (1)	0, 1/2	5,59	5,590229
^{13}C	neutron (7)	1, 1/2	0,6383	1,405567
^{15}N	proton (7)	1, 1/2	-0,265	-0,56669
^{17}O	neutron (9)	2, 5/2	-0,766	-0,75786
^{23}Na	proton (11)	2, 5/2	1,918	1,478701
^{31}P	proton (15)	0, 1/2	5,59	2,262956



15. Mágneses magrezonancia

Nátriumhidroxid vizes oldatán végzünk magrezonancia kísérletet és 9.009 MHz frekvencián rezonanciát találunk. Az alkalmazott mágneses tér 0.8 Tesla. Számítsa ki a ^{23}Na mag mágneses momentumát magmagneton egységekben, ha a ^{23}Na spinje 3/2! Mekkora az $m = 3/2$ állapot g-faktora? (^{23}Na 100% gyakoriságú.)

Egy m spinű állapot energiája B mágneses térben $-\mu m B$. Két állapot között az energiakiülönbség μB , mivel a B tér hatására hasadtak fel az energiaszintek, és m feles értékeket vesz fel. Ezen kívül bevezethetjük a $\gamma = \mu/\hbar$ faktort, amely a mag mágneses momentumát és perdületét köti össze, ez az ún. giromágneses viszony. Az állapotok energiája tehát m -től függ, az pedig $-j \dots j$ között változik, és értékei például $-3/2, -1/2, 1/2, 3/2$ között változnak. Vegyük tehát a $\gamma = \mu/\hbar$ és $\mu = g \mu_N$ összefüggéseket, továbbá $\mu_N = 5.05 \cdot 10^{-27} \text{ J/T}$.

Az elnyelt energia (foton) frekvenciája $hf = g \mu_N B$, azaz $\mu = g \mu_N = hf/B = 7.46 \cdot 10^{-27} \text{ J/T}$. Az $m = 3/2$ állapot energiája az ehhez tartozó energia 3/2-szerese, azaz $E = 1.5 g \mu_N B = 10^{-26} \text{ J}$, a mag mágneses momentuma pedig 1.5μ . Ennek az állapotnak a g-faktora $1.5 \mu / \mu_N = 2.2$.

16. A magnívók sűrűsége:

$$\rho(E, J) = \frac{k \cdot \exp(2 \cdot \sqrt{a \cdot E^*})}{(E^*)^5} \cdot (2 \cdot J + 1) \cdot \exp\left(-\frac{\left(J + \frac{1}{2}\right)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right)$$

$$E^* = E \mp \Delta_{ptl - psl}$$

$$a \sim A/(8 \text{ MeV}), \sigma \sim Z/10$$

k mennyi, ha $^{164}_{68}\text{Er}$; $J = 3$, $E \sim 5 \text{ MeV}$,

a nívósűrűség $\rho(5 \text{ MeV}, J=3) \sim 50 \text{ nívó/kev}$, $E^* = 4 \text{ MeV}$

17. Mekkora a magok kvadrupólmomentuma?

A multipólmomentum definíciója (az elektrosztatikus kölcsönhatási energia számolásának sorfejtésekor jön be) $Q_{lm} = \int \rho(r) r^l Y_{lm}(r) d^3r$. Ebből $l=0$ esetén az össztöltést kapjuk, $l=1$ esetén $m=-1,0,1$ van, ez éppen a $P_i = \int r_i \rho(r) d^3r$ dipólvektor lesz. $l=2$ esetén 5 komponenst kapunk, ez a nulla nyomú Q_{ij} kvadrupólmomentum-mátrix, $Q_{ij} = \int (3r_i r_j - \delta_{ij} r^2) \rho(r) d^3r$, (ennek a nyoma így 0, és mivel szimmetrikus, így öt szabad komponense van, ez éppen az öt gömbfüggvény, Y_{2m} , $m=-2..2$).

