Egyrészecske operátorok

Adott a három Pauli mátrix, melyek $\frac{\hbar}{2}$ szorosai pl az egyrészecske impulzusmomentum és spin operátorok. Tudható a mátrixok alakja és dimenziója. Egyszerűség kedvéért a Pauli mátrixokat is egyrészecske-operátornak nevezem, és $\binom{a}{b}$ alakú egyrészecske állapotokra hattatom. A Pauli mátrixok:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A Pauli mátrixok nem kommutálnak. Szokás a mátrixok normált sajátvektorait tekinteni. A mátrix egy kétdimenziós téren hat, két sajátvektort keresünk.

- Vizsgáljuk σ_z sajátvektorait! Tekintsük a $\binom{1}{0}$ és $\binom{0}{1}$ vektorokat! Absztrakt vagy más féle jelölésben rendre a $|\uparrow\rangle$ illetve $|\downarrow\rangle$ vektorokkal azonosítjuk. Ezek tényleg sajátvektorok rendre 1 és -1 sajátértékkel. Ortonormáltak is.
- Tekinthetnék σ_x normált sajátvektorait is: $\frac{\binom{1}{1}\sqrt{2}}{2}$ és $\frac{\binom{1}{-1}\sqrt{2}}{2}$, melyek sajátértékei rendre 1 és -1. A számszorzó azért kell, hogy a vektorok normáltak legyenek. A két vektor ortogonális. Látjuk, hogy ez csúnyább, mint az előbb, ezért is szeretjük a másikat vizsgálni.

Tekintsük a $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ operátort, mely egy vektor, és minden vektorkomponense egy Pauli mátrix! Ez analógiát mutat az impulzusmomentum és spin operátorokkal. Tudjuk, hogy egy részecskének _az_ impulzusmomentumát és _a_ spinjét nem lehet megmérni, legfeljebb az impulzusmomentum négyzetét és valamely tengelyre (x, y vagy z) vett vetületét. Ez jól látszik a formalizmusból, ugyanis σ -t nem tudjuk hattatni egyrészecske-állapotra, tudjuk viszont a négyzetét: $\sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2$. Ezt nem kell hattatni egy állapotra ahhoz, hogy megvizsgálhassuk az eredményt, ugyanis mátrixazonosság, hogy $\sigma_i^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall i \in \{x, y, z\}$, az egységoperátornak pedig minden vektor sajátvektora 1 sajátértékkel.

Érdekes megvizsgálni még, hogy mi történik $|\uparrow\rangle$ illetve $|\downarrow\rangle$ vektorokkal σ_x és σ_y hatására.

- $\sigma_x|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\binom{1}{0} = \binom{0}{1} = |\downarrow\rangle$, hasonlóképp $\sigma_x|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle$
- $\sigma_y|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = i|\downarrow\rangle$, hasonlóképp $\sigma_y|\downarrow\rangle = -i|\uparrow\rangle$

Többrészecske operátorok

Definiáljuk a kétrészecske Pauli mátrixokat: $\sigma_{i,2} = \underbrace{\mathbf{1} \otimes \sigma_i}_{:=\sigma_{2i}} + \underbrace{\sigma_i \otimes \mathbf{1}}_{:=\sigma_{1i}} = \sigma_{2i} + \sigma_{1i} \quad i \in \{x, y, z\}$. Az operátorok a 4 dimenziós, $\binom{a}{b} \otimes \binom{c}{d} = \begin{pmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{pmatrix}$ alakú kétrészecske állapotokon hatnak. A definiált $\sigma_{i,2}$ operátorok analógok a független kétrészecske adott tengelyre vett összspin operátorával. A tenzorszorzás szabályát alkalmazva kifejezhetjük az operátorokat mátrixalakban.

$$\sigma_{1x} = \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \end{pmatrix} \quad \sigma_{2x} = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}$$
$$\sigma_{1y} = \begin{pmatrix} & & -i & \\ & & & -i \\ i & & & \\ & i & & \end{pmatrix} \quad \sigma_{2y} = \begin{pmatrix} & -i & & \\ i & & & \\ & & & -i \\ & & i & \end{pmatrix}$$
$$\sigma_{1z} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad \sigma_{2z} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Tegyük meg az alábbi azonosításokat: $|\uparrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $|\uparrow\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $|\downarrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $|\downarrow\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$! Ekkor σ_{1z} sajátértékei rendre 1, 1, -1, -1, illetve σ_{2z} sajátértékei rendre 1, -1, 1, -1, valamint $\sigma_{z,2}$ sajátértékei rendre 2, 0, 0, -2. Ez így lesz következetes az egyrészecske-operátoros jelöléssel, mert láthatjuk, hogy σ_{1z} az első nyíl értékét adja, és 1, ha felfele áll, és -1, ha lefele, hasonló módon σ_{2z}, $\sigma_{z,2}$ pedig a nyilak összértékét adja, vagyis a nyilas jelölés is analógiát mutat, mert $|\uparrow\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle$ … stb.

Itt is definiálhatunk $\sigma_n = (\sigma_{nx} + \sigma_{ny} + \sigma_{nz})$ $n \in \{1,2\}$ operátorokat. Vizsgálhatjuk σ_1^2, σ_2^2, $(\sigma_1 + \sigma_2)^2$, $\sigma_1 \cdot \sigma_2$ … stb. sajátvektorait és sajátfüggvényeit. Például $(\sigma_1 + \sigma_2)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1$. Fizikai megfontolásokból, vagy a mátrixok vizsgálatával láthatjuk, hogy $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$, vagyis ez a két operátor kommutál, így $(\sigma_1 + \sigma_2)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2$.

A mátrixszorzást elvégezve kapjuk, hogy $(\sigma_1 + \sigma_2)^2 = \begin{pmatrix} 8 & & & \\ & 4 & 4 & \\ & 4 & 4 & \\ & & & 8 \end{pmatrix}$. Ennek sajátvektorai $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle)$, illetve $\frac{\sqrt{2}}{2}(|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle)$, rendre 8, 8, 8, illetve 0 sajátértékkel. Ha megvizsgáljuk, láthatjuk, hogy ez $\sigma_{z,2}$-nek is sajátfüggvényei rendre 2, -2, 0, illetve 0 sajátértékekkel. Az, hogy $\sigma_{z,2}$ és $(\sigma_1 + \sigma_2)^2$ operátoroknak van közös sajátvektor-rendszerük, abból adódik, hogy a két operátor kommutál.

Érdemes még megvizsgálni σ_{1x}, σ_{1y}, σ_{2x}, valamint σ_{2y} hatását a $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$ vektorokon. Kiszámolhatjuk direktbe is, vagy felhasználjuk, hogy a jelöléseket úgy vezettük be, hogy az operátorok és vektorok az egyrészecske-állapotokkal analóg módon viselkedjenek. Így σ_{ni} $\quad n \in \{1,2\}, i \in \{x, y\}$ csak az n-edeik nyílra hat és pont úgy, mint az egyrészecske-operátoroknál megszoktuk. Például $\sigma_{1x}|\uparrow\uparrow\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle$, mert $\sigma_{1x}|\uparrow\uparrow\rangle = (\sigma_x \otimes \mathbf{1})(|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle) = (\sigma_x|\uparrow\rangle) \otimes (1|\uparrow\rangle) = |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle$