KVANTUMSZÍNDINAMIKA 09.12.

Bevezetés

Standard modell: $SU_c(3) \times SU(2) \times U(1)$

nemábeli mértékelmélet

colour $SU_c(3)$ kvantumszíndinamika = QCD

kísérleti ellenőrzése futó program → jó

egyezés $\mathcal{O}(10\%)$

QED pontossága $\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = 10^{-10}$

gyenge kölcsönhatás: $\mathcal{O}(0.1\%)$

elméleti szempontból → QCD konzisztens elmélet

→ **QED** effektív elmélet, nem konzisztens

futó csatolási állandó:

pl. $\sigma_{Compton} = \alpha^2 f(s)$ $s = (\text{TKP energia})^2$

$\alpha \approx \frac{1}{137}$ ismert fv.

magasabb rendben $\alpha^2(s) f(s)$

energiafüggő csatolás

QCD $\alpha_s(q^2) \to 0$, ha $|q^2| \to \infty$ aszimptotikus szabadság

$\frac{g_s^2}{4\pi}$ ($|q^2| \to 0 \Rightarrow \alpha_s \to \infty$ bezárás ?)

$SU(2) \times U(1)$
g g'

$e = g \sin\theta_W$ $\mathrm{tg}\,\theta_W = \frac{g'}{g}$ Weinberg-szög

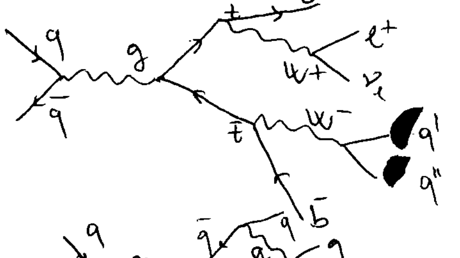
$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \to \infty$ véges q^2-nél

Landau pólus lép fel

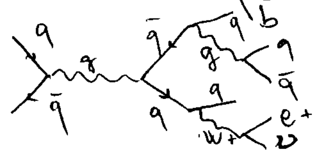
QCD alkalmazása:

1. Háttérfolyamatok számítása:

hadron - hadron ütközés A + B



végállapot $e^+ \nu b \bar b q \bar q$

háttér: 

ugyanolyan végállapot

2. Pontos mérésekhez kell QCD korrekció

pl. Kobayashi - Maskawa mátrix elemek meghatározás

3. Magfizika

4. Asztrofizika, kozmológia

A QCD kialakulása:

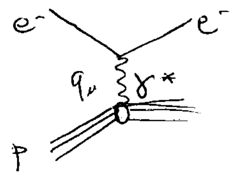
Kvark - parton modell

↳ részecske spektrum

↳ mélyen rugalmatlan szórás

inkluzív egyrészecske

h.k.m. szögeloszlás



$q^2 < 0 \quad |q| \gg M^2$

(1) a.) Δ^{++} rezonancia $|u\uparrow u\uparrow u\uparrow\rangle$

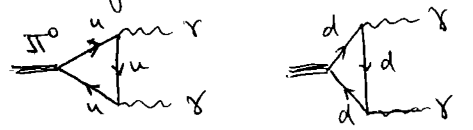
Pauli elv? ⇒ szín bevezetése

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{6}} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} u^\alpha u^\beta u^\gamma \qquad \alpha,\beta,\gamma = 1,2,3 \text{ színindex}$$

b.) π^0 bomlása $\to 2\gamma$ $\quad \tau(\pi^0) = (8.4 \pm 0.6)\cdot 10^{-7}\,s$

hosszú élettartam → elektromágneses folyamat

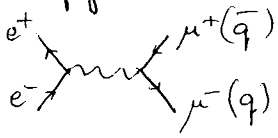
elágazási arány $R \frac{(\pi^0 \to 2\gamma)}{(\pi^0 \to \text{többi})} = (98.738 \pm 0.0032)\%$



szín nélkül a Γ szélességben egy 9-es faktor hiányzik

c.)

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{hadron})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)}$$



$$e^+e^- \to f\bar{f} \qquad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s}\beta\left(1 + \cos^2\theta + (1-\beta^2)\sin^2\theta\right)Q_f^2$$

$$\beta = \frac{|\vec{p}|}{E} \qquad \hbar = c = 1 \qquad \alpha \approx \frac{1}{137}$$

$$\Rightarrow \sigma_{tot} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}Q_f^2 = \frac{86.8\, Q_f^2 \text{ nb}}{s(\text{GeV})}$$

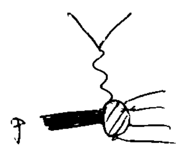
$$R = N_c \frac{\sum_q Q_q^2}{Q_\mu^2} = N_c \sum_q Q_q^2 = N_c\left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \dots\right) \quad (=2 \text{ ha } N_c = 3)$$

1972

(2) Mélyen rugalmatlan szórás (DIS)

kísérlet: a proton impulzusának kb. 40%-át adják a kvarkok

⇒ más is van a protonban



③ Elméleti fejlemények:

Yang-Mills: nemábeli mértékelmélet 1954.

(0 tömegű vektorbozont tartalmaz)

Kvantálás: Fadeev-Popov 1967.

Renormálhatóság: t'Hooft 1971.

Aszimptotikus szabadság: (t'Hooft) Gross-Wilczek, Politzer

1972-73 Fritzsch, Gell-Mann: $SU_c(3)$ legyen

④ Kvark-gluon bezárás:

Nemábeli elméletben a megfigyelhető mennyiségek szingletek (szín)

Mezonok: $3 \otimes 3^* = 1 \oplus 8$ $\quad |M\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta_{ij} |q_1^i \bar{q}_2^j\rangle$

Barionok: $3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$

$$|B\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \varepsilon_{ijk} |q_1^i q_2^j q_3^k\rangle$$

mincs $\begin{cases} |qq\rangle & 3 \otimes 3 = 3^* \oplus 6 \\ |qqqq\rangle & 3 \oplus 3 \oplus 3 \oplus 6^* \oplus 15 \oplus 15 \oplus 15 \oplus 15^* \end{cases}$

Mit ért el a QCD?

régi πNN elméletben $\frac{g^2}{4\pi} \approx 15$

QCD $\alpha_s(M_Z) = \frac{g_s^2}{4\pi}(M_Z) \approx 0,12$

a sorfejtési paraméter $\frac{\alpha_s}{\pi}$

Jelölések: $\hbar = c = 1$

$$[\sigma] = \frac{1}{GeV^2}$$

$$\frac{\hbar^2 c^2}{GeV^2} = 0.389379 \text{ mb}$$

metrika: $g^{00} = 1$, $g^{ii} = -1$

Dirac γ mátrixok

QCD Lagrange-fv.-e:

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi$$

$D_\mu = \partial_\mu - ig T^a A_\mu^a$ ← mértéktér

$a = 1, \dots, 8$ (adjungált ábrázolásbeli index)

fundamentális (3-as ábrázolásbeli) generátor

$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$

$\mathcal{L}_\psi$ invariáns $\psi_i' = U_{ij}\psi_j$ transzformációra,

ahol $U = e^{-iT^a\theta^a(x)}$

$\psi = \begin{pmatrix}\psi^1\\ \psi^2\\ \psi^3\end{pmatrix} \to$ szín $\psi^i = \begin{pmatrix}u_i\\ d_i\\ \vdots\\ b_i\end{pmatrix} \to$ 6 féle kvark $\to$ mind Dirac-spinor

(SU(2) $T^a = \frac{\tau^a}{2}$ Pauli mátrixok)

SU(3) $T^a = \frac{\lambda^a}{2}$ Gell-Mann mátrixok

$\mathcal{L}_\psi$ akkor invariáns, ha $T^a A^{a\prime}_\mu = U\left(A^a_\mu T^a - \frac{i}{g}U^{-1}\partial_\mu U\right)U^{-1}$

Infitezimális transzformáció

$$U = 1 - iT^a\theta^a(x)$$

$$\delta(A^a_\mu) = f^{abc}\theta^b A^c_\mu - \frac{1}{g}\partial^\mu\theta^a$$

Adjungált ábrázolásban

$$(\text{generátor}^a)_{bc} = -if^{abc}$$

Ha $\theta^a(x) = \theta^a$ nem lokális, A_μ az adjungált ábr. szerint transzformálódik

Mértéktér Lagrange-fv-e?

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$

$F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}$ invariáns $\Rightarrow$ mértéktér kinetikus energiája

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \bar\psi\left(i\gamma^\mu D_\mu - m\right)\psi}$$

$$A_\mu = A^a_\mu T^a, \quad F_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu}T^a$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) + \bar\psi\left(i\gamma^\mu D_\mu - m\right)\psi$$

$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu]\frac{i}{g}$ hf !!!

Jacobi identitás: $f^{abc}f^{cde} + f^{ace}f^{cdb} \equiv f^{acd}f^{bce}$

Gell-Mann mátrixok:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

$f_{123} = 1$

$f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{347} = f_{367} = \frac{1}{2}$

$f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

többi az antiszimmetrikus tulajdonságból

$\{\lambda_a, \lambda_b\} = 2 d_{abc} \lambda_c + \frac{4}{3} \delta_{ab}$

SU(N) csoport algebra

09.19.

$[T^a, T^b] = i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{struktúra} \\ \text{állandók}}}{f^{abc}} \, T^c$ ← generátorok

normálási feltétel $\mathrm{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}$ fundamentális ábrázolásban (N db)

$T^a_{ij} T^a_{kl} = \frac{1}{2}\left(\delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl}\right)$ hf. bizonyítani

$N \times N$-es hermitikus mátrixok, teljes rendszer: $1, T^a$

$(T^a T^a)_{ij} = \underbrace{\frac{N^2-1}{2N}}_{C_F} \delta_{ij} \xrightarrow[N=3]{} \frac{4}{3} \delta_{ij}$

$(T^a T^b T^a)_{ij} = -\frac{1}{2N} T^b_{ij}$

$f^{acd} f^{bcd} = N \delta^{ab} = C_A \delta^{ab}$

adjungált ábrázolás

$\hbar = c = 1$

$\int d^4x \mathcal{L}$ → hatás dimenziója 0 (GeV^0)

x^μ dimenziója -1

$\mathcal{L}$ dimenziója 4

ψ fermiontér dimenziója $\frac{3}{2}$

$F^a_{\mu\nu}$ térerősségtenzor dimenziója 2 ⇒ A^μ ⇒ 2

ϕ skalártér ⇒ 1

g csatolási állandó ⇒ 0, dimenziótlan

d dimenzióban $g \to g |\mu^2|^{\frac{4-d}{2}}$

tetszőleges skála

Kvantálás

tiszta mértékelmélet

naiv $Z[J] = \int [dA] e^{i\int d^4x (\mathcal{L} + A^a_\mu J^{a\mu})}$ generátorfunkcionál

$\uparrow$ forrástag

$$\langle 0 | T(A^{a_1}_{\mu_1}(x_1) \dots A^{a_n}_{\mu_n}(x_n)) | 0 \rangle = \frac{(-i)^n}{Z[0]} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J^{a_1}_{\mu_1}(x_1) \dots \delta J^{a_n}_{\mu_n}(x_n)} \Bigg|_{J=0}$$

$\mathcal{L}$ és $[dA]$ mértékinvariánsak

$A^a_\mu J^{a\mu}$ nem mértékinvariáns

$Z[J]$, a Green-fv-ek nem mértékinvariánsak

$Z[0]$-t vizsgáljuk

A naiv $Z[0]$ tartalmaz ∞ szorzót

mértéktranszformáció $A^a_\mu \to A^{(\theta)a}_\mu$ $\mathcal{L}$ nem változik

transzformáció param.

ebből jön a ∞ szorzó

Választunk mértékrögzítő feltételt:

$$G^\mu A^a_\mu(x) = B^a(x)$$

pl: ∂^μ Lorentz-mértékben

Feltesszük, hogy egy megoldás van a

$$G^\mu A^{(\theta)a}_\mu = B^a \quad \text{egyenletre } \theta^a\text{-ra}$$

az összes mértéktranszformált a pálya, ebből egyet választunk ki θ^a-val

$$Z[0] = \int [dA] \underbrace{\Delta_G[A] \int [d\theta^a] \delta^n(G^\mu A^{(\theta)a}_\mu - B^a)}_{1} e^{iS}$$

$1 \Rightarrow$ így definiáljuk $\Delta_G[A]$-t

mértéktranszformációt csinálunk

$[dA] \to [dA^{(\theta)}]$ stb.

és visszajelöljük A^a_μ-re

nem függ θ-tól

$$= \int [dA] \Delta_G[A] \underbrace{\int [d\theta]}_{\text{ez a } \infty \text{ áll., amit elhagyunk}} \delta^n(G^\mu A^a_\mu - B^a) e^{iS}$$

Fadeev - Popov ansatz

$$\left(\int [d\theta]\, \delta^n (G^\mu A_\mu^{\theta a} - B^a)\right)^{-1} = \Delta_G[A] =$$

$$= \left[\frac{1}{\det M_G}\right]^{-1} \quad \text{ahol} \quad \boxed{(M_G(x,y))^{ab} = \frac{\delta G^\mu A_\mu^{(\theta)a}(x)}{\delta \theta^b(y)}}$$

átlagolunk $B^a(x)$-rel $e^{-\frac{i}{2\alpha}\int d^4x\, (B^a(x))^2}$ súllyal

α tetszőleges fix szám

$$\boxed{Z[J] = \int [dA] \det M_G \exp\left\{ i \int d^4x \left(\mathcal{L} - \frac{1}{2\alpha}(G^\mu A_\mu^a)^2 + A_\mu^a J^{a\mu} \right)\right\}}$$

Példák: Coulomb-mérték | Lorentz-mérték

infinitezimális transzformáció $A_\mu^{\theta a} = A_\mu^a + f^{abc}\theta^b A_\mu^c - \frac{1}{g}\partial^\mu \theta^a$

Coulomb-mértékben: $\frac{1}{g} G^\mu = (0, \vec{\nabla})$

$$(M_G(x,y))^{a,b} = \left(\delta^{ab}\Delta - g f^{abc}\vec{\nabla} A^c\right)\delta^4(x-y)$$

Lorentz-mértékben: $\frac{1}{g} G^\mu = \partial^\mu$

$$(M_G(x-y))^{ab} = \left(\delta^{ab}\Box - g f^{abc}\partial^\mu A_\mu^c\right)\delta^{(4)}(x-y)$$

$\alpha = \infty$ fizikai mérték

$\alpha = 1$ Feynman-mérték

$\alpha = 0$ Landau-mérték

} Lorentz-mértékben

Gauss integrál $\int d\phi_1 \dots d\phi_n d\bar{\phi}_1 \dots d\bar{\phi}_n\, e^{-\bar{\phi}_i A_{ij}\phi_j} = \dots = \frac{(2\pi)^n}{\det A}$

$$\int [d\Psi][d\bar\Psi]\, e^{\int d^4x d^4y \bar\Psi(x) A(x,y) \Psi(y)} = \det A * \text{előjel}$$

fermionokra Grassmann-változókat bevezetve

$$\det M_G = \int [d\chi][d\chi^*]\, e^{-i\int d^4x d^4y\, \chi_a^*(x)(M_G(x,y))^{ab}\chi_b(y)}$$

ghost terek (antikommutáló)

Lorentz-mérték

$$\int d^4x d^4y\, \chi^{a*}(x)\left(\delta^{ab}\Box - g f^{abc}\partial^\mu A_\mu^c\right)\delta^{(4)}(x-y)\, \chi^b(y) =$$

$$= -\int d^4x\, (\partial^\mu \chi^{a*}) D_\mu^{ab} \chi^b(x)$$

teljes $\overset{QCD}{\gamma}$ generátor funkcionál

$$Z[J, \xi, \xi^*, \eta, \bar\eta] =$$

mértéktérer forrása — ghost terek forrása (Grassmann) — fermionterek forrása

sorrend!

$$= \int [dA][d\chi][d\chi^*][d\psi][d\bar\psi]\, e^{i\int d^4x \left(\mathcal{L} + A^a_\mu J^{a\mu} + \chi^{a*}\xi^a + \xi^{a*}\chi^a + \bar\psi\eta + \bar\eta\psi\right)}$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP} + \mathcal{L}_F$$

gluonok — gauge fixing — Fadeev Popov — fermionterek

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}$$

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A^a_\mu)^2$$

$$\mathcal{L}_{FP} = (\partial^\mu \chi^{a*}) D^{ab}_\mu \chi^b$$

$$\mathcal{L}_F = \bar\psi^i (i\gamma^\mu D^{ij}_\mu - m\delta^{ij})\psi^j$$

Perturbációszámítás

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}(g=0)$$

$$\mathcal{L}_{kh} = \mathcal{L} - \mathcal{L}_0 = -\frac{g}{2} f^{abc}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu) A^{b\mu} A^{c\nu} - \qquad \text{3 gluon k.h.}$$

$$-\frac{g^2}{4} f^{abe} f^{cde} A^a_\mu A^b_\nu A^{\mu c} A^{\nu d} - \qquad \text{4 gluon k.h.}$$

$$-g f^{abc} (\partial^\mu \chi^{a*}) \chi^b A^c_\mu + \qquad \text{ghost-gluon k.h.}$$

$$+ g \bar\psi T^a \gamma^\mu \psi A^a_\mu \qquad \text{fermion-gluon k.h.}$$

funkcionálderivált források szerint

$$Z[J, \dots, \bar\eta] = \exp\left\{ i \int d^4x\, \mathcal{L}_{kh}\left(\frac{\delta}{i\delta J^{\mu a}} \dots\right)\right\}$$

$Z_0[J, \dots, \bar\eta]$-ba az $\mathcal{L}_0$ szabad Lagrange-fv.

perturbációszámítás: $e^{i\int d^4x \mathcal{L}_{kh}}$-t Taylor sorba fejtjük

$$\mathcal{L}_0^G = -\frac{1}{2} A_\mu^a \, K^{ab\,\mu\nu} A_\nu^b$$

$$K^{ab}_{\mu\nu}(x) = \delta^{ab}\left(-g_{\mu\nu}\Box + \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\partial_\mu\partial_\nu\right)$$

$$\mathcal{L}_0^{FP} = -\chi^{a*} K^{ab} \chi^b$$

$$K^{ab} = \delta^{ab}\Box$$

$$\mathcal{L}_0^F = -\bar\Psi \Lambda \Psi$$

$$\Lambda = +i\partial^\mu \gamma_\mu + m$$

→ ezeknek inverzei a propagátorok

$$Z[J, \xi, \xi^*, \eta, \bar\eta] = e^{i\int d^4x \, \mathcal{L}_{int}\left(\frac{\delta}{\delta J_\mu^a(x)}, \dots\right)} Z_0[J, \dots]$$ 09.26.

$Z_0[\;] = Z_0^G[J] Z_0^{FP}[\xi, \xi^*] Z_0^F[\eta, \bar\eta]$ szabad terek

$\mathcal{L}_0^G = -\frac{1}{2} A_\mu^a K^{ab\mu\nu} A_\nu^b$ $\qquad K^{ab}_{\mu\nu}(x,y) = \delta^{ab}\left(-g_{\mu\nu}\Box + \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\partial_\mu\partial_\nu\right)\delta^{(4)}(x-y)$

inverz: $\int d^4z \, K^{ac}_{\mu\lambda}(x-z) g^{\lambda\rho} D^{cb}_{\rho\nu}(z-y) = \delta^{ab} g_{\mu\nu} \delta^4(x-y)$

ez az inverz a propagátor

FP $\Rightarrow \int d^4z \, K^{ac}(x-z) D^{cb}(z-y) = \delta^{ab}\delta^{(4)}(x-y)$

F $\Rightarrow \int d^4z \, \Lambda(x-z) S(z-y) = \delta^{(4)}(x-y)$ (Dirac indexeket nem írtuk ki)

fermion propagátor

megoldás F.T.-val → konvolúció → szorzat

gluonpropagátor: $D^{ab}_{\mu\nu}(x) = \delta^{ab}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i\varepsilon}\left(g_{\mu\nu} - (1-\alpha)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)$

Feynman előírás kauzalitás

ghostorra: $D^{ab}(x) = \delta^{ab}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-e^{-ikx}}{k^2 + i\varepsilon}$

Feynman propagátor: $S(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{m - \not p}$

$$Z_0^G[J] = e^{\frac{i}{2}\int d^4x d^4y \, J^{a\mu}(x) D^{ab}_{\mu\nu}(x-y) J^{b\nu}(y)}$$

$$Z_0^{FP}[\xi, \xi^*] = e^{i\int d^4x d^4y \, \xi^{a*}(x) D^{ab}(x-y) \xi^b(y)}$$

$$Z_0^F[\eta, \bar\eta] = e^{i\int d^4x d^4y \, \bar\eta(x) S(x-y) \eta(y)}$$

KVANTUMSZÍNDINAMIKA 09.26

Perturbációszámítás:

$$Z[J_1 \dots] = \left\{ 1 + i\int d^4x\, \mathcal{L}_{kh}\left(\frac{\delta}{i\delta J^{\alpha}(x)}, \dots\right) + \dots \right\} Z_0[J_1 \dots]$$!

Egyszerűbb elmélet:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) + \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{kh}$$

$$Z_0[J] = \int[d\phi]\, e^{i\int d^4x\,(\mathcal{L}_0 + J\phi)} = e^{\frac{i}{2}\int d^4x\, d^4y\, J(x) D(x-y) J(y)}$$

$$D(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

$$\frac{\delta J(y)}{\delta J(x)} = \delta^{(4)}(x-y)$$

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} e^{\frac{i}{2}\int d^4x'\, d^4y\, J(x') D(x'-y) J(y)} = i\int d^4z\, D(x-z) J(z)\, e^{\frac{i}{2}\int d^4x'\, d^4y\, J(x') D(x'-y) J(y)}$$

↑ 2-szer van J deriválva és D páros fv.

1. rendben 4 pont fv.

$$i\int d^4x \left(-\frac{\lambda}{4!}\right)\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 Z_0[J] = \frac{-i\lambda}{4!}\int d^4x\, d^4y_1\, d^4y_2\, d^4y_3\, d^4y_4\, D(x-y_1)D(x-y_2)D(x-y_3)D(x-y_4) \times$$
$$\times J(y_1)J(y_2)J(y_3)J(y_4)\, e^{\frac{i}{2}\int\dots} + \dots$$

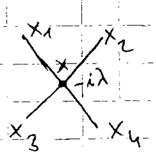
↑ kevesebb, mint 4 J-s tagok

Green-fv.:

$$\langle 0|T(\hat\phi(x_1)\hat\phi(x_2)\hat\phi(x_3)\hat\phi(x_4))|0\rangle =$$
$$= (-i)^4 \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J(x_4)} Z[J]\Big|_{J=0} \frac{1}{Z[J=0]} =$$

↑ számlálóban is megjelenik ilyen szorzófaktor ezért kiesik

A Green-fv. összefüggő részét kapjuk



$$= -i\lambda\int d^4x\, D(x-x_1)D(x-x_2)D(x-x_3)D(x-x_4) =$$

impulzus térben

$$= -i\lambda\int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \cdots \frac{d^4k_4}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_1^2 k_2^2 k_3^2 k_4^2}\, e^{i(k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4)} \quad (2\pi)^4\delta^{(4)}(k_1+k_2+k_3+k_4)$$

impulzusmegmaradás x integrálból

(Pl) $\langle 0| T\left(\hat{A}^{a_1}_{\mu_1}(x_1)\hat{A}^{a_2}_{\mu_2}(x_2)\hat{A}^{a_3}_{\mu_3}(x_3)\right)|0\rangle$ gluon 3pontfv

1. rend

$$i\int d^4x\, \mathcal{L}^G_{kh}\left(\frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}(x)}\right)\Big|_{3\text{ gluonos részre}} Z_0^G[J] =$$

$$= i\int d^4x \frac{-g}{2} f^{abc}\left(\partial_\mu \frac{\delta}{i\delta J^{a\nu}} - \partial_\nu \frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}}\right)\frac{\delta}{i\delta J^b_\mu}\frac{\delta}{i\delta J^c_\nu} Z_0^G[J] = *$$

$$Z_0^G[J] = e^{\frac{i}{2}\int d^4z\, d^4y\, J^{a\mu}(z) D^{ab}_{\mu\nu}(z-y) J^{b\nu}(y)}$$

deriváltja $\frac{\delta}{\delta J^c_\rho(x)} \Rightarrow i\int d^4y\, D^{cb}_{\rho\nu}(x-y) J^{b\nu}(y) e^{\frac{i}{2}\int\dots}$

$$* = -i\frac{g}{2} f^{abc}\int d^4x\, d^4y_1\, d^4y_2\, d^4y_3 \left(\partial_\mu D^{aa_1}_{\nu\lambda_1}(x-y_1) - \partial_\nu D^{aa_1}_{\mu\lambda_1}(x-y_1)\right) D^{ba_2\mu}_{\lambda_2}(x-y_2)\times$$

$$\times D^{ca_3\nu}_{\lambda_3}(x-y_3) J^{a_1\lambda_1}(y_1) J^{a_2\lambda_2}(y_2) J^{a_3\lambda_3}(y_3)\, Z_0^G[J] + \dots =$$

ezeket deriváljuk tovább — nem 3 gluonos tagok

$$G_3{}^{a_1a_2a_3}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(x_1,x_2,x_3) = (-i)^2\frac{\delta}{\delta J_1}\frac{\delta}{\delta J_2}\frac{\delta}{\delta J_3}\int d^4x\, \mathcal{L}^G_{kh}\left(\frac{\delta}{i\delta J}\right) Z_0^G[J]\Big|_{J=0} =$$

$$= (-i)^3 g f^{abc}\int d^4x \left[\left\{\partial_\mu D^{aa_1}_{\nu\mu_1}(x-x_1) - \partial_\nu D^{aa_1}_{\mu\mu_1}(x-x_1)\right\} D^{ba_2\mu}_{\mu_2}(x-x_2) D^{ca_3\nu}_{\mu_3}(x-x_3) + \right.$$

6féle sorrendben lehet deriválni, de szimmetria okokból csak 3 tag különböző $\Rightarrow$ 2es eltűnt a nevezőből

$$\left. + (231) + (312)\right] = *$$

Fourier transzformált $FT(D_{\mu\nu}) = \frac{1}{k^2}d_{\mu\nu}(k)$ propagátor

$$= i\int\prod_{i=1}^{3}\frac{d^4k_i}{(2\pi)^4} e^{i(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3)} (2\pi)^4\delta(k_1+k_2+k_3)\, d_{\mu_1\lambda_1}(k_1) d_{\mu_2\lambda_2}(k_2) d_{\mu_3\lambda_3}(k_3)\frac{1}{k_1^2k_2^2k_3^2}\cdot$$

$$\cdot g f^{a_1a_2a_3}\left\{(k_1-k_2)^{\lambda_3} g^{\lambda_1\lambda_2} + (k_2-k_3)^{\lambda_1} g^{\lambda_2\lambda_3} + (k_3-k_1)^{\lambda_2} g^{\lambda_3\lambda_1}\right\}$$

ez az impulzus térbeli gluon vertex

tudja a Bose statisztikát

hogyan jött ez ki?

$$\int d^4x \left\{ k_{1\mu} d_{\nu\mu_1}(k_1) - k_{1\nu} d_{\mu\mu_1}(k_1)\right\} d_{\mu_2\mu}(k_2) d_{\mu_3\nu}(k_3) \dots =$$

$$= \dots \left\{k_{1\mu} g^{\nu\lambda_1} - k_{1\nu} g^{\mu\lambda_1}\right\} g^{\mu\lambda_2} g^{\nu\lambda_3} d_{\mu_1\lambda_1}(k_1) d_{\mu_2\lambda_2}(k_2) d_{\mu_3\lambda_3}(k_3) \dots$$

$$= \ldots \left\{ k_{1\lambda_2} g^{\lambda_3\lambda_1} - k_{1\lambda_3} g^{\lambda_2\lambda_1} \right\} d_{\mu_1\lambda_1}(k_1)\, d_{\mu_2\lambda_2}(k_2)\, d_{\mu_3\lambda_3}(k_3) \ldots$$

kijön az antiszimmetrikus alak, amit szorzunk $f^{a_1a_2a_3}$ aszimptotikus tenzorral

QCD gráfszabályok mellékletben ...

10.03.

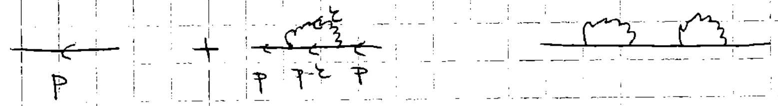
Regularizációs módszerek:

Green-fv-eket kell számolni, nem elég csak S-mátrix elemeket

Kvark propagátor:

$$S_{ij}(p) = i\, G^{c \;\to\; \text{connected (összefüggő rész)}}_{2ij}(p) = i \int d^4x\, e^{-ipx} \langle 0 | T\left(\psi_i(x)\bar{\psi}_j(0)\right) | 0 \rangle_c =$$

$$= \delta_{ij} \left\{ S_0(p) + S_0(p)\Sigma(p)S_0(p) + S_0 \Sigma S_0 \Sigma S_0 + \ldots \right\} =$$



$$\frac{1}{m - \not{p}}$$

$$= \frac{\delta_{ij}}{m - \not{p} - \Sigma(p)} \quad \text{Dyson-felösszegzésből}$$

$\Sigma(p)$ csak p-től függ és $[\Sigma, S_0] = 0$

$$\underset{\substack{i=j=1,2,3 \\ SU(3)\,\text{index}}}{\Sigma_{ij}(p)} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 i} \underbrace{g\gamma_\mu T^a_{il}}_{\text{vertex}} \underbrace{\frac{\delta_{lk}}{m - \not{p} + \not{k}}}_{\text{kvark}} \underbrace{g\gamma_\nu T^b_{kj}}_{\text{vertex}} \underbrace{\frac{\delta^{ab}}{k^2} d^{\mu\nu}(k)}_{\text{gluon propagátor}} =$$

$$\mathrm{Tr}(T^aT^a) = C_F = \frac{4}{3}$$

$$= g^2 C_F \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 i} \frac{\gamma_\mu (m + \not{p} - \not{k}) \gamma_\nu d^{\mu\nu}}{(m^2 - (p-k)^2)\, k^2} \delta_{ij}$$

$\alpha = 1$ Feynman mérték $\quad d^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$

$$\int d^4k \frac{\not{k}}{k^2 \cdot k^2} \sim \lim_{K \to \infty} K \quad \text{divergens}$$

nagy k impulzusokra $\to$ K a felső határ
cutoff

$d^4k \to k^3 dk\, d\Omega$ közelítéssel $\int_0^K dk$

térszög

lineárisan divergens a járulék a levágással

1. cut-off $\int^K dk$ — levágás

2. Pauli - Villars

3. analitikus regularizáció $\frac{1}{m^2-k^2} \to \frac{1}{(m^2-k^2)^\alpha}$ $\mathrm{Re}\,\alpha > 1$

1.) 2.) 3.) sérti a nem-ábeli mértékinvarianciát

4. Rács regularizáció $\to$ mértékinv.

5. Dimenziós regularizáció

$d^4k \to d^Dk$ $D<4$-re konvergensebbek a hurok-integrálok

$$p^\mu \to (p^0, p^1, \dots, p^{D-1})$$

$$g_\mu{}^\mu = g_{\mu\nu} g^{\nu\mu} \Rightarrow D \qquad \frac{1}{(2\pi)^4} \Rightarrow \frac{1}{(2\pi)^D}$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \qquad \mathrm{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) \Rightarrow 2^{D/2} g_{\mu\nu}$$

$$\gamma^\mu \gamma_\mu \Rightarrow D$$

$$\gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu \Rightarrow (2-D)\gamma_\nu$$

Kvark propagátor, $\Sigma_{ij} = \delta_{ij} \Sigma(p)$ — sajátenergia

kvarktömeg $m \approx 0$

$$\Sigma(p) = g_0^2 \mu^{4-D} C_F (2-D) \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D i} \frac{-(\not p - \not k)}{(p-k)^2 k^2} =$$

$[\mu] = 1$ renormálási skála tetszőleges

$$= g_0^2 \mu^{4-D} C_F (2-D) \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D i} (\not k - \not p) \int_0^1 dx \frac{1}{(x(k-p)^2 + (1-x)k^2)^2}$$

$$g^2 = g_0^2 \mu^{2-\frac{D}{2}} \qquad \frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{(ax + b(1-x))^2}$$

x = Feynman-paraméter

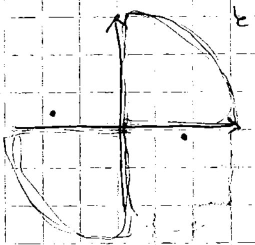
$$= g_0^2 \mu^{4-D} C_F (2-D) \int_0^1 dx \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D i} (\not k - \not p) \frac{1}{(x(k-p)^2 + (1-x)k^2)^2} =$$

$$k' = k - xp$$

$$= g_0^2 \mu^{4-D} C_F (2-D) \int_0^1 dx \int \frac{d^Dk'}{(2\pi)^D i} \frac{\not k' - (1-x)\not p}{(k'^2 + x(1-x)p^2 - i\varepsilon)^2} = *$$

az első tag ℓ'-ben páratlan fv $\Rightarrow$ kiesik

Wick-forgatás



$$\ell_0' = \pm\sqrt{\vec{\ell}'^2 - p^2 x(1-x) + i\varepsilon} \qquad p^2 < 0 \text{ térszerű}$$

$$\ell_0' = iK_0 \qquad K_0 \in (-\infty, \infty)$$

$$K^2 = -K_0^2 - \vec{\ell}^2 \qquad L = x(1-x)p^2 + i\varepsilon$$

$$* = g_0^2 \mu^{4-D} C_F (2-D) \not p \int dx\,(1-x) \int \frac{d^D K}{(2\pi)^D i}\, i \frac{1}{(K^2 - L)^2}$$

$$dK^D = K^{D-1}\, dK\, d\Omega_D = \underset{dK}{K^{D-1}} \prod_{i=1}^{D-1} \sin\theta_i^{D-1-i}\, d\theta_i$$

$$K^0 = K\cos\theta_1$$

$$K^1 = K\cos\theta_2 \sin\theta_1$$

$$K^3 = K\cos\theta_3 \sin\theta_2 \sin\theta_1$$

$$- - - - -$$

$$K^{D-2} = K\cos\theta_{D-1} \sin\theta_{D-2} \cdots \sin\theta_1$$

$$K^{D-1} = K\sin\theta_{D-1} \cdots \sin\theta_1$$

$$\int d\Omega_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}$$

Ezentúl D nem csak egész szám, akkor ez az integrál definíciója.

$$\int \frac{d^D K}{(2\pi)^D} \cdot \frac{1}{(K^2+L)^a} = \frac{\Gamma\left(a - \frac{D}{2}\right)}{(4\pi)^{D/2}\,\Gamma(a)} L^{\frac{D}{2} - a}$$

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad \text{Euler-féle } \beta\text{-fv}$$

$$= \int_0^\infty dt\, \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}$$

előállítások

$$= 2\int_0^\infty dt\, \frac{t^{2p-1}}{(1+t^2)^{p+q}}$$

$$= \int_0^1 dx\, x^{p-1}(1-x)^{q-1}$$

$$\Sigma(p) = g_0^2 \mu^{4-D} C_F (D-2) \not p\, \frac{\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right)}{(4\pi)^{D/2}\, 1} (-p^2)^{\frac{D}{2} - 2} \underbrace{\int_0^1 dx\, x^{\frac{D}{2} - 2} (1-x)^{\frac{D}{2} - 1}}_{B\left(\frac{D}{2} - 1, \frac{D}{2}\right)} = *$$

$$* = -\frac{2C_F g_0^2 \mu^{4-D}}{(4\pi)^{D/2}} \not{p} (-p^2)^{D/2-2} (D-1) B\left(\frac{D}{2}, \frac{D}{2}\right) \Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right)$$

$p^2 < 0$ $D < 3$ - ra igaz

$\Gamma(z)$ pólusai $\sim \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$

negatív egészek esetén

$\Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right)$ $D=4$ esetén végtelen

$D \approx 4$ körül durván $\Sigma(p) \sim C_F g_0^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \not{p} \frac{2}{4-D}$ ...

szinguláris tag

$\varepsilon = \frac{4-D}{2}$

ε-beli sorfejtés

$\Sigma(p) = \dots \Big|_{D=4-2\varepsilon} \stackrel{\varepsilon}{=}$

$$\boxed{\Sigma(p) = -\frac{g_0^2}{(4\pi)^2} C_F \not{p} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + 1 - \ln\left(\frac{-p^2}{4\pi\mu^2}\right)\right) + O(\varepsilon)}$$

$\gamma = 0{,}57721$ Euler állandó $\Leftarrow \Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + O(\varepsilon)$

$(1-\varepsilon) B(1-\varepsilon, 1-\varepsilon) = 1 + \varepsilon + O(\varepsilon^2)$

ha $\alpha \neq 1$ (tetszőleges kovariáns mérték), akkor

$$\Sigma(p) = \Sigma_1(p) - (1-\alpha) \Sigma_2(p)$$

előző (Feynman)

$\Sigma_1 = \Sigma_2$

$$\Sigma(p) = \alpha \Sigma_{Feynman}(p) = \not{p} \sigma(p^2)$$

van mértékfüggés (Green-fv-ek nem fizikaiak)

kvarkpropagátor: $m=0$ eset

$$S_{ij}(p) = -\frac{\delta_{ij}}{\not{p}} \frac{1}{1+\sigma(p^2)}$$

$p^2 = 0$ - nál pólus van, ami a fizikai tömeg^2

$\psi^r = Z_2^{-1/2} \psi$

renormálási állandó

renormált tér

$$S_{Rij} = Z_2^{-1} S_{ij}(p)$$

$$Z_2 = 1 - \underbrace{z_2}_{\sim g_0^2} - \mathcal{O}(g_0^4)$$

$$S_{R\,ij} = \ldots = -\frac{\delta_{ij}}{\not p}\,\frac{1}{1+\underbrace{\sigma(p^2)}_{\sim g_0^2}-\underbrace{z_2}_{\sim g_0^2}}$$

$\sigma(p^2) - z_2$ úgy választandó, hogy véges legyen

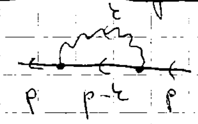
különböző sémák vannak:

MS = minimal subtraction $\quad z_2 = -\alpha g_0^2 \frac{1}{(4\pi)^2} C_F \frac{1}{\varepsilon}$

$\overline{MS}$ = modified MS $\quad z_2 = -\alpha \frac{g^2}{(4\pi)^2} C_F \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi\right)$

<u>Hatványszámítás:</u>

10.10.



Wick forgatással euklideszi térben integrálunk

$$\int d^D k\, \frac{1}{\not p - \not k}\,\frac{1}{k^2}$$

Felületes divergencia fokszáma: d

d = független hurkok száma * D −

− propagátorok száma * $\begin{cases} 2 \text{ (bozon)} \\ 1 \text{ (fermion)} \end{cases}$ +

+ vertexekben lévő deriváltak száma

$d = D - 1 - 2 \xrightarrow[D\to 4]{} 1$ lineárisan divergens.

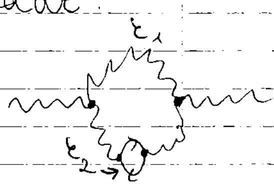
$d = 0$ logaritmikusan div.

$d < 0$ konvergens

$d = 2$ kvadratikusan div.

Szisztematikusan fel kell térképezni a gráfokat

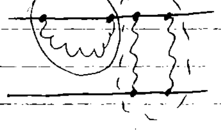
példák:



2 független hurkot

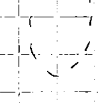
$d = 2D - 2 - 6 + 2 = 2D - 6 \xrightarrow[D\to 4]{} 2$

kvadratikusan divergens



$d = 2D - 4 - 6 = 2D - 10 \xrightarrow[D\to 4]{} -2$

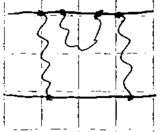
végesnek látszik, de nem az, mert

 és  külön-külön kezelendő

KVANTUMSZÍNDINAMIKA 10.10.

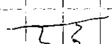
<u>1PI</u> = 1 részecske irreducibilis gráf = olyan gráf, ami 1 belső vonal átvágásával nem esik szét két részre

1PI-re jó a d kiszámolása



1PI

$d = 2D - 10 \to -2$ konvergensnek tűnik, de mégis divergens

ha kivesszük  sajátenergia részt, akkor már konvergens

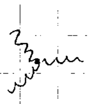
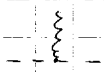
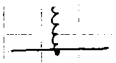
<u>vázdiagram</u> (skeleton)

Az 1PI gráfból vegyük ki az összes divergens aldiagramot (amik maguk is trunkált/amputált Green-fv.-ek)

<u>Weinberg tétele</u>: egy gráf járuléka véges, ha a gráfra és az összes algráfra $d<0$

<u>QCD</u> $\mathcal{L}_{eh.}$

i a vertex ~~...~~ típusa $i=1,\dots,4$, b_i a bozonok száma, f_i a fermionok száma, δ_i deriváltak száma, n_i az ilyen típusú vertexek száma, N_B a külső bozonok száma, N_F a külső fermionok száma

1.  $b_1 = 3$ $f_1 = 0$ $\delta_1 = 1$
2.  $b_2 = 4$ $f_2 = 0$ $\delta_2 = 0$
3.  $b_3 = 3$ $f_3 = 0$ $\delta_3 = 1$
4.  $b_4 = 1$ $f_4 = 2$ $\delta_4 = 0$

n_B belső bozon vonalak száma
n_f fermion

l független hurkok száma

$$2n_B + N_B = \sum_j n_j b_j$$

$$2n_f + N_F = \sum_i n_i f_i$$

$$l = n_B + n_F - (n-1)$$

$$\sum_{\text{összes vertex}} \delta_v = \sum_i n_i \delta_i$$

$$l = \frac{\sum_i n_i b_i - N_B}{2} + \frac{\sum_i n_i f_i - N_F}{2} - n + 1$$

$$d = \frac{D}{2}\left(\sum_i n_i b_i + \sum_i n_i f_i - N_B - N_F\right) - \sum_i n_i D + D - 2\,\frac{\sum n_i b_i - N_B}{2} - \frac{\sum n_i f_i - N_F}{2} + \sum n_i f_i =$$

$$= \sum r_i n_i - \frac{D-2}{2} N_B - \frac{D-1}{2} N_F + D$$

$$r_1 = \frac{D-2}{2}\cdot 3 + 1 - D = \frac{D}{2} - 2 \xrightarrow[D\to 4]{} 0$$

$r_i \xrightarrow[D\to 4]{} 0$ többi is

A QCD renormálható elmélet ⇒ végessor divergencia

n-től független felső korlát van a vázdiagramok felületes divergencia számára. Azaz véges sok típusú 1PI váz-diagram létezik

$r_i < 0$ szuperrenormálható elmélet

$r_i > 0$ nemrenormálható elmélet

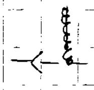
Renormálható csatolás dimenziója $= 0$

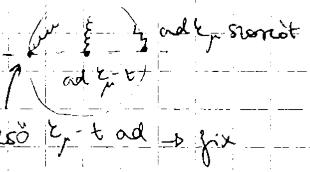
nemrenormálható < 0

szuperrenormálható > 0

QCD $D = 4$

$d = 4 - (N_G + N_{FP}) - \frac{3}{2} N_F$ adódik, DT

 $\propto k_\mu$



$$d = 4 - N_G - \frac{3N_{FP}}{2} + \frac{3}{2} N_F$$

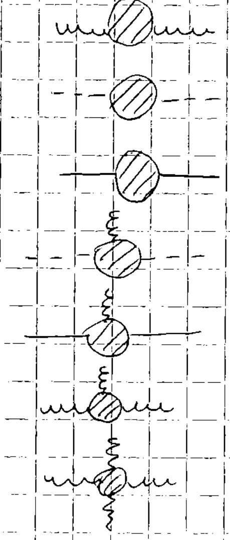
FP ghost itt fermionként viselkedik!

ha a külső vonalak száma nő akkor d csökken

⇒ véges számú divergens gráf

$d \geq 0$ gráfok	N_G	N_{FP}	N_F	d
	0	0	0	4
	2	0	0	2
	0	2	0	1
	0	0	2	1
	1	2	0	0
	1	0	2	0
	3	0	0	1
	4	0	0	1

vákuum diagram nem érdekes



7 db divergens vázgráf

A QCD ellentagos renormálása

csupasz Lagrange-fv.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{kh.}$$

$$= \mathcal{L}_{r0} + \mathcal{L}_{rkh.} + \mathcal{L}_{ct}$$

← ellentag, hogy az egyenlőség formálisan fennálljon

↑ renormált szabad ↑ renormált kölcsönhatási tag

csupasz terek helyébe renormált terek

hullámfv. renormálási áll.: $A^a_\mu = Z_3^{1/2} A^a_{r\mu}$

ghost tér $\chi^a_{1,2} = \tilde{Z}_3^{1/2} \chi^a_{r\,1,2}$ $\qquad \chi = \chi_1 + i\chi_2$, $\chi^* = \chi_1 - i\chi_2$

fermion $\psi = Z_2^{1/2} \psi_r$

$g = Z_g g_r$ csatolás

$\alpha = Z_3' \alpha_r$ mértékrögzítő param.

$m = Z_m m_r$ fermiontömeg

$$\mathcal{L}_{ct} = -(Z_3 - 1)\frac{1}{4}(\partial_\mu A^a_{r\nu} - \partial_\nu A^a_{r\mu})(\partial^\mu A^{\nu a}_r - \partial^\nu A^{\mu a}_r) - \frac{1}{2\alpha_r}(\partial^\mu A^a_{r\mu})^2\left(\frac{Z_3}{Z_3'} - 1\right) +$$

$$+ (\tilde{Z}_3 - 1)\, i(\partial^\mu \chi^a_{1r})(\partial_\mu \chi^a_{2r}) + (Z_2 - 1)\bar{\psi}_r(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_r)\psi_r -$$

$$-(Z_2 Z_m - 1)\bar{\psi}_r m_r \psi_r - (Z_g Z_3^{3/2} - 1)\frac{1}{2} g_r f^{abc}(\partial_\mu A^a_{r\nu} - \partial_\nu A^a_{r\mu}) A^{b\mu}_r A^{c\nu}_r -$$

$$-(Z_g^2 Z_3^2 - 1)\frac{1}{4} g_r^2 f^{abe} f^{cde} A^a_{r\mu} A^b_{r\nu} A^{\mu c}_r A^{\nu d}_r -$$

$$-(Z_g \tilde{Z}_3 Z_3^{1/2} - 1)\, i g_r f^{abc}(\partial^\mu \chi^{a*}_r)\chi^b_r A^c_{r\mu} + \quad ?$$

$$+(Z_g Z_2 Z_3^{1/2} - 1) g_r \bar{\psi}_r T^a \gamma^\mu \psi_r A^a_{r\mu}$$

Mindig a csupasz Lagrange-fv-nyel számolunk, de ennek a paramétereit a mért mennyiségekből számoljuk ki.

Számolás menete:

$\mathcal{L}_r$-ből egyhurok szinten számolunk Green-fv-eket, amiből leválasztjuk a divergens járulékokat, ezeket kompenzáljuk az $\mathcal{L}_{ct}$-ből 1hurok szinten számolt járulékokkal. 1hurok számítást kér a 7 db Green-fv. Ugyanezt megismételjük $\to$ 2hurok szinten $\mathcal{L}_r + \mathcal{L}_{ct}^1$ és kompenzálunk $\mathcal{L}_{ct}^2$-vel.

$\vdots$

$\mathcal{L}_r + \sum_{r=1}^{n-1} \mathcal{L}_{ct}^r$ + kompenzálunk $\mathcal{L}_{ct}^n$-nel

A gráfszámolásból adódó $\mathcal{L}_{ct}$ a kivonásból adódóval azonos szerkezetű.

10. 17.

7 db 1PI divergens vázgráf van

$\mathcal{L}_{ct}$ = kvadratikus tagok −

$$-(\underbrace{Z_g Z_3^{3/2}}_{Z_1}-1)\frac{1}{2} g_r f^{abc}(\partial_\mu A_{r\nu}^a - \partial_\nu A_{r\mu}^a) A_r^{b\mu} A_r^{c\nu} - \quad \text{(3 gluon csatolás)}$$

gráfszámolásból

$$-(\underbrace{Z_g^2 Z_3^2}_{Z_4}-1)\frac{1}{4} g_r^2 \ldots \quad \text{(4 gluon csatolás)}$$

$$-(\underbrace{Z_g \tilde{Z}_3 Z_3^{1/2}}_{\tilde{Z}_1}-1) i g_r \ldots \quad \text{(gluon ghost)}$$

$$-(\underbrace{Z_g Z_2 Z_3^{1/2}}_{Z_{1F}}-1) g_r \quad \text{(gluon fermion)}$$

gráfszámolás és renormálás kapcsolatából $\to$ összefüggések a renormálási paraméterek közt

ugyanaz a g_r több helyen $\Rightarrow \frac{Z_1}{Z_3} = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3} = \frac{Z_{1F}}{Z_2} = \frac{Z_4}{Z_1} = *$

mértékinvarianciával kapcsolatos, de rögzítettük a mértéket

$$* = 1 - \frac{g_r^2}{(4\pi)^2} C_G \frac{3+\alpha_r}{4}\left(\frac{1}{\varepsilon}+\ldots\right) + O(g_r^4) \Rightarrow Z_g = \left(\frac{Z_1}{Z_3}\right)^{3/2} = \ldots = 1 - \frac{g_r^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{6}(\underbrace{11C_G - 4T_R N_f}_{\text{QCD: } 33-2N_f}) + O(g_r^4)$$

Slavnov-Taylor (általánosított Ward-Takahashi) azonosságok:

mértékrögzítő tag is

$$Z[J,\dots] = \int [dA][d\chi_1][d\chi_2][d\Psi][d\bar\Psi] \exp\left\{ i\int d^4x \left(\mathcal{L} + AJ + \chi_1\xi_1 + \chi_2\xi_2 + \bar\Psi\eta + \bar\eta\Psi \right)\right\}$$

még $Z[0]$ sem invariáns a mértéktranszformációra, most benne van $\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2$ (guage-fixing)

invariáns azonban a következőre

$$\theta^a(x) \longrightarrow -g\,\delta\lambda\,\chi_2^a(x)$$

Grassmann-változó

$$\delta A_\mu^a = -\frac{1}{g} D_\mu^{ab}\theta^b \rightarrow \delta\lambda\, D_\mu^{ab}\chi_2^b$$

kovariáns derivált

$$\delta\Psi = -iT^a\theta^a\Psi \rightarrow ig\,\delta\lambda\, T^a\chi_2^a\Psi$$

ki kell találni a ghost-terek transzformációját, hogy az egész Lagrange-fv. invariáns legyen

$$\delta\chi_1^a = i\,\delta\lambda \frac{1}{\alpha}\partial^\mu A_\mu^a$$

$$\delta\chi_2^a = -\frac{1}{2}\delta\lambda\, g\, f^{abc}\chi_2^b\chi_2^c$$

transzformációra $\mathcal{L}$ invariáns

meg kell mutatni, hogy $\delta(\mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP}) = 0$

$$-\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 + i\,\partial^\mu\chi_1^a D_\mu^{ab}\chi_2^b$$ ennek megváltozásából

hf lehet kitalálni az előzőeket

Becchi-Rouet-Stora ≡ BRS transzformációnak hívják

Az integrációs mérték: $[dA][d\chi_1][d\chi_2][d\Psi][d\bar\Psi]$ is invariáns

$$Z[J,\dots] = \int [dA]\dots e^{i\int d^4x(\mathcal{L} + AJ + \chi_1\xi_1 + \chi_2\xi_2 + \bar\Psi\eta + \bar\eta\Psi)} = $$

BRS transzf.

$A \to A'$

$dA = dA'$

$\mathcal{L} = \mathcal{L}'$

$$= \int [dA]\dots e^{i\int d^4x(\mathcal{L} + A'J + \dots + \bar\eta\Psi')}$$

$\Rightarrow$ Green-fv-ek funkcionálderiválással

$$\langle 0|T(A_\mu^a(x)\dots)|0\rangle = \langle 0|T(A'^a_\mu(x)\dots)|0\rangle$$

$$\delta\langle 0|T(A_\mu^a(x)\dots)|0\rangle = 0$$ általánosított W-T. identitás

$$\int [dA] \ldots \int d^4x \left(\delta A J + \delta \chi_1 \xi_1 \ldots \bar\eta \delta \psi\right) e^{i\int d^4x (\mathcal{L} + AJ + \ldots)} = 0$$

ált. W.-T. a generátorfunkcionálra

Renormált terekre a BRS transzformáció

$$\delta\lambda = Z_3^{1/2} \tilde{Z}_3^{1/2} \delta\lambda_r$$

$$\delta A^a_{r\mu} = \delta\lambda_r \tilde{Z}_3 D^{ab}_\mu \chi^b_{2r}$$

$$D^{ab}_\mu = \delta^{ab}\partial_\mu - \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3} g_r f^{abc} A^{c\mu}_r$$

$$\delta\psi_r = \delta\lambda_r i \tilde{Z}_1 g_r T^a \chi_2^a \psi_r$$

$$\delta\chi^a_{1r} = i\delta\lambda_r \frac{1}{\alpha_r} \partial^\mu A^a_{r\mu}$$

$$\delta\chi^a_{2r} = -\frac{1}{2}\delta\lambda_r g_r f^{abc} \chi^b_{r2} \chi^c_{r2} \tilde{Z}_1$$

Renormált terekre és csupasz terekre is igaz:

$$\delta \langle 0 | T\left(\partial^\mu A^a_\mu(x) \chi_1(y)\right) | 0 \rangle = 0$$

(konkrétan renormált terekre számolunk, de elhagyjuk az r indexet)

$$0 = \langle 0 | T\left(\delta(\partial^\mu A^a_\mu(x)) \chi_1(y) + \partial^\mu A^a_\mu(x) \delta\chi_1(y)\right) | 0 \rangle = *$$

$$\delta(\partial^\mu A^a_\mu) = \partial^\mu \delta A^a_\mu = \delta\lambda \left[\tilde{Z}_3 \Box \chi^a_2 - \tilde{Z}_1 g f^{abc} \partial^\mu (\chi^b_2 A^c_\mu)\right] = 0$$

χ_2 téregyenlete: $\displaystyle \partial^\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \chi^a_1)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\chi^a_1} = 0 =$

$$= i\tilde{Z}_3 \Box \chi^a_2 - i\tilde{Z}_1 g f^{abc} \partial^\mu (\chi^b_2 A^c_\mu) \qquad \Uparrow$$

$$* = \langle 0 | T\left(\partial^\mu A^a_\mu(x) \delta\chi_1(y)\right) | 0 \rangle = \quad \text{marad}$$

$$= \langle 0 | T\left(\partial^\mu A^a_\mu(x) i\delta\lambda \frac{1}{\alpha} \partial^\nu A^b_\nu(y)\right) | 0 \rangle = \frac{i}{\alpha} \partial^\mu \langle 0 | T\left(A^a_\mu(x) \partial^\nu A^b_\nu(y)\right) | 0 \rangle -$$

$$- \frac{i}{\alpha} \langle 0 | [A^a_0(x), \partial^\mu A^b_\mu(y)] | 0 \rangle \delta(x_0 - y) = *$$

kanonikus kvantálásban $\partial^\nu A^b_\nu = -Z_3 \alpha \Pi^b_0(y)$

$A^b_0(y)$-hoz tartozó kanonikus konjugált

$$\delta(x_0 - y_0)[A^a_0(x), \Pi^b_0(y)] = \frac{i}{Z_3} \delta_{ab} \delta^{(4)}(x-y)$$

$$\frac{i}{\alpha} \partial^\mu \langle 0 | T\left(A^a_\mu(x) \partial^\nu A^b_\nu(y)\right) | 0 \rangle = \delta_{ab} \delta^{(4)}(x-y)$$

$$* = \frac{i}{\alpha} \partial^\mu_x \partial^\nu_y \langle 0 | T\left(A^a_\mu(x) A^b_\nu(y)\right) | 0 \rangle = \delta_{ab} \delta^{(4)}(x-y)$$

Fourier-transzformált:

$$\frac{1}{\alpha} k^\mu k^\nu D^{ab}_{\mu\nu}(k) - \delta^{ab} = 0$$

gluon propagátor (kétpontfv.)

csak a propagátor transzverz része korrigálódik (renormálódik)

$$D^{ab}_{\mu\nu} = \frac{\delta_{ab}}{k^2}\left[\frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{1+\Pi(k^2)} + \alpha \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]$$

longitudinális rész $\qquad \Pi_{\mu\nu} = \left(g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\Pi(k^2)$

gluon sajátenergiára felírva $\quad k^\mu k^\nu \Pi^{ab}_{\mu\nu} = 0$

Dyson-felösszegzés

$$D^{ab}_{0\mu\nu} + D^{ac}_{0\mu\lambda}\Pi^{cd,\lambda\rho} D^{db}_{0\rho\nu} + \dots$$

$$\left(D^{ab}_{0\mu\nu}\right)^{-1} = \frac{\delta_{ab}}{k^2}\left(g_{\mu\nu} + \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)$$

3-gluon vertex $\quad \Lambda^{abc}_{\mu\nu\lambda}$

4-gluon vertex $\quad \Lambda^{a_1\dots a_4}_{\mu_1\dots\mu_4}$

kvark-gluon $\quad \Lambda^{a\,ij}_{F\,\mu}$ $\quad$ sajátenergiák $\quad$ ghost-gluon vertex

nem független $\Pi^{ab}_{\mu\nu}, \tilde{\Pi}^{ab}, \Sigma^{ij}, \tilde{\Lambda}^{abc}_\mu$ - től, úgy, hogy ha utóbbiak végesek, az előbbiek is

$\delta\langle 0|T(A^a_\mu A^b_\nu \chi^c_1)|0\rangle = 0 \quad$ ebből kell kiindulni a 3 gluon esetén

$\delta\langle 0|T(A\,A\,A\,A\chi_1)|0\rangle = 0 \quad$ a 4 gluonhoz

$\delta\langle 0|T(\Psi_i(x)\bar{\Psi}_j(y)\chi^a_1(z))|0\rangle = 0 \quad$ vertex és propagátorok közötti kapcsolatok ezekből jönnek ki

Renormálási csoport

A renormált Green-fv-ek végesek, de sémafüggőek → a div. részek leválasztása nem egyértelmű

Nálunk μ = renormálási skála értéke tetszőleges ennek a megválasztása rögzíti a skálát

A fizikai mérhető mennyiségek ne függjenek μ-től.

Csupasz Lagrange-fv-nyel számolunk Green-fv-eket

$\xrightarrow[\text{renorm.}]{}$ renormált Green-fv véges paraméterekkel $\longrightarrow$

$\rightarrow$ fizikai mennyiségek számolhatók

Fizikai mennyiségek rögzített értékei $\rightarrow$ renormált paraméterek $\rightarrow$ csupasz paraméterek

A renormálás közbenső lépés $\Rightarrow$ nem baj, ha nem egyértelmű

10.24.

Dimenziós regularizáció és minimális levonás után is megmarad a nem egyértelműség a μ renormálási skálával.

$$Z[J,g,m] = e^{iW[J,g,m]}$$

$\uparrow$ összefüggő Green-fv-ek generátora

$J_r = Z_3^{1/2} J$ renormált forrás

$\Phi_r = Z_3^{-1/2}\Phi$ miatt így vezetjük be, mert szorzatuk van a generátorfunkcionálban

$$g_r = Z_g^{-1} g$$

$$m_r^2 = Z_m^{-1} m^2$$

$$W[J,g,m] = W_r[J_r, g_r, m_r, \mu]$$

$\uparrow$ rendenként elvégezve a renormálást

$$= W_r'[J_r', g_r', m_r', \mu']$$

$J_r' = z_3^{1/2} J_r \qquad z_3 = \frac{Z_3'}{Z_3}$ véges

$g_r' = z_g g_r$

$m_r' = z_m m_r \qquad$ z-k végesek!

$\Phi_r' = z_3^{-1/3}\Phi_r$

Mérhetők az S-mátrixelemek

= 1PI, truncált (külső lábakra leosztunk a propagátorral), on-shell Green-fv-ek a mérhetőek

$$\left[S'(p, g_r', m_r', \mu') \overset{?}{=} S(p, g_r, m_r, \mu)\right]$$

ez csak az egzakt S-mátrixra igaz

véges n-edik rendben $S'(\ldots) - S(\ldots) = O(g_r^{n+1})$

$$\Gamma_{rn}(p, g_r, m_r, \mu) = Z_3^{n/2}(\mu)\,\Gamma_n(p, g, m)$$ renormált n-pontfv. kapcsolata a csupasszal

függ μ-től — független μ-től

μ renormálási sémánként folytonosan változik

a sémák közötti transzformációk csoportot alkotnak (néha csak félcsoport)

Dimenziós regularizáció és $\overline{MS}$ renormálás esete:

$g = g_0 \mu_0^{\varepsilon}$ — μ_0, g_0 fix

$g_r = g_R \mu^{\varepsilon}$ — μ, g_r változik

g_R: dimenziótlanok

$$\frac{dg}{d\mu} = 0 \qquad \frac{dm}{d\mu} = 0 \qquad g_r = Z_g^{-1} g$$

$$g_R(\mu) = \left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^{\varepsilon} Z_g^{-1}(\mu)\, g_0$$

$$m_R(\mu) = Z_m(\mu)^{-1/2}\, m$$

$$\mu \frac{dg_R}{d\mu} \left(= \frac{dg_R}{d(\ln\mu)}\right) = \beta = \beta\text{-fv.} = \text{béta-fv.}$$

$$\Rightarrow \quad \beta = -\varepsilon g_R - \frac{\mu \frac{dZ_g}{d\mu}}{Z_g} g_R$$

$$\mu \frac{dm_R}{d\mu} = -m_R \gamma_m$$

$$\gamma_m = \frac{\mu}{2 Z_m} \frac{d(Z_m^{1/2})}{d\mu}$$

t'Hooft egyenletek

β, γ_m perturbációszámításban számolható, véges mennyiségek

β, γ_m μ-től direkt és m_R, g_R-en keresztül függnek

De MS ($\overline{MS}$) esetén

$$\beta = \beta(g_R), \quad \gamma_m = \gamma_m(g_R) \quad \text{„tömegfüggetlen renormálás"}$$

u.i. $$Z_g = 1 + g_R^2 \frac{A_{11}}{\varepsilon} + g_R^4 \left(\frac{A_{22}}{\varepsilon^2} + \frac{A_{21}}{\varepsilon} \right) + \dots$$

$$Z_m^{1/2} = 1 + g_R^2 \frac{B_{11}}{\varepsilon} + g_R^4 \left(\frac{B_{22}}{\varepsilon^2} + \frac{B_{21}}{\varepsilon} \right) + \dots$$

A, B állandók és μ-től nem függnek $\Rightarrow$ dimenziós okokból

m_R-től is függetlenek

Tömegfüggetlen renormálásban a t'Hooft egyenletek

szétcsatolódnak.

Csupasz Γ_n nem függ μ-től

$$\frac{d}{d\mu} \underbrace{\Gamma_n(p, g, m)}_{Z_3^{-n/2} \Gamma_{r,n}} \Big|_{g,m} = 0$$

$$\hookrightarrow Z_3(\mu, g, m)\, \Gamma_{rn}(p, g_R(\mu, g, m), m_R(\mu, g, m), \mu)$$

$$\frac{\partial Z_3^{-n/2}}{\partial \mu} \Big|_{g,m} \Gamma_{rn} + Z_3^{-n/2} \left[\frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{\partial}{\partial g_R} \frac{\partial g_R}{\partial \mu} + \frac{\partial}{\partial m_R} \frac{\partial m_R}{\partial \mu} \right] \Gamma_{rn} \Big|_{g,m} = 0 \qquad \Big| \cdot \mu \cdot Z_3^{n/2}$$

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g_R} - \gamma_m m_R \frac{\partial}{\partial m_R} - n\gamma \right) \Gamma_{r,n} = 0$$

$$\gamma \equiv \frac{\mu}{2 Z_3} \frac{\partial Z_3}{\partial \mu} \Big|_{g,m}$$

$$\beta = \mu \frac{\partial g_R}{\partial \mu} \Big|_{g,m}$$

$$\gamma_m = -\frac{\mu}{m_R} \frac{\partial m_R}{\partial \mu} \Big|_{g,m}$$

t'Hooft - Weinberg egyenletek

β, γ, γ_m csak g_R-től függ

QCD renorm csoport egyenlete (melléklet)

A t'Hooft - Weinberg egyenletek megoldása

innentől nem jelöljük, hogy renormált mennyiségeket használjuk

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\frac{\partial}{\partial g}-\gamma_m m\frac{\partial}{\partial m}-n\gamma\right]\Gamma_n(\lambda p, g, m, \mu)=0$$

↑ felskáláztuk az impulzust

dimenzióanalízisből

$$\Gamma_n(\lambda p, g, m, \mu)=\mu^{4-n}\,\overline{\Gamma}_n\left(\frac{\lambda p}{\mu}, g, \frac{m}{\mu}\right)$$

u.i. 4 tér, 1 $\delta^{(4)}()$

$$-4_n+n=(-4-2n+x)$$

$$\Rightarrow\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+m\frac{\partial}{\partial m}+\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}-4+n\right)\Gamma_n(\lambda p, \ldots)=0$$

$$\Big(\underbrace{-\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}}_{\frac{\partial}{\partial t}}+\beta\frac{\partial}{\partial g}-(1+\gamma_m)m\frac{\partial}{\partial m}+\underbrace{4-n-n\gamma}_{\omega_n}\Big)\Gamma_n(\lambda p, \ldots)=0$$

vezessük be $t=-\ln\lambda$ ($\lambda>1$-re gondolunk)

definiáljuk a futó csatolást $\bar{g}(t)$ $\quad \beta(\bar{g})=\frac{\mu}{\lambda}\frac{\partial\bar{g}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}{\partial\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}$

és a futó tömeget $\bar{m}(t)$ $\quad -1-\gamma_m=\frac{\mu}{\lambda}\frac{1}{\bar{m}}\frac{d\bar{m}}{d\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}$

$$\frac{d\bar{g}}{dt}=\beta(\bar{g})$$

$$\frac{1}{\bar{m}}\frac{d\bar{m}}{dt}=-1-\gamma_m(\bar{g})$$

$$\left[\frac{d}{dt}+\omega_n(\bar{g})\right]\Gamma_n(e^{-t}p, \bar{g}, \bar{m}, \mu)=0$$

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{d\bar{g}}{dt}\frac{\partial}{\partial\bar{g}}+\underbrace{\frac{d\bar{m}}{dt}}_{-(1+\gamma_m)\bar{m}}\frac{\partial}{\partial\bar{m}}$$

ez szétválasztható diffegyenlet

Megoldás:

$$\Gamma_n(e^{-t}p, \bar{g}(t), \bar{m}(t), \mu)=\Gamma_n(p, g, m, \mu)\,e^{-\int_0^t dt'\,\omega_n(\bar{g}(t'))}$$

$\bar{g}(0)=g \quad \bar{m}(0)=m \quad$ kezdeti felt.

$p \to e^t p$ a megoldásba írhatjuk

$$\Gamma_n(e^t p, g, m, \mu) = \Gamma_n(p, \bar{g}(t), \bar{m}(t), \mu)\, e^{(4-n)t - n\int_0^t dt'\, \gamma(\bar{g}(t'))}$$

A megoldás viselkedése:

- Ha nem lenne divergencia, nem kell renormálás

$$\beta = \gamma_m = \gamma = 0$$

$$\bar{g}(t) = g, \quad \bar{m}(t) = m e^{-t}$$

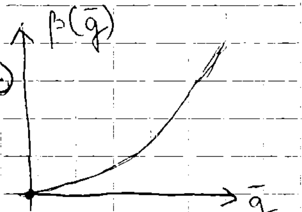
$$\Gamma_n(e^t p, g, m) = (e^t)^{4-n}\, \Gamma_n(p, g, m e^{-t})$$

$t \to \infty$-re a naiv hatványszámolás (dim. analízis)

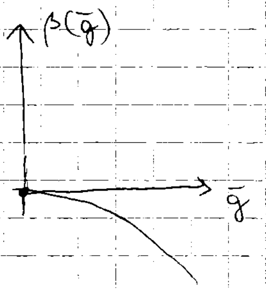
- Ha $m = 0$ $\quad \Gamma_n(e^t p, g, \mu) = \Gamma_n(p, \underset{\uparrow\ \text{eltérés}}{\bar{g}(t)}, \mu)\, e^{(4-n)t - \underbrace{n\int_0^t dt'\, \gamma(\bar{g}(t'))}_{\text{eltérés a naivtól}}}$

$$t = \int^{\bar{g}(t)} \frac{dg'}{\beta(g')} \qquad \frac{d\bar{g}}{dt} = \beta$$

1 a



b

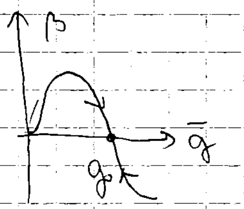


a $\quad \bar{g}(t) \to \begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases} \quad t \to \pm\infty$

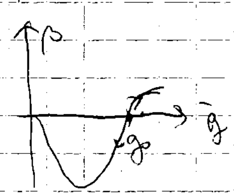
b $\quad \bar{g}(t) \to \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases} \quad t \to \pm\infty$

↑ ez van QCD-ben
aszimptotikus szabadság

2



UV
fix-pont



IR
fix pont

Ha van fix pont $\quad \int_0^t dt'\, \gamma(\bar{g}(t')) \to \gamma(g_0)\, t \quad t \to \pm\infty$

Ha $g_0 = 0 \Rightarrow \gamma(0) = 0$, "majdnem" szabad térelméletet aszimptotikusan

attól függ, mennyire megyünk el ∞-be