A mag kvadrupólmomentuma, forgásszimmetria és z irányban nyúlt vagy lapult mag esetén:

$$Q = Q_z = Q_{33} = \int (3z^2 - r^2) \rho(r) d^3r = \int (2z^2 - x^2 - y^2) \rho(r) d^3r$$

A nukleonokra egyesével összegezve is lehet:

$$Q_z = \sum_{i=1}^A Q_z(i) = \sum_{i=1}^A e_i (3z_i^2 - r_i^2)$$

Vagy gömbfüggvénnyel:

$$Q_z^0 = Q_z = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \sum_{i=1}^A e_i r_i^2 Y_2^0(\theta_i, \phi_i)$$

$Q > 0$: prolate (szivar), $Q < 0$: oblate (diszkosz)

Legyen az atommag egy A,B,C méretű téglalest. Ekkor

$$\rho(r) = \rho_0 \Theta(x^2/A^2 - 1) \Theta(y^2/B^2 - 1) \Theta(z^2/C^2 - 1) = \rho_0 \Theta(|A|-|x|) \Theta(|B|-|y|) \Theta(|C|-|z|)$$

Segítség:

$$\int_{-A}^A x^2 dx = \frac{2A^3}{3} \quad \int_{-A}^A 1 dx = 2A$$

Eredmény: $2ABC/3(2C^2 - A^2 - B^2)$, $\rho_0 ABC = eZ$

Legyen egy A,B,C nagytengelyű ellipszoid. Ennek felülete:

$$s = x^2/A^2 + y^2/B^2 + z^2/C^2$$

Legyen a mag sűrűsége: $\rho(r) = \rho_0 \exp(-s) = \rho_0 \exp(-x^2/A^2 - y^2/B^2 - z^2/C^2)$

Integráljuk ki a fenti függvényt! Segítség:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{A^2}\right) x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\left(\frac{1}{A^2}\right)^{3/2}} \text{ if } \text{Re}(A^2) > 0$$

Eredmény: $\pi^{3/2} ABC/2 \times (2C^2 - A^2 - B^2)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{A^2}\right) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{1}{A^2}}} \text{ if } \text{Re}(A^2) > 0$$

„Black disk” ellipszoid esetén nehéz a számolás: $\rho(r) = \rho_0 \Theta(x^2/A^2 + y^2/B^2 + z^2/C^2 - 1)$. Forgási ellipszoidra kijön az integrál, az integrálási határt kell jól megválasztani. Az eredmény $4\pi/15 \times A^2 C (2C^2 - 2A^2)$

2H: $Q=0.00286$ barn; 12C: $Q=0.06$ barn; 235U: $Q=4-6$ barn; 197-199Au: $Q=0.5-1.0$ barn

Q/R^2 érdekes mennyiség

18. A mért magmomentumok

A fentiek alkalmazása az NQR, azaz kvadrupól magrezonancia, amelyet elektromos térben vizsgálnak, $j \geq 1$ atommagokra. Anyagvizsgálatra kitűnő, hiszen minden magnak egyedi a kvadrupólmomentuma, és csak elektromos tér (RF) kell. Fontos alkalmazása pl. a robbanóanyag- illetve taposóakna-keresés. Minden fenti számolás a mag saját koordináta-rendszerében volt. Ez a magmomentum tehát a mag saját

momentumot mérünk. A lehető legnagyobb momentum és a saját mom. kapcsolata (ha $j_z = j$ itt)

$Q = j(2j-1)/(j+1)(2j+3) Q_{\text{saját}}$, ez $j=0$ és $j=0.5$ esetén nulla

vagy tetszőlegesen álló spin esetén:

$$Q = (3j_z^2 - j(j+1))/((j+1)(2j+3)) Q_{\text{saját}}$$

Például Rhenium izotópokra (itt j_z helyett K szerepel):

Klórra pl: $Q(^{35}\text{Cl}) = -81,65$ mb, $Q(^{37}\text{Cl}) = -64,35$ mb. $Q_0 = ?$

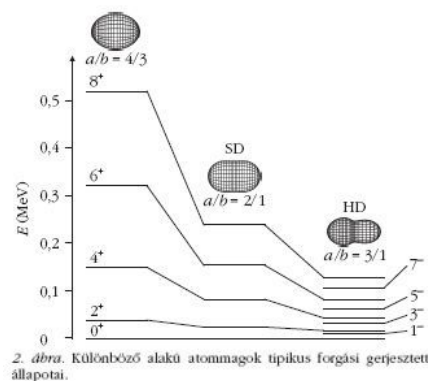
További eredmény (imp.mom. algebra, Wign-Eck. tétel):

Isotope	$J^{\pi}K$	Q (b)	Q_0 (b)	
			Exp.	Theor. ^a
¹⁸² Re	2 ⁺ 2	(>)+1.9 (2) [#]	(>)+ 6.6 (7) [#]	+ 6.65
¹⁸³ Re	$\frac{5}{2}^+ \frac{3}{2}$	+2.2 (2)	+ 6.2 (6)	+ 6.55
¹⁸⁴ Re	3 ⁺ 3	+3.3 (3)	+ 7.9 (7)	+ 6.34
¹⁸⁵ Re	$\frac{5}{2}^+ \frac{3}{2}$	+2.16(6) ¹	+ 6.05(17)	+ 6.15
¹⁸⁶ Re	1 ⁻ 1	+0.88(12)	+ 8.8 (1.2)	+ 5.91
¹⁸⁷ Re	$\frac{5}{2}^+ \frac{3}{2}$	+2.05(6) ¹	+ 5.71(17)	+ 5.77
¹⁸⁸ Re	1 ⁻ 1	+0.88(14)	+ 8.8 (1.4)	+ 5.46

$$Q_s(I) = \langle I, m = I | Q_2^0 | I, m = I \rangle = \sqrt{\frac{I(2I-1)}{(2I+1)(2I+3)(I+1)}} (I || Q || I)$$

19. Forgási gerjesztések

Itt egy tipikus transzurán atommag alapállapotához tartozó forgási állapotok (az alapállapot forgási sáv), illetve a superdeformált (SD) és a hiperdeformált (HD) állapotok forgási sávjai láthatók. HD állapotok esetén az elméleti előrejelzések értelmében az atommag már nem tükröszimmetrikus: páratlan perdületű állapotokkal is ki kell egészíteni a forgási sávot. Az atommagok alakjának meghatározásához tehát meg kell mérnünk a fenti gerjesztett állapotok energiáit.



2. ábra. Különböző alakú atommagok tipikus forgási gerjesztett állapotai.

A mag forgási gerjesztési nívói a magspin és a tehetetlenségi nyomaték függvényében:

$$E = \hbar^2 J(J+1)/2\Theta \quad (\text{a lá } p^2/2m)$$

A gerjesztési energiák: 0^+ : 0 MeV; 2^+ : 0.04 MeV; 4^+ : 0.13 MeV; 6^+ : 0.28 MeV; 8^+ : 0.48 MeV

Mekkora a mag tehetetlenségi nyomatéka? És mekkora a forgási sebesség

$$(E = \hbar^2 J(J+1)/2\Theta = \Theta \omega^2/2), \quad \Theta = \int r^2 \rho(r) d^3r$$

20. Legalább milyen energiájú alfa részecskékkel kell a ^{13}C atommagot bombázni, hogy az ^{16}O első gerjesztett állapota - ami 6.05 MeV-nál van - gerjesztődjön (α, n) reakcióval? A tömegek AMU egységben: $m_\alpha = 4,0026$, $m_C = 13,003355$, $m_O = 15,9949$, $m_n = 1,008665$. $1 \text{ AMU} = 931 494 088 \text{ eV}$
 $Q = 2,26 \text{ MeV}$. 6,05 MeV kell, azaz a különbség 3,79 MeV. Ehhez $m_C/(m_\alpha + m_C)$ -ed részét adja a kinetikus energiájának az alfa. Levezetve: kezdetben volt $m_\alpha v_\alpha$ impulzus volt, ez megegyezik $v_{\text{rezonancia}}(m_\alpha + m_C)$ -val. A mozgási energiák viszonya innen: $2E_{\text{rezonancia}} = (m_\alpha + m_C) v_{\text{rezonancia}}^2 = m_\alpha/(m_\alpha + m_C) 2E_\alpha$, míg $2E_\alpha = m_\alpha v_\alpha^2$. Innen $\Delta E = E_\alpha - E_{\text{rezonancia}} = E_\alpha (1 - m_\alpha/(m_\alpha + m_C)) = E_\alpha m_C/(m_\alpha + m_C)$. Tehát ha $\Delta E = 3,79 \text{ MeV}$ kell, akkor $E_\alpha = 4.96 \text{ MeV}$ kell.

21. 7,5 MeV energiájú proton rugalmasan és tisztán E-M szóródik ^7Li magon, 90 fokban. Mekkora lesz az energiája? Mekkora az energia, ha a Li 0,477 MeV-vel gerjesztődik is? (x-y síkban megmarad az impulzus $\rightarrow v_{Li,x} = 1/7 v_p$, $v_{Li,y} = 1/7 v_p'$; másrészt az energia is, $E = 0.5 m v^2$, $m_{Li} = 7 m_p \rightarrow E_{Li} = 1/7 (E_p + E_p')$ $\rightarrow E_p - E_p' = 1/7 (E_p + E_p') + E_{gerj}$, azaz $E_p' = (6E_p - 7E_{gerj})/8 = 5,2 \text{ MeV}$. Vagy $E_p' = 6E_p/8 = 5,6 \text{ MeV}$.