I. előadás

Fermi-Dirac v Bose-Einstein integrálok

$$F_{\mp}(s,\alpha) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{-0}^{\infty} \frac{x^{s-1}\,dx}{e^{x+\alpha} \mp 1}$$

$\alpha = -\beta\mu$

$x = \frac{p^2}{2mkT}$

Fermi-Dirac megengedett $-\infty \leq \alpha \leq \infty$

$0 < s$

Bose-Einstein megengedett $0 \leq \alpha$ $\quad s > 0$

$\alpha = 0 \quad s > 1$

Magas hőmérsékleti sorfejtés

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}\, e^{-x-\alpha}}{1 \mp e^{-x-\alpha}}\,dx \qquad \alpha > 0$$

magas hőmérsékleten μ nagy negatív szám

$\alpha \to \infty$ limesz

$$= \frac{1}{\Gamma(s)} \int \sum_{n=0}^{\infty} x^{s-1}\,dx\, e^{-x-\alpha} \left(\pm\right)^n e^{-nx-n\alpha} = \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)\alpha} (\pm 1)^n \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-(n+1)x}\,dx = \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n e^{-(n+1)\alpha} \frac{1}{(n+1)^s} \int_0^{\infty} t^{(s-1)} e^{-t}\,dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{e^{-(n+1)\alpha}}{(n+1)^s} = (\pm 1) \sum_{k=1}^{\infty} (\pm 1)^k \frac{e^{-k\alpha}}{k^s} \qquad \alpha > 0$$

$$F_-(s,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \mathcal{L}(s)$$

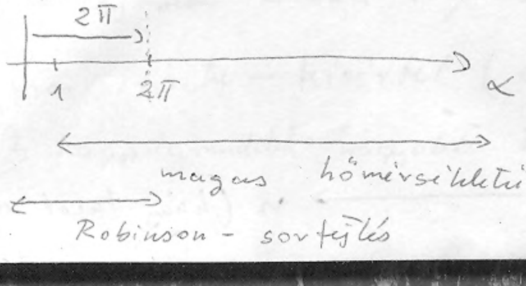
numerikusan így érdemes számolni $\alpha \geq 1$-re.

$$F_+(s,0) = -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^s} = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \dots = \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} \quad\right) -$$

$$-2\left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \dots\right) = \mathcal{L}(s) - 2^{(1-s)}\mathcal{L}(s) = \left[1 - 2^{1-s}\right]\mathcal{L}(s)$$

J Robinson Phys Rev 83, 678 (1951)

bozonokra



Robinson sorfejtés

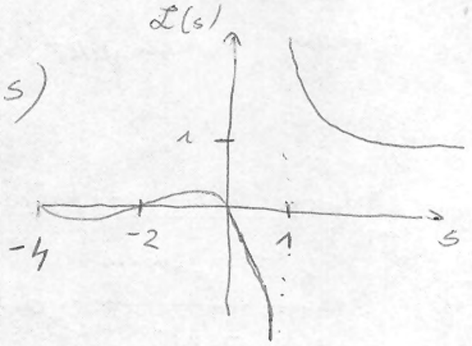
$$F_-(s,\alpha) = \Gamma(1-s)\,\alpha^{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\,\zeta(s-n)\,\alpha^n \qquad s \neq \text{egész}, \quad |\alpha| < 2\pi$$

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \qquad s \leq 1 \text{ esetben nem jó}$$

Pólusa $s=1$-nél (ez az egyetlen pólus)

kiterjesztés

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\,\zeta(1-s)$$



negatív páros egészeknél zérus

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

Robinson sorfejtésben ki kellett kötni $s \neq$ egész

$\Gamma(1-s)$ elszáll

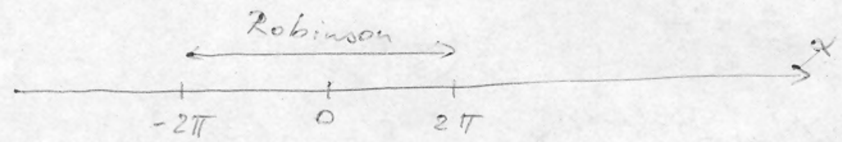
$\zeta(s-n)$ $\quad n = s-1$ elszáll

de határértékben értelmezhető (kiölik egymást)

$s \to m$

$$F_-(s=m,\alpha) = \frac{(-1)^{m-1}\alpha^{m-1}}{(m-1)!}\left[-\log\alpha + \begin{cases} 0, & \text{ha } m=1 \\ \sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k}, & m>1 \end{cases}\right] + \sum_{\substack{n=0 \\ n\neq m-1}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\,\zeta(m-n)\,\alpha^n =$$

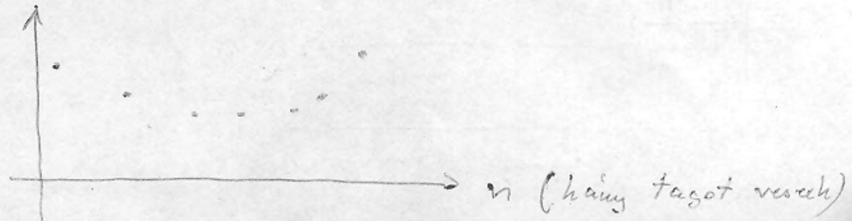
$F_+(s,\alpha)$ fermionokra



Bethe-Sommerfeld sorfejtés

magas hőmérséklet

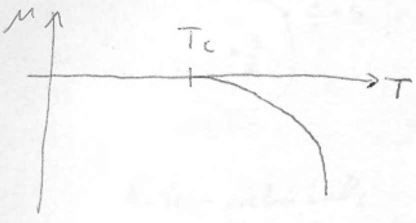
aszimptotikus sorfejtés



Bethe aszimptotikus sorfejtés

↳ kiváltható Goano-sor

BEC



makroszkopikus populálódás az alap állapotban

$T < T_c \qquad \frac{N_0}{N}$ = véges

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$$

II. előadás

Ionok csapdában

lézeres hűtés

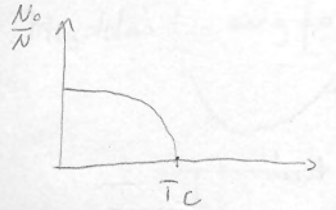
szemből kapja a lézerfotont, izotróp módon sugározza ki

lézeres hűtés → sziszifusz hűtés → párologtatásos hűtés

el lehetett Bose-Einstein kondenzációt érni

$$n_i = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - 1}$$

BEC



bizonyíték BEC-re 1995

átvilágítják, sűrűséggel arányos az elnyelés

atomcsomó $3\mu m$

egy CCD képpontra képezi le, meg kell növelni

kikapcsolom a csapdapotenciált, leejtem

TOF (time-of-flight)

lefotózom

így már kezdeti impulzuseloszlásra kapok eredményt

ma már in situ-kísérlet (egyből a sűrűséget mérik)

3 nagyságrenddel nagyobb atomcsomó

$$f(\vec{p},\vec{r})=\frac{1}{e^{\beta\left(\frac{p^2}{2m}+V(r)-\mu\right)}-1}$$

csapdapotenciál esetében is p térben izotróp

$$n(\vec{p})=\int d^3\vec{r}\, f(\vec{p},\vec{r})$$

T_c alatt

$$n(\vec{p})=\underset{\text{normál}}{n_1(\vec{p})}+\underset{\text{kondenzátum}}{n_2(\vec{p})}$$

Ha $V(\vec{r})$ anizotróp $\rightarrow$ $\Psi_c(\vec{p})$ anizotróp $\rightarrow$ $n_c(\vec{p})$ anizotróp

Bose-Einstein-kondenzáció

rendparaméter — téroperátor

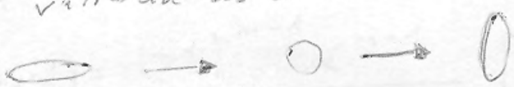
$$\langle \Psi(\vec{r})\rangle = 0 \quad T>T_c$$
$$= \Psi_c(\vec{r}) \quad T<T_c$$

BCS-elmélet rendparamétere

$\langle \Psi_{\uparrow}(\vec{r},t)\,\Psi_{\downarrow}(\vec{r}',t)\rangle$ anomális várható érték

itt nehezebb mérni, mint a bozonoknál

Eső közben változik az alak

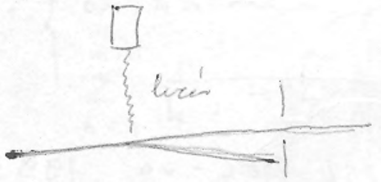


Izotóp szeparáció

különböző izotópok $\rightarrow$ más elektronszerkezet

egyik átmenetre ráállok egy lézerrel

amelyik izotópra ráállok az eltérül



lehet triplett He-ot is csapdázni

Lassítás: szembe világítok egy lassító lézerrel

a lassítás során nem kerül rezonanciára (elmászik)

ezt a mágneses tér segítségével kompenzálom

↳ Zeeman-effektus

Zeeman-lassító

ezután minden irányból rávilágítok MOT

és csapdába fogom

Csapdák

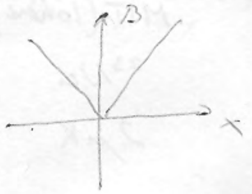
TOP csapda

Zeeman-effektus $E = g_F \mu_B B m_F$

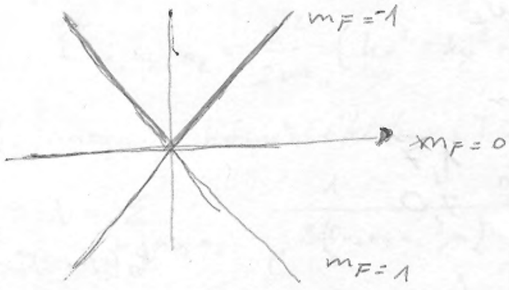
^{23}Na $L = 0$, $S = 1/2$ $\rightarrow$ $J = 1/2$ $F = 1$, $F = 2$

$i = \frac{3}{2}$

Anti-Helmholtz tekercs



$g_{F=1} < 0$ $g_{F=2} > 0$



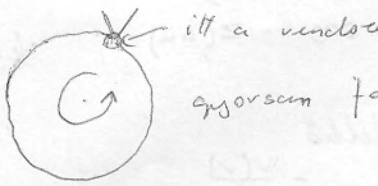
$F = 1$ $m_F = -1$ szelektíven csapdáztuk

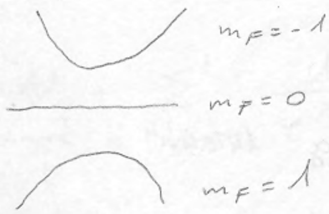
$$\left.\begin{array}{ll} F = 1 & m_F = -1 \\ F = 2 & m_F = 2 \\ & m_F = 1 \end{array}\right\} \text{ezek preparálhatóak}$$

Majoranna spin-flip

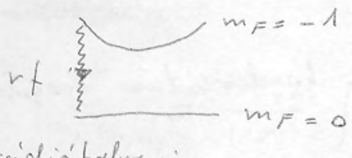
Baj: a spinbillentő folyamatok spontán mennek a csapda alján

Megoldás: megforgatom a rendszert

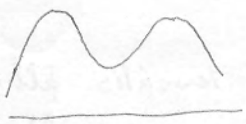




Ezután jön a párologtatásos hűtés



effektív potenciál $\Rightarrow$



föntről indulnak és viszik le az rf frekvenciáját

párologtatásos $\rightarrow$ leggyorsabb atomokat távolítom el

Lóhere csapda

Furán tekercselt permanens mágnesekkel is el lehet érni a kívánt potenciált

III. előadás

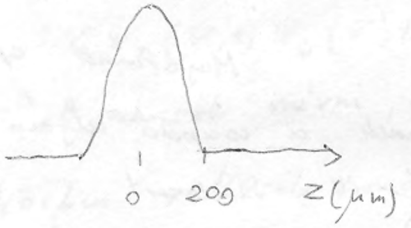
Kondenzátum manipulálása

- lézerrel szétvágni, lyukat fúrni bele
- arrébb mozgatás (a jobb vákuumba)

Tipikus paraméterek

	JILA (Top csapda)	MIT (lóhere)
anyag	^{87}Rb	^{23}Na
BEC T_c	170 nK	2 μK
N_0	10^5	10^5
	$\omega_z > \omega_\perp$	$\omega_z < \omega_\perp$
	diszkosz	szivar
d	~μm	~μm 1,7 / 7,0

sűrűségmérés



$\psi_0(x) \sim e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{d^2}}$

ha nem kölcsönható, akkor az alapállapotú oszcillátor Δx-ét kellene mérni. Ez μm-es
itt egy százasszorzóval nagyobb
↓
kölcsönható rendszer

termális felhő

$n_e(r) \sim e^{-\frac{V(r)}{kT}}$

csak addig lehet hőmérsékletet mérni, amíg látszik a termális felhő

450 pK

rezgések kelthetőek

meglengetik a termális felhőt, mely csatolódik a kondenzátum rezgéséhez

csillapodnak

minél kisebb a hőmérséklet, annál kisebb a csillapítás

fermionok is érdekesek

kis hőmérsékleten BCS

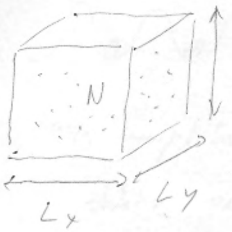
a gap T_F nagyságrendjébe esik

a kritikus hőmérséklet is ebbe a tartományba tartozik

Rev Mod Phys 71, 463 (1997)

F. Delfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevski, S. Stringari

Bose - Einstein - kondenzáció



$$\Psi = e^{i\left(n_x \frac{2\pi}{L_x} x + n_y \frac{2\pi}{L_y} y + n_z \frac{2\pi}{L_z} z\right)} = e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

$$\vec{k} = \left(\frac{2\pi}{L_x} n_x, \frac{2\pi}{L_y} n_y, \frac{2\pi}{L_z} n_z\right)$$

$$H_{egy} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$$

egyrészecsk energia

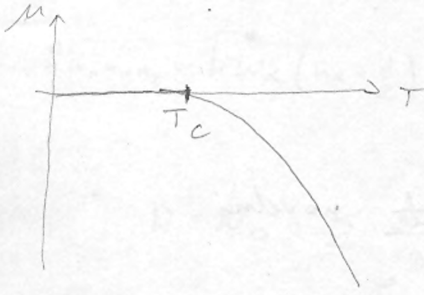
$$\varepsilon_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)$$

elég magas hőmérsékleten $(T > T_c)$

$$N = \sum_{n_x, n_y, n_z} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{n_x n_y n_z} - \mu)} - 1}$$

[fotonokra nincs megmaradási tétel, ezért $\mu = 0$ $\Rightarrow$ nincs BEC]

Lagrange - multiplikátor részecskeszám megmaradás



$T < T_c$

$$N = N_0 + \sum_{n_x, n_y, n_z}{}' \frac{1}{e^{\beta \varepsilon_{n_x n_y n_z}} - 1}$$

ez veszi át μ regularizáló szerepét

Homogénrendszer

$$\sum_{n_x, n_y, n_z} \cong \frac{L_x L_y L_z}{(2\pi)^3} \int dk_x\, dk_y\, dk_z = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\underline{k}$$

$$N = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{e^{\beta\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu\right)} - 1} \qquad T > T_c$$

$$N_0 + \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{e^{\beta \frac{\hbar^2 k^2}{2m}} - 1} \qquad T_c < T$$

$T > T_c$

$$N = \frac{V}{8\pi^3} 4\pi \int_0^\infty k^2 dk \frac{1}{e^{\beta\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu\right)} - 1} =$$

$$= \frac{V}{2\pi^2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2mkT}{\hbar^2}\right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{e^{x - \beta\mu} - 1} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) =$$

$$= V \underbrace{\left(\frac{mkT}{2\hbar^2 \pi}\right)^{\frac{3}{2}}}_{\lambda_{dB}^{-3}} \cdot F_-\left(\frac{3}{2}, -\beta\mu\right)$$

$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

termális de-Broglie $\lambda_{dB} = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mkT}\right)^{1/2}$

részecskeszám sűrűség $n = \frac{N}{V}$ $k_B T = \frac{2\pi\hbar^2}{m\lambda_{dB}^2}$

$$n \lambda_{dB}^3(T) = F_-\left(\frac{3}{2}, -\beta\mu\right)$$

$$\underbrace{n \lambda_{dB}^3(T_c)}_{\text{fázistérbeli sűrűség}} = \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \qquad \zeta(3/2) = 2{,}612$$

a hűtés során $n\lambda_{dB}^3(T_c)$ szeretnék volna ~~minimali~~ növelni

a csapda közepén nézték az $n\lambda_{dB}^3(T_c)$

függ (hogy hol nézzük a potenciálban)

T_c elérése – n növelése

– T csökkenése

$$k_B T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \left(\frac{n}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}\right)^{2/3}$$

$T < T_c$

$$\frac{N_0}{N} = \frac{N - \frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k \frac{1}{e^{\beta\varepsilon(k)} - 1}}{N} = 1 - \frac{V}{N}\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} F\left(\frac{3}{2}, 0\right) = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$$

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$$

IV. előadás

Atomok periodikus potenciálban:

leejtve interferálnak

nagy amplitúdó esetén nincs interferencia, elveszti fáziskoherenciáját

akkor részecskeszám sajátállapotban van

van interferencia, fázissajátállapot (átlógnak a hullámfv-ek)

BEC potenciálban

csapdázott és nem kölcsönható

$$V(x)=\frac{1}{2}m\left(\omega_x^2x^2+\omega_y^2y^2+\omega_z^2z^2\right)$$

$T>T_C$
$$N=\sum_{n_x,n_y,n_z}\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{n_xn_yn_z}-\mu)}-1}$$

$$\varepsilon_{n_xn_yn_z}=\hbar\omega_x\left(n_x+\frac{1}{2}\right)+\hbar\omega_y\left(n_y+\frac{1}{2}\right)+\hbar\omega_z\left(n_z+\frac{1}{2}\right)$$

$T<T_C$
$$N=N_0+\sum\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{n_xn_yn_z}-\varepsilon_{000})}-1}= \qquad \varepsilon_{000}=\frac{\hbar(\omega_x+\omega_y+\omega_z)}{2}$$

$$=N_0+\sum_{n_x,n_y,n_z}\frac{1}{e^{\beta(\hbar\omega_xn_x+\hbar\omega_yn_y+\hbar\omega_zn_z)}-1}=N_0+\int_0^\infty dn_x\int_0^\infty dn_y\int_0^\infty dn_z\frac{1}{e^{\beta\hbar(\omega_xn_x+\omega_yn_y+\omega_zn_z)}-1}$$

$\lambda_1=\beta\hbar\omega_xn_x$

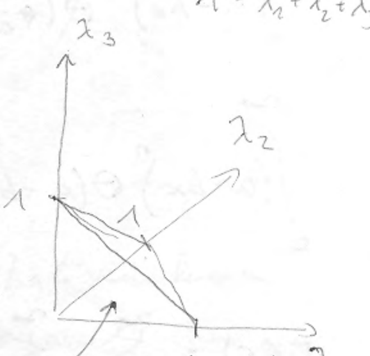
$\lambda_2=\beta\hbar\omega_yn_y$

$\lambda_3=\beta\hbar\omega_zn_z$

$$\omega=\sqrt[3]{\omega_x\omega_y\omega_z}$$

$$N_0+\underbrace{\frac{k_BT}{\hbar\omega_x}\cdot\frac{k_BT}{\hbar\omega_y}\cdot\frac{k_BT}{\hbar\omega_z}}_{\left(\frac{k_BT}{\hbar\omega}\right)^3}\int_0^\infty d\lambda_1\int_0^\infty d\lambda_2\int_0^\infty d\lambda_3\frac{1}{e^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}-1}$$

$\Lambda=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$



$$dV=\frac{\Lambda^2}{2}d\Lambda \quad \Leftarrow \quad V=\frac{\Lambda^2}{2}\cdot\frac{\Lambda}{3}$$

$$N = N_0 + \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega}\right)^3 \underbrace{\int_0^\infty \frac{\Lambda^2 d\Lambda}{2} \frac{1}{e^\Lambda - 1}}_{F_-(3,0) = \zeta(3)} = N_0 + \left(\frac{k_B T}{\hbar \bar\omega}\right)^3 \zeta(3)$$

$$N = \left(\frac{k_B T_c}{\hbar \bar\omega}\right)^3 \zeta(3)$$

$$\frac{N_0}{N} = \frac{N - \zeta(3)\left(\frac{k_B T}{\hbar\bar\omega}\right)^3}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3$$

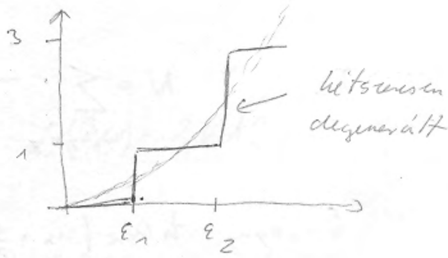
<u>Véges méret közelítés</u>

szemiklasszikus állapotsűrűség

$$\Gamma_{sc}(\varepsilon) = \frac{1}{\hbar^3} \underbrace{\int d^3p \int d^3r}_{\varepsilon(r,p) < \varepsilon} = \frac{1}{6} \frac{\varepsilon^3}{(\hbar\bar\omega)^3}$$

$$\varrho_{sc}(\varepsilon) = \frac{d\Gamma_{sc}(\varepsilon)}{d\varepsilon}$$

spektrális lépcsőfv



$$\Gamma(\varepsilon) = \left\{ \begin{array}{l} \text{\# nívók melyre} \\ \varepsilon_i < \varepsilon \end{array} \right.$$

ennek a trendjét Weil-tv adja meg

$$\Gamma(\varepsilon) = \sum_{n_x n_y n_z} \Theta(\varepsilon - \varepsilon_{n_x n_y n_z})$$

summázás

$$\sum_a^b f(n) \simeq \int_a^b f(x)dx + \frac{1}{2}\left[f(b) + f(a)\right] + \frac{1}{12}\left[f'(b) - f'(a)\right]$$

vezető

korrekció

$$\int (a-bx)^n \Theta(a-bx) = \frac{(a-bx)^{n+1}}{(n+1)(-b)} \Theta(a-bx)$$

$x^a \delta(x) = 0$ ha $a > 0$

$$\int_0^\infty (a-bx)^n \Theta(a-bx)\, dx = \frac{a^{n+1}}{-b(n+1)} \Theta(a)$$

$$\Gamma(\varepsilon) = \sum_{n_x=0}^\infty \sum_{n_y=0}^\infty \sum_{n_z=0}^\infty \Theta(\varepsilon - \varepsilon_0 - \hbar\omega_x n_x - \hbar\omega_y n_y - \hbar\omega_z n_z) =$$

$$= \sum_{n_y n_x} \Theta(\varepsilon-\varepsilon_0-\hbar\omega_y n_y-\hbar\omega_x n_x)\cdot\left[\underbrace{\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0-\hbar\omega_y n_y-\hbar\omega_x n_x)}{\hbar\omega_z}}_{\text{vezető}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{korrekció}}\right] =$$

$$= \sum_{n_x}\left\{\Theta(\varepsilon-\varepsilon_0-\hbar\omega_x n_x)\left[\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0-\hbar\omega_x n_x)^2}{2\hbar\omega_z\hbar\omega_y} + \frac{(\varepsilon-\varepsilon_0-\hbar\omega_x n_x)}{2\hbar\omega_z} + \frac{\varepsilon-\varepsilon_0-\hbar\omega_x n_x}{2\hbar\omega_y}\right]\right\}$$

$$= \Theta(\varepsilon-\varepsilon_0)\left[\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)^3}{6\hbar\omega_x\hbar\omega_y\hbar\omega_z} + \frac{1}{4}\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)^2}{\hbar\omega_z\hbar\omega_y} + \frac{1}{4}\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)^2}{\hbar\omega_x\hbar\omega_y} + \frac{1}{4}\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)^2}{\hbar\omega_z\hbar\omega_x}\right]$$

$$\Gamma(\varepsilon) = \Theta(\varepsilon-\varepsilon_0)\left[\frac{1}{3}\gamma_2\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)^3}{(\hbar\bar\omega)^3} + \frac{1}{2}\gamma_1\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)^2}{(\hbar\bar\omega)^2}\right]$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_x}{\bar\omega} + \frac{\omega_y}{\bar\omega} + \frac{\omega_z}{\bar\omega}\right)$$

Állapotsűrűség

$$\frac{d\Gamma(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \Theta(\varepsilon-\varepsilon_0)\left[\gamma_2\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)^2}{(\hbar\bar\omega)^3} + \gamma_1\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)}{(\hbar\bar\omega)^2}\right]$$

$T > T_C$

$$N = \sum_{n_x,n_y,n_z}\frac{1}{e^{\beta(\hbar\underline{\omega}\underline{n}+\varepsilon_0-\mu)}-1} = \int_{-\infty}^{\infty} g(\varepsilon)d\varepsilon\,\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}} = \int_0^\infty dz\left[\gamma_2\frac{z^2}{(\hbar\bar\omega)^3} + \gamma_1\frac{z}{(\hbar\bar\omega)^2}\right]\frac{1}{e^{\beta(z+\varepsilon_0-\mu)}-1} =$$

ε_0

$$= F_-\left(3,\frac{\varepsilon_0-\mu}{k_BT}\right)\cdot\frac{\gamma_2\cdot\Gamma(3)}{(\beta\hbar\bar\omega)^3} + \frac{\gamma_1\Gamma(2)}{(\beta\hbar\bar\omega)^2}F_-\left(2,\frac{\varepsilon_0-\mu}{k_BT}\right)$$

$T \to T_C$

$$N = \left(\frac{k_BT_C}{\hbar\bar\omega}\right)^3\zeta(3) + \gamma_1\left(\frac{k_BT_C}{\hbar\bar\omega}\right)^2\zeta(2)$$

az első tagból a vezető rend

$$T_0 = \frac{\hbar\bar\omega}{k_B}\left[\frac{N}{\zeta(3)}\right]^{1/3}$$

perturbatívan keresem megoldást

$$T_C = T_0 + \delta T_0$$

$$N=\left(\frac{k_B T_0}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3 \mathcal{L}(3)+3\frac{\delta T}{T_0}\left(\frac{k_B T_0}{\hbar\omega}\right)^3 \mathcal{L}(3)+\gamma_1\left(\frac{k_B T_0}{\hbar\bar{\omega}}\right)^2 \mathcal{L}(2)$$

$$\frac{\delta T}{T_0}=\frac{T_c-T_0}{T_0}=-\frac{\gamma_1}{3}\frac{\mathcal{L}(2)}{\mathcal{L}(3)}\cdot\frac{\hbar\bar{\omega}}{k_B T_0}=-\frac{\gamma_1}{3}\frac{\mathcal{L}^{1/3}(3)}{N^{1/3}}\cdot\frac{\mathcal{L}(2)}{\mathcal{L}(3)}$$

$$\boxed{\frac{T_c-T_0}{T_0}=-\frac{\gamma_1}{3}\frac{\mathcal{L}(2)}{\mathcal{L}^{2/3}(3)}N^{-1/3}}$$

$T<T_c$

$$N=N_0+\left(\frac{k_B T}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3 \mathcal{L}(3)+\gamma_1\left(\frac{k_B T}{\hbar\bar{\omega}}\right)^2 \mathcal{L}(2)$$

$$\frac{N_0}{N}=1-\left(\frac{k_B T}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3\frac{\mathcal{L}(3)}{N}-\gamma_1\left(\frac{k_B T}{\hbar\bar{\omega}}\right)^2\frac{\mathcal{L}(2)}{N}=1-\left(\frac{T}{T_0}\right)^3-\gamma_1\left(\frac{T}{T_0}\right)^2\left(\frac{N}{\mathcal{L}(3)}\right)^{2/3}\frac{\mathcal{L}(2)}{N}$$

$$\boxed{\frac{N_0}{N}=1-\left(\frac{T}{T_0}\right)^3-\gamma_1\left(\frac{T}{T_0}\right)^2\frac{\mathcal{L}(2)}{\mathcal{L}(3)^{2/3}}N^{-1/3}}$$

V. előadás

Nem kölcsönható rendszer sűrűségprofilja

$$\Psi(r_1,r_2,\dots r_N)=f(r_1)f(r_2)\dots f(r_N)$$

$$\underbrace{\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_i+\frac{1}{2}m\left(\omega_x^2x_i^2+\omega_y^2y_i^2+\omega_z^2z_i^2\right)\right]}_{H_i}f_0(\vec{r})=\frac{\hbar(\omega_x+\omega_y+\omega_z)}{2}f_0(\vec{r})$$

$$H=\sum_{i=1}^{N}H_i \qquad E_0=N\frac{\hbar(\omega_x+\omega_y+\omega_z)}{2}$$

$$\varrho(\vec{r})=\left\langle\sum_{i=1}^{N}\delta(r-r_i)\right\rangle_{\Psi_0}=N|f_0(r)|^2$$

oszcillátor alapállapota

$d=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ (mikronos a csapdában) oszcillátor hossz

$$\left(\frac{m\bar{\omega}}{\pi\hbar}\right)^{3/4}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{d_x^2}+\frac{y^2}{d_y^2}+\frac{z^2}{d_z^2}\right]}=\left(\frac{m\bar{\omega}}{\pi\hbar}\right)^{3/4}e^{-\frac{m}{2\hbar}\left(\omega_x x^2+\omega_y y^2+\omega_z z^2\right)}$$

$$\bar{\omega}=(\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3}$$

félértékszélesség

$\sigma_x = d_x \quad d_y = \sigma_y \quad \sigma_z = d_z$

de nem ezt mérték, hanem kb a húszszorosát

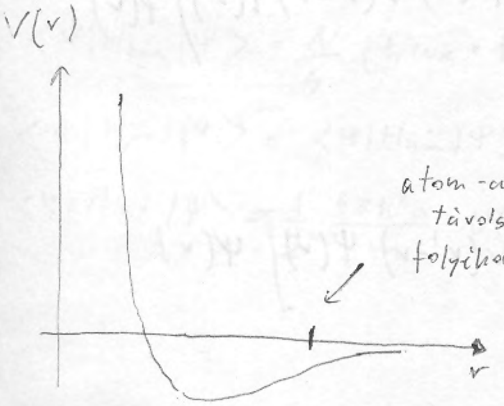
tanulság: sűrűségprofilra nem jó a nemkölcsönható modell

T_c fölött

becslés

$\varrho(\vec{r}) \sim e^{-\frac{V(r)}{kT}}$ a farkára illeszteni

félértékszélesség $\sigma = \sqrt{\frac{kT}{m\omega^2}} = \sqrt{\frac{kT}{\hbar\omega}} \cdot d$ ← oszcillátor hossz



$\Rightarrow$ gázban nagyon messze nem kell Green-fv módszer

ritkagáz közelítés

Kölcsönhatás figyelembe vétele

Gross-Pitaevskii-egyenlet

$$H = \sum_{i=1}^{N}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_i + V(r_i)\right) + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{N} v(\vec{r_i} - \vec{r_j})$$

csapdapotenciál

$v(\vec{r}) = v(|\vec{r}|) \quad v(\vec{r}) = v(-\vec{r})$

variációs elvvel néztük atomfizen

kölcsönhatás gyenge, $\Psi(r_1, r_2, \dots r_N)$ nincs messze nem kölcsönható rendszer alapállapotától.

keresem $\Psi(r_1, \dots r_N) = \varphi(r_1) \dots \varphi(r_N)$ alakban, ahol

$\int |\varphi(r)|^2 d^3r = 1$

$\varphi(r)$ variációsan keressük

$\langle \Psi | H | \Psi \rangle - E \int d^3r \, |\varphi(r)|^2$ minimalizáljuk

$$\langle \Psi | H | \Psi \rangle = N \int d^3r' \, \varphi^*(r') \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta' + V(r') \right] \varphi(r') + \frac{1}{2} N(N-1) \int d^3r' d^3r''$$

$$\varphi^*(r') \varphi^*(r'') v(r'-r'') \varphi(r') \varphi(r'')$$

$$\frac{\delta \varphi(r)}{\delta \varphi^*(r')} = 0 \qquad \frac{\delta \varphi^*(r')}{\delta \varphi(r)} = \delta(r-r')$$

$$0 = N \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) \right] \varphi(r) + 2 \frac{N(N-1)}{2} \left[\int d^3r' \, \varphi^*(r') \, v(r'-r) \, \varphi(r') \right] \varphi(r) - E \varphi(r)$$

feltételeztük, hogy $v(r) = v(-r)$

$$E \varphi(r) = N \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) \right] \varphi(r) + N[N-1] \left(\int d^3r' \, \varphi^*(r') \, v(r'-r) \, \varphi(r') \right) \varphi(r)$$

$\Psi(r) = \sqrt{N} \varphi(r) \Leftarrow$ átskálázás

$E = N\mu$

$$\mu \Psi(r) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) \right] \Psi(r) + \underbrace{\frac{N-1}{N}}_{\approx 1} \left[\int d^3r' \, \Psi^*(r') \, v(r'-r) \, \Psi(r') \right] \Psi(r)$$

eredetileg örvényekre írták fel (Hamilton - eltolás invariáns, de az alapállapot nem)

alacsony energia, kis sűrűség

$$v(r-r') = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \delta(r-r') \qquad a: \text{ s-hullám szórási hossz}$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} |\Psi(r)|^2 \right] \Psi(r) = \mu \Psi(r)$$

Gross - Pitaevski - egyenlet

VI. előadás

Energiatagok nagyságrendje

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) \right) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i \neq j}} v(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

$$\frac{1}{2} m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \qquad \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \delta(r_i - r_j)$$

becslés

$$\Psi(r_1, \dots r_N) = \Phi_0(r_1)\, \Phi_0(r_2) \dots \Phi_0(r_N)$$

$$\Phi_0(r) = \left(\frac{m\bar{\omega}}{\pi\hbar}\right)^{3/4} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m\omega_x x^2}{\hbar} + \frac{m\omega_y y^2}{\hbar} + \frac{m\omega_z z^2}{\hbar}\right)}$$

$$\langle \Psi | H_{kin} | \Psi \rangle = \frac{N}{4} (\hbar\omega_x + \hbar\omega_y + \hbar\omega_z) \sim N\hbar\bar{\omega}$$

$$\langle \Psi | H_{pot} | \Psi \rangle = \langle \Psi | H_{kin} | \Psi \rangle \sim N\hbar\omega$$

$$\langle \Psi | H_{int} | \Psi \rangle = \frac{1}{2} \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} N(N-1) \cdot \underbrace{\int d^3r\, \Phi_0^4(r)}$$

$$\int d^3r \left(\frac{m\bar{\omega}}{\pi\hbar}\right)^3 e^{-2\left(\frac{m\omega_x}{\hbar} x^2 + \frac{m\omega_y}{\hbar} y^2 + \frac{m\omega_z}{\hbar} z^2\right)}$$

Tudjuk, hogy

$$1 = \int d^3r \left(\frac{m\bar{\omega}}{\pi\hbar}\right)^{3/2} e^{-\left[\frac{m\omega_x}{\hbar} x^2 + \frac{m\omega_y}{\hbar} y^2 + \frac{m\omega_z}{\hbar} z^2\right]}$$

$$\langle \Psi | H_{int} | \Psi \rangle = \frac{1}{2} \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} N(N-1) \left(\frac{m\bar{\omega}}{\pi\hbar}\right)^3 \left(\frac{\pi\hbar}{2m\bar{\omega}}\right)^{3/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} N(N-1)\hbar\omega \underbrace{a \frac{m^{1/2}\bar{\omega}^{1/2}}{\hbar^{1/2}}}_{\frac{a}{d}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} N(N-1)\hbar\omega \frac{a}{d} \sim N^2 \hbar\bar{\omega} \frac{a}{d}$$

$$\frac{\langle H_{int} \rangle}{\langle H_{kin} \rangle} = N \frac{a}{d}$$

Kísérletek $\quad a \ll d$

JILA

$N = 10^5$

$\frac{a}{d} \sim 7 \cdot 10^{-3}$ $\qquad N\frac{a}{d} \sim 10\text{–}100$

MIT

$N = 10^8$

$\frac{a}{d} \sim 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ $\qquad N\frac{a}{d} \sim 10^3\text{–}10^4$

$na^3 \ll 1$ ritka gáz feltétel

$\hookrightarrow$ jó a Gross - Pitaevski

$N\frac{a}{d} \gg 1$ akkor is, ha a gáz ritka

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2 + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}|\Psi_0|^2\right)\Psi_0 = \mu\Psi_0$$

$$N = \int d^3r\, |\Psi_0|^2$$

dimenziótlanítsunk $\tilde{r}$ dimenziótlan mennyiség $\tilde{\vec{r}} = \frac{\vec{r}}{d}$

$$\tilde{\mu} = \frac{\mu}{\hbar\omega}$$

$$\int d^3\tilde{r}\, |\tilde{\Psi}(\tilde{\vec{r}})|^2 = 1$$

$$\tilde{\Psi}(\vec{r}) = \frac{\Psi(\vec{r})}{d^{-3/2}\sqrt{N}}$$

$$\hbar\omega\tilde{\mu}\tilde{\Psi} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{d^2}\tilde{\Delta} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 d^2\tilde{r}^2 + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}\frac{N}{d_0^3}|\tilde{\Psi}|^2\right]\tilde{\Psi}$$

$$\left[-\frac{1}{2}\tilde{\Delta} + \frac{1}{2}\tilde{r}^2 + 4\pi\frac{aN}{d}|\tilde{\Psi}|^2\right]\tilde{\Psi} = \tilde{\mu}\tilde{\Psi}$$

megoldás: iteratívan

vagy

imaginárius idő módszer

$$\Psi_0(\vec{r},t) = e^{-\frac{i\mu t}{\hbar}}\Psi(\vec{r})$$

$$\mu\Psi_0 = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi$$

$it \to \tau$

magasabb gerjesztési komponensek hallnak meg először

időben fejlesztem előre

$N = \int d^3\tilde{r}|\tilde{\Psi}(\tilde{r})|^2 \Rightarrow$ tartani kell a normát

végén az alapállapot marad

variációs módszer

Gross-Pitaevski funkcionál

$E[\Psi_0, \Psi_0^*]$

$$\int d^3r\left[\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla\Psi_0^*(r))(\nabla\Psi_0(r)) + \Psi_0^*(r)V(r)\Psi(r) + \underbrace{\frac{2\pi\hbar^2 a}{m}}_{g/2}[\Psi_0^*(r)]^2[\Psi_0(r)]^2\right]$$

$= E_{kin} + E_{pot} + E_{int}$

$$\mu \Psi_0 = \frac{\delta E}{\delta \Psi_0^*}$$

integráljunk és szorozzunk be $\Psi_0^*(r)$-rel

$$\mu N = E_{kin} + E_{pot} + 2E_{int}$$

μ nem egyenlő az alapállapoti energiával

<u>A G-P egyenlet</u> nagy <u>N határesete</u> (Thomas-Fermi közelítés)

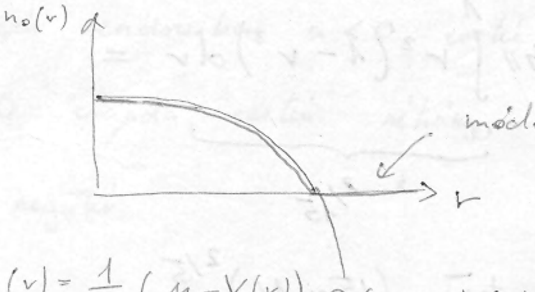
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r) + g|\Psi_0(r)|^2\right]\Psi_0 = \mu\Psi_0$$

hagyjuk el

$$|\Psi_0(r)|^2 = \frac{\mu - V(r)}{g}$$

homogén-rendszerben ($k=0$) populálódott, nem kell figyelembe venni

$$n_0(r) = |\Psi_0|^2 = \frac{1}{g}(\mu - V(r)) \qquad \mu > 0 \qquad \text{[Látni-fogjuk]}$$



$$n_0(r) = \frac{1}{g}(\mu - V(r))\,\Theta(\mu - V(r))$$

akkor jó, ha a fizika bent történik

ha a határfelületen, akkor bajok lehetnek

a lényeget jól visszaadja

μ-t normálás határozza meg

VII. előadás

$$N = \int |\Psi|^2 d^3 r$$

egyenlet μ-re

Thomas-Fermi közelítés

$$|\Psi|^2 = \frac{1}{g}(\mu - V)\,\Theta(\mu - V) \qquad V = \frac{1}{2} m\, \omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2$$

$$N = \frac{m}{4\pi\hbar^2 a} \int dx\,dy\,dz\, \mu_{TF}\left(1 - \frac{m\,\omega_x^2}{2\mu} x^2 - \frac{m\,\omega_y^2}{2\mu} y^2 - \frac{m\,\omega_z^2}{2\mu} z^2\right)$$

$$\mu_{TF} > \frac{1}{2} m\left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2\right)$$

ellipszoidon ~~trans~~ integrálunk $\Longrightarrow$ transzformáljuk gömbbé

$$x' = \sqrt{\frac{m\,\omega_x^2}{2\mu_{TF}}}\, x$$

$$N = \frac{m}{4\pi\hbar^2 a}\, \mu_{TF} \left(\frac{2\mu_{TF}}{m}\right)^{3/2} \frac{1}{\omega_x \omega_y \omega_z} \int dx'\,dy'\,dz' \left(1 - x'^2 - y'^2 - z'^2\right) =$$

$$\mu_{TF} > \left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)\mu_{TF}$$

$$\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$$

$$= \frac{(2\mu_{TF})^{5/2}}{8\pi} \underbrace{\frac{\hbar^{1/2}}{m^{1/2}\,\omega^{1/2}}}_{d \text{ oszcillátor hossz}} \frac{1}{\hbar^{5/2}\,\bar{\omega}^{5/2}} \frac{1}{a}\; \underbrace{4\pi \int_0^1 r^2 (1 - r^2)\, dr}_{2/15} =$$

$$= \frac{1}{15} \frac{d}{a} \left(\frac{2\mu_{TF}}{\hbar\,\bar{\omega}}\right)^{5/2} \quad \Rightarrow \quad \mu_{TF} = \frac{\hbar\bar{\omega}}{2}\left(\frac{15\, a N}{d}\right)^{2/5}$$

feltétel az volt, hogy $\frac{aN}{d} \gg 1$ ekkor jó a TF

egyenértékű azzal, hogy $\mu_{TF} \gg \hbar\omega$

$$|\Psi|^2 = \frac{\mu_{TF}}{g}\left(1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2} - \frac{z^2}{R_z^2}\right) \quad \text{kondenzátum nagytengelyei}$$

$$R_x = \sqrt{\frac{2\mu_{TF}}{m\,\omega_x^2}} = \sqrt{\frac{\hbar\bar{\omega}}{m\,\omega_x^2}} \left(\frac{15\, a N}{d}\right)^{1/5} = \frac{\bar{\omega}}{\omega_x} \underbrace{\sqrt{\frac{\hbar}{m\bar{\omega}}}}_{\bar{d}} \left(\frac{15\, N a}{d}\right)^{1/5} =$$

$$= \frac{\bar{\omega}}{\omega_x}\, \bar{d} \left(\frac{15\, N a}{d}\right)^{1/5}$$ lényegesen nagyobb, mint $\bar{d}$.

Elengedési energia

$$E_{Rel} = E_{kin} + \cancel{E_{pot}} + E_{int} = E_{kin}'$$

TF

ez mérhető TOF mérésben

$$\mu = \frac{\hbar \bar{\omega}}{2}\left(\frac{15 N a}{d}\right)^{2/5}$$

$$\mu = \frac{\partial E}{\partial N} \qquad E = \frac{5}{7}\frac{\hbar\bar{\omega}}{2}\left(\frac{15 a}{d}\right)^{2/5} N^{7/5} = \frac{5}{7}\mu_{TF}\cdot N$$

$$E = E_{kin} + E_{pot} + E_{int} = \frac{5}{7}\mu_{TF}\cdot N$$

$$\mu_{TF} N = E_{kin} + E_{pot} + 2E_{int} \qquad E_{int} = \frac{2}{7}\mu_{TF}\cdot N \qquad E_{pot} = \frac{3}{7}\mu_{TF} N$$

$$\frac{E_{kin}'}{N} = \frac{E_{int}}{N} = \frac{2}{7}\mu_{TF} \sim N^{2/5}$$

Kollapszus vonzó kcsh esetén

TF: taszító kcsh esetén, szórási hossz pozitív

Randy Hulet

^7Li-vel kísérletezett $a<0$ $\Rightarrow$ mégis látott ~~kölcsönhatást~~ kondenzátumot

homogén rendszerben $a<0$ esetén kondenzátum instabil

Ha $a<0$ csapda esetén néhány atomot kondenzátumba lehet vinni!

$\frac{Na}{d}$ negatív

Gross-Pitaevski $(a<0)$

$$\left.\frac{N|a|}{d}\right|_{kr} = 0{,}575 \qquad \text{van nem triviális megoldás}$$

ha $\frac{N|a|}{d} > 0{,}575$ nincs ~~tr~~ nem triviális megoldás

legyen a csapda izotróp

$$\Psi = C\cdot e^{-\frac{r^2}{2d_0^2 w^2}}$$ w: variációs paraméter, dimenziótlan

$$N = 4\pi C^2\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{d_0^2 w^2}} r^2\,dr = \underset{t=\frac{r}{d_0 w}}{} \quad 4\pi C^2 (d_0 w)^3 \underbrace{\int_0^\infty e^{-t^2} t^2\,dt}_{\sqrt{\pi}/4} =$$

$$N = C^2 \pi^{3/2} d_0^3 w^3 \Rightarrow C = \sqrt{\frac{N}{d_0^3 w^3 \pi^{3/2}}}$$

$$F(v) = \frac{E}{N\hbar\omega_0} = \frac{1}{N\hbar\omega_0} 4\pi \int_0^\infty dr\, r^2 \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{N}{d_0^3 w^3 \pi^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{2d_0^2 w^2}} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} \right) e^{-\frac{r^2}{2d_0^2 w^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2 \left(\frac{N}{d_0^3 w^3 \pi^{3/2}} \right) e^{-\frac{r^2}{d_0^2 w^2}} + \frac{4\pi\hbar^2 a}{2m} \left(\frac{N}{d_0^3 w^3 \pi^{3/2}} \right) \left(\frac{N}{d_0^3 w^3 \pi^{3/2}} \right) e^{-\frac{2r^2}{d_0^2 w^2}} \right] =$$

$t = \frac{r}{d_0 w}$ helyettesítés

$$= 4\pi \int_0^\infty \cancel{\frac{\hbar}{m\omega_0} N}\, dt\, t^2 d_0^3 w^3 \left[-\frac{\hbar}{2m\omega_0} \frac{1}{d_0^3 w^3 \pi^{3/2}} \frac{1}{d_0^2 w^2} e^{-\frac{t^2}{2}} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{2}{t}\frac{d}{dt} \right) \right.$$

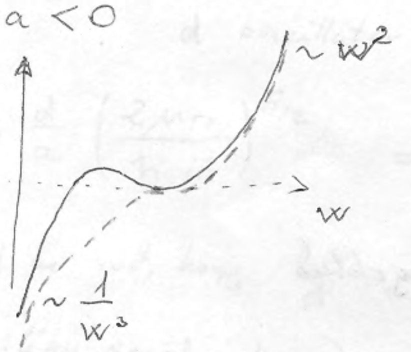
$$\left. e^{-\frac{t^2}{2}} + \frac{m\omega_0}{2\hbar} t^2 d_0^2 w^2 \frac{N}{d_0^3 w^3 \pi^{3/2}} e^{-t^2} + \frac{4\pi\hbar}{2m\omega_0} a \frac{1}{d_0^3 w^3 \pi^{3/2}} \frac{N}{d_0^2 w^3 \pi^{3/2}} e^{-2t^2} \right]$$

$$= 4\pi \int_0^\infty dt\, t^2 \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{\pi^{3/2} w^2} (t^2 - 3) e^{-t^2} + \frac{1}{2} t^2 \frac{w^2}{\pi^{3/2}} e^{-t^2} + \frac{2}{\pi^2} \frac{aN}{d_0 w^3} e^{-2t^2} \right] =$$

$$= \int_0^\infty dx \left[-\frac{1}{\pi^{1/2} w^2} \left(x^{3/2} - 3x^{1/2} \right) e^{-x} + \frac{w^2}{\pi^{1/2}} x^{3/2} e^{-x} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{aN}{d_0 w^3} x^{1/2} e^{-x} \right]$$

$$= -\frac{1}{\pi^{1/2} w^2} \left(\frac{3}{4}\sqrt{\pi} - \frac{3}{2}\sqrt{\pi} \right) + \frac{w^2}{\pi^{1/2}} \frac{3}{4}\sqrt{\pi} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{aN}{d_0 w^3} = \frac{3}{4}\frac{1}{w^2} + \frac{3}{4} w^2 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{aN}{d_0 w^3}$$

ha $a < 0$



addig van megoldás, amíg van gödör

Kritikus pont

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F(v)}{\partial v} &= 0 \\ \frac{\partial^2 F(v)}{\partial v} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ egyenlet } \frac{Na}{d} \text{ kritikus értéke}$$

VIII. előadás

$$\frac{E}{N\hbar\omega_0} = \frac{3}{4w^2} + \frac{3}{4}w^2 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{aN}{d_0 w^3}$$

$a < 0$

lokális minimum

$$0 = -\frac{3}{2}\frac{1}{w^3} + \frac{3}{2}w + \frac{3}{\sqrt{2\pi}}\frac{N|a|}{d}\frac{1}{w^4}$$

kritikus helyzet

$$0 = \frac{9}{2}w^{-4} + \frac{3}{2} - \frac{12}{\sqrt{2\pi}}\frac{N|a|}{d}\frac{1}{w^5}$$

keresem w-t és $\frac{N|a|}{d}$ kritikus értékét

$$0 = -\frac{3}{2}w + \frac{3}{2}w^5 + \frac{3}{\sqrt{2\pi}}\frac{N|a|}{d}\cancel{\frac{1}{w^4}}$$

$$0 = \frac{9}{8}w + \frac{3}{8}w^5 - \frac{3}{\sqrt{2\pi}}\frac{N|a|}{d}$$

$$0 = -\frac{3}{8}w + \frac{15}{8}w^5 \qquad w = \sqrt[4]{\frac{1}{5}}$$

$$\frac{N|a|}{d_0} = \frac{\sqrt{2\pi}}{3}\left(\frac{3}{2}5^{-\frac{1}{4}} - \frac{3}{2\cdot 5}5^{-\frac{1}{4}}\right) = \sqrt{2\pi}\,5^{-\frac{1}{4}}\frac{2}{5} = 0,671$$

GP-ből

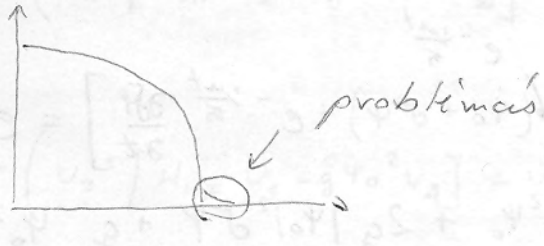
$$\left.\frac{N|a|}{d_0}\right|_{\text{kritikus}} = 0,575$$

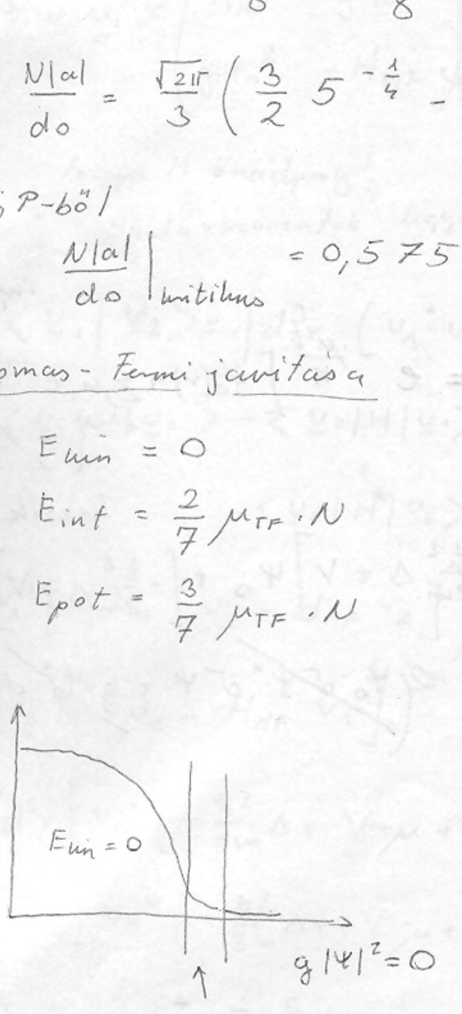
Thomas-Fermi javítása

$E_{kin} = 0$

$E_{int} = \frac{2}{7}\mu_{TF}\cdot N$

$E_{pot} = \frac{3}{7}\mu_{TF}\cdot N$





illeszteni a határokon

Felté

$$\frac{E_{kin}}{N} = \frac{5}{2}\frac{\hbar^2}{mR^2}\log\left(\frac{R}{Cd_0}\right) \qquad R = \sqrt{\frac{2\mu_{TF}}{m\omega_0^2}} \qquad C = 1{,}3$$

$$\frac{\hbar^2}{mR^2} = \frac{\hbar^2}{m}\frac{m\omega_0^2}{2\mu_{TF}} = \frac{(\hbar\omega_0)^2}{2\hbar\omega_0}\left(15\frac{Na}{d_0}\right)^{-\frac{2}{5}} = \frac{\hbar\omega_0}{2}\left(15\frac{Na}{d_0}\right)^{-\frac{2}{5}}$$

$$\frac{E_{pot}}{N} = \frac{3}{7}\mu_{TF} + \frac{\hbar^2}{mR^2}\log\left(\frac{R}{Cd_0}\right)$$

$$\frac{E_{int}}{N} = \frac{2}{7}\mu_{TF} - \frac{\hbar^2}{mR^2}\log\left(\frac{R}{Cd_0}\right)$$

$$E = \frac{5}{7}\mu_{TF}N\left[1 + 7\left(\frac{d_0}{R}\right)^4\log\frac{R}{Cd_0}\right]$$

$$\mu = \mu_{TF}\left[1 + 3\left(\frac{d_0}{R}\right)^4\log\left(\frac{R}{Cd_0}\right)\right]$$

Gerjesztések (Bogoliubov-egyenletek)

$$\mu\Psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r) + g|\Psi|^2\right]\Psi$$

időfüggő $\quad i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r) + g|\Psi|^2\right]\Psi$

stac állapot $\quad \Psi(r,t) = e^{-\frac{i\mu t}{\hbar}}\Psi_0(r)$

lineáris verzió a gerjesztésben

$$\Psi(r,t) = e^{-\frac{i\mu t}{\hbar}}\left[\Psi_0(r) + \delta\Psi(r,t)\right] = e^{-\frac{i\mu t}{\hbar}}\left[\Psi_0(r) + \sum_i u_i e^{-i\omega_i t} + v_i^* e^{i\omega_i t}\right]$$

kicsik

$$i\hbar\left[-i\frac{\mu}{\hbar}e^{-\frac{i\mu t}{\hbar}}(\Psi_0 + \delta\Psi) + e^{-\frac{i\mu t}{\hbar}}\frac{\partial\delta\Psi}{\partial t}\right] = e^{-\frac{i\mu t}{\hbar}}\Big\{\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\right]\Psi_0 + \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\right]\delta\Psi +$$

$$+ g|\Psi_0|^2\Psi_0 + 2g|\Psi_0|^2\delta\Psi + g\,\Psi_0^2\,\delta\Psi^* + \cancel{2\Psi_0\,\delta\Psi^*\delta\Psi} + \cancel{g\,\Psi_0^*\,\delta\Psi^2} +$$

$$\cancel{g\,\delta\Psi^*\delta\Psi\delta\Psi}\Big\}$$

nulladrendű $\quad \mu\Psi_0 = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V + g|\Psi_0|^2\right]\Psi_0$

$$i\hbar\frac{\partial\delta\Psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V - \mu + 2g|\Psi_0|^2\right]\delta\Psi + g\,\Psi_0^2\,\delta\Psi^*$$

$$\delta\Psi = \sum_i \mu_i e^{-i\omega_i t} - v_i^* e^{i\omega_i t}$$

$$i\hbar \sum_i \left(-i\omega_i \mu_i e^{-i\omega_i t} - i\omega_i v_i^* e^{i\omega_i t}\right) = \sum_i \left(\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V - \mu + 2g|\Psi_0|^2\right](\mu_i e^{-i\omega_i t} - v_i^* e^{i\omega_i t})\right.$$

$$\left. + g\Psi_0^2 \sum_i \left(\mu_i^* e^{i\omega_i t} - v_i e^{-i\omega_i t}\right)\right)$$

⊖ fázisú

$$\hbar \mu_i \omega_i = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V - \mu + 2g|\Psi_0|^2\right]\mu_i - g\Psi_0^2 v_i$$

⊕ fázis

$$\hbar v_i^* \omega_i = -\underbrace{\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V - \mu + 2g|\Psi_0|^2\right]}_{H_{HF}} v_i^* + g\Psi_0^2 \mu_i^*$$

$$\left.\begin{aligned} \hbar\omega_i \mu_i &= H_{HF}\mu_i - g\Psi_0^2 v_i \\ -\hbar\omega_i v_i &= -g\Psi_0^{*2}\mu_i + H_{HF} v_i \end{aligned}\right\} \text{ Bogoliubov-egyenletek}$$

$$\underline{u}_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$$

$$\hbar\omega_i \underline{u}_i = \begin{pmatrix} H_{HF} & -g\Psi_0^2 \\ g\Psi_0^2 & -H_{HF} \end{pmatrix} \underline{u}_i$$

Legyen H önadjung!

Skalárszorzatok legyenek olyanok

$$\langle \underline{u}_1 | \underline{u}_2 \rangle = \int d^3r \left(u_1^* u_2 - v_1^* v_2\right)$$

$$\langle \underline{u}_1 | H | \underline{u}_2 \rangle - \underbrace{\langle \underline{u}_2 | H | \underline{u}_1 \rangle^*}_{\langle \underline{u}_1 | H^* | \underline{u}_2 \rangle^{**}} = \int d^3r \left(u_1^*\left[H_{HF} u_2 - g\Psi_0^2 v_2\right] - \right.$$

$$\left. v_1^*\left[g\Psi_0^{*2} u_2 - H_{HF} v_2\right]\right) - \int d^3r \left(u_2^*\left[H_{HF} u_1 - g\Psi_0^2 v_1\right] - v_2^*\right.$$

$$\left.\left[g\Psi_0^{*2} u_1 - H_{HF} v_1\right]\right)^* =$$

$$\int d^3r \left[u_1^*\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V - \mu + 2g|\Psi_0|^2\right)u_2 - u_2\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V - \mu + 2g|\Psi_0|^2\right)u_1^*\right] +$$

$$\int d^3r \left[v_1^*\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V - \mu + 2g|\Psi_0|^2\right)v_2 - v_2\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V - \mu + 2g|\Psi_0|^2\right)v_1^*\right] =$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\int d^3r \; u_1^*\partial_i\partial_i u_2 - u_2\partial_i\partial_i u_1^* + v_1^*\partial_i\partial_i v_2 - v_2\partial_i\partial_i v_1^*)$$

↓

$$\partial_i \left(v_1^* \partial_i v_2 - v_2 \partial_i v_1^* + v_1^* \partial_i v_2 - v_2 \partial_i v_1^* \right) = 0$$

Ha a terek elég gyorsan csengenek le a felületen

IX. előadás

$$\delta\Psi(r,t) = \sum_i v_i(r) e^{-i\omega_i t} - v_i^*(r) e^{i\omega_i t}$$

$$\delta_{ij} = \int d^3r \left(\tilde{v}_i^* \tilde{v}_j - \tilde{v}_i^* \tilde{v}_j \right)$$ normált megoldása Bogolyubovnak

$$v_i = \alpha_i \tilde{v}_i(r)$$

$$v_i = \alpha_i \tilde{v}_i(r)$$

α_i-ket a $\delta\Psi(r,0)$ kezdeti feltétel határozza meg

továbbiakban a tildét elhagyjuk

Más ortogonalitási reláció

$$H_{HF} v_i - g \Psi_0^2 v_i = E_i v_i \qquad \int v_j \, d^3r$$

$$-g \Psi_0^{*2} v_i + H_{HF} v_i = -E_i v_i \qquad \int v_j \, d^3r$$

és összeadjuk

$$\int d^3r \left(v_j H_{HF} v_i - g \Psi_0^2 v_i v_j - g \Psi_0^{*2} v_i v_j + v_j H_{HF} v_i \right) = E_i \int d^3r (v_i v_j - v_j v_i)$$

$i \leftrightarrow j$ csere

$$\int d^3r \left(v_i H_{HF} v_j - g \Psi_0^2 v_j v_i - g \Psi_0^{*2} v_j v_i + v_i H_{HF} v_j \right) = E_j \int d^3r (v_j v_i - v_i v_j)$$

vonjuk ki a kettőt

$$\int d^3r \left[v_j H_{HF} v_i - v_i H_{HF} v_j + v_j H_{HF} v_i - v_i H_{HF} v_j \right] = (E_i + E_j) \int d^3r (v_i v_j - v_j v_i)$$

beírhatom $H_{HF} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(r) - \mu + 2g|\Psi_0|^2$

a bal oldal nulla, hasonlóan mint előző óra végén

teljes divergenciává alakítom

jobb oldal nulla

Bogolyubov-egyenlet szimmetriája

$$\left. \begin{array}{l} E_i \leftrightarrow -E_i \\ v_i \leftrightarrow -v_i^* \\ \text{szimmetriák miatt} \end{array} \right\} E_i \geq 0$$

Nem elfajult alapállapot van a GP-egyenletnek $\rightarrow E_i > 0$

$$\int d^3r\,(u_i v_j - u_j v_i) = 0 \qquad \int d^3r\,(u_i^* v_j^* - u_j^* v_i^*) = 0$$

Mind a három ortogonalitásra szükségünk lesz

Spec $V_{pot}=0$ (Homogén)

V térfogat + periodikus peremfeltétel

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r) + g|\psi_0|^2\right)\psi_0 = \mu\,\psi_0$$

Alapállapot ($k=0$-s síkhullám) ψ_0

$$g|\psi_0|^2\psi_0 = \mu\psi_0 \qquad n=|\psi_0|^2 \text{ kondenzátum sűrűsége}$$

$$gn = \mu$$

Gerjesztések

$$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} = e^{ikr}\begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix}$$

ψ_0 választható valósnak

$$H_{HF}\,e^{ikr} = \Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V \underbrace{-\mu + 2gn}_{\downarrow\; gn}\Big)e^{ikr} = \left(\frac{\hbar^2k^2}{2m} + gn\right)e^{ikr}$$

$$\begin{pmatrix} H_{HF} & -gn \\ -gn & H_{HF} \end{pmatrix} e^{ikr}\begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = e^{ikr}\begin{pmatrix} E_k A_k \\ -E_k B_k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\hbar^2k^2}{2m}+gn-E_k & -gn \\ -gn & \frac{\hbar^2k^2}{2m}+gn+E_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = \emptyset$$

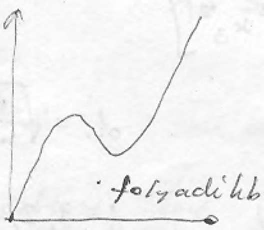
$$0 = \left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}+gn\right)^2 - E_k^2 - g^2n^2 \Rightarrow E_k = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}\right)^2 + 2gn\frac{\hbar^2k^2}{2m}}$$

Bogolinbov diszp reláció

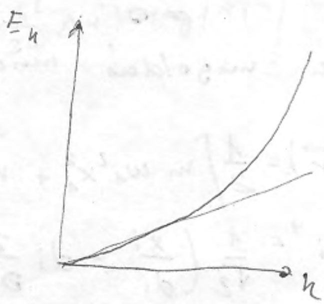
határesetek

$$E_k \xrightarrow{\text{kis } k\text{-ra}} \approx \sqrt{\frac{gn}{m}}\,\hbar|k| \qquad c=\sqrt{\frac{gn}{m}} \text{ Bogolinbov hangsebesség}$$

$$E_k \xrightarrow{\text{nagy } k\text{-ra}} \frac{\hbar^2k^2}{2m} + gn$$



nincs roton $\longleftrightarrow$ ás



gázok
gyengén kölcsönható

hangsebesség

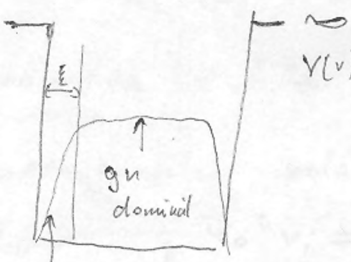
$$c = \sqrt{\frac{gn}{m}} = \sqrt{\frac{4\pi \hbar^2 a n}{m^2}} = \frac{\hbar}{m}\sqrt{4\pi a n}$$

Crossover helye

$$\frac{gn}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m}} = 1 \qquad k_c^2 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} n \frac{2m}{\hbar^2} = 8\pi n a$$

$$\xi = \frac{1}{k_c} = \frac{1}{\sqrt{8\pi n a}}$$ karakterisztikus távolság

Bogoljunov korrelációs hossz vagy healing legth



kinetikus dominál, gn kisebb

ξ örvények karakterisztikus mérete forgó BEC-nél.

Bogoliubov egyenletek speciális megoldása

Ⓐ $$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V - \mu + 2g|\psi_0|^2\right) u_i - g\,\psi_0^2 v_i = E_i u_i$$

$$-g\,\psi^* u_i + \left(-\frac{\hbar^2}{2m} + V - \mu + 2g|\psi_0|^2\right) v_i = -E_i v_i$$

$u_i = \psi_0$

$v_i = \psi_0^*$

$E_i = 0$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(r) - \mu + g|\psi_0|^2\right)\psi_0 = 0$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(r) - \mu + g|\psi_0|^2\right)\psi_0^* = 0$$

formális megoldása a BE-nek a GP miatt $E = 0$-val

De $\underbrace{\int (u_i^* u_i - v_i^* v_i)\, d^3r}_{=0}$ nem normálható

Ez a megoldás nincs a spektrumban $\rightarrow$ ki kell zárni

Ⓑ $$V(\vec{r}) = \frac{1}{2}\left[m\omega_1^2 x_1^2 + m\omega_2^2 x_2^2 + m\omega_3^2 x_3^2\right]$$

$$b_i^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x_i}{d_i} - d_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \qquad d_i = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_i}}$$

$$b_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x_i}{d_i} + d_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \qquad i = 1, 2, 3$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{3} \hbar\omega_i \left(b_i^+ b_i + \frac{1}{2} \right)$$

Ha $V(\vec{r})$ a megadott potenciál

$u_i = \hat{b}_i^+ \Psi_0$

$v_i = \hat{b}_i \Psi_0^+$ megoldása a BE-nek

$E_i = \hbar\omega_i$ (egyetlenítésben a Kohn tétellel)

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_i + V(v_i) \right] + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{N} v(\vec{v}_i - \vec{v}_j)$$

$$\frac{1}{2} m \left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z z^2 \right)$$

a kölcsönhatás nélküli probléma szeparálható Jacobi-koordinátákba

Jacobi koordináta

$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$, relatív koordináták

spec $N=2$ $\frac{x_1+x_2}{2}$; $x_1 - x_2$

$$\underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta_{TKP} + \frac{1}{2} M \omega_1^2 v_{TKP}^2 \right)}_{TKP} \underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \dots \right)}_{\text{relatív rész}}$$

TKP módus szeparálható

statisztikától független, hőmérsékletre sem érzékeny

csapdafrekvenciák jelennek meg

nem csillapodik → ω-k kalibrálásra használják

ezek a Kohn-módusok

E_2 a három módus túl éli-e közelítéseinket?

X. előadás

Hidrodinamikai közelítés (Stringari)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V + g|\Psi|^2 \right]\Psi \qquad \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V + g|\Psi|^2 \right]\Psi^*$$

Legyen $\Psi = \sqrt{n}\, e^{i\frac{S}{\hbar}}$ n: sűrűség

$\frac{\vec{\nabla} S}{m} = \vec{v}$ sebességtér

kondenzátum sebességtere (S = állandó, kondenzátum nem mozog)

$f(\varrho, z)\, e^{iml}$

örvényes megoldás, kondenzátum áramlás

$$\psi^* \vec\nabla \psi - \psi \vec\nabla \psi^* = \Big[e^{-i\frac{S}{\hbar}} \Big(e^{i\frac{S}{\hbar}} \nabla\sqrt{n} + \sqrt{n}\, e^{i\frac{S}{\hbar}}\, i \frac{\nabla S}{\hbar} \Big) - e^{i\frac{S}{\hbar}} \Big(e^{-i\frac{S}{\hbar}} \nabla\sqrt{n} +$$

$$\sqrt{n}\, e^{-i\frac{S}{\hbar}} (-i) \frac{\nabla S}{\hbar} \Big) \Big] \sqrt{n} = 2in \frac{\vec\nabla S}{\hbar} \Rightarrow v = \frac{\hbar}{2inm} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

$$\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = 2in \frac{\partial S}{\partial t} \cdot \frac{1}{\hbar}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial (\psi^* \psi)}{\partial t} = \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \psi^* \Big(-\frac{i}{\hbar}\Big) \Big[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V + gn \Big] \psi + \psi \Big(\frac{i}{\hbar}\Big) \cdot$$

$$\Big[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V + gn \Big] \psi^* = \Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\Big) \Big(-\frac{i}{\hbar}\Big) \big(\psi^* \Delta \psi + \psi \Delta \psi^*\big) = \frac{i\hbar}{2m} \vec\nabla \underbrace{(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)}_{\frac{2imn}{\hbar} \vec v}$$

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = -\vec\nabla (n \vec v)} \quad \text{kontinuitás}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\hbar}{2in} \Big(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \Big) = \frac{(-i)\hbar}{2n} \Big\{ \sqrt{n}\, \cancel{e^{-\frac{iS}{\hbar}}} \Big(-\frac{i}{\hbar}\Big) \Big[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V + gn \Big] \sqrt{n}\, \cancel{e^{\frac{iS}{\hbar}}} -$$

$$\sqrt{n}\, \cancel{e^{\frac{iS}{\hbar}}} \Big(\frac{i}{\hbar}\Big) \Big[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V + gn \Big] \sqrt{n}\, \cancel{e^{-\frac{iS}{\hbar}}} \Big\} = -(V + gn) + \frac{\hbar^2}{4mn} \Big\{ \sqrt{n}\, e^{-i\frac{S}{\hbar}}$$

$$\cancel{\nabla (e^{\frac{iS}{\hbar}} \nabla n}\ \Big[e^{\frac{iS}{\hbar}} \Delta \sqrt{n} + 2 \vec\nabla n\, e^{\frac{iS}{\hbar}}\, i \frac{\nabla S}{\hbar} + \sqrt{n}\, \nabla \Big(e^{\frac{S}{\hbar}}\, i \frac{\nabla S}{\hbar} \Big) \Big] +$$

$$\sqrt{n}\, e^{\frac{iS}{\hbar}} \Big[e^{-\frac{iS}{\hbar}} \Delta \sqrt{n} + 2 \vec\nabla n\, e^{-\frac{iS}{\hbar}} \Big(-i \frac{\nabla S}{\hbar}\Big) + \sqrt{n}\, \nabla \Big(e^{-\frac{iS}{\hbar}} (-i) \frac{\nabla S}{\hbar} \Big) =$$

$$= -\Big(V + gn - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{n}} \Delta \sqrt{n} \Big) + \frac{i\hbar}{4m} \Big\{ e^{-\frac{iS}{\hbar}} \Big[\cancel{e^{i\frac{S}{\hbar}} \Delta S} + \frac{i}{\hbar} e^{\frac{iS}{\hbar}} (\vec\nabla S)^2 \Big] +$$

$$e^{-\frac{iS}{\hbar}} \Big[\cancel{e^{i\frac{S}{\hbar}} \Delta S} - \frac{i}{\hbar} e^{-\frac{iS}{\hbar}} (\vec\nabla S)^2 \Big] \Big\} = -\Big(V + gn - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{n}} \Delta \sqrt{n} + \underbrace{\frac{1}{2m} (\vec\nabla S)^2}_{\frac{1}{2} m v^2} \Big)$$

$$\boxed{0 = \frac{\partial S}{\partial t} + \Big(V + gn - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{n}} \Delta \sqrt{n} + \frac{1}{2} m v^2 \Big)}$$

időfüggő GP-vel ekvivalens

$$0 = m \frac{\partial \vec v}{\partial t} + \vec\nabla \Big(V + gn - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{n}} \Delta \sqrt{n} + \frac{1}{2} m v^2 \Big)$$

többi atom járuléka   kvantum-nyomás (quantum-pressure) hidrodinamikai közelítés ; kvantum-nyomás elhanyagolva

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathrm{div}(n\vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (V + gn) + \frac{1}{2} m v^2 = 0$$

stacionárius megoldás

$$\Psi_0(r,t) = e^{-\frac{i\mu t}{\hbar}} \Psi_0(r)$$

$$S_0 = -\mu_0 t$$

$v_0 = \emptyset$ alapállapot, nincs áramlás

$$-\mu_0 + V + gn = 0$$

$$\Downarrow \quad n_0 = \frac{\mu_0 - V}{g}$$ olyan, mint Thomas-Fermi

Thomas-Fermi stacionárius megoldás

Linearizálás

$$\left.\begin{aligned} n &= n_0(r) + \delta n(\vec{r},t) \\ S &= -\mu_0 t + \delta S(\vec{r},t) \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{linearizálás}}$$

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \vec{\nabla}\left[(n_0 + \delta n)\frac{\nabla}{m}\delta S\right] = 0$$

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{m} n_0 \nabla \delta S\right) = 0$$

$$-\mu_0 + \frac{\partial \delta S}{\partial t} + V + g(n_0 + \delta n) + \cancel{\frac{1}{2} m \left(\frac{\nabla \delta S}{m}\right)\left(\frac{\nabla \delta S}{m}\right)} = 0$$

másodrendű

$$\frac{\partial \delta S}{\partial t} + g\delta n = 0$$

hullámegyenlet (általánosított) δn-re

$$0 = \frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} + \frac{1}{m}\vec{\nabla}\left(n_0 \vec{\nabla}(-g\delta n)\right) = \frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} + \frac{g}{m}\vec{\nabla}\left[n_0 \vec{\nabla}\delta n\right]$$

$$0 = \frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} - \frac{1}{m}\vec{\nabla}\left[(\mu_0 - V)\vec{\nabla} n\right]$$ Stringari

Spec: homogén rendszer

$$\delta n \sim e^{i(kr + \omega t)}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu}{m}}\,|k|$$ Bogolinov-hangsebesség (felcsípték fonon ágat)

Ha $V(r) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 (x^2+y^2+z^2)$

$$\delta n = e^{\mp i\omega t} \delta n(\vec{r}) \qquad \omega^2 = \omega_0^2 (2n^2 + 2nl + \cancel{3}l + 3n)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$ radiális spet kvantumszám

$l = 0, 1, \dots$ impulzus kvantumszám

μ kitranszformálódik

A spektrum gyors levezetése

Állítás módusok x, y, z-nek polinomjai $\quad \delta n(\vec{r}) = r^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi) f_n(r^2)$

$$\omega^2 \delta n = -\frac{1}{m}(\mu - V)\Delta \delta n + \frac{1}{m} \vec{\nabla} V \vec{\nabla} \delta n$$

$$\left(\mu - \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2\right) \qquad m\omega_0^2 \vec{r}\, \underbrace{\vec{\nabla} \delta n}_{r \frac{\partial \delta n}{\partial r}}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) r^l Y_{lm} f_n(r^2)$$

legmagasabb fokú járulék
$C_0 r^{2n+l}$

μ csökkenti kettővel fokszámot (utána levő részzel)

$$\omega^2 r^{2n+l} = \frac{1}{2}\omega_0^2 r^2 \Big[(2n+l)(2n+l-1) r^{l+2n-2} + 2(2n+l) r^{l+2n-2} - l(l+1) r^{l+2n-2} \Big] + \omega_0^2 (2n+l) r^{l+2n-1} \cdot r$$

$$2\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \left[4n^2 + 2nl + 2n(l-1) + l(l-1) + 4n + 2l - l(l+1)\right] + 2n + l \cdot 2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(2nl + 2n^2 + 3n + l\right)$$

XI. előadás

$$\omega^2 \delta n = -\frac{1}{m}\vec{\nabla}(\mu - V(x))\vec{\nabla}\delta n$$

$$V = \frac{1}{2} m\omega_0^2 r^2 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 (x^2+y^2+z^2)$$

$$\omega^2\delta n = -\frac{\mu - V}{m}\Delta\delta n + \frac{1}{m}(\vec{\nabla}V)(\vec{\nabla}\delta n) = \left[-\frac{\mu+\frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2}{m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\Delta_{\vartheta,\varphi}}{r^2}\right)+\right.$$

$$\left.\frac{1}{m}m\omega_0^2\underbrace{\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)}_{r\frac{\partial}{\partial r}}\right]\delta n$$

$$\delta n = r^l Y_{lm}(\vartheta,\varphi) f(r)$$

$$\Delta_{\vartheta,\varphi} Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = -l(l+1)Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

$$\omega^2 f(r) = r^{-l}\left[-\frac{\mu-\frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2}{m}\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)+\omega_0^2 r\frac{d}{dr}\right]r^l f(r)$$

$$r^{-l}\frac{d}{dr}r^l = r^{-l}\left(r^l\frac{d}{dr}+l r^{(l-1)}\right) = \frac{d}{dr}+\frac{l}{r}$$

$$r^{-l}\frac{d^2}{dr^2}r^l = r^{-l}\frac{d}{dr}r^l r^{-l}\frac{d}{dr}r^l = \left(\frac{d}{dr}+\frac{l}{r}\right)\left(\frac{d}{dr}+\frac{l}{r}\right) = \frac{d^2}{dr^2}+\frac{l}{r}\frac{d}{dr}+\frac{l}{r}\frac{d}{dr}-$$

$$-\frac{l}{r^2}+\frac{l^2}{r^2}$$

$$\omega^2 f(r) = \left[-\frac{\mu-\frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2}{m}\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2l}{r}\frac{d}{dr}+\cancel{\frac{l^2-l}{r^2}}+\frac{2}{r}\left(\frac{d}{dr}+\cancel{\frac{l}{r}}\right)-\cancel{\frac{l(l+1)}{r^2}}\right)+\right.$$

$$\left.\omega_0^2\left(r\frac{d}{dr}+l\right)\right]f(r) = \left[-\frac{\mu-\frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2}{m}\left(\frac{d}{dr^2}+\frac{2(l+1)}{r}\frac{d}{dr}\right)+\omega_0^2\left(r\frac{d}{dr}+l\right)\right]F(r)$$

$$\mu = \frac{1}{2}m\omega_0^2 r_{TF}^2$$

$$-\frac{\mu-\frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2}{m} = -\frac{1}{2}\omega_0^2 r_{TF}^2\left(1-\frac{r^2}{r_{TF}^2}\right) \qquad \tilde{r} = \frac{r}{r_{TF}}$$

$$F(r) = \tilde{F}(\tilde{r})$$

$$\tilde{f}(\tilde{r})\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \left[-\frac{1}{2}(1-\tilde{r}^2)\left(\frac{d^2}{d\tilde{r}^2}+\frac{2(l+1)}{\tilde{r}}\frac{d}{d\tilde{r}}\right)+\tilde{r}\frac{d}{d\tilde{r}}+l\right]\tilde{f}(\tilde{r})$$

$x = \tilde{r}^2 \quad F(\tilde{r}) = G(x)$

$$\frac{d}{d\tilde{r}} = \frac{dx}{d\tilde{r}}\frac{d}{dx} = 2\tilde{r}\frac{d}{dx} = 2\sqrt{x}\frac{d}{dx}$$

$$\frac{d}{d\tilde{r}^2} = 4\left(\sqrt{x}\frac{d}{dx}\right)\left(\sqrt{x}\frac{d}{dx}\right) = 4x\frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx}$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2}G(x) = \left[-\frac{1}{2}(1-x)\left(4x\frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx} + \frac{2(l+1)}{\cancel{\sqrt{x}}}2\cancel{\sqrt{x}}\frac{d}{dx}\right) + \sqrt{x}\,2\sqrt{x}\frac{d}{dx} + l\right]G(x)$$

$$\left[x(1-x)\frac{d^2}{dx^2} + (1-x)\left(l+\frac{3}{2}\right)\frac{d}{dx} - x\frac{d}{dx} + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - l\right)\right]\right]G(x) = 0$$

vesd. össze $\quad w(z) = {}_2F_1(a,b,c,z) = 1 + \frac{ab}{c}\frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!}$

ennek a diff egyenlete $\qquad$ hipergeometrikus fv.

$$z(1-z)\frac{d^2}{dz^2}u(z) + \left[c - (a+b+1)z\right]\frac{du(z)}{dz} - ab\,u(z) = \emptyset$$

$c = l + \frac{3}{2}$

$a + b = l + \frac{3}{2}$

$-ab = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - l\right)$

$G(z)$ nem lehet szinguláris $x \to 1$, ez csak akkor nem divergál, ha $G(z)$ polinom.

$a = -n \qquad n$, egész

$b = n + l + \frac{3}{2}$

$n\left(n + l + \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - l\right)$

$$\omega^2 = \omega_0^2\left[2n\left(l + \frac{3}{2} + n\right) + l\right] = \omega_0^2\left[2nl + 3n + 2n^2 + l\right]$$

Módus fv-ek

$${}_2F_1\left(-n,\ l+\frac{3}{2}+n,\ l+\frac{3}{2},\ \frac{r^2}{r_{TF}^2}\right)\cdot r^l \cdot Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = \delta_{n,l,m}$$

l: impulzus momentum $\qquad l = 0, 1, 2$

m: impulzus momentum vetület $\qquad m = -l, \dots\ l$

n: radiális kvantumszám $\qquad n = 0, 1, 2, 3$

de tiltott $n = 0$, és $l = 0$

δ_n teljes integrálja nulla (nem változhat vírszecskeszám)

$n=0$, $l=0$

módusfv $\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ $\Rightarrow$ nem vírszecskeszám őrző

A többi vírszecskeszám megőrző

nem vortexes alapállapot, Ψ_0 megválasztható valósnak

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V - g\Psi_0^2\right)\Psi_0 = \mu\Psi_0 \quad , \quad \int|\Psi_0|^2 d^3r = N$$

Bog. - egyenletek

$$H_{HF}u_i - g\Psi_0^2 v_i = E_i u_i$$

$$-g\Psi_0^2 u_i + H_{HF} v_i = -E_i v_i \qquad H_{HF} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V - \mu + 2g\Psi_0^2\right)$$

$\oplus$ $H_{HF}(u_i + v_i) - g\Psi_0^2(u_i + v_i) = E_i(u_i - v_i)$ $\qquad h = H_{HF} - g\Psi_0^2$

$\ominus$ $H_{HF}(u_i - v_i) + g\Psi_0^2(v_i - u_i) = E_i(u_i + v_i)$

$$h(u_i + v_i) = E_i(u_i - v_i)$$

$$(h + 2g\Psi_0^2)(u_i - v_i) = E_i(u_i + v_i)$$

$$(h + 2g\Psi_0^2)h(u_i + v_i) = E_i^2(u_i + v_i)$$

$$h(h + 2g\Psi_0^2)(u_i - v_i) = E_i^2(u_i - v_i)$$

$h\Phi_\alpha = \varepsilon_\alpha\Phi_\alpha$ normális Schrödinger-egyenlet

első diagonizálás

$\varepsilon_0 = 0 \quad \Phi_0 = \Psi_0$ -nak

$$u_i + v_i = \sum_\alpha{}' \, c_\alpha^{(i)}\Phi_\alpha \qquad \alpha \neq 0$$

$$E_i^2 \sum_\beta{}' c_\beta^{i} \Phi_\beta = \sum_\beta{}' \varepsilon_\beta^2 c_\beta^{(i)} \Phi_\beta + 2g\Psi_0^2 \sum_\beta{}' \varepsilon_\beta c_\beta^{(i)} \Phi_\beta$$

Φ_α megválasztható valósnak és ortogonálisnak

$$\int \Phi_\alpha \Phi_\beta d^3r = \delta_{\alpha\beta}$$

$$E_i^2 c_\alpha^{(i)} = \varepsilon_\alpha^2 c_\alpha^{(i)} + 2g\cancel{\Psi_0^2} \sum_\beta{}' \overbrace{\left[\int d^3r \, \Phi_\alpha \Psi_0^2 \Phi_\beta\right]}^{M_{\alpha\beta}} \varepsilon_\beta c_\beta^{(i)}$$

$\alpha \neq 0$
$\beta \neq 0$

$M_{\alpha\beta}\, \varepsilon_\beta \leftarrow$ nem szimmetrikus

$$\sum_\beta \left[\varepsilon_\alpha^2 \sigma_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta}\, \varepsilon_\beta \right] c_\beta^{(i)}$$

hasonlósági transzformációt

$$\underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{G}}\, \underline{\underline{D}}^{-1} = \tilde{G} \qquad D_{\alpha\beta} = \sqrt{\varepsilon_\alpha}\, \sigma_{\alpha\beta}$$

$$\tilde{G}_{\alpha\beta} = \varepsilon_\alpha^2 \sigma_{\alpha\beta} + \sqrt{\varepsilon_\alpha}\, M_{\alpha\beta} \sqrt{\varepsilon_\beta}$$

$$E_i^2 \underline{c}^i = \underline{\underline{G}}\, \underline{c}^i$$

$$E_i^2 \underline{\underline{D}}\, \underline{c}^i = \underbrace{\underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{G}}\, \underline{\underline{D}}^{-1}}_{\tilde{\underline{\underline{G}}}} \underline{\underline{D}}\, c^i \qquad E_i^2 \tilde{c}_i = \tilde{\underline{\underline{G}}}\, \tilde{c}_i$$

valós lesz — szimmetrikus

2. diagonizálás

$$c_\alpha^{(i)} = \left(\underline{\underline{D}}^{-1} \tilde{\underline{c}}^{(i)} \right)_\alpha$$

$$u_i + v_i = \sum_\alpha c_\alpha^{(i)} \phi_\alpha$$

$$u_i - v_i = \frac{h}{E_i} (u_i + v_i) = \frac{1}{E_i} \sum_\alpha \varepsilon_\alpha c_\alpha^{(i)} \phi_\alpha$$

$$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sum_\alpha \left(1 \pm \frac{\varepsilon_\alpha}{E_i} \right) c_\alpha \phi_\alpha$$

normálás rögzítése

$$\sigma_{ij} = \int d^3r\, (u_i - v_i)(u_j + v_j)$$

u_i ortogonalitása + nem trivi ortogonalitás + u_i, v_i valós

$$\sigma_{ij} = \sum_{\alpha\beta}' \frac{\varepsilon_\alpha}{E_i} c_\alpha^{(i)} c_\beta^{(j)} \underbrace{\int \phi_\alpha \phi_\beta\, d^3r}_{\sigma_{\alpha\beta}} = \sum_\alpha' \frac{\varepsilon_\alpha}{E_i} c_\alpha^{(i)} c_\alpha^{(j)}$$

súlyozott skalárszorzat

$$E_i \sigma_{ij} = \sum_\alpha' \varepsilon_\alpha\, c_\alpha^{(i)} c_\alpha^{(j)}$$

I. előadás

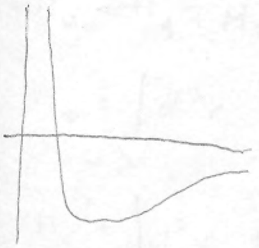
$$a_i^+ | n_1 \quad n_i \rangle = \sqrt{n_i+1}\, | n_1 \quad n_i+1 \rangle$$

$$\{ \varphi_i \}_{i=1}^{n}$$

$$\hat{\Psi}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(\vec{r})$$

$$\int d^3r\, \Psi^+(r) \left[\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right) + V(r) \right] \Psi(r) + \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r'\, \Psi^+(r) \Psi^+(r') V(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$\cdot \Psi(\vec{r}') \Psi(r) = \hat{H}$$



$$\Rightarrow \frac{4\pi \hbar^2 a}{m} \delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$[\Psi(r), \Psi^+(r')] = \delta(r-r')$$
$$[\Psi(r), \Psi(r')] = 0$$
$$[\Psi^+(\vec{r}), \Psi^+(r')] = 0$$

$T < T_c \qquad \langle \Psi(\vec{r}) \rangle \neq 0$

$\Psi_0(\vec{r}) = \langle \Psi(\vec{r}) \rangle$ a kondenzátum hullámfüggvénye

$\Psi_0 = \sqrt{\frac{N_0}{V}}$ homogén rendszer

N bozon
V térfogat
N_0 kondenzálódik

$$\hat{\Psi}(\vec{r}) = \underbrace{\Psi_0(\vec{r}) \hat{I}}_{\text{kondenzálódott}} + \underbrace{\hat{\varphi}(\vec{r})}_{\text{normál}}$$

ODLRO

off diagonal long range order

homogén rendszer

$$\lim_{|r_1-r_2| \to \infty} g(r_1, r_2) = \langle \Psi^+(\vec{r}_1) \Psi(\vec{r}_2) \rangle = \left\langle \left(\sqrt{\frac{N_0}{V}} + \varphi^+(r_1) \right) \left(\sqrt{\frac{N_0}{V}} + \varphi(r_2) \right) \right\rangle =$$

$$= \frac{N_0}{V} + \underbrace{\langle \varphi^+(r_1) \varphi(r_2) \rangle}_{\to 0} = \frac{N_0}{V} \quad \text{nem zérus}$$

Sűrűség

T_c fölött

$\langle \Psi^+(r)\, \Psi(r) \rangle$ normál rendező

$T < T_c$

$$\langle (\Psi_0^+(r) + \phi^+(r))(\Psi_0(r) + \phi(r)) \rangle = \underset{n_c(r)}{|\Psi_0(r)|^2} + \underset{n_T(r)}{\langle \phi^+(r)\, \phi(r) \rangle}$$

$\langle \phi(r) \rangle = 0$ $\quad \langle \Psi(r) \rangle = \Psi_0(r)$

$\langle \phi^+(r) \rangle = 0$

Popov közelítés

$$\hat{H} - \mu \hat{N} = \int d^3r\, \Psi^+(r) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) - \mu \right] \Psi(r) + \frac{g}{2} \int d^3r\, \Psi^+(r)\, \Psi^+(r) \cdot$$

$$\Psi(r)\, \Psi(r)$$

$$\hat{\Psi}(r) = \Psi_0(r) + \phi(r)$$
$$\hat{\Psi}^+(r) = \Psi_0^*(r) + \phi^+(r)$$

$$\Psi^*(r)\Psi^+(r)\Psi(r)\Psi(r) = \left[\Psi_0^{2*}(r) + 2\Psi_0^*(r)\phi^*(r) + \phi^*(r)\phi^+(r) \right] \cdot$$

$$\left[\Psi_0^2(r) + 2\Psi_0(r)\phi(r) + \phi(r)\phi(r) \right] = |\Psi_0(r)|^4 + 2|\Psi_0(r)|^2 \left(\Psi_0(r)\phi^+(r) + \Psi_0^*(r)\phi(r) \right)$$

$$+ \Psi_0^{*2}(r)\phi(r)\phi(r) + \Psi_0^2(r)\phi^*(r)\phi^*(r) + 4|\Psi_0(r)|^2 \phi^*(r)\phi(r) +$$

$$2\Psi_0^*(r)\phi^*(r)\phi(r)\phi(r) + 2\Psi_0(r)\phi^*(r)\phi^*(r)\phi(r) +$$

$$\phi^*(r)\phi^*(r)\phi(r)\phi(r)$$

Bogoliubov-közelítés

elhagyja a $\mathcal{O}(\phi^3)$ és $\mathcal{O}(\phi^4)$-es tagokat

Popov-közelítés

a) $\mathcal{O}(\phi^3)$ és $\mathcal{O}(\phi^4)$ átlagtér-elméletben

$$\phi^+(r)\phi(r)\phi(r) \cong \langle \phi^+(r)\phi(r) \rangle \phi(r) + \langle \phi^+(r)\phi(r) \rangle \phi(r) + \langle \phi(r)\phi(r) \rangle \phi^+(r)$$

T_c alatt nem zérus, anomális várható értékek

b) megtartja $\langle \phi^+(r)\phi(r) \rangle$ és elhagyja anomális várható értéket

$\langle f(r) f(r) \rangle = 0 \implies$ nem konzisztens

elhanyagolva ezt a véges $\neq 0$-t fogunk rá kapni

nagyon alacsony hőmérsékleten, és T_c körül jó

köbös tag

$$4 n_T \Psi_0^*(r) f(r) + 4 n_T(r) \Psi_0(r) f^+(r)$$

negyedrendű

$$4 n_T f^+(r) f(r)$$

$$H = H_0 + H_1 + H_1^+ + H_2$$

$$H_0 = \int d^3r\, \Psi_0^*(r) \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V - \mu + \frac{g}{2}|\Psi_0(r)|^2\right)\Psi_0(r)$$

alapállapoti energiát adja

$$H_1^+ = \int d^3r\, f^+(r) \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V - \mu + g\left(|\Psi_0(r)|^2 + 2n_T(r)\right)\right)\Psi_0(r)$$

$$H_1 = \int d^3r\, \Psi_0^*(r) \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V - \mu + g\left(|\Psi_0(r)|^2 + 2n_T(r)\right)\right) f(r)$$

koherens állapotok $\quad H = \hbar\omega(a^+a + \frac{1}{2}) + c a^+ + c a$

$$H_2 = \int d^3r\, f^+(r)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r) - \mu + 2g\left(|\Psi_0(r)|^2 + n_T(r)\right)\right) f(r) +$$

$$\frac{g}{2}\int d^3r\, \Psi_0^{*2}(r) f(r) f(r) + \frac{g}{2}\int d^3r\, \Psi_0^2(r) f^+(r) f^+(r)$$

Hogy $\langle f \rangle = 0$ legyen H_1 és H_1^+-nek el kell tűnnie, mert tolja a várható értéket

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r) - \mu + g\left[|\Psi_0|^2 + 2n_T(r)\right]\right)\Psi_0(r) = \emptyset$$

ez a véges hőmérsékletű G-P egyenlet

a H_2-es tag kidiagonalizálása

$T > T_c$ fölött

$$f = \sum_i f_i(r)\, a_i(r)$$

$T < T_c$ $\qquad$ $i=0$ alapállapotot nem vesszük figyelembe

$$\hat{f}(r) = \sum_i{}' \left(v_i(r)\,\alpha_i - v_i^* \cdot \alpha_i^+\right)$$

$$l^+(r) = \sum_i' \left(u_i^*(r)\,\alpha_i^* - v_i(r)\,\alpha_i \right) \qquad \text{ahol} \quad [\alpha_i, \alpha_j^+] = \delta_{ij}$$

$$H_{HF} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r) - \mu + 2g\,|\Psi_0(r)|^2 + 2g\,n_T(r) \right]$$

$$H_2 = \sum_{ij} \int d^3r \Big\{ \left(u_i^*\alpha_i^+ - v_i\alpha_i \right) H_{HF} \left(u_j\alpha_j - v_j^*\alpha_j^+ \right) +$$

$$\frac{g}{2}\Psi_0^{*2}(r)\left(v_i\alpha_i - v_i^*\alpha_i^+ \right)\left(u_j\alpha_j - v_j^*\alpha_j^+ \right) + \frac{g}{2}\Psi_0^2(r)\left(v_i^*\alpha_i^+ - v_i\alpha_i \right)$$

$$\left(u_j^*\alpha_j^+ - v_j\alpha_j \right)$$

$$H_2 = \sum_{i,j} \int d^3r \Big\{ \alpha_i^+\alpha_j \left(u_i^* H_{HF} u_j - \frac{g}{2}\Psi_0^{*2} v_i^* u_j - \frac{g}{2}\Psi_0^2 u_i^* v_j \right) \quad ①$$

$$\alpha_i\alpha_j^* \left(v_i H_{HF} v_j^* - \frac{g}{2}\Psi_0^{*2} v_i v_j^* - \frac{g}{2}\Psi_0^2 v_i u_j^* \right) \quad ②$$

$$-\alpha_i\alpha_j \left(v_i H_{HF} u_j - \frac{g}{2}\Psi_0^{*2} v_i u_j - \frac{g}{2}\Psi_0^2 v_i v_j \right) \quad ③$$

$$-\alpha_i^+\alpha_j^+ \left(u_i^* H_{HF} v_j^* - \frac{g}{2}\Psi_0^{*2} v_i^* v_j^* - \frac{g}{2}\Psi_0^2 u_i^* u_j^* \right) \Big\} \quad ④$$

$H_{HF}^+ = H_{HF}$

$$H_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \int d^3r \Big\{ \alpha_i^+\alpha_j \left[u_i^* \left(H_{HF} u_j - g\,\Psi_0^2 v_j \right) + u_j \left(H_{HF} u_i^* - g\,\Psi_0^{*2} v_i^* \right) \right]$$

II. előadás

$$\int d^3r\; a\, H_{HF}\, b = \int d^3r\; b\, H_{HF}\, a \qquad a, b = u_i, u_i^*, v_i, v_i^*$$

szabad kétszeresen parciálisan integrálni

„Bogo" u_i és v_i elégítse ki a következő egyenleteket

$$H_{HF} u_i - g\,\Psi_0^2 v_i = E_i u_i$$

$$-g\,\Psi_0^{*2} u_i + H_{HF} v_i = -E_i v_i$$

$$\int d^3r \left(u_i^* u_j - v_i^* v_j \right) = \delta_{ij}$$

$$\int d^3r \left(u_i v_j - u_j v_i \right) = 0$$

$$\int d^3r \left(u_i^* v_j^* - u_j^* v_i^* \right) = 0$$

H_2 egyes sorainak manipulálása

$$③ = -\sum_{ij}{}' \alpha_i \alpha_j \int d^3r \left[\frac{1}{2} v_i H_{HF} u_j + \frac{1}{2} u_j H_{HF} v_i - \frac{g}{2} \psi_0^{*2} u_i u_j - \frac{g}{2} \psi_0^2 v_i v_j \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{ij} \alpha_i \alpha_j \int d^3r \; v_i \underbrace{\left[H_{HF} u_j - g \psi_0^2 v_j \right]}_{E_j u_j} + u_j \underbrace{\left[H_{HF} v_i - g \psi_0^{*2} u_i \right]}_{-E_i v_i} =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{ij} \alpha_i \alpha_j E_j \int d^3r \; v_i u_j + \frac{1}{2} \sum_{ij} \alpha_i \alpha_j E_i \int d^3r \; u_j v_i$$

$$i \longleftrightarrow j$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{ij} \alpha_i \alpha_j E_j \int d^3r \; u_i v_j$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{ij} E_j \alpha_i \alpha_j \int d^3r \left(v_i u_j - u_i v_j \right) = 0$$

④ = 0 hasonlóan

$$② = \frac{1}{2} \sum_{ij}{}' \int d^3r \; \alpha_i \alpha_j^+ \left[v_i \underbrace{\left(H_{HF} v_j^* - \frac{g}{2} \psi_0^2 u_j^* \right)}_{-E_j v_j^*} + v_j^* \underbrace{\left(H_{HF} v_i - \frac{g}{2} \psi_0^{*2} u_i \right)}_{-E_i v_i} \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{ij}{}' \int d^3r \; \alpha_i \alpha_j^+ (E_i + E_j) \; v_i v_j^* = -\frac{1}{2} \sum_{ij}{}' (E_i + E_j) \alpha_j \alpha_i^+ \int d^3r \; v_i^* v_j$$

$$① = \frac{1}{2} \sum_{ij}{}' \alpha_i^+ \alpha_j \left[u_i^* \underbrace{\left(H_{HF} u_j - g \psi_0^2 v_j \right)}_{E_j u_j} + u_j \underbrace{\left(H_{HF} u_i^* - g \psi_0^{*2} v_i^* \right)}_{E_i u_i^*} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ij}{}' \alpha_i^+ \alpha_j \; (E_i + E_j) \int d^3r \; u_i^* u_j$$

$$① + ② = \frac{1}{2} \sum_{ij} (E_i + E_j) \left[\alpha_i^+ \alpha_j \int d^3r \; u_i^* u_j - \underbrace{\alpha_j \alpha_i^+}_{\alpha_i^+ \alpha_j + \delta_{ij}} \int d^3r \; v_i^* v_j \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ij} (E_i + E_j) \; \alpha_i^+ \alpha_j \underbrace{\int d^3r \left(u_i^* u_j - v_i^* v_j \right)}_{\delta_{ij}} - \frac{1}{2} \sum_{ij} (E_i + E_j) \delta_{ij} \int d^3r \; v_i^* v_j$$

$$= \sum_i{}' E_i \; \alpha_i^+ \alpha_i - \sum_i E_i \int d^3r \; |v_i|^2$$

$$H_{popov} = H_0 + H_2 = \int d^3r \; \Psi_0^*(r) \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r) + \frac{g}{2}|\Psi_0|^2 - \mu \right] \Psi_0 -$$

$$\sum_i{}' E_i \int d^3r \, |v_i(r)|^2 + \sum_i{}' E_i \alpha_i^+ \alpha_i$$

$$\langle \alpha_i^+ \alpha_j \rangle_T = \frac{\mathrm{Tr}\left[\alpha_i^+ \alpha_j \, e^{-\beta(E_0 + \sum_\ell E_\ell \alpha_\ell^+ \alpha_\ell)}\right]}{\mathrm{Tr}\left[e^{-\beta(E_0 + \sum_k E_k \alpha_k^+ \alpha_k)}\right]} = \delta_{ij} \frac{1}{e^{\beta E_i} - 1} =$$

$$= \delta_{ij} N(E_i)$$

$$\langle \alpha_i \alpha_j \rangle = \emptyset$$

$$\langle \alpha_i \alpha_j^+ \rangle_T = \delta_{ij}\left(1 + N(E_i)\right) = \delta_{ij} \frac{e^{\beta E_i}}{e^{\beta E_i} - 1}$$

$T \to 0 \qquad N(E_i) \to 0$

$n_T(\vec{r})$

$$n(\vec{r}) = |\Psi_0(\vec{r})|^2 + \langle \varphi^+(r)\varphi(r) \rangle$$

$$n_T(\vec{r}) = \langle \varphi^+(r)\varphi(r) \rangle = \sum_{i,j} \langle (u_i^* \alpha_i^+ - v_i \alpha_i)(u_j \alpha_j - v_j^* \alpha_j^+) \rangle =$$

$$= \sum_i \left[|u_i(r)|^2 N(E_i) + |v_i(r)|^2 (N(E_i) + 1) \right] =$$

$T \to 0 \qquad n_T(\vec{r}) = \sum_i |v_i(r)|^2$

reális adatok 2–3 %

Thermal depletion

$$m(r) = \langle \varphi(r)\varphi(r) \rangle = \sum_{i,j} \langle (u_i \alpha_i - v_i^* \alpha_i^+)(u_j \alpha_j - v_j^* \alpha_j^+) \rangle =$$

$$= -\sum_i \left[v_i^*(r) u_i(r) N(E_i) + u_i(r) v_i^*(r) (N(E_i) + 1) \right] =$$

$$= -\sum_i u_i(r) v_i^*(r) \, (2N(E_i) + 1)$$

$T \to 0$ nem egyenlő nulla

nem teljesen konzekvens a Popov

III. előadás

$$\hat{H} \approx \int d^3r\, \Psi_0(r) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) - \mu + \frac{g}{2} |\Psi_0(r)|^2 \right] \Psi_0(r) + \sum_i E_i \int d^3r\, |v_i|^2 +$$

$$\sum_i E_i \alpha_i^+ \alpha_i$$

Megoldandó

a) $$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) - \mu + g \left[|\Psi_0(r)|^2 + 2n_T(r) \right] \right\} \Psi_0(r) = \emptyset$$

$$\int d^3r\, |\Psi_0(r)|^2 = N_0 \leftarrow \text{kondenzátum atomok száma}$$

b) $$H_{HF} u_i - g \Psi_0^2 v_i = E_i u_i$$

$$-g \Psi_0^{*2} u_i + H_{HF} v_i = -E_i v_i$$

$$H_{HF} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) - \mu + 2g\, |\Psi_0(r)|^2 + 2g\, n_T(r) \right]$$

~~diagonali~~ normálás

$$\int d^3r\, (u_i^* u_j - v_i^* v_j) = \delta_{ij}$$

ellenőrizve

$$\int d^3r\, (u_i v_j - u_j v_i) = 0$$

$$\int d^3r\, (u_i^* v_j^* - u_j^* v_i^*) = 0$$

c)

$$n_T(r) = \sum_i \left[|u_i(r)|^2 N(E_i) + |v_i(r)|^2 (N(E_i) + 1) \right] \qquad N(E_i) = \frac{1}{e^{\beta E_i} - 1}$$

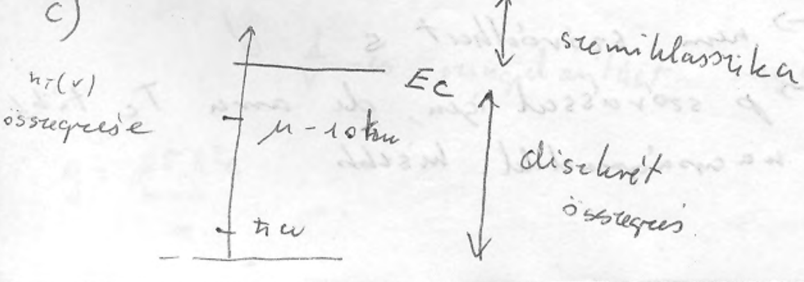
$$N_T \doteq \int d^3r\, n_T(r) \qquad N = N_0 + N_T$$

(N) rögzített

a) részt rácson

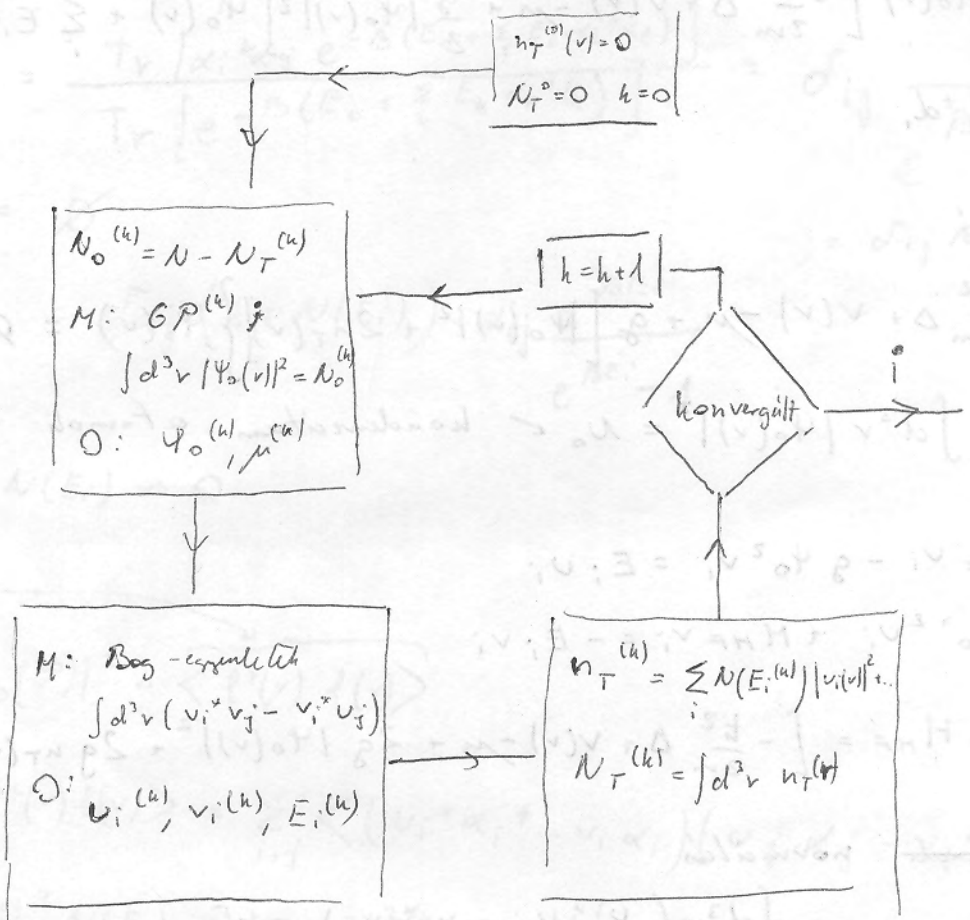
b) lokalizált bázison (oszcillátor móduson)

c)



így független EC-től

k iterációk száma
M megoldani
O output



IV. előadás

Fermionok

BCS párisátalakulást kell megcélozni

$$\Delta \approx (\ )\,\hbar\omega_D\, e^{-\frac{1}{g\nu_F}} \qquad kT_c \sim (\ )\,\Delta$$

2 spinállást kell parallel csapdázni

ha azonos spinállás → szimmetrikus spinben

→ helyben antiszimmetrikus

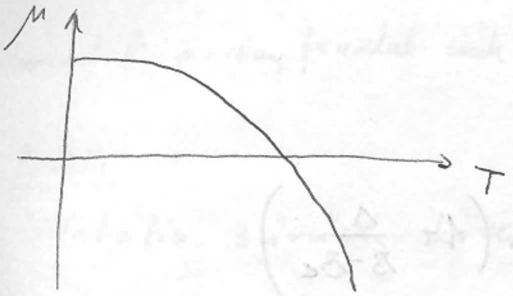
→ nem érezheti Dirac-delta szórópotenciált

→ nem szóródhat s

→ p szórással igen, de arra T_c több nagyságrenddel kisebb

Fermionokkal is lehet vortexeket kapni

anyagok: ^6Li



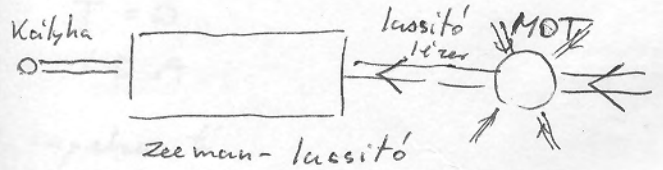
Bethe Sommerfeld

magas T sorfejtés

kvantum degenerációs hőmérséklete, itt nincs fázisátalakulás, kvantumos hatások jelentősek alatta

Hűtési eljárások

beheverünk bozonokat, azokat hűtjük, termalizálódnak, végén elhajtjuk → szimpatetikus-hűtés



Alapok $\quad H = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_i + V_{ext}(r_i)\right) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} v(r_i - r_j)$

$v(r_i - r_j) = g\,\delta(r_i - r_j)$ Born-közelítés

$v(r) = g\,\delta(r)\frac{\partial}{\partial r} r$ regularizált alak

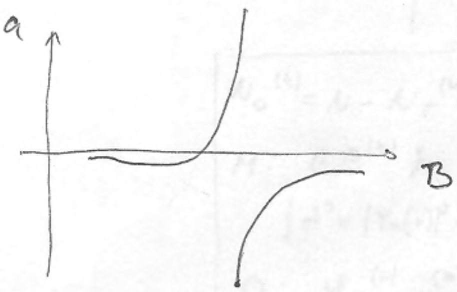
↳ $\frac{1}{r}$-es szingularitást megöli

$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$

^6Li esetén

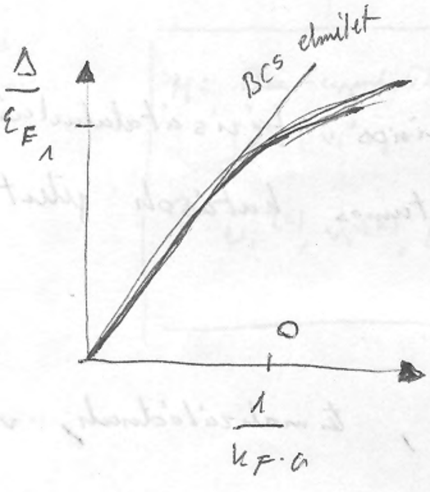
$F = \frac{1}{2}$ $m_F = \pm\frac{1}{2}$ állapotokat csapdázzuk ($F = \frac{3}{2}$ -t nem használjuk)

Feshbach-rezonancia



$$a(B) = a_0\left(1 + \frac{\Delta}{B - B_c}\right)$$

a növelhető $\longrightarrow$ T_c növelhető



Δ -val leírható

$\longleftarrow$ Cooper-pár

$\longrightarrow$ molekula (bozonok)

folytonos átmenet

BEC - BCS átmenet

V. előadás

gap mérése

RF-vel szétverik a Cooper-párokat vagy molekulákat

Feshbach ponton: (univerzális Fermi-gáz)

$a \to \infty$

más mennyiségek nem divergálnak

egyetlen hosszskála: k_F

minden termodinamikai mennyiség E_F és $\frac{T}{T_F}$ -től függ

$T \neq 0$

$T_c = \alpha T_F$
$\downarrow$
$0{,}23$

kvantált örvény fonalak csak T_c alatt

LDA

lokális sűrűség közelítés

a) számold ki homogén rendszerben

b) $\mu \longrightarrow \mu - V(\vec{r})$
$\uparrow$
homogén rendszer

nem szerepel benne $V(\vec{r})$ különböző gradiensei

$\hbar \omega_0 \left(2n + l + \frac{3}{2}\right)$

$2(2l+1)$ elfajulás

LDA igen jó (sokszor!)

Ideális (nem klasszikus) fermigáz

$T = 0$
LDA

impulzus tér

$$\frac{1}{e^{\beta\left(\frac{p^2}{2m} - \mu - V(r)\right)} + 1}$$

$T = 0$

$$\Theta\left(\mu - V - \frac{p^2}{2m}\right)$$

$$n_\sigma(r) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}\, \Theta\left(\mu - V - \frac{p^2}{2m}\right) = \frac{4}{3}\pi \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \left[2m(\mu - V)\right]^{3/2} =$$

$\Theta(\mu - V)$

$$= \frac{1}{6\pi^2\hbar^3}\left[2m(\mu - V)\right]^{3/2}\, \Theta(\mu - V)$$

μ rögzítése

$$N = \int \left(n_\uparrow(r) + n_\downarrow(r) \right) d^3 r$$

Spec harmonikus oszcillátor

$$V = \frac{1}{2} m \left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2 \right)$$

$$N = \frac{1}{3\pi^2 \hbar^3} (2m\mu)^{3/2} \int d^3 r \left(1 - \frac{m\omega_x^2}{2\mu} x^2 + \frac{m\omega_y^2}{2\mu} y^2 - \frac{m\omega_z^2}{2\mu} z^2 \right)^{3/2}$$

$$\mu > \frac{1}{2} m \left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2 \right)$$

$$= \frac{1}{3\pi^2 \hbar^3} (2\mu m)^{3/2} \left(\frac{2\mu}{m} \right)^{3/2} \frac{1}{\omega_x \omega_y \omega_z} \int dx' dy' dz' \left(1 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \right)^{3/2} =$$

$$1 > x'^2 + y'^2 + z'^2$$

$$= \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2\mu}{\hbar \bar{\omega}} \right)^3 4\pi \underbrace{\int_0^1 dr \; r^2 (1 - r^2)^{3/2}}_{\frac{\pi}{32}} = \frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{\hbar \bar{\omega}} \right)^3 = N$$

$$\mu = (3N)^{1/3} \hbar \bar{\omega}$$

VI. előadás

LDA bozonokra

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V - \mu + g |\Psi|^2 \right) \Psi = 0$$

$$\mu = g n$$

$$n = \frac{\mu - V}{g}$$ Thomas – Fermi közelítés

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \mu(n) \quad T = 0 \\ P &= P(n) \quad T = 0 \end{aligned}\right\} \text{elég}$$

Hidrodinamikai közelítés (általánosítás)

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla}(n\vec{u}) = 0$$ kontinuitás

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -(n)^{-1}\vec{\nabla}p - \vec{\nabla}V$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v + \vec{v}\vec{\nabla}v$$

stacioner megoldás $\vec{v}_0 = 0$

$$\vec{\nabla}P_0 = -n_0\vec{\nabla}V$$ Archimedes-törvénye

$$p = P_0 + \left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_0 \delta n$$

$$A(r) = \left(\frac{\partial P}{\partial n}\right) = mc^2(r)$$

Ideális hangsebesség

$$\frac{\partial \mu}{\partial n} = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right) \qquad P = \frac{1}{2}g n^2$$

$\vec{\nabla}n_0$ kiszámítása

$$\mu - V = \mu(n_0(r))$$

LDA

homogén rendszer egyenletéből tudom

$$-\nabla V = \left(\frac{\partial \mu}{\partial n}\right)_0 \nabla n_0(r) = \frac{1}{n_0}\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_0 \nabla n_0(r)$$

$$A\frac{\nabla n_0}{n_0} = -\nabla V$$

Egyenletek linearizálása

kontinuitás

$$\frac{\partial(n_0+\delta n)}{\partial t} + \vec{\nabla}\left((n_0+\delta n)\vec{v}\right)$$

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \vec{\nabla}[n_0\vec{v}] = 0$$

Euler-egyenlet

$$n_0 m\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \cancel{\vec{v}\,\vec{\nabla}\vec{v}}\right) = -\vec{\nabla}\left(P_0 + \frac{\partial P}{\partial n}\delta n\right) - (n_0 + \delta n)\nabla V$$

$$m\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{n_0}\vec{\nabla}\left(A\delta n\right) + \delta_n A\frac{\vec{\nabla} n_0}{n_0^2} \equiv -\vec{\nabla}\left(\frac{A\delta n}{n_0}\right)$$

van sebességpotenciál

$T=0$, mert nincs viszkozitás

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \vec{\nabla}\left[n_0\vec{v}\right] = 0\\ &m\frac{\partial v}{\partial t} = -\vec{\nabla}\left[\frac{A}{n_0}\delta n\right]\end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} + \vec{\nabla}\left[n_0\frac{\partial v}{\partial t}\right] = 0$$

$$\frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} = \frac{1}{m}\vec{\nabla}\left[n_0\vec{\nabla}\left(\frac{A}{n_0}\delta n\right)\right]$$

$$\delta n = e^{i(\omega t + l)}\,\delta n(r)$$

$$\boxed{\omega^2 \delta n(r) = \left[-\frac{1}{m}\vec{\nabla}\, n_0 \vec{\nabla}\frac{A}{n_0}\right]\delta n(r)}$$

Spec. $V(\vec{r}) = 0$

n_0, A térben konstans

$$\omega^2\delta n = -\frac{A}{m}\Delta\delta n \qquad \omega^2 = \frac{A}{m}k^2 \qquad A = mc^2$$

$$\Psi = \sqrt{\frac{A}{n_0}}\,\delta n \quad \to \quad t\text{ független és valós}$$

új térmennyi

$$-\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -\left[\sqrt{\frac{A}{n_0}}\,\vec{\nabla}\frac{n_0}{m}\vec{\nabla}\sqrt{\frac{A}{n_0}}\right]\Psi = \hat{G}\Psi$$

$$\langle \Psi_1|G|\Psi_2\rangle = \langle \Psi_2|G|\Psi_1\rangle^*$$

G hermitikus $\quad \frac{n_0}{A} > 0$

$$\langle \Psi_1|\Psi_2\rangle = \int d^3r\,\Psi_1^*\Psi_2 \quad \text{skalár szorzattal}$$

Állapotegyenlet

$$n_\uparrow = \frac{1}{6\pi^2}\left[\frac{2m(\mu - V(r))}{\hbar^2}\right]^{3/2} \Theta(\mu - V(r))$$

homogén rendszer

$$\frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3} = \mu$$

$$\frac{1}{n}\frac{\partial P}{\partial n} = A \qquad \frac{1}{n}\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\partial \mu}{\partial n}$$

$$A_0 = \frac{2}{3}\frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3} = \frac{2}{3}(\mu - V)$$

LDA

Spec kölcsönható esetben
Feshbach-ponton

$$\mu(n) = \xi\frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3} \qquad \text{hasonló}$$

VII. előadás

$$\omega^2\Psi = -\sqrt{\frac{A_0(\vec{r})}{n_0(r)}}\;\vec{\nabla}\,\frac{\rho_0(r)}{n}\;\vec{\nabla}\sqrt{\frac{A_0(r)}{n_0(r)}}\,\Psi$$

Spec politróp egyenlet

$$\mu = C\cdot n^p$$

p politróp index

pl: $\mu = gn$ gyengén kölcsönható bozonok

$$C = g \qquad p = 1$$

pl: nem kölcsönható

$$n = \frac{1}{3\pi^2}k_F^3 \qquad \mu = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$$

$$\mu = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3} \qquad p = \frac{2}{3} \qquad C = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2)^{2/3}$$

LDA politróp

$$n(r) = \left(\frac{\mu - V}{C}\right)^{1/p}$$

$$A_0(r) = \left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_{n = n_0(r)} = \left(n \frac{\partial \mu}{\partial n}\right) = p(\mu - V)$$

$$\omega^2 \Psi = -\sqrt{\frac{p(\mu-V)}{\left(\frac{\mu-V}{C}\right)^{1/p}}} \vec{\nabla} \frac{1}{m} \left(\frac{\mu-V}{C}\right)^{1/p} \vec{\nabla} \sqrt{\frac{p(\mu-V)}{\left(\frac{\mu-V}{C}\right)^{1/p}}} \Psi =$$

$$= -\frac{p}{m} (\mu-V)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} \nabla (\mu-V)^{1/p} \nabla (\mu-V)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} \Psi$$

Spec

$$V = \frac{1}{2} m \left(\omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2 + \omega_3^2 x_3^2\right)$$

TF ellipszis

$$\mu = \frac{1}{2} m \left(\omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2 + \omega_3^2 x_3^2\right)$$

féltengelyek

$$a = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_1^2}} \quad b = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_2^2}} \quad c = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_3^2}}$$

$$c_0 = \sqrt{\frac{\mu}{m}}$$

$$\mu - V = \mu\left(1 - \frac{V(r)}{\mu}\right) = \mu \underbrace{\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2}\right)}_{= f_0}$$

Legyen $\Psi = \frac{1}{\sqrt{(\mu-V)^{1-\frac{1}{p}}}} f$

$$\omega^2 f = -\frac{p}{m} (\mu-V)^{1-\frac{1}{p}} \underbrace{\nabla (\mu-V)^{1/p} \nabla f}_{(\mu-V)^{1/p} \Delta f - \frac{1}{p}(\mu-V)^{\frac{1}{p}-1} \nabla V \nabla f} =$$

$$-\frac{p}{m} (\mu - V) \Delta f + \frac{1}{m} \nabla V \nabla f$$

Vannak Kohn-módusok ha $f = x$ helyettesítéssel élek

$$\omega^2 f = -\frac{p}{m}(\mu-\nu)\Delta f + \frac{\nabla V \nabla f}{m}$$

Hasonló mint stringari

$$\frac{\omega^2}{c_0^2} f = -p\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}\right)\Delta f + 2\left(\frac{x_1}{a^2}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{x_2}{b^2}\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{x_3}{c^2}\frac{\partial}{\partial x_3}\right) f$$

Ált. Elliptikus koordináták

$$\frac{x_1^2}{a^2+\varsigma}+\frac{x_2^2}{b^2+\varsigma}+\frac{x_3^2}{c^2+\varsigma}=1$$

adott x_1, x_2, x_3 esetén $\varsigma = \underbrace{\lambda, \mu, \nu}$ a gyök

ezek az általános elliptikus koordináták

Szimmetria

$x_1 \leftrightarrow -x_1$

$x_2 \leftrightarrow -x_2$

$x_3 \leftrightarrow -x_3$ $\qquad \alpha, \beta, \gamma = 0, 1 \qquad$ 8 szimmetriaosztály

$$f = x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma} \prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{x_1^2}{a^2+\Theta_i}-\frac{x^2}{b^2+\Theta_i}-\frac{x_3^2}{c^2+\Theta_i}\right)$$

Állítás

Ha Θ_i-ket jól választom, akkor a f kielégíti a hullám egyenletet.

$f = x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma} \hat{f} \qquad \hat{f} = \prod_{i=1}^{n} f_i \qquad f = x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma} \begin{cases} \prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{x_1^2}{\dots}\dots\right) & n \geq 1 \\ 1 & n=0 \end{cases}$

$$f_0 = 1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_2^2}{c^2}$$

$\frac{\omega^2}{c_0^2} f = \hat{G} f \qquad \frac{\omega^2}{c_0^2}\hat{f} = \underbrace{x_1^{-\alpha} x_2^{-\beta} x_3^{-\gamma}\hat{G}\, x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma}}_{\text{hasonlósági tartomány}} \hat{f} = \hat{\hat{G}}\hat{f}$

ugyanaz a spektrum

$$x_1^{-\alpha} x_2^{-\beta} x_3^{-\gamma}\Delta x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma} = x_1^{-\alpha}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} x^{\alpha} + \dots$$

$x_1^{\alpha} x_1^{-\alpha}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\alpha}{x_1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\alpha}{x_1}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\alpha}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\alpha}{x_1^2} + \frac{\alpha}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\alpha^2}{x_1^2} =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{2\alpha}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \cancel{\frac{\alpha(\alpha-1)}{x_1^2}}$$

$$\alpha = 0; 1$$

$$x_1^{-\alpha} x_2^{-\beta} x_3^{-\gamma} \Delta x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma} = \Delta + \left(\frac{2\alpha}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{2\beta}{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{2\gamma}{x_3}\frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

$$x_1^{-\alpha} x_2^{-\beta} x_3^{-\gamma}\left(\frac{x_1}{a^2}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{x_2}{b^2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{x_3}{c^2}\frac{\partial}{\partial x_3}\right) x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma} =$$

$$= \frac{x_1}{a^2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\alpha}{x_1}\right) + \frac{x_2}{b^2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\beta}{x_2}\right) + \frac{x_3}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\gamma}{x_3}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\omega^2}{c_0^2}\tilde{\rho} = -\rho_0\left[\Delta + \frac{2\alpha}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{2\beta}{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{2\gamma}{x_3}\frac{\partial}{\partial x_3}\right]\tilde{\rho} + \\ + 2\left(\frac{x_1}{a^2}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{x_2}{b^2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{x_3}{c^2}\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\tilde{\rho} + \left(\frac{2\alpha}{a^2} + \frac{2\beta}{b^2} + \frac{2\gamma}{c^2}\right)\tilde{\rho}\end{aligned}}$$

VIII. előadás

$\tilde{\rho} = 1$ megoldás

általános móduszokat generál

$\Delta\tilde{\rho}$ akarjuk számítani

$$\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial \rho_i}\rho_i = \tilde{\rho}$$

$$\frac{\partial^2\tilde{\rho}}{\partial \rho_i \partial \rho_j} = 0, \text{ ha } i = j$$

$$\Delta\tilde{\rho} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\tilde{\rho} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial \rho_i}\frac{(-2x_1)}{a^2+\Theta_i}\right) +$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial \rho_i}\frac{(-2x_2)}{b^2+\Theta_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial \rho_i}\frac{(-2x_3)}{c^2+\Theta_i}\right) =$$

$$= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial \rho_i \partial \rho_j}\left(\frac{4x_1^2}{(a^2+\Theta_i)(a^2+\Theta_j)} + \frac{4x_2^2}{(b^2+\Theta_i)(b^2+\Theta_j)} + \frac{4x_3^2}{(c^2+\Theta_i)(c^2+\Theta_j)}\right) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial l_i}\left(\frac{-2}{a^2+\theta_i}+\frac{-2}{b^2+\theta_i}+\frac{-2}{c^2+\theta_i}\right)=\circledast$$

$$\Rightarrow\sum_{\substack{i=1\\ j=1\\ i\neq j}}\frac{\partial^2\tilde{f}}{\partial l_i\partial l_j}\frac{1}{\theta_j-\theta_i}\left\{\left(1-\frac{x_1^2}{a^2+\theta_j}-\frac{x_2^2}{b^2+\theta_j}-\frac{x_3^2}{c^2+\theta_j}\right)-\left(1-\frac{x_1^2}{a^2+\theta_i}-\frac{x_2^2}{b^2+\theta_i}-\frac{x_3^2}{c^2+\theta_i}\right)\right\}=\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\frac{\partial^2\tilde{f}}{\partial l_i\partial l_j}\frac{1}{\theta_j-\theta_i}(l_j-l_i)=$$

$$=4\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial l_i}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{1}{\theta_j-\theta_i}-4\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial l_j}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{1}{\theta_j-\theta_i}=$$

$$=-8\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial l_i}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{1}{\theta_i-\theta_j}$$

$\circledast$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial l_i}\left(\frac{2}{a^2+\theta_i}+\frac{2}{b^2+\theta_i}+\frac{2}{c^2+\theta_i}+\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{8}{\theta_i-\theta_j}\right)=\Delta\tilde{f}$$

$$\frac{2\alpha}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{2\beta}{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{2\gamma}{x_3}\frac{\partial}{\partial x_3}=\frac{2\alpha}{x_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial l_i}\frac{(-2x_1)}{a^2+\theta_i}+\frac{2\beta}{x_2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial l_i}\frac{-2x_2}{b^2+\theta_i}+\frac{2\gamma}{x_3}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial l_i}\frac{(-2x_3)}{c^2+\theta_i}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial l_i}\left(\frac{4\alpha}{a^2+\theta_i}+\frac{4\beta}{b^2+\theta_i}+\frac{4\gamma}{c^2+\theta_i}\right)$$

$$\left(\frac{2x_1}{a^2}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{2x_2}{b^2}\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{2x_3}{c^2}\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\tilde{f}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial l_i}\left(\frac{4x_1^2}{a^2(a^2+\theta_i)}+\frac{4x_2^2}{b^2(b^2+\theta_i)}+\frac{4x_3^2}{c^2(c^2+\theta_i)}\right)=-4\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial l_i}\left[\underbrace{\left(1-\frac{x_1^2}{a^2+\theta_i}-\frac{x_2^2}{b^2+\theta_i}-\frac{x_3^2}{c^2+\theta_i}\right)}_{l_i}-\underbrace{\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}\right)}_{l_0}\right]\frac{1}{\theta_i}$$

$$= -4\tilde{f}\sum_i \frac{1}{\Theta_i} + f_0 \sum_i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial l_i}\frac{4}{\Theta_i}$$

$$\frac{\omega^2}{c_0^2}\tilde{f} = \left[\frac{2\alpha}{a^2} + \frac{2\beta}{b^2} + \frac{2\gamma}{c^2} - \sum_{i=1}^{n}\frac{4}{\Theta_i}\right]\tilde{f} + f_0 \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial l_i}\left[\frac{4}{\Theta_i} + p\left(\frac{4\alpha+2}{a^2+\Theta_i} + \frac{4\beta+2}{b^2+\Theta_i}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{4\gamma+2}{c^2+\Theta_i}\right) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{8}{\Theta_i-\Theta_j}\right]$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{2\alpha}{a^2} + \frac{2\beta}{b^2} + \frac{2\gamma}{c^2} - \sum_{i=1}^{n}\frac{4}{\Theta_i}$$ gerjesztési frekvenciák, ha

a Θ_i-k kielégítik a

$$\frac{1}{p}\frac{4}{\Theta_i} + \frac{4\alpha+2}{a^2+\Theta_i} + \frac{4\beta+2}{b^2+\Theta_i} + \frac{4\gamma+2}{c^2+\Theta_i} + \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{8}{\Theta_i-\Theta_j} = 0$$

Legyen a továbbiakban $p=1$

de ha $p\neq 1$ hasonlóan kell csinálni

Megjegyzések

1. Biz, hogy $\forall \{\Theta_i\}_{i=1}^{n}$, valós, negatív
2. Θ_i-k permutációja nem vezet fizikailag különböző megoldásra
3. Θ_i-k rendezhetjük

Spec megoldások

$n = 0$

$$\omega = c_0\sqrt{\frac{2\alpha}{a^2} + \frac{2\beta}{b^2} + \frac{2\gamma}{c^2}} = \sqrt{\frac{\mu}{m}\left(\frac{2\alpha}{\frac{2\mu}{m\omega_1^2}} + \frac{2\beta}{\frac{2\mu}{m\omega_2^2}} + \frac{2\gamma}{\frac{2\mu}{m\omega_3^2}}\right)} =$$

$$\sqrt{\alpha\omega_1^2 + \beta\omega_2^2 + \gamma\omega_3^2}$$

$\omega^2 = 0$ $\quad \alpha+\beta+\gamma = 0$ ki van zárva

$\omega = \omega_1, \omega_2, \omega_3$ $\quad \alpha+\beta+\gamma = 1$ Kohn-módusok

$w^2 = w_1^2 + w_2^2,\ w_2^2 + w_3^2,\ w_3^2 + w_1^2$

$w^2 = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2$

$n = 1$

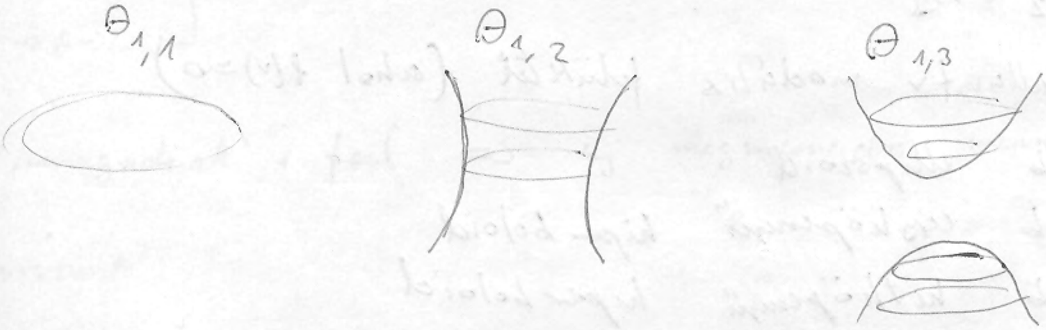
$$\frac{1}{p}\frac{4}{\Theta_1} + \frac{4\alpha+2}{a^2+\Theta_1} + \frac{4\beta+2}{b^2+\Theta_1} + \frac{4\gamma+2}{c^2+\Theta_1} = 0$$

közös nevező $\rightarrow$ $\dfrac{\text{köbös}}{\text{negyedfokú}} = 0$ $\Rightarrow$ köbös egyenlet Θ_1-re

állítás: ennek 3 valós megoldása van

Tfh $a > b > c > 0$

$$-a^2 \le \Theta_{1,3} \le -b^2 \le \Theta_{1,2} \le -c^2 \le \Theta_{1,1} \le 0$$



ρ modális felületei (ahol $\rho = 0$)

Létezik olyan $V(\underline{\Theta})$ potenciál melyre

$$-\frac{\partial V}{\partial \Theta_i} = 8G_i(\Theta_i)$$

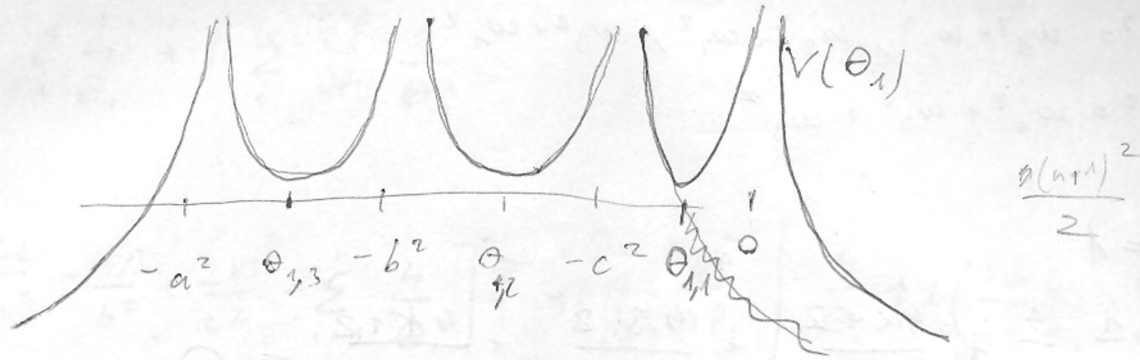
$$-\frac{1}{2p}\sum_{i=1}^{n} \ln\Theta_i - \left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\sum_{i=1}^{n} \ln|a^2+\Theta_i| - \left(\beta+\frac{1}{2}\right)\sum_{i=1}^{n} \ln|b^2+\Theta_i| - \left(\gamma+\frac{1}{2}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \ln|c^2+\Theta_i| - \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} \ln|\Theta_i-\Theta_j|$$

$\Theta_i = 0$, $\Theta_i = -a, -b, -c$ esetekben előáll

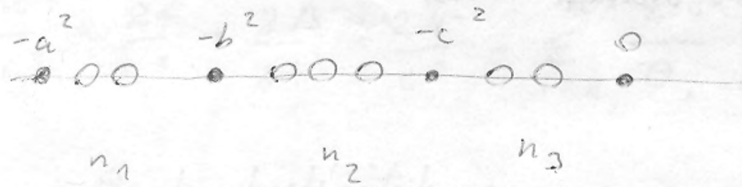
Spec

$n=1$



interpretálhatjuk mint töltések

IX. előadás



$n = n_1 + n_2 + n_3$

A teljes hullámfv modális felületei (ahol $f(r)=0$)

n_1 db ellipszoid

n_2 db egyköpenyű hiperboloid

n_3 db kétköpenyű hiperboloid

α, β, γ, n_1, n_2, n_3 a probléma jó kvantumszámai

adott n esetén $\binom{n+2}{2}$

$$G_i(\theta) = \frac{4}{p}\frac{1}{\theta_i} + \frac{4\alpha+2}{a^2+\theta_i} + \frac{4\beta+2}{b^2+\theta_i} + \frac{4\gamma+2}{c^2+\theta_i} + \sum_{i \neq j} \frac{8}{\theta_i - \theta_j}$$

$G_i(\underline{\theta}) = 0 \qquad i = 1, \dots n$

Módszer stabilizált Newton-módszer

kezdő konfiguráció:

egyenletesen rakok le n_1, n_2, n_3-at a lyukakba

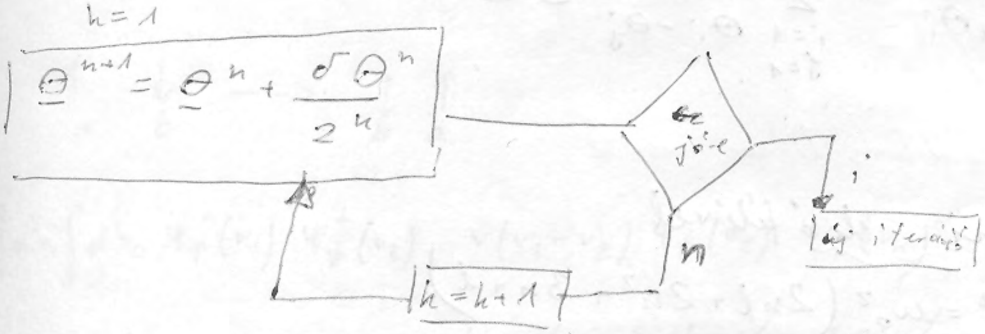
$\underline{\theta}^{(n+1)} = \underline{\theta}^{(n)} + \lambda \sigma \theta^{(n)}$

$$0 = G_i(\underline{\Theta}^{(n+1)}) \cong G_i(\underline{\Theta}^{n}) + \sum \frac{\partial G_i}{\partial \Theta_j}(\Theta^{(n)})\,\delta\Theta_j^{(n)}$$

$$\underline{\underline{\left(\frac{\partial G}{\partial \Theta_j}\right)}}\,\delta\underline{\Theta}^{(n)} = -G(\Theta^n)$$

lineáris egyenletrendszerként megoldani

Ha nem jó a megoldás, akkor $\frac{\lambda}{2}$-t veszek, amíg jó nem lesz.



$a \to b$
vagy $b \to c$ } magasabb szimmetriájú problémák
$a \to b \to c$

"beragadnak" + fal $\Rightarrow$ új megmaradó mennyiségek

viszont

új ansatz

a) hengerszimmetrikus

$$a = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_\perp^2}} \qquad b = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_z^2}}$$

$$\rho^{|m|} e^{im\phi} z^\alpha \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{\rho^2}{a^2+\Theta_i} - \frac{z^2}{b^2+\Theta_i}\right) = f(\rho, z, \phi)$$

$\to$ ennek a Laplace-a nulla

$$\omega^2 = c_0^2\left(\frac{2|m|}{a^2} + \frac{2\alpha}{b^2} - \sum_{i=1}^{n}\frac{4}{\Theta_i}\right)$$

$$G_i(\Theta) = \frac{4|m|+4}{a^2+\Theta_i} + \frac{4\alpha+2}{b^2+\Theta_i} + \frac{4}{\Theta_i} + \sum_{j=1}^{n}\frac{8}{\Theta_i - \Theta_j}$$

b) gömbszimmetrikus

$$f(r) = r^l \, \gamma_{lm}(\vartheta, \varphi) \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{r^2}{a^2 + \Theta_i}\right)$$

$$\omega^2 = c_0^2 \left(\frac{2l}{a^2} - \sum_i \frac{4}{\Theta_i}\right)$$

$$a = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_0^2}}$$

$$\frac{4}{\Theta_i} + \frac{4l+6}{a^2+\Theta_i} + \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} \frac{8}{\Theta_i - \Theta_j} = 0$$

összevetni első félével

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(2nl + 2n^2 + 3n + l\right)$$

dimenziótlanítani $\qquad a^2 \tilde{\Theta}_i = \Theta_i$

$$r = \tilde{r} a$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(l - \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{\tilde{\Theta}_i}\right)$$

$$\frac{4}{\tilde{\Theta}_i} + \frac{4l+6}{1+\tilde{\Theta}_i} + \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{8}{\tilde{\Theta}_i - \tilde{\Theta}_j} = 0$$

Ha hipergeometrikus kell pontosan, akkor $\tilde{\Theta}_i$-ken kísérül számoljuk!

X. előadás

Feshbach-rezonancia

- elérhetővé teszi a BCS állapotot
- E_n nagyságrendű

Bozonoknál nem érdekes, mert $a < 0$ alig van kondenzátum

Kölcsönható Fermi-gáz

$$H = \sum_{\sigma = \pm} \int d^3r \; \Psi_\sigma^+(r) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} - \mu_\sigma + V_0(r)\right] \Psi_\sigma(\vec{r}) +$$

azonos spinek nem szóródnak egymáson

$\uparrow\uparrow$

$$\Phi_r(r_1,r_2)\,\chi^3(s_1,s_2)$$

antiszimm $\quad$ szimm

$\longrightarrow$ nem érzi Dirac-deltát

s hullámú szórást nézünk

$$\underset{a}{\uparrow}\ \underset{b}{\downarrow} \longrightarrow \underset{b}{\downarrow}\ \underset{a}{\uparrow}$$

$$+\int d^3r_1\int d^3r_2\ \Psi^+_\uparrow(r_1)\ \Psi^+_\downarrow(r_2)\quad v(r_1-r_2)\ \Psi_\downarrow(r_2)\ \Psi_\uparrow(r_1)$$

eldobom azt a tagot, melyeil spint váltanak

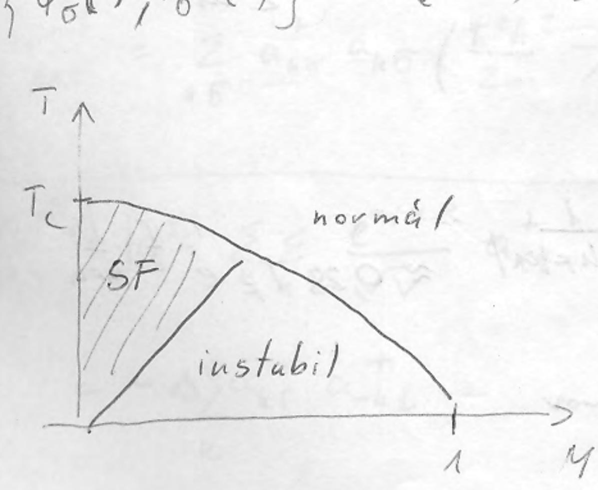
két hiper finom szintet jelölök $\uparrow$ és $\downarrow$-lel, ezekhez nem tartozik valódi mágneses momentum.

elektronoknál $\quad -\frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L}+2\vec{S})\vec{B}$ $\quad$ ilyen itt nincs

$$N_\sigma = \int d^3r\ \Psi^+_\sigma(r)\ \Psi_\sigma(r)$$

RF térrel lehet a kettőt különböző módon populálni.

$$\{\Psi_\sigma(r), \Psi^+_{\sigma'}(r')\} = \delta(r-r')\,\delta_{\sigma\sigma'}$$



$$M = \frac{N_\uparrow - N_\downarrow}{N_\uparrow + N_\downarrow}$$

~~akkor~~ ha a többségnek nincs párja, akkor szétveri a Cooper-párokat.

Mostantól

$N_\uparrow = N_\downarrow$

$\mu_\uparrow = \mu_\downarrow = \mu \qquad V_{\uparrow ext} = V_{\downarrow ext} = 0$

$n = 2n_\uparrow = 2n_\downarrow$

$k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$

definíció

itt nincs éles Fermi-felület, de ezzel definiálunk karakterisztikus távolságot

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = k_B T_F$$

R^* potenciál karakterisztikus mérete

$$R^* < k_F^{-1}$$

$\hookrightarrow$ átlagos részecsketávolság

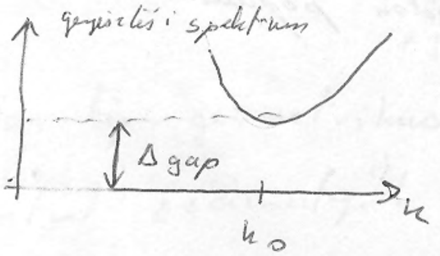
T_c alatt

$$F(\vec{R},\vec{s}) = \langle \Psi_\downarrow(\overbrace{\vec{R}+\tfrac{\vec{s}}{2}}^{\vec{r}_1}) \Psi_\uparrow(\overbrace{\vec{R}-\tfrac{\vec{s}}{2}}^{\vec{r}_2}) \rangle =$$ tipikus viselkedés

$$= \frac{m}{4\pi\hbar^2} \Delta(\vec{R}) \left[\frac{1}{|s|} - \frac{1}{a}\right] + \mathcal{O}(s)$$

$\downarrow$

ez a rendparaméter ("gap")



$$\epsilon(k) = \Delta_{gap} + \frac{\hbar^2 (k-k_0)^2}{2m^*}$$

$$T_c = \left(\frac{2}{e}\right)^{7/3} \frac{\gamma}{\pi} T_F \, e^{-\frac{\pi}{2}\frac{1}{k_F|a|}} \approx 0{,}28\, T_F\, e^{-\frac{\pi}{2}\frac{1}{k_F a}}$$

1961 Melik-Barkhudarov

$$\Delta_{gap} = \frac{\pi}{\gamma} k_B T_c = 1{,}76\, k_B T_c$$

$$\frac{E_S}{N} = \frac{E_N}{N} - \frac{3}{8} \frac{\Delta_{gap}^2}{E_F}$$

$$\Delta_{gap} = k_B T_c \left[\frac{8\pi^2}{7\zeta(3)} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{1/2} \right] \qquad T \approx T_c$$

BEC – BCS crossover a mean – field modellben

$$H_{BCS}^{mf} = \sum_\sigma \int d^3r \, \Psi_\sigma^+(r) \left(-\frac{\hbar^2 \Delta}{2m} - \mu \right) \Psi_\sigma(r) +$$

$$d^3r_1 \, d^3r_2 = d^3R \, d^3s$$

$d^3R \downarrow$ TK, $d^3s \downarrow$ relatív

$$\int d^3R \int d^3s \; v(s) \, \Psi_\uparrow^+\!\left(R + \frac{s}{2}\right) \Psi_\downarrow^+\!\left(R - \frac{s}{2}\right) \Psi_\downarrow\!\left(R - \frac{s}{2}\right) \Psi_\uparrow\!\left(R + \frac{s}{2}\right)$$

$$\Delta(R) = -\int d^3s \; v(s) \left\langle \Psi_\downarrow\!\left(R - \frac{s}{2}\right) \Psi_\uparrow\!\left(R + \frac{s}{2}\right) \right\rangle$$

Hamdinh égbe világba.

$$H_{BCS}^{mf} = \sum_\sigma \int d^3r \, \Psi_\sigma^+(r) \left(-\frac{\hbar^2 \Delta}{2m} - \mu \right) \Psi_\sigma(r) - \underbrace{\int d^3R \, \Delta(R) \, \Psi_\uparrow^+(R) \, \Psi_\downarrow^+(R) + \cancel{hc}}$$

$$- \int d^3R \, \Delta(R) \left[\Psi_\uparrow^+(R) \, \Psi_\downarrow^+(R) - \frac{1}{2} \langle \Psi_\uparrow^+(R) \cdot \Psi_\downarrow^+(R) \rangle \right] + hc$$

$$\Psi_\sigma(r) = \sum_k \frac{e^{ikr}}{\sqrt{V}} a_{k\sigma}$$

$$\boxed{H_{BCS}^{mf} = \sum_{k\sigma} a_{k\sigma}^+ a_{k\sigma} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu \right) - \sum_k \Delta \left[a_{k\uparrow}^+ a_{-k\downarrow}^+ - \frac{1}{2} \langle a_{k\uparrow}^+ a_{-k\downarrow}^+ \rangle \right] - \sum_k \Delta \left[a_{-k\downarrow} a_{+k\uparrow} - \frac{1}{2} \langle a_{-k\downarrow} a_{k\uparrow} \rangle \right]}$$

$$-\Delta \int d^3R \sum_k \sum_{k'} \frac{e^{-ikR}}{\sqrt{V}} a_{k\uparrow}^+ \frac{e^{-ik'R}}{\sqrt{V}} a_{k'\downarrow}^+ = -\Delta \sum_k \sum_{k'} \delta_{k,-k'} \, a_{k\uparrow}^+ a_{k'\downarrow}^+ =$$

$$= -\Delta \sum_k a_{k\uparrow}^+ a_{-k\downarrow}^+$$

$$\{ a_{k\sigma}, a_{k'\sigma'}^+ \} = \delta_{kk'} \delta_{\sigma\sigma'}$$

~~$a_{k\uparrow}$~~

Kanonikus transzformáció

$$a_{\vec{k}\uparrow} = u_k \alpha_{\vec{k}} + v_k \beta^+_{-\vec{k}}$$

$$a_{-\vec{k}\downarrow} = -v_k \alpha_{\vec{k}} + u_k \beta^+_{-\vec{k}}$$

u_k, v_k valós

α_k és β_k öriveik kanonikus antikommutátorok

$$a^+_{k\uparrow} = u_k \alpha_k^+ + v_k \beta_{-k}$$

$$1 = \{a_{\vec{k}\uparrow}, a^+_{k\uparrow}\} = u_k^2 + v_k^2$$

$$a^+_{-k\downarrow} = -v_k \alpha_k^+ + u_k \beta_{-k}$$

Cél: $H = \sum_k E_k (\alpha_k^+ \alpha_k + \beta_k^+ \beta_k)$

XI. előadás

$$H' = \sum_k \eta_k (a^+_{k\uparrow} a_{k\uparrow} + a^+_{k\downarrow} a_{k\downarrow}) - \sum_k \Delta (a^+_{k\uparrow} a^+_{-k\downarrow} + a_{-k\downarrow} a_{k\uparrow})$$

$$a_{\vec{k}\uparrow} = u_k \alpha_{\vec{k}} + v_k \beta^+_{-\vec{k}} \qquad a_{-k\downarrow} = -v_k \alpha_k^+ + u_k \beta_{-k}$$

$$a^+_{-k\downarrow} = -v_k \alpha_{\vec{k}} + u_k \beta^+_{-k} \qquad a^+_{k\uparrow} = u_k \alpha_k^+ + v_k \beta_{-k}$$

$$\sum_k \Big[\eta_k (u_k \alpha_k^+ + v_k \beta_{-k})(u_k \alpha_k + v_k \beta^+_{-k}) + \eta_k (-v_k \alpha_k + u_k \beta^+_{-k})$$
$$(-v_k \alpha_k^+ + u_k \beta_{-k}) - \Delta (u_k \alpha_k^+ + v_k \beta_{-k})(-v_k \alpha_k + v_k \beta_k^+) -$$
$$\Delta (-v_k \alpha_k^+ + u_k \beta_{-k})(u_k \alpha_k + v_k \beta^+_{-k}) \Big] =$$

$$\sum_k \alpha_k^+ \alpha_k (\eta_k u_k^2 - \eta_k v_k^2 + 2\Delta u_k v_k)$$

$$\sum_k \beta_{-k}^+ \beta_{-k} (-\eta_k v_k^2 + \eta_k u_k^2 + 2\Delta v_k u_k)$$

$$\sum_k \alpha_k \beta_{-k} (-2\eta_k u_k v_k - v_k^2 \Delta + u_k^2 \Delta)$$

$$\sum_k \alpha_k^+ \beta^+_{-k} (2\eta_k u_k v_k - u_k^2 \Delta + v_k^2 \Delta)$$

cserélgetem az operátorokat, a levonandó várható értékes tag úgyis kiöli.

$$2\eta_k u_k v_k = \Delta(u_k^2 - v_k^2)$$

Legyen $\begin{pmatrix} \eta_k & \Delta \\ \Delta & -\eta_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = E_k \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}$ $\qquad u_k^2 + v_k^2 = 1$

$$E_k^2 - \eta_k^2 - \Delta^2 = 0$$

$$E_k = \sqrt{\eta_k^2 + \Delta^2}$$

$$(\eta_k - E_k)u_k + \Delta v_k = 0$$

$$\frac{\eta_k - E_k}{\Delta} = -\frac{v_k}{u_k} \qquad u_k = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\eta_k}{E_k}\right)}$$

$$v_k = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\eta_k}{E_k}\right)}$$

$$-\frac{v_k}{u_k} = -\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\eta_k}{E_k}\right)}}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\eta_k}{E_k}\right)}} = -\sqrt{\frac{E_k-\eta_k}{E_k+\eta_k}} \cdot \frac{\sqrt{E_k-\eta_k}}{\sqrt{E_k-\eta_k}} = -\frac{E_k-\eta_k}{\sqrt{E_k^2-\eta_k^2}} = -\frac{E_k-\eta_k}{\Delta}$$

$$u_k v_k = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{\eta_k^2}{E_k^2}} = \frac{1}{2}\frac{\Delta}{E_k}$$

$$u_k^2 - v_k^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\eta_k^2}{E_k^2}\right)} \cdot 2 = \frac{\eta_k}{E_k} \qquad \frac{2\eta_k\Delta}{2E_k} = \frac{\eta_k\Delta}{E_k}$$

$$\eta_k(u_k^2 - v_k^2) + 2\Delta u_k v_k = \frac{\eta_k^2}{E_k} + \frac{\Delta^2}{E_k} = E_k$$

$$H' = \sum_k E_k(\alpha_k^+\alpha_k + \beta_k^+\beta_k)$$

Alapállapot olyan, hogy

$$\alpha_k|\Psi_{BCS}\rangle = 0$$

$$\beta_k|\Psi_{BCS}\rangle = 0$$

$$\prod_k (u_k^* + v_k^* a_{k\uparrow}^+ a_{-k\downarrow}^+)|0\rangle = |\Psi_{BCS}\rangle$$

$$\alpha_k = u_k a_{k\uparrow} - v_k a_{-k\downarrow}^+ \qquad \beta_{-k}^+ = v_k a_{k\uparrow} + u_k a_{-k\downarrow}^+$$

$$\alpha_k|\Psi_{BCS}\rangle = \prod_{\substack{l \\ l\neq k}} \left(u_l^* + v_l^* a_{l\uparrow}^+ a_{-l\downarrow}^+\right) \underbrace{\left(u_k a_{k\uparrow} - v_k a_{-k\downarrow}^+\right)\left(u_k^* + v_k^* a_{k\uparrow}^+ a_{-k\downarrow}^+\right)}$$

$|0\rangle$

$$\cancel{u_k^3 a_{k\uparrow} - v_k u_k^2}$$

$$\left(\cancel{u_k^2 a_{k\uparrow}} - u_k v_k a_{-k\downarrow}^+ + u_k v_k \underbrace{a_{k\uparrow} a_{k\uparrow}^+}_{1-a_{k\uparrow}^+ a_{k\downarrow}} a_{-k\downarrow}^+ \cancel{- v_k^2 a_{-k\downarrow}^+ a_{k\uparrow}^+ a_{-k\downarrow}^+}\right)|0\rangle$$

$$= \left(-u_k v_k a_{-k\downarrow}^+ + u_k v_k a_{-k\downarrow}^+ - u_k v_k a_{k\uparrow}^+ a_{k\uparrow} a_{-k\downarrow}^+\right)|0\rangle = \emptyset$$

hasonlóan

$$\beta_k|\Psi_{BCS}\rangle = \emptyset$$

sűrűség

$$n_\uparrow = \frac{1}{V}\sum_k \cancel{a_{k\uparrow}^+ a} \langle\Psi_{BCS}| a_{k\uparrow}^+ a_{k\uparrow} |\Psi_{BCS}\rangle =$$

$$= \frac{1}{V}\sum_k \langle\Psi_{BCS}|\left(u_k\alpha_k^+ + v_k\beta_{-k}\right)\left(u_k\alpha_k + v_k\beta_{-k}^+\right)|\Psi_{BCS}\rangle = \frac{1}{V}\sum_k v_k^2 =$$

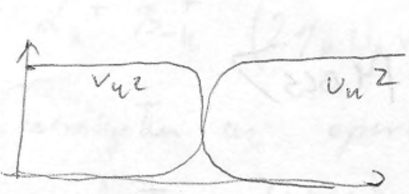
$$= \frac{1}{V}\sum_k \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\xi_k}{E_k}\right)$$

Ha $\Delta = 0$

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\xi_k}{|\xi_k|}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\frac{\hbar^2k^2}{2m}-\mu}{\left|\frac{\hbar^2k^2}{2m}-\mu\right|}\right) \begin{cases} 1 & \frac{\hbar^2k^2}{2m} < \mu \\ 0 & \frac{\hbar^2k^2}{2m} > \mu \end{cases}$$

$$v_k = \Theta\left(\mu - \frac{\hbar^2k^2}{2m}\right)$$

$T=0 \quad \Delta\neq 0$



XII. előadás

$$\boxed{n_\uparrow = \frac{1}{2V}\sum_k\left(1-\frac{\frac{\hbar^2k^2}{2m}-\mu}{\sqrt{\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}-\mu\right)^2+\Delta^2}}\right)}$$

$$F(\vec{R},\vec{s}) = \left\langle \Psi_\downarrow\left(\vec{R}+\frac{\vec{s}}{2}\right)\Psi_\uparrow\left(\vec{R}-\frac{\vec{s}}{2}\right)\right\rangle$$ anomális várható érték

$$\sim \frac{m}{4\pi\hbar^2}\Delta(\vec{R})\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{a}\right)+\mathcal{O}(s^2)$$

gap – rendparaméter

$$\Psi_\uparrow(r) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k e^{ikr}a_{k\uparrow}$$

$$\Psi_\downarrow(r) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k e^{-ikr}a_{-k\downarrow}$$

$$F(\vec{R},\vec{s}) = \frac{1}{V}\sum_{k,k'} e^{i\vec{k}\left(\vec{R}+\frac{s}{2}\right)} e^{-ik'\left(\vec{R}-\frac{s}{2}\right)} \langle a_{-k\downarrow}a_{+k'\uparrow}\rangle$$

alapállapoti várható érték, nem termikus

$$|\Psi_{BCS}\rangle = \prod_k\left(u_k+v_k a^+_{k\uparrow}a^+_{-k\downarrow}\right)|0\rangle$$

$$a_{k\uparrow} = u_k\alpha_k + v_k\beta^+_{-k}$$

$$a_{-k\downarrow} = -v_k\alpha_k^+ + u_k\beta_{-k}$$

$$\langle a_{-k\downarrow}a_{+k'\uparrow}\rangle = +u_kv_{k'}\langle \cancel{\beta_{-k}\beta_{k'}^+}\rangle = u_kv_{k'}\langle\underbrace{\beta_{-k}\beta^+_{-k'}}_{\delta_{kk'}-\beta^+_{-k'}\beta_{-k}}\rangle = u_kv_k\delta_{kk'}$$

$$F(\vec{R},\vec{s}) = \frac{1}{V}\sum_k e^{-i\vec{k}\vec{s}}\,u_kv_k$$

$$u_kv_k = \frac{\Delta}{2E_k} \qquad E_k = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}-\mu\right)^2+\Delta^2}$$

$$\sum_k = \frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k$$

$$F(\vec{R},\vec{s}) = \frac{\Delta}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\vec{k}\vec{s}}}{E_k}$$

$$\boxed{\frac{1}{4\pi s} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}\vec{s}}}{k^2}} \qquad \propto \frac{m\Delta}{\hbar^2}$$

$$F(R,s) - \frac{m\Delta}{4\pi\hbar^2 s} = \frac{\Delta}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{s}}\left(\frac{1}{\epsilon_k} - \frac{2m}{\hbar^2k^2}\right)$$

$$\lim_{s\to 0}\left[F(R,s) - \frac{m\Delta}{4\pi\hbar^2 s}\right] = -\frac{m\Delta}{4\pi\hbar^2 a}$$

$$\lim_{s\to 0}\left[\frac{\Delta}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{iks}\left(\frac{1}{\epsilon_k} - \frac{2m}{\hbar^2k^2}\right)\right] = \frac{\Delta}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(\frac{1}{\epsilon_k} - \frac{2m}{\hbar^2k^2}\right) =$$

$$= -\frac{m\Delta}{4\pi\hbar^2 a}$$

$\Downarrow$

gapegyenlet

$$\boxed{-\frac{m}{4\pi\hbar^2 a} = \frac{1}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(\frac{1}{\epsilon_k} - \frac{2m}{\hbar^2k^2}\right)}$$

Leggett 1980

Schmitt-Rink

Noziéres

$$n = \frac{1}{2\pi}\int\frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3}\left(1 - \frac{\frac{\hbar^2k^2}{2m} - \mu}{\sqrt{\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m} - \mu\right)^2 + \Delta^2}}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}\left(1 - \frac{\frac{p^2}{2m} - \mu}{\sqrt{\quad}}\right)$$

$$\frac{p^2}{2m\mu} = x^2 \qquad t = \frac{\Delta}{\mu}$$

$$n = \frac{1}{4\pi^2\hbar^3}\cdot(2m\mu)^{3/2}\int_0^\infty x^2dx\left(1 - \frac{x^2-1}{\sqrt{(x^2-1)^2+t^2}}\right) \qquad \mu > 0$$

$$n = \frac{1}{4\pi^2\hbar^3}(2m\mu)^{3/2}\, I_2\left(\frac{\Delta}{\mu}\right) \qquad I_2(t) = \int_0^\infty dx\, x^2\left(1 - \frac{x^2-1}{\sqrt{(x^2-1)^2+t^2}}\right)$$

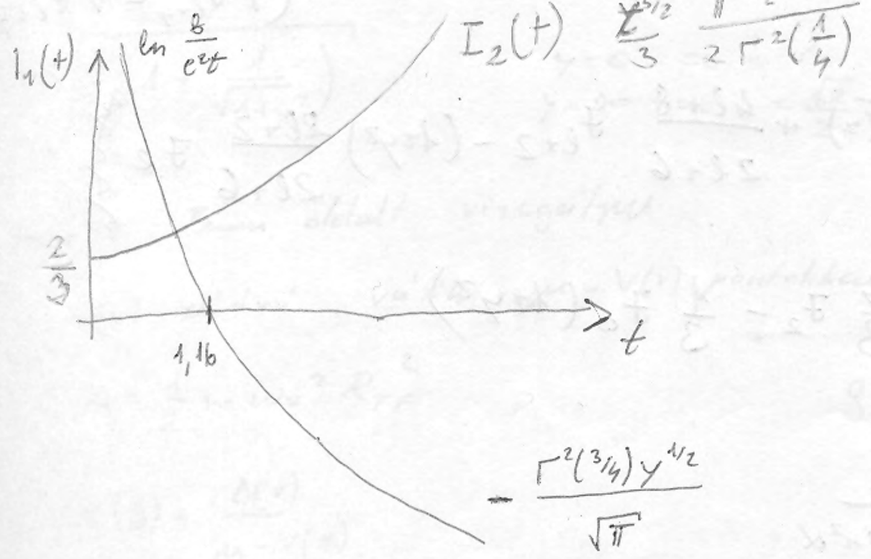
$a<0$ gap-egyenlet

$$\frac{1}{|g|} = \frac{1}{2}\frac{4\pi}{(2\pi)^3\hbar^3}\int_0^\infty p^2 dp\left[\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{p^2}{2m}-\mu\right)^2+\Delta^2}} - \frac{2m}{p^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{(2m\mu)^{3/2}}{\hbar^3}\int_0^\infty x^2 dx\left(\frac{1}{\sqrt{\mu^2(x^2-1)^2+\mu^2 t^2}} - \frac{1}{\mu x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{(2m)^{3/2}\mu^{1/2}}{\hbar^3} I_1\left(\frac{\Delta}{\mu}\right)$$

$$I_1(t) = \int_0^\infty x^2 dx\left(\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^2+t^2}} - \frac{1}{x^2}\right)$$



Csapdában

$$\left.\begin{aligned} n(\vec r) &= \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{2m(\mu-V(r))}{\hbar^2}\right)^{3/2} I_2\left(\frac{\Delta(r)}{\mu-V(r)}\right) \\ \frac{1}{|g|} &= \frac{(2m)^{3/2}}{4\pi\hbar^3}\sqrt{\mu-V(r)}\; I_1\left(\frac{\Delta(r)}{\mu-V(r)}\right)\end{aligned}\right\} \text{ ha } \mu - V(r) > 0$$

$$N = 2\int n(r)\, d^3 r$$

Azonosság

$$F(z) = (z^2-1)^2 + y^2 = z^4 - 2z^2 + y^2 + 1$$

$$J_\ell = \int \frac{z^\ell}{\sqrt{F(z)}}\, dz$$

$$\frac{z^4-2z^2+1+y^2}{\sqrt{F(z)}} = \sqrt{F(z)} \qquad / \cdot z^l$$

$$\mathcal{J}_{l+4} - 2\mathcal{J}_{l+2} + \mathcal{J}_l(1+y^2) = \underbrace{\int z^l \sqrt{F(z)}\, dz}$$

$$\frac{z^{l+1}}{l+1}\sqrt{F(z)} - \int \frac{z^{l+1}}{l+1} \frac{\overset{4z^3-4z}{(F'(z))}}{2\sqrt{F(z)}} =$$

$$= \frac{z^{l+1}}{l+1}\sqrt{F(z)} - \frac{1}{2(l+1)} \cancel{\mathcal{J}_{l+1}}$$

$$(4\mathcal{J}_{l+4} - 4\mathcal{J}_{l+2})$$

$$\mathcal{J}_{l+4} = \frac{2}{(2l+6)}\left\{ z^{l+1}\sqrt{F(z)} + \frac{4l+8}{2l+6}\mathcal{J}_{l+2} - (1+y^2)\frac{2l+2}{2l+6}\mathcal{J}_l \right\}$$

$$\boxed{\mathcal{J}_4 = \frac{1}{3} z\sqrt{F(z)} + \frac{4}{3}\mathcal{J}_2 - \frac{1}{3}\mathcal{J}_0(1+y^2)}$$

$$F(k,\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}$$

teljes elliptikus integrál $\varphi = \frac{\pi}{2}$

elsőfajú

$$E(k,\varphi) = \int_0^{\varphi} d\alpha \sqrt{1-k^2\sin^2\alpha} \Leftarrow$$ teljes másodfajú ha $\varphi = \frac{\pi}{2}$

XIII. előadás

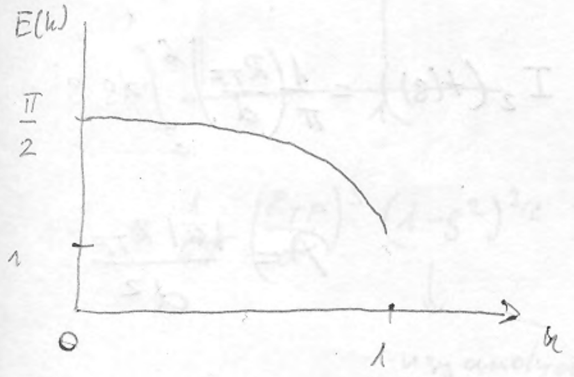
$$n_\uparrow(r) = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{2m(\mu - V(r))}{\hbar^2}\right)^{3/2} I_2\left(\frac{\Delta(r)}{\mu - V(r)}\right) \qquad |g| = \frac{4\pi\hbar^2|a|}{m}$$

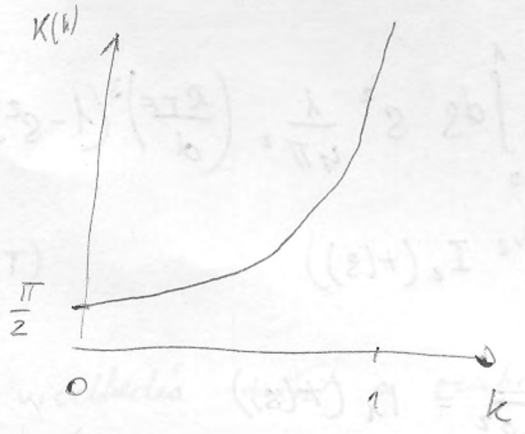
$$1 = \frac{1}{4\pi^2}\frac{g}{\hbar^3}\frac{(2m(\mu - V(r)))^{3/2}}{\mu - V(r)} I_1\left(\frac{\Delta(r)}{\mu - V(r)}\right)$$

$$\int d^3r\, n_\uparrow(r) = \frac{N}{2}$$

$$V(r) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2$$

a homogén $\frac{1}{k_F \cdot a}$ helyett $\frac{1}{\frac{a}{d} \cdot N^{1/6}}$ lép fel





$$k = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right)}$$

$y = 0 \Rightarrow k = 1$

$y = \infty \Rightarrow k = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$a \lesssim 0$ Fermi oldalt vizsgáljuk

$n(r)$ zéróvá válik $\mu = V(r)$ pontokban

$$\mu = \frac{1}{2} m \omega_0^2 R_{TF}^2 \qquad \varrho = \frac{r}{R_{TF}} \in [0,1]$$

$$t(\varrho) = \frac{\Delta(r)}{\mu - V(r)}$$

$$n_\uparrow(r) d^3 = \frac{d^3}{4\pi^2}\left(\frac{2m\mu}{\hbar^2}\right)^{3/2}\left(1 - \frac{V(r)}{\mu}\right)^{3/2} I_2(t(\varrho)) =$$

$$\frac{d^3}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{2} m \omega_0^2 R_{TF}\right)^{3/2}(1-\varrho^2)^{3/2} I_2(t(\varrho)) =$$

$$\frac{d^3}{4\pi^2}\left(\frac{m\omega_0}{\hbar}\right)^3 R_{TF}^3 (1-\varrho^2)^{3/2} I_2(t(\varrho)) = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{R_{TF}}{d}\right)^3 (1-\varrho^2)^{3/2} I_2(t(\varrho))$$

$$1 = \frac{1}{4\pi^2}\frac{4\pi\hbar^2 a}{m\hbar^3}\frac{(2m\mu)^{3/2}}{\mu}\frac{(1-\varrho^2)^{3/2}}{(1-\varrho^2)} I_1(t(\varrho)) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{|a|}{m\hbar^4}\frac{\left(2m\frac{1}{2}m\omega_0^2 R_{TF}^2\right)^{3/2}}{\frac{1}{2}m\omega_0^2 R_{TF}^2}(1-\varrho^2)^{1/2} I_1(t(\varrho)) =$$

$$\frac{2}{\pi}\frac{|a| m\omega_0}{\hbar^4} R_{TF} (1-\varrho^2)^{1/2} I_1(t(\varrho))$$

$$1 = \frac{2}{\pi}\,\frac{|a| R_{TF}}{d^2}\,(1-\varsigma^2)^{1/2}\, I_1(t(\varsigma))$$

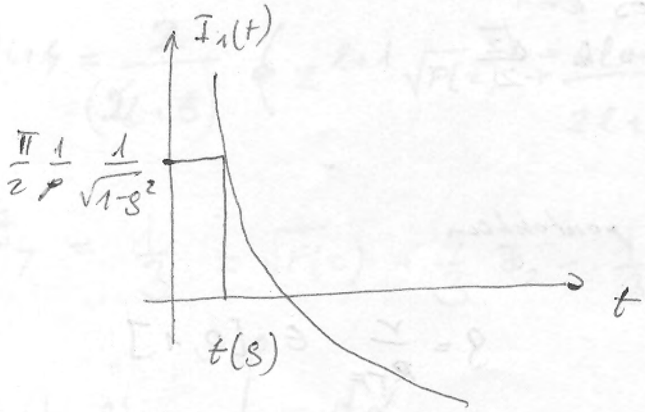
$$\frac{N}{2} = \int_{|r|<R_{TF}} d^3r\, n_1(r) = \frac{1}{d^3} R_{TF}^3 \int d^3\varsigma\, n_1(\varsigma)\, d^3 = \left(\frac{R_{TF}}{d}\right)^3 4\pi \int_0^1 \varsigma^2 d\varsigma \cdot n_1(\varsigma) d^3$$

$$= \left(\frac{R_{TF}}{d}\right)^3 4\pi \int_0^1 d\varsigma\, \varsigma^2\, \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{R_{TF}}{d}\right)^3 (1-\varsigma^2)^{3/2}\, I_2(t(\varsigma)) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{R_{TF}}{d}\right)^6 \int_0^1 d\varsigma\, \varsigma^2$$

$$(1-\varsigma^2)^{3/2}\, I_2(t(\varsigma))$$

$$p = \frac{|a| R_{TF}}{d^2}$$

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{p}\,\frac{1}{\sqrt{1-\varsigma^2}} = I_1(t(\varsigma))$$



$$t(\varsigma) \equiv t(\varsigma, p)$$

$$\frac{N}{2} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{R_{TF}}{d}\right)^6 \int_0^1 d\varsigma\, \varsigma^2 (1-\varsigma^2)^{3/2}\, I_2(t(\varsigma))$$

$$R_{TF} = \left(\frac{\pi N}{2\,G(p)}\right)^{1/6} \cdot d$$

$$\mu = \frac{1}{2} m\omega_0^2 d^2 \left(\frac{\pi}{2}\,\frac{N}{G(p)}\right)^{1/3} = \frac{\hbar\omega_0}{2}\left(\frac{\pi N}{2\,G(p)}\right)^{1/3}$$

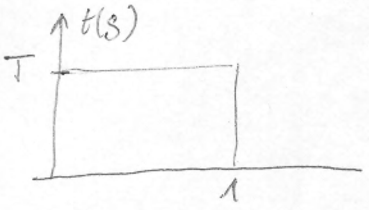
$$p = \frac{|a| R_{TF}}{d^2} = \frac{|a|}{d}\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{N}{G(p)}\right)^{1/6} \qquad \frac{d}{|a| N^{1/6}} = \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2\,G(p)}\right)^{1/6}$$

dimenziótlan kombináció

Freshbach - rezonancia

$|a| \to \infty$ akkor $\beta \to \infty$

$t(\varrho) = 1,1622 = T$



$$n_1 d^3 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{R_{TF}}{d}\right)^3 (1-\varrho^2)^{3/2}\, I_2(T)$$

↓

ugyanolyan viselkedés mint a szabad esetben

$$G(\infty) = \int_0^1 d\varrho\, \varrho^2 (1-\varrho^2)^{3/2} I_2(T) = I_2(T) \underbrace{\int_0^1 d\varrho\, \varrho^2 (1-\varrho^2)^{3/2}}_{\frac{\pi}{32}} = \frac{\pi \cdot I_2(T)}{32}$$

$$\mu = \frac{\hbar\omega_0}{2} N^{1/3} \left(\frac{16}{I_2(T)}\right)^{1/3}$$

$$R_{TF} = \left(\frac{16\, N}{I_2(T)}\right)^{1/6} d$$