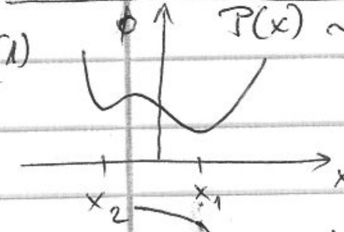
Fázisátalakulások (1. EA) 09.11.

stabilitás kérdése → fá-ok osztályozása

term. din. pot. szélsőértékének vizsgálata

a minimumok mélysége változik

(1) $P(x) \sim e^{-\Phi(x)/kT}$



$P(x)$ éles fgv,

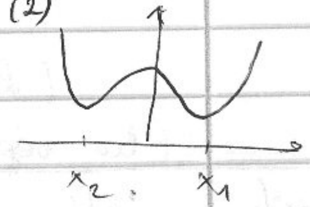
a term. din. pot. sima, széles

x (sűrűség, mágnesezettség, stb.)

metastabil állapot, fluktuáció kell, h. ne ragadjon be a rdsz. és átkerüljön x_1-be (stabil)

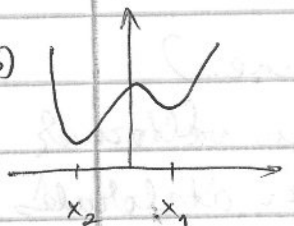
ΔT

(2)



koegzisztencia állapotok:

(3)



ELSŐRENDŰ F.Á.

hiszterézis is lehet

pl. gázállapotok → $x_{1,2}$: sűrűség

(első derivált) → a term. din pot-nak a hányadik deriváltja

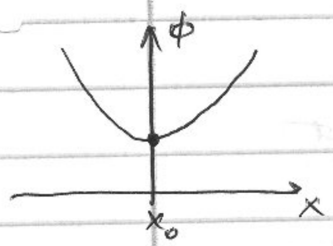
(Ehrenfest-féle osztályozás)

de az a módszer csak eddig működik,

másodrendűnél már divergenciák jönnek létre

Stabilitás határa: állandó V-n vett fajhő pozitív legyen

∃ maximum! (stat. fiz. megfogalmazás)



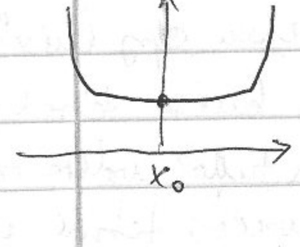
stab. felt: $\left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{x_0} = 0$ (szükséges)

egyensúlyi helyzet a pot. minimuma

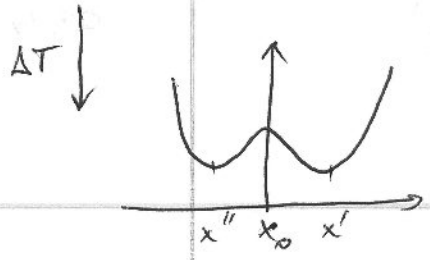
ΔT

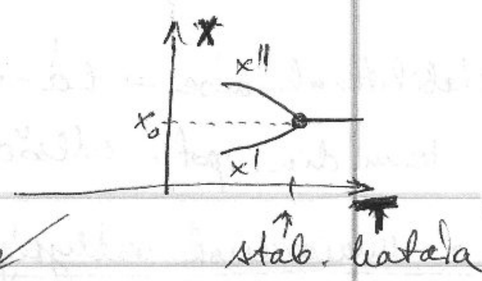
$\left.\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right|_{x_0} > 0$ (elégséges)

stab. határán (első deriv.)



$\left.\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right|_{x_0} = 0$





folytonos átalakulások

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \chi^{-1}$$ (szuszceptibilitás inverze)

$x = 0 \rightarrow \chi$ divergál

pl. ferromágneses anyagoknál

véges spontán mágnesezettségnek mindig két véges értéke van

(két alapvető mechanizmus)

(ha véges ugrás lenne ⇒ másodrendű lenne...)

másik osztályozás: a rdsz szimmetriái hogyan változnak

(1) nincs szimm. változás (pl. folyadék–gáz átalakulás)

(2) van változás

két szimm.-hoz tartozó csoport: G_1 és G_2

(2 eset)

$G_1 \subset G_2$

szimm. sértés,

lehet folytonos

(pl. mágnesezettség folytonosan tűnik el)

G_1 és G_2 nem rokon

(1. rendű átalakulás: ugrásszerű változás)

ezzel kapcs.-ban bevezetjük a RENDPARAMÉTERT:

pl. ferromágn.:

mágnesezettség: $m = \begin{cases} 0 & \text{param.} \\ \neq 0 & \text{ferrom.} \end{cases}$

(az erősségét is jelzi)

KONJUGÁLT TÉR: pl. fmágn. H mágn. térerősség

(param. fázis + H → $m \neq 0$)

a rendparam. nemnulla értékét létrehozhatom egy külső térrel

antif.: ↑↓, kitüntetett irány változik a külső térrel → atomi távokon statikus térrel nem tudok változtatni (csak emágn. térrel) → nem valós térről van szó

Szimm. sértő tereken általános elmélet: LANDAU-ELMÉLET

történeti áttek.:

- Andrews (skót): CO_2 kritikus pontjának felfedezése
  folyadék $\rightleftharpoons$ gáz átalakulások
  mintha egy ilyen folyamat játszódna le

- Pierre Curie: ferromágn. fázisdiagramjai
- Gibbs: oldatok fázisegyensúlya (Gibbs-féle fázisszabályok)

1930-as évek: antiferromágn. megtalálása,
He superfolyékonyság vizsg.!

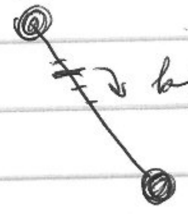
egyszerű elméletek: → van der Waals
→ Pierre Weiss – átlagtér-elmélet
⇓
ezek összefogl.: Landau-elm.

Onsanger ⇒ Ising-modell, ami, amire a Landau-elm. nem jó ⇒ mérések

---

Stab. határon a változó folyamatok lelassulnak, leginkább az, amelyik legjobban érintett a foly-ban

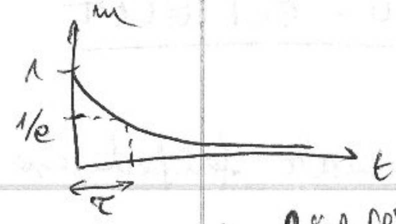
pl.:



⇒ kp.-ot lejjebb viszem
középen: irreleváns helyzet
alatta átfordul

lengés periódusideje: lassul a mozgás
hogyan közelíti az egyensúlyi szémust?
a relax. idő exp-an csökken
⇓
divergál

krit. pontban: nemegyensúlyi értéket adok neki, az is le fog csengeni

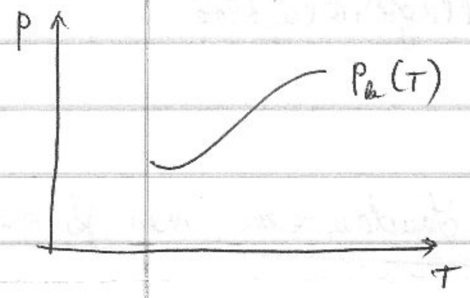


pl. hődiffúzió (diff-ós együttható • hullhossz^2 már nem igaz)

Egykomponensű anyag, tfh. 2 fázis egyensúlyban
szil-foly, foly-gáz, szil-szil, pl. jég
termikus, anyagi, mechanikai egyens.

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ T_1 = T_2 & \mu_1 = \mu_2 & p_1 = p_2 \\ \| & \Downarrow & \| \\ T & & p \end{array}$$

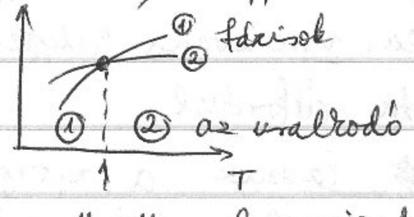
$\mu_1(T,p) = \mu_2(T,p) \implies p_{koegz.}(T)$ meghat-ó



<u>latens hő:</u> $L = T(s_2 - s_1)$
a fázisátalakuláskor mennyi hőt kell befektetni
szabadentalpia

$$G(T,p) = n \cdot \mu(T,p)$$

p adott:



$\mu_1 = \mu_2$, koegzisztencia

$$d\mu = -s\,dT + v\,dp$$

$$\left(\frac{\partial \mu_1}{\partial T}\right)_p > \left(\frac{\partial \mu_2}{\partial T}\right)_p$$

$$-s_1 > -s_2$$

$$\boxed{s_2 > s_1}$$

latens hő kell, ha alacsonyabb T-ből magasabba megy a fázisátalakulás

$$\mu_1(T, p_k(T)) \equiv \mu_2(T, p_k(T))$$

$$-s_1 + v_1 \cdot \frac{dp_k}{dT} = -s_2 + v_2 \frac{dp_k}{dT}$$

$$\boxed{\frac{dp_k}{dT} = \frac{s_2 - s_1}{v_2 - v_1} \quad \text{Clausius - Clapeyron - egyenlet}}$$

foly - gáz : $s_2 > s_1$

① ② $v_2 > v_1$ (fajtérfogat)

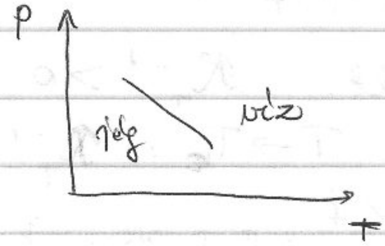
$\frac{dp_k}{dT} > 0$ növekvő fgv. a hőmérs. - tel

szil - foly : $s_2 > s_1$

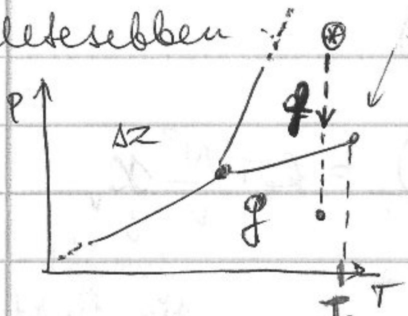
① ②

pl. víz : $v_2 < v_1$

$\frac{dp_k}{dT} < 0$



részletesebben

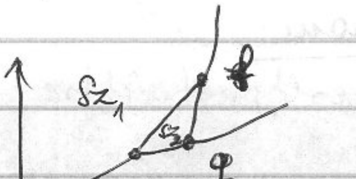


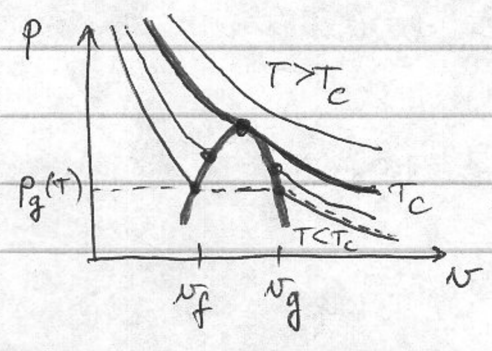
$$\begin{cases} p_1 = p_2 = p_3 = p \\ T_1 = T_2 = T_3 = T \\ \mu_1(T,p) = \mu_2(T,p) = \mu_3(T,p) \end{cases}$$

→ meghatározott pontban csak: HÁRMASPONT

(anyag esetén akár több hármaspont is)

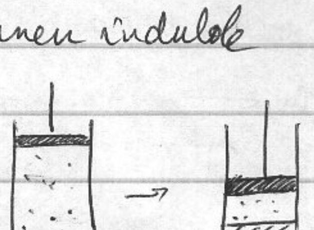
pl. kén

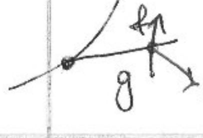




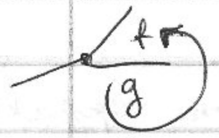
⊛ innen indulok

pl:



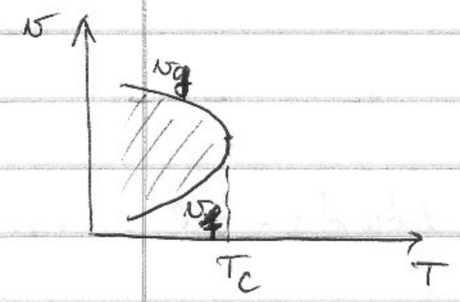


így megyek, látom az átmenetet
koegzisztencia



így megyek: nincs különbség

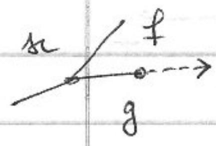
probléma: foly. vezet, félgáz nem vezet elektromosan



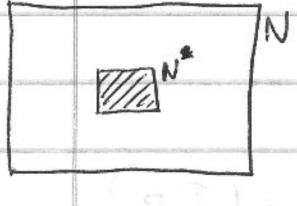
$$\varkappa_T = -\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T \cdot \frac{1}{v} > 0$$ kompresszibilitás

stab. felt.: $\varkappa_T^{-1} > 0$

$T \to T_C$: $\varkappa_T^{-1} \to 0$, $\varkappa_T \to \infty$



erre megyünk



(hő- és részecsketartály)

$$\overline{\Delta N^2} = k_B T \left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_T = k_B T \frac{N^2}{V} \varkappa_V$$

divergál → sűr. fluktuáció

kísérletileg: átlátszó folyadék erősen fényszóró lesz

Ferromágnessé váló fázisdiagram:

doménok kialakulása, monológ struktúra

(szórt tér megszűnése)

homogén anyagként vizsgáljuk, lemágnesezést mindig figy-be kell venni (a belső tér különbözik a külsőtől)

paramágn $\leftrightarrow$ ferrom.

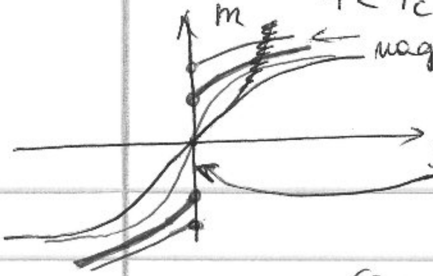
m, H, T fontos paraméterek

T < T_c (Curie-hőm.)

izotermák → mágn. áll. egyenlet

nagyobb térerőnél

telítődési mágnesezettség

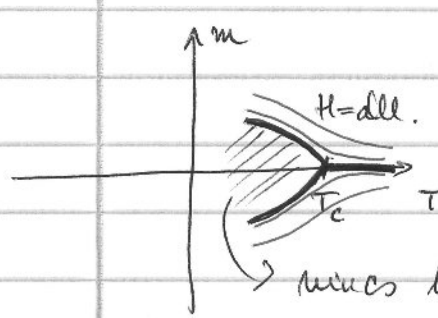


határesetben függőleges érintő, T_c

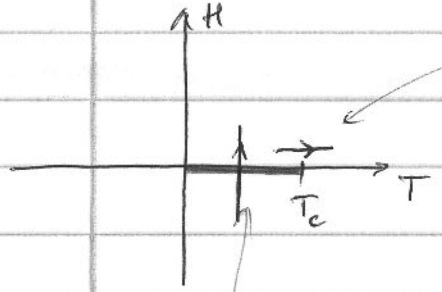
$$\left(\frac{\partial H}{\partial m}\right)_T = \chi^{-1} \to 0 \quad (T \to T_c)$$

$$\overline{\Delta m^2} = k_B T \left(\frac{\partial m}{\partial H}\right)_T = k_B T \chi$$

mágnesezettség fluktuációk: neutronszórásból látszik



nincs homogén mágnesezettségű állapot



folytonos átalakulás

m-nek két értéke lehet, különböző doménekben a tartományban

hasonlít a folyadék-gáz koegz. görbéhez

ugrásszerűen változik, elsőrendű fázisátalakulás

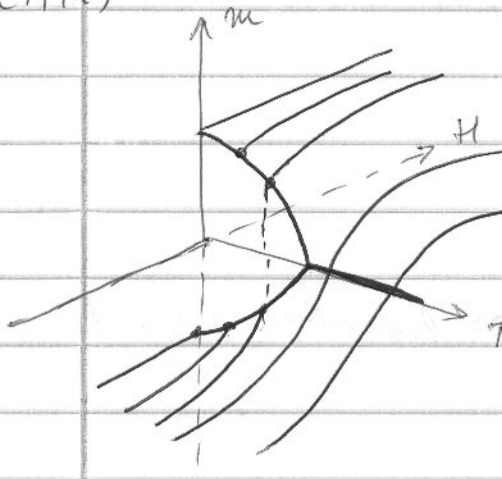
$v \Leftrightarrow m$

$p - p_c \Leftrightarrow H$

$(\mu - \mu_c)$

Ferromágnesek: Fázisátalakulások (2. EA) 09.21.

releváns változók: m, T, H
egy rajzban ábrázolva:
m(T, H)



$$\frac{\partial F(T,H)}{\partial H} = -m$$ szab. en.

a derivált negatív ⇒
szakadás F-ben
szinguláris pont

anyag	T_C[K]
Fe	1043
Ni	630
Gd	293
EuO	69
$CrBr_3$	32,8
EuS	16,6
$LiTbF_4$	2,88

izotróp ferromágnes (spontán mágnesezettség bármelyik irányban beáll)

lokalizált mágneses momentumok rendeződése ferrom.-ben
T_C fölött ennek várható értéke 0
–"– alatt –"– $\neq 0$

sávmágnesség
s, s' sávmágn. mom-ok
dipól kh. milyen erősségű

tipikus távolság $\frac{\mu_0 \mu_B^2}{a^3} \sim 10^{-23}$ J $a \sim 2\cdot 10^{-10}$ m
~ 1K

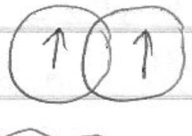
kicserélődési kh. hozza létre (Coulomb-kh-ból adódik)
az e^--felhők a kristályrácsban átfednek,
azonos spinűek egy helyen nem szeretnek lenni
effektív spinmodellek létrehozása, Heisenberg-modell
2 spin kh-a: $-J\underline{S}\cdot\underline{S}'$
skalárszorzat, kvantumban spinoperátorokkal
(itt véges hosszúságú vektorokként képzeljük el)

$J > 0$ $\uparrow\uparrow$ ferromágneses csatolás

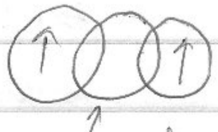
$J < 0$ $\downarrow\uparrow$ antiferromágneses csatolás

kicser. kh. többféleképpen jöhet létre, az előjel sem látszik rögtön

direkt kicser.:

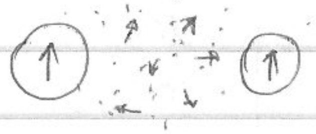


szuper kicser.:



nemmágn. atom, ez közvetíti a kh-t

indirekt kicser.:
(fémekben)



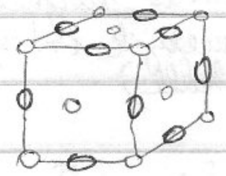
vezetési e^--ok közvetítenek

ionok mágneses mom-a polarizálja az e^--felhőt, ebben ül a másik atom is

pl. EuO kősó szerkezettel rendelkezik

lapcentrált köbös Eu

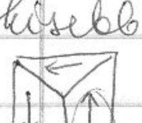
O atomok



kristályban anizotrópia nagyon gyenge ⇒ izotróp mágn. lehet

Antiferromágnesek

legkisebb E: szórt terek megszüntetése ⇐ domének kialakulása



az indukcióvonalak a mágnesen belül záródnak, nem jönnek a felszín fölé

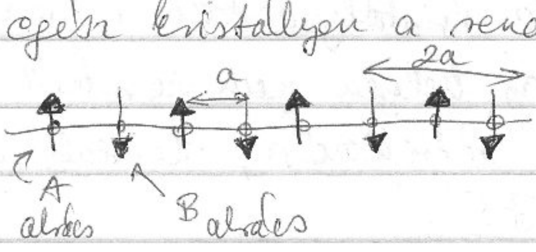
most egy ilyen homogén tartományról fogunk beszélni

▶ van hosszútávú mágneses rendeződés

▶ nincs eredő mágnesezettség (makroszkopikusan, spontán)

végigfut az egész kristályon a rend

2 alrács

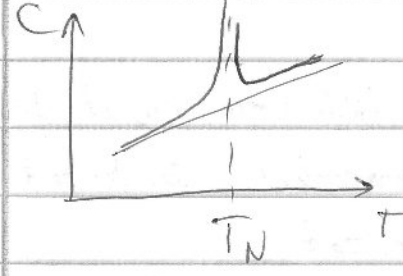


kémiai szerkezet

mágn. mom.-ok rakódnak erre

makroszkopikus kísérőjelek (átalakulás)
↑
fajhő anomália (C)

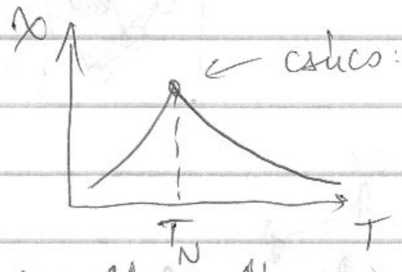
→ mágnesezettség eltűnik T-vel, paramágnessé válik



Néel-hőm.

itt fázisátalakulás játszódik le

→ szuszceptibilitás



← csúcs: antiferrom. jellegzetesség

→ spin, másképp szóródik, ha ↑↑ v. ↑↓

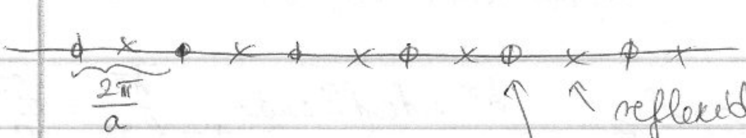
$T > T_N$ Bragg-reflexió → kémiai szerkezet szolgáltatja

Bragg-csúcsok a reciprokrács vektoroknál jelentkeznek

rec. rácsv-ok: $\frac{2\pi}{a} \cdot n$ alakúak

$T < T_N$ → mágn. szerkezet jelenik meg

a rec. rácsv-ok: $\frac{2\pi}{2a} \cdot n = \frac{\pi}{a} n, \quad n \in \mathbb{Z}$



↑ reflexiók (szuperreflexió)

Bragg-csúcsok

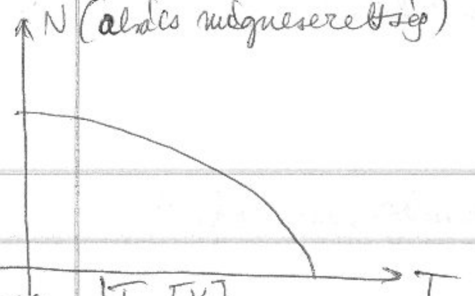
lokális mérések, pl. NMR (mag-mágneses rez.)

mágn. térben a mágn. mom-ok felhasadnak

$$\underbrace{g}_{\text{tényező}}\,\underbrace{\mu_N}_{\text{mag-magneton}}\,\overset{\text{mágn. mom.}}{\underbrace{I}_{\text{imp. nyomaték}}} \cdot \overset{\text{mágn. tér}}{H_{lok}} \to \text{felhasadás}$$

$$g\mu_N I \cdot H \sim h\nu$$

↳ rezonanciaelnyelést látunk



(mint a ferromágneses spontán mágnesezettsége)

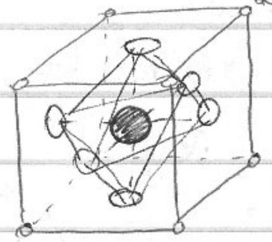
anyag	T_N [K]
MnO	122
$RbMnF_3$	83
MnF_2	67
$GdAlO_3$	3,87
$LiErF_4$	0,38

(antiferrom.-ből több van, mint ferrom.-ből)

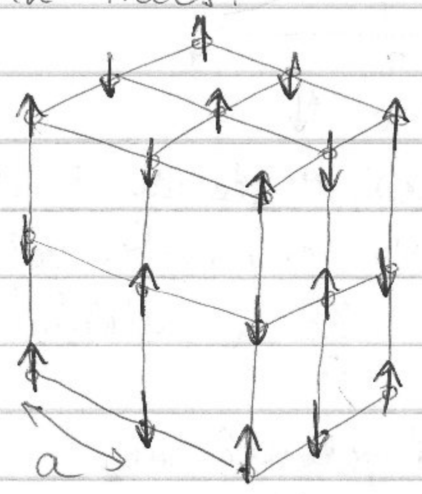
$RbMnF_3$: perovszkit-szerkezet

SC-szerkezet

Rb○, Mn ●, F ○



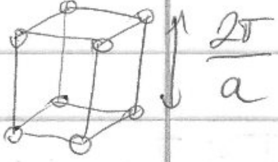
Mn-rács:



egyszerű köbös (SC)

rec. rács: SC

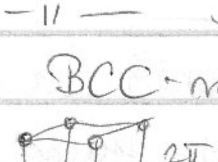
1 cella:



legközelebbi szomszédok (mágn. mom): ↑↓

↑-alrács: FCC-rács ⎫
↓ — ″ —: FCC — ″ — ⎭ egymáshoz képest eltolva

ennek rec. rácsa: BCC-rács: 4π rácsállandó, $\frac{4\pi}{2a} = \frac{2\pi}{a}$

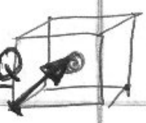


előjelváltás: síkhullámmal állítom elő

$$\underline{R} = a(n_x, n_y, n_z)$$

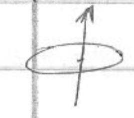
$$\underbrace{e^{i\pi(n_x+n_y+n_z)}}_{\text{a mágnesezettség előjelét adja meg}} = \begin{cases} 1, & \text{ha } n_x+n_y+n_z = \text{páros} \\ -1, & \text{— ″ —} = \text{ptl.} \end{cases}$$

$e^{i\underline{Q}\underline{R}}$ ← rácsvektor $= e^{i\pi(n_x+n_y+n_z)}$

$\underline{Q} = \frac{\pi}{a}(1,1,1)$ rec. rács végpontja: 

komponensek száma: n

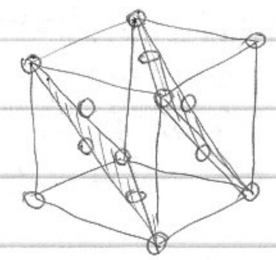
ferromágnes: ▶ egytengelyű fm. (1 kitüntetett tengely) $n=1$
(spontán csak ebben az irányban)

▶ planáris fm.: spontán mágn. 1 kitüntetett irányra merőlegesen:  
rendparam: 2 komp-ú vektorként $n=2$

▶ térbeli fm., 3 komp-ú vektor (köbös, izotróp) foglalja össze $n=3$

antiferromágnes: $n = 1,2,3$
szomszédok lehetnek ellentétes irányúak ettől még

Pl.: ($n=8$ is lehet)
MnO kősó szerkezet
Mn-rács: fcc



o: Mn

▶ sík, normálisa: $(1,1,1)$ irányban és a sík az egyik alrács része ezzel párhuzamos síkon ellentétesen állnak a mom-ok

mindegyik síkon ferrom.-es rend, 1 síkon belül tetszőleges irányban (2 kom-ú vektor)
mind a 4 átlóra merőleges síkok mentén megvalósulhat ⇒
⇒ $n = 8$ komp-ú rendparaméter
(2: síkok, 4: átlók)

T_c körül nagy fluktuációk, instabil komponensek flukt-ja, ebből az egyik lesz az, amelyikbe a rdsz. befagy

Mágn. szerk.-ek osztályozása:

transzláció + forgatás + tükrözés → pontcsoportok (32 db)
+ csúszósíkok + csavartengelyek → tércsoportok (230 db)
(transzl. + tükr.) (transzl. + forg.)

mágn. szerkezetek: + trafó: a mágnesezettség előjelet vált: $\underline{m} \to -\underline{m}$
(időtükrözés)

~ pontcsoportok (122 db)
~ tércsop-ok (1651 db)

nem periodikus szerk-ű mágnesek:
inkommenzurábilis szerk.-ek (nem összemérhetőek)
A és B szerk. szuperpozíciója
(pl. kémiai + mágneses szerk.)

$\left.\begin{array}{l}\lambda_A\\ \lambda_B\end{array}\right\}$ periódusa

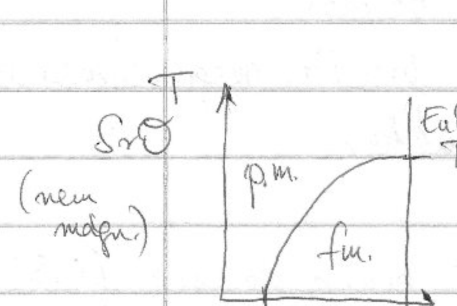
→ kommenzurábilis: $\frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \text{rac} = \frac{m}{n}$ relatív prímek $m, n \in \mathbb{Z}$

$\lambda_A \cdot n = \lambda_B \cdot m = \Lambda$ periodikus szerkezet

→ inkomm. szerk: $\frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \text{irrac.}$

- nem periodikus
- a mérés szerint folytonosan változik valamelyik paraméter
- szabadon eltolható szerkezet, nem okoz E-változást

Hígított mágnesek: pl. helyettesítjük nemmágneses ionokkal
pl. EuO
$Eu^{2+} \to Sr^{2+}$
$Eu_x Sr_{1-x} O$

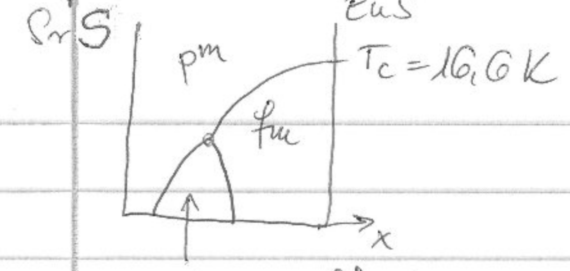


$x \approx 0{,}13$

a ferromágnesség hígítással eltüntethető

$J_{nn} > 0$
$J_{nnn} > 0$

pl. EuS



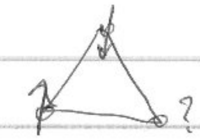
spinüveg fázis, nincs hosszútávú rend, de a várh. értéke a mágn-nek nem nulla
(véletlenszerűen fagyott be, lokálisan mágneseződött, Bragg-csúcsok nem alakulnak ki)

$J_{nn} > 0$ $\qquad$ $J_{nnn} < 0$

nearest neighbour $\qquad$ next

frusztráció: 2 ellentétes viselkedés között ingadozik, mindkettő vonzza

pl.:

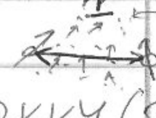


? azonos energia a két beálláshoz

spinüveghez kell → rendezetlenség és
→ frusztráció

fém-spinüvegek: AuFe ($Fe < 15$ at%) $\qquad$ rendezetlen = hirtelen hűtéssel

nemmágn. $\quad$ mágn. $\quad$ koncentráció



vezetési e-ok polarizálódnak

AgMn
CuMn

RKKY (Ruderman-Kittel-Kasuya-Yoshida) kölcsönhatás (kicserélődési)

$-J(r)\, \underline{S}_1 \underline{S}_2$, $\quad J(r) \sim \frac{\cos(2k_F r)}{r^3}$

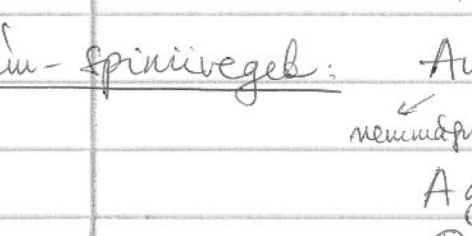
oszcillál, az ionoktól függ, h. fm. v. afm. jön létre
a távolságtól függően vált előjelet $J(r)$

Fizikai tul-ok függnek az előélettől

pl. szuszcept.: χ, kis mágn teret bekapcsolva $\chi = \frac{M}{H}$

ZFC: zero-field-cooling
(kapcsolgatjuk a teret)

FC: csak az elején bekapcs, utána hűtés



$T_{fagyási}$ → spinüveg fázis megjelenése

Fázisátalakulások 3. ea

$F = E - TS$

ferromágn. csat. → E akkor a legkisebb, ha $\parallel$-an állnak

gerjesztések → entrópiát is figy. vesszük

rendezetlen szer. is lehet

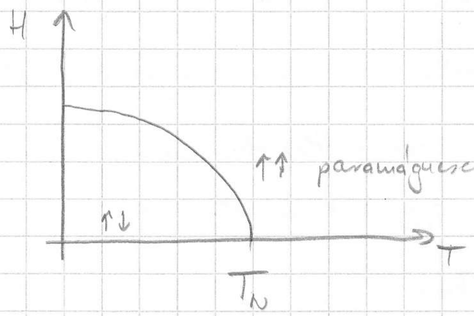
Érdekes: egymással ellentétes folyamatok versenye

→ Egytengelyű antiferromágnes külső térben

↳ egy adott ir-ban a legkönnyebb beállítani (spontán is így áll be)

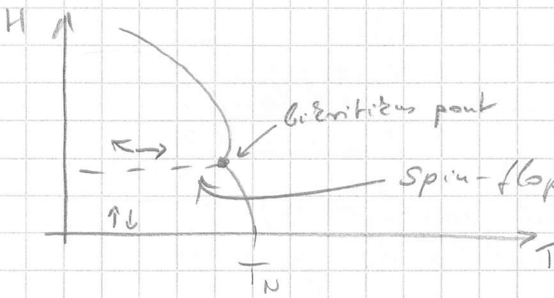
- anizotrópia energia
- kicserélődési energia (spinek szeretnek ellentétesen állni)
- Zeeman-en. (térerősséggel $\parallel$-an szeretnék beállni a mom-ok)

erős anizotrópia



↑↑ paramágneses, de van mágn. tér → beállítja

közepes anizotrópia

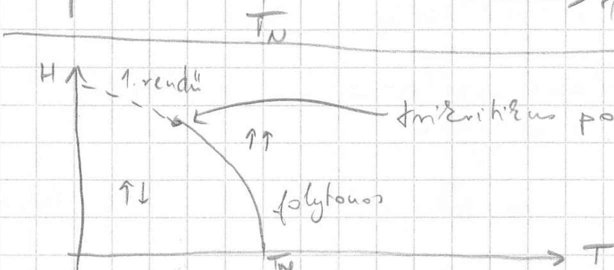


bikritikus pont

spin-flop átalakulás (1. rendű) → alrács mágnesezettség elfordul a térre $\perp$-en

⟵⟶ így az aniz. en-t növeli egy kicsit de a Zeem. en. csökkenti a létrejövő kis ↑ mágnesezettség

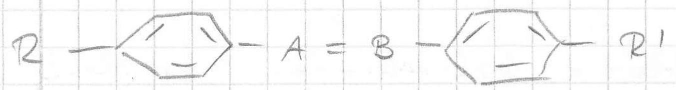
nincs anizotrópia (izotróp)



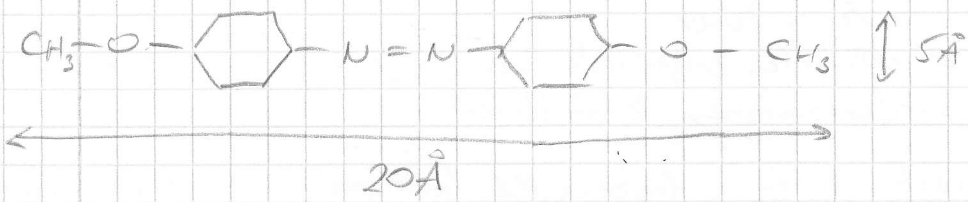
trikritikus pont, ahol vált 1. rendűre

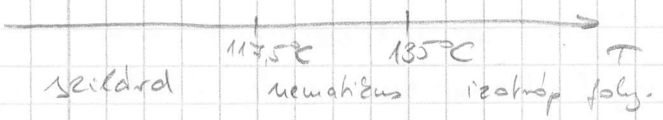
Folyadékkristályok (mindkét halm. áll. tul-ait mutatja)

molekulák: rúd alakúak



PAA para-azoxyanisole





izotróp folyadék

rendezetlen (tkp-ok, irányok)

nematikus

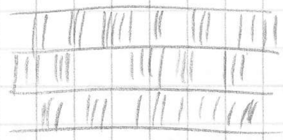
tkp-ok rendezetlenek

de van egy kitüntetett irány

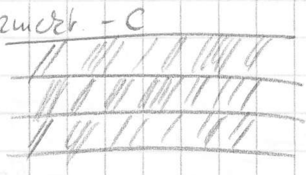
↑ $\underline{n}$ director

szmektikus tkp-ok is rendeződnek részlegesen (síkokban)

szmekt-A

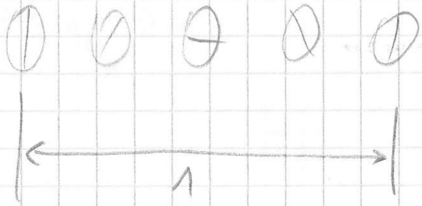


szmekt-C



anizotróp válasz (már rug. tulajdonságok is)

koleszterikus:



elfordul az irány ahogy rá merőlegesen haladunk

director forog

Nematikus fázis: dielektromos állandó kül. a kit. ir-ban

folytonos szimmetria sérül a rendeződéssel

hosszúhullámú moduláció (lassan változó ir. változás)

lokálisan homogén

dielektromos állandó fluktuál → fényszórás (nem lehet átlátni)

135°C felett: átlátszó

molekula $\qquad \nu^2 = 1$

$\underline{\nu}$ vektor → alkalmas lehet rendparaméternek ?

ellentétes beállás ekvivalens akkor is ha nem szimm. a molekula

második mom.:

↳ $\overline{\nu} = 0$ nem alkalmas rendparaméternek (h a fázisát. -t jelezze)

$\overline{\nu_\alpha \nu_\beta}$ izotróp folyadékban : $\overline{\nu_\alpha \nu_\beta} = \delta_{\alpha\beta} \cdot \frac{1}{3}$

$$\sum_\alpha \nu_\alpha^2 = 1$$

nematikus fázisban: $\overline{\nu_\alpha \nu_\beta} - \delta_{\alpha\beta}\frac{1}{3} = S_{\alpha\beta}$

$S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}$ szimmetrikus $\qquad Tr\,\underline{\underline{S}} = \sum_\alpha S_{\alpha\alpha} = 0$

spúrja 0

5 ftlen eleme van

ortog. tr-val diagonalizálható

3 sé → 2 ftlen, mert spúrtalan

egytengelyű nematikus állapot:
$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}S & & \\ & -\frac{1}{3}S & \\ & & -\frac{1}{3}S \end{pmatrix}$$

2 sé megegyezik

rá merőleges 2 ir.

kitünt. ir → a direktor iránya

$$S_{\alpha\beta} = \frac{2}{3} S\, n_\alpha n_\beta - \frac{1}{3} S \left(\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta \right) = S\left(n_\alpha n_\beta - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta} \right)$$

lényeg: a rendparaméter egy tenzor

Szilárd testekben lejátszódó fázisátalakulások:

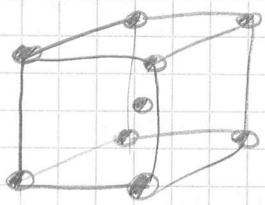
rend - rendezetlenség átalakulás

sárgaréz: CuZn $\qquad$ 45,8 - 48,9 at% Zn

$T_c = 740K$

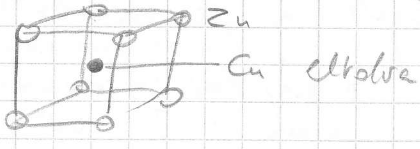
illusztráció 50%-ra:

$T > T_c$ bcc rács véletlenszerű (rendezetlen) elhelyezkedéssel



● egyf. vsz.gű a Zn és a Cu

$T < T_c$ sc rácson 2 alrács (Zn-alrács Cu-alrács)



Valójában:

p valséggel Zn, $1-p$ valséggel Cu bcc rácspontokban

rendezetlen áll.

rendezett áll:

Zn alrács: $p(1+x)$ valséggel Zn   Cu alrács: $p(1-x)$ valséggel Zn

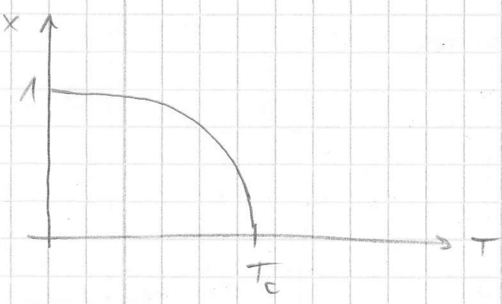
keverési arányhoz képest eltolódik

itt Zn kezd feldúsulni   itt Cu kezd feldúsulni

$x = 0$ rendezetlen áll.

$x \neq 0$ rendezett áll.

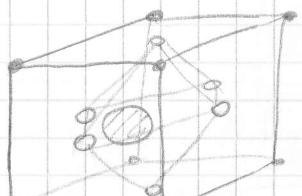
rtg diffrakció → különbséget tesz (szuperreflexiók)



szerkezeti átalakulások:

elemi cellában végbemenő atomi elmozdulások történnek, ami szimmetriasértéssel jár

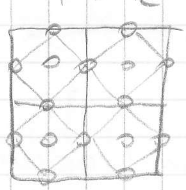
pl: $SrTiO_3$ stroncium titanát perovszkit szerk.



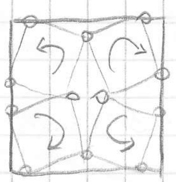
• Sr
Ti
O (oktaéder)

$T_c \sim 110$ K oktaéder elfordul az egyik köbös teng. körül

felülről: $T > T_c$



$T < T_c$



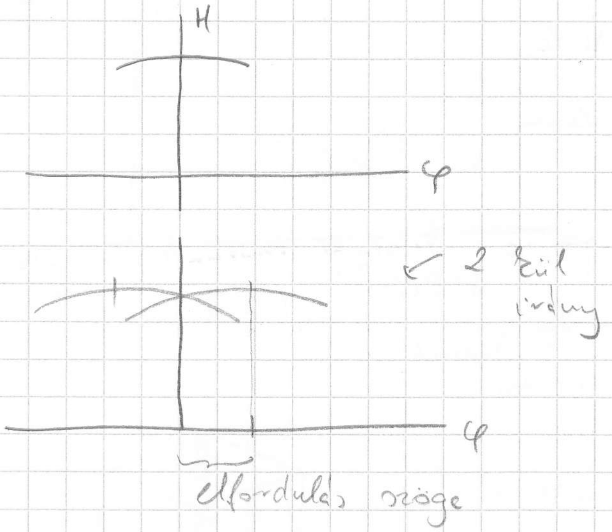
oktaéder: merev

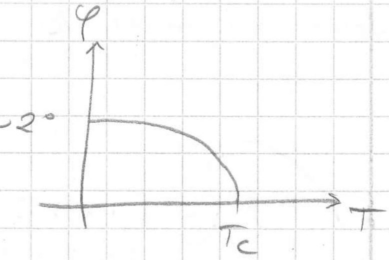
↳ elfordul → szomszédos ellentétesen forog

felette lévő cella: az is ellentétes

0 K felé haladva is csak 2° az elfordulás, kicsi

Ti helyére Fe → ESR → más lesz a rez. fr, ha anizotróp a környezete ennek a Fe-nak

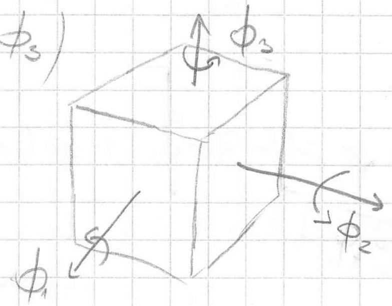




3 köbös tengely bármelyike körül létrejöhet az elfordulás

⇒ $n = 3$ komponensű rendparaméter

$$\underline{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$$



$LaAlO_3$ elfordulás (111) körül (testátló) $\underline{\phi} = (\phi, \phi, \phi)$

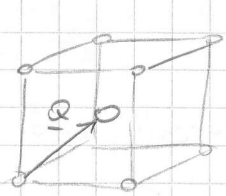
$$\phi_\ell = \phi\, e^{i \underline{Q}\,\underline{R}_\ell} \qquad \underline{R}_\ell = a\,(n_x, n_y, n_z) \quad \to \text{rácsvektor}$$

ampl. rácsáll. egész számok

$$\underline{Q} = \frac{\pi}{a}(1,1,1)$$

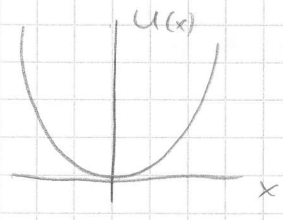
$$\phi_\ell = \phi\, e^{i\pi(n_x + n_y + n_z)}$$ szomszéd cella → ellentétes

SC reciprokrácsa szintén SC .



Mi az oka ennek a fázisátalakulásnak?

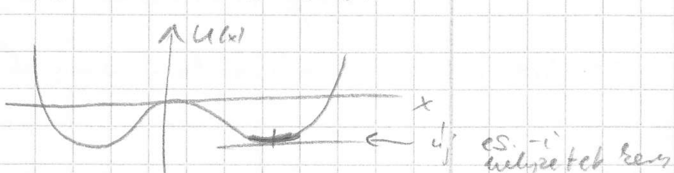
→ fononok, rácsrezgések → van egy olyan módus, ahol a merev oktaéderek rezegnek



$\frac{1}{2} m\omega^2 x^2$ en. tag kis kitérésekre

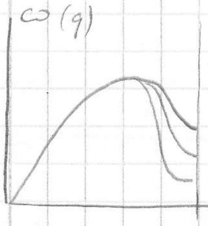
$\omega^2 > 0$ → visszatérítő

$\omega^2 < 0$ → anharmonikus tagok tartják végesen a kitérést



rácsdinamikai instabilitás játszódik le

adott fonon módusnak ki kell lágyulnia

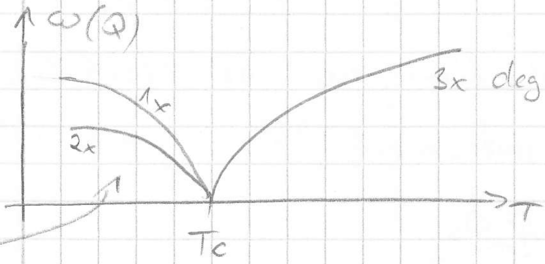


→ $T \to T_c^+$ felülről tartunk T_c-hez

q hullámszám (111) ir-ban

Q

(BZ határa)



3x deg, ezt a rezgést bármely tengely körül végezheti

másféle rezg. fr, ha az elfordulás tengelye körül rezeg, mint ha arra merőleges tengely körül

$\frac{2\pi}{\omega}$ per. idő $\xrightarrow{\omega \to 0}$ ∞ → lelassul a mozgás → kritikus lelassulás

Klasszikus oszcillátor T hőm-en

$$\frac{1}{2} m \omega^2 \overline{x^2} = \frac{k_B T}{2}$$

$$\overline{x^2} = \frac{k_B T}{m\omega^2}$$

$\omega \to 0 \Rightarrow \overline{x^2} \to \infty$ fluktuációk megnőnek

neutronszórással látni lehet

$m\omega^2 x = F$ visszatérítő erő

$$x = \frac{F}{m\omega^2} = \chi F$$

↑ válaszfv

$\overline{x^2} = k_B T \chi \Rightarrow \chi \to \infty$

de ez csak formális válaszfv

nem tudok olyan erővel hatni, hogy elforduljon az oktaéder

Ferroelektromos anyagok

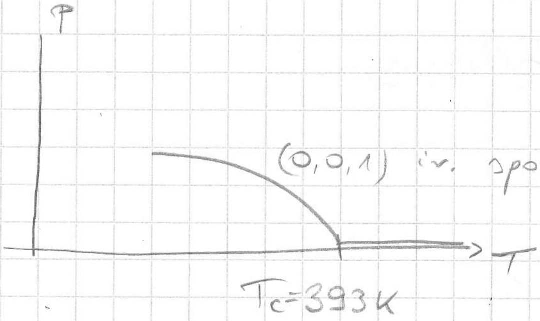
makr. polarizáció → melegítéssel eltüntethető

↳ megfordítható

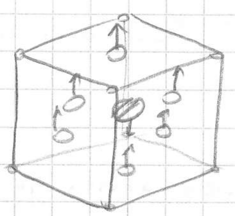
— szerkezeti átalakulás: lágy fonon $q = 0$

rácsdinamikai instabilitás

$BaTiO_3$



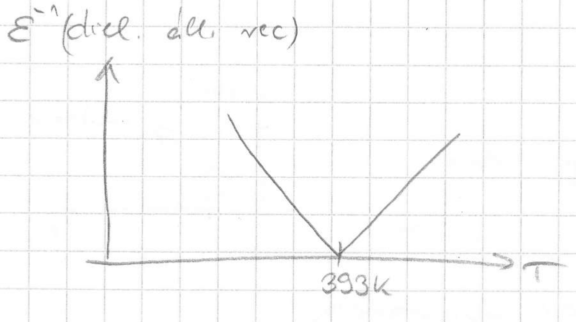
parael. → ferroel. átalakulás



O atomok (ionok) ↑ mozdulnak el (⊕ ionok)

Ti ionok ↓ —"— (⊖)

⇒ polarizáció



ε div. a krit. pontban

— rend - rendezetlenség átalakulás

KDP (kálium dihidrogén foszfát)

KH_2PO_4

improper ferroelectrics (nem valós ferri)

instabilitás véges hullámszámmal

másodlagos rendparaméterrel magával rántja a polarizációt

Rugalmas átalakulások

rendparaméter: homogén deformáció

valamilyen ir-ban a hangseb. 0-vá válik

Orientációs átalakulások (molekulakristályok)

szabad rotáció ⟺ libráció (forgó rezgés)

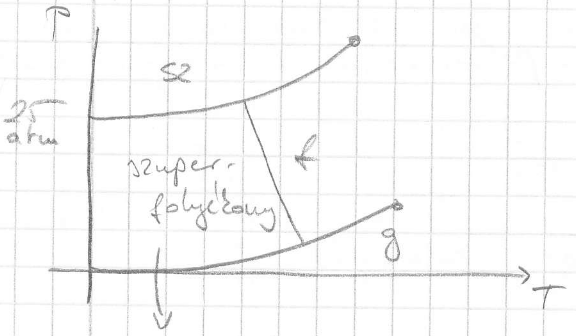
CH_4 vagy CD_4

fcc rács → rácspontokban szabadon forognak a CH_4-ek

lehűtjük → es-i helyzet, akörül rezegnek csak

C_{60} is ilyen

Alacsony hőm.: ^4He szuperfolyékonysága



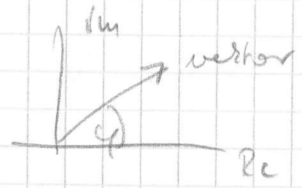
kapillárison szabadon átáramlik, mintha 0 lenne a viszkozitása

mértékinvