A 't Hooft–Weinberg egyenlet megoldása

A továbbiakban renormált mennyiségeket használunk, de nem jelöljük.

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta\frac{\partial}{\partial g} - \gamma_m m\frac{\partial}{\partial m} - n\gamma\right]\Gamma_n(\lambda p, g, m, \mu) = 0 \qquad (*)$$

felskálázzuk az impulzust

Dimenziós analízisből:

$$\left[\Gamma_n(\lambda p, g, m, \mu)\right] = \mu^{4-n} F_n\Big(\underbrace{\frac{\lambda p}{\mu}, g, \frac{m}{\mu}}_{\text{dimenziótlan változók}}\Big)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{mi} \quad 4\text{ tér} \quad 1\ \partial^4(\ ) \\ \quad -4n + n = (-4-2n+x) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + m\frac{\partial}{\partial m} + \lambda\frac{\partial}{\partial\lambda} - 4 + n\right)\Gamma_n(\lambda p, \dots) = 0 \qquad (**)$$

$$\xrightarrow[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\Gamma\text{-t } (**)\text{-ból}]{(*)\text{-ba beírjuk}} \Big(\underbrace{-\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}}_{\frac{\partial}{\partial t}} + \beta\frac{\partial}{\partial g} - (1+\gamma_m)m\frac{\partial}{\partial m} + \underbrace{4 - n - n\gamma}_{=\omega_n}\Big)\Gamma_n(\lambda p, \dots) = 0$$

$$t = -\ln\lambda$$

Definiáljuk a futó csatolást ($\bar g(t)$), futó tömeget ($\bar m(t)$):

$$\frac{\mu}{\lambda}\frac{d\bar g(\frac{\mu}{\lambda})}{d\frac{\mu}{\lambda}} = \beta(\bar g)$$

$$\frac{\mu}{\lambda}\frac{1}{\bar m}\frac{d\bar m}{d(\frac{\mu}{\lambda})} = -1-\gamma_m$$

λ legyen a változó ill. t:

$$\frac{d\bar g}{dt} = \beta(\bar g) \quad ; \quad \frac{1}{\bar m}\frac{d\bar m}{dt} = -1-\gamma_m(\bar g)$$

$$\Rightarrow \boxed{\left[\frac{d}{dt} + \omega_n(\bar g)\right]\Gamma_n(e^{-t}p, \bar g, \bar m, \mu) = 0}$$

Ez egyvált. kétváltozós diff. egyenlet

$$\text{u.i.:} \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underbrace{\frac{d\bar g}{dt}}_{\beta}\frac{\partial}{\partial \bar g} + \underbrace{\frac{d\bar m}{dt}}_{-(1+\gamma_m)\bar m}\frac{\partial}{\partial \bar m}$$

Ut megó:

$$\Gamma_n(e^{-t}p, \bar{g}(t), \bar{m}(t), \mu) = \Gamma_n(p, g, m, \mu)\cdot$$
$$\cdot\, e^{-\int_0^t dt'\,\omega_n(\bar{g}(t'))}$$

$$\bar{g}(0) = g, \quad \bar{m}(0) = m$$

$$p \to e^t p:$$

$$\Gamma_n(\underbrace{e^t p}_{\lambda\cdot p}, g, m, \mu) = \Gamma_n(p, \bar{g}(t), \bar{m}(t), \mu)\, e^{(4-n)t - n\int_0^t \gamma(\bar{g}(t'))dt'}$$

anomális dimenzió

Megoldás viselkedése

Ha nem lenne divergencia, nem kell renormálás

$$\beta = \gamma_m = \gamma = 0$$

$$\Rightarrow \bar{g}(t) = g, \quad \bar{m}(t) = m e^{-t}:$$

$$\Gamma_n(e^t p, g, m) = (e^t)^{4-n}\,\Gamma_n(p, g, m e^{-t})$$

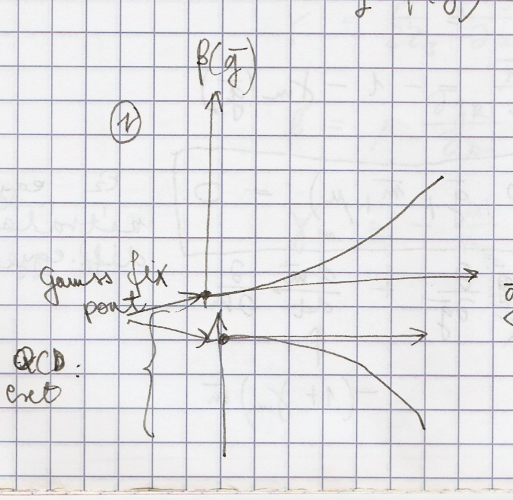
$t \to \infty$-re a naiv hatványszámolás (dim. analízis)

Ha $\boxed{m = 0}$:

$$\Gamma_n(e^t p, g, \mu) = \Gamma_n(p, \bar{g}(t), \mu)\, e^{(4-n)t - n\int_0^t dt'\gamma(\bar{g}(t'))}$$

eltérés   eltérés

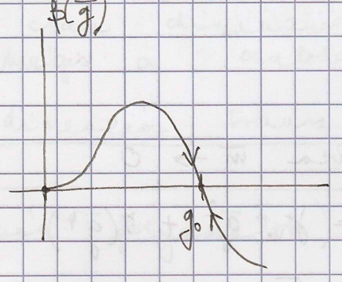
$$t = \int_g^{\bar{g}(t)} \frac{dg'}{\beta(g')} \qquad \frac{d\bar{g}}{dt} = \beta$$



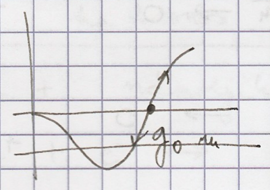
$$\bar{g}(t) \to \begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases} \quad t \to \pm\infty$$

$$\bar{g}(t) \to \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases} \quad t \to \pm\infty$$

②



UV fix pont



IR fix pont

Ha van fix pont:

$$\int_0^t dt' \, \gamma(\bar{g}(t')) \longrightarrow \gamma(g_0)\, t \qquad t \to \pm\infty$$

Ha $g_0 = 0 \Rightarrow \gamma(0) = 0$ majdnem szabad térelmélet aszimptotikusan

pontosabban: $\beta_0 > 0$ QCD esetén $\Rightarrow$ aszimptotikus szabadság

$$\left.\begin{aligned} \beta(\bar{g}) &= -\beta_0 \bar{g}^3 + O(\bar{g}^5) \\ \frac{d\bar{g}}{dt} &= \beta(\bar{g}) \end{aligned}\right\}$$

mego: $\bar{g}(t)^2 = \dfrac{g^2}{1+2\beta_0 g^2 t}$

$t \to \infty$ esetén jó!

$$\gamma(\bar{g}) = \gamma_0 \bar{g}^2 + O(\bar{g}^4)$$

$t \to \infty \Rightarrow \bar{g} \to 0$

$$\Gamma_n(e^t p, g, \mu) \Longrightarrow \Gamma_n(p, \overset{t}{0}, \mu)(e^t)^{4-n} \cdot \underbrace{(2\beta_0 g^2 t)^{-\frac{n\gamma_0}{2\beta_0}}}_{e^{-n\int_0^t dt' \gamma(\bar{g}(t'))}}$$

QED: $\beta(\bar{g}) = \beta_0 \bar{g}^3 + O(\bar{g}^5) \qquad \beta_0 > 0$

$$\bar{g}(t)^2 = \frac{g^2}{1-2\beta_0 g^2 t} \qquad t \to -\infty \text{ esetén jó}$$

(effektív elmélet ↓ alacsony energián érvényes)

Ha mégis $t \to \infty$ a nevező 0 lesz Landau pólus. Az elmélet nem értelmezhető!

$\boxed{m \neq 0}$:

$$\frac{1}{m}\frac{d\bar{m}}{dt} = -1 - \gamma_m(\bar{g})$$

Ha $\gamma_m(\bar{g}) > -1 \rightarrow$ UV limeszben $\bar{m} \rightarrow 0$

perturbációszámításban: $\gamma_m(\bar{g}) = \gamma_{m_0}\bar{g}^2 + \mathcal{O}(\bar{g}^4)$

így aszimptotikus szabadság esetén $\bar{m} \rightarrow 0$

$$\bar{m}(t) \rightarrow m e^{-t}\left(2\beta_0 g^2 t\right)^{-\frac{\gamma_{m_0}}{2\beta_0}} \rightarrow 0$$

QCD:

$$g_R = g_R(\mu)$$

$$Z_g = 1 - \frac{g_R^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{6}\left(11C_G - 4T_R N_f\right) + \mathcal{O}(g_R^4)$$

$$\beta = -\varepsilon g_R - \frac{\mu}{Z_g}\frac{dZ_g}{d\mu} g_R =$$

$$= -\varepsilon g_R + \frac{11C_G - 4T_R N_f}{3}\frac{g_R^2}{(4\pi)^2}\underbrace{\frac{1}{\varepsilon}\beta(g_R)}_{\infty} + \mathcal{O}(g_R^4)$$

perturbatíve megoldva:

$$\beta(g_R) = -\underbrace{\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{11C_G - 4T_R N_f}{3}}_{\beta_0} g_R^3 + \mathcal{O}(g_R^5)$$

$$\beta_0 > 0, \text{ ha } N_f < \frac{33}{2}$$

---

1 hurok szinten

$$\bar{g}^2 = \frac{g^2}{1 + 2\beta g^2 t} \qquad e^t = \frac{\sqrt{|q^2|}}{\mu}$$

q: a folyamat tipikus impulzus skálája

$$\bar{g}^2 = \frac{g^2}{1 + \beta_0 g^2 \ln\frac{|q^2|}{\mu^2}} \equiv \frac{1}{\beta_0 \ln\frac{|q^2|}{\Lambda^2}}$$

Λ: QCD skálaparaméter definíciója $\qquad [\Lambda] = 1$

→ $\mathcal{L}$ csak dimenziótlan paramétert tartalmaz, mégis a csatolást a dimenziós Λ adja meg:

<u>dimenziós transzmutáció</u>

(konkrét folyamatok)

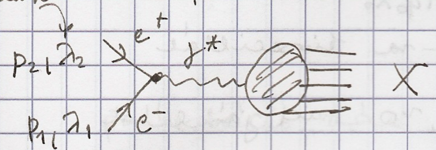
<u>e^+e^- hadronos szétsugárzás</u>

σ_{tot}-t számoljuk (kvarkokra és gluonokra)

$$e^+ + e^- \longrightarrow X$$

QED-ben legalacsonyabb rendben, QCD-ben pontosan számolunk.

polarizáció



(valójában $\gamma^* \longrightarrow Z^*$)

$$\mathcal{L}_{kcsh.} = j_\mu \underbrace{A^\mu}_{\text{fotontér}}$$

$$j_\mu = \underbrace{j_\mu^{\,l}}_{\text{leptonos áram}} + \underbrace{j_\mu^{\,hadr.}}_{\text{hadronos áram}}$$

$$m_e = 0$$

$$\langle X | T | e^+e^- \rangle = \bar{v}_{\lambda_2}(p_2)\, e\, \gamma^\mu u_{\lambda_1}(p_1)\, \frac{1}{q^2}\, \langle X | (-e) j_\mu^{\,hadr.}(0) | 0 \rangle$$

áram megmaradást használjuk

$$\sigma = \frac{1}{2s} \sum_X (2\pi)^4 \delta^4(p_X - q) \left| \langle X | T | e^+e^- \rangle \right|^2 =$$

$$s = q^2$$

$$= \frac{e^4}{2 s^3}\, l^{\mu\nu} w_{\mu\nu}$$

$(p_1+p_2)^2$

$$l^{\mu\nu} = \underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{spinre átlagolva}} \mathrm{Tr}\left(\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \right) = p_2^{\,\mu} p_1^{\,\nu} + p_1^{\,\mu} p_2^{\,\nu} - g^{\mu\nu} \frac{q^2}{2}$$

$$w_{\mu\nu} = \underbrace{\sum_X (2\pi)^4 \delta^4(p_X - q)}_{\int d^4x\, e^{i(q-p_X)x}} \langle 0 | j_\mu^{\,h}(0) | X \rangle \langle X | j_\nu^{\,h}(0) | 0 \rangle = \dots$$

$$= \int d^4x \, e^{iqx} \sum_X \langle 0 | \underbrace{j_\mu(x)}_{e^{ip_X x}} | X \rangle \langle X | j_\nu(0) | 0 \rangle =$$

$$= \int d^4x \, e^{iqx} \langle 0 | \underbrace{[j_\mu(x), j_\nu(0)]}_{} | 0 \rangle$$

a kommutátor második tagja 0 mivel nincs negatív energiájú közbenső állapot. ($\delta^4(p_X + q)$ miatt)

CM rendszerben: $q = (q_0, 0, 0, 0)$

$q_0 \to \infty$: $e^{iq_0 x_0}$

$x_0 \neq 0$-ra kioszcillál

$x_0 \sim 0$, ill. $x_\mu \sim 0$ ad járulékot

$\boxed{\sigma\text{-t az áramkommutátor kis távolságú viselkedése adja meg.}}$

Lorentz invariancia és áram megmaradás $\to$

$$\to \quad w_{\mu\nu} = (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \frac{1}{6\pi} \underbrace{w(q^2)}_{\text{skalár fv.}}$$

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} w(s) \qquad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}$$

$$e^+e^- \to \underbrace{f^+f^-}_{\text{fermionpár}} \qquad \sigma_{f\bar{f}} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}$$

def: $\boxed{R \equiv \frac{\sigma}{\sigma_{\mu^+\mu^-}}} = w(s)$; R: u.n. operátor betétréses Green fv.

$$R = -\frac{2\pi}{q^2} \int d^4x \, e^{iqx} \langle 0 | j_\mu(x) j^\mu(0) | 0 \rangle$$

$[R] = 0$, $[j_\mu] = 3$, $[w_{\mu\nu}] = 2$

$[w] = 0$

Ilyenek renormálását el lehet végezni. Érvényesek a renorm-csoport egyenletek

Itt kezdődik a QCD alkalmazása.

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}\right] R\left[\frac{s}{\mu^2}, g\right] = 0 \qquad \text{(renorm. csop. egyenlet)}$$

$\uparrow$ dimenziótlanság miatt

Mivel j^μ anomális dimenziója zérus (Ez általánosan következik az árammegmaradásból.) HF biz.

A megó.: (R = ratio)

$$R\left[\frac{s}{\mu^2}, g\right] = R\left[1, \bar{g}(s)\right] \quad \text{ahol} \quad \frac{d\bar{g}}{dt} = \beta(\bar{g})$$

$$\bar{g}(\mu^2) = g$$

$$t = \frac{1}{2}\ln\frac{s}{\mu^2}$$

perturbáció szám.: kvark töltések

$$R\left[\frac{s}{\mu^2}, g\right] = \sum_i Q_i^2\left(1 + a\left(\frac{s}{\mu^2}\right)g^2 + b\left(\frac{s}{\mu^2}\right)g^4 + \dots\right)$$

$a, b, \dots$ $\ln\frac{s}{\mu^2}$ tagokat tartalmaz

$s\to\infty$-re ezek nagyok, a pert. szám. nem érvényes

$$R\left[1, \bar{g}(s)\right] = \sum_i Q_i^2\left(1 + a(1)\,\bar{g}^2(s) + b(1)\,\bar{g}^4(s) + \dots\right)$$

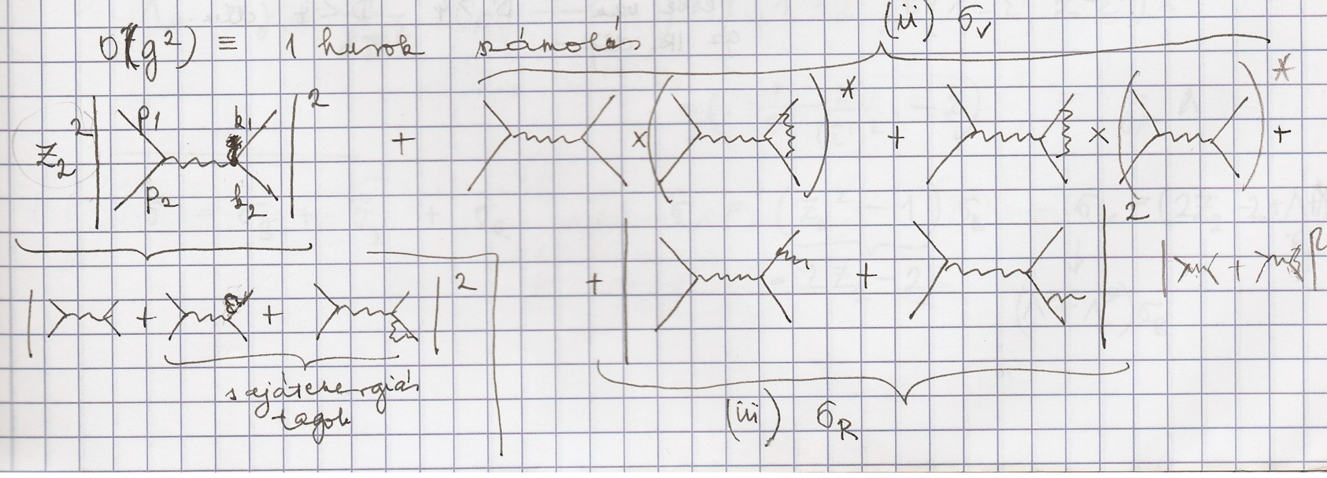
rögzített értékek

Ez lehet konvergens.

$s = s_0$-nál ($\equiv \mu^2$) a kísérlet megadja $\bar{g}(s_0)$-t

(azaz Λ-t). Más s-re van jóslat.

$O(g^2) \equiv$ 1 hurok számolás



vertex korrekció (ii)

$$\sigma = Z_2^{\,2}\,\sigma_{Born} + \sigma_V + \sigma_R$$

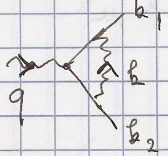
radiatív (gluon kibocsátás) (iii)

$$\sigma_B = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}\sum Q_i^{\,2}\left(\frac{4\pi}{s}\right)^{\varepsilon'}\cdot\frac{3(1-\varepsilon')\Gamma(2-\varepsilon')}{(3-2\varepsilon')\Gamma(2-2\varepsilon')}$$ Born hatás-keresztmetszet

$\varepsilon' = 0$: 4 dim.

$$\sigma_V = \frac{1}{8s}\int\frac{d^3k_1}{(2\pi)^3 2k_{10}}\frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2k_{20}}(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2-p_1-p_2)\,F_V$$

$$F_V = \sum_i Q_i^{\,2}\frac{e^4}{(q^2)^2}\,\mathrm{Tr}(\not p_2\,\gamma^\mu\not p_1\,\gamma_\nu)\,\mathrm{Tr}(\not k_1\Lambda_\mu\not k_2\,\gamma_\nu) + \text{c.c.}$$



$$\Lambda_\mu = g^2 C_F\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D i}\,\gamma_\lambda\frac{1}{\not k-\not k_1}\gamma_\mu\frac{1}{\not k+\not k_2}\gamma^\lambda\frac{1}{k^2}$$

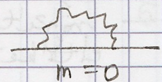
Feynman-mérték
D dim.

az integrál $k\to\infty$-re log divergens.
$k\to 0$-ra is divergens $\to$ IR divergencia

Z_2 ~~Born~~ és σ_R is IR divergens. (az összeg véges lesz)

$\longrightarrow$ dimenziós regularizáció

sajátenergia:



$$\Sigma(p)\big|_{p^2=0} = -g^2 C_F (D-2)\not p\int_0^1 dx\,(1-x)\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D\frac{1}{i}}\frac{1}{k^4}$$

$$\int_0^\infty dk\,k^{D-1-4} = \int_0^{\mu}\frac{1}{k}dk + \int_{\mu}^{\infty}\frac{1}{k}dk = \left(\frac{1}{\varepsilon'}-\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

ebbe van az IR div. $\longleftarrow$ $D' > 4$ $\qquad D < 4$ dim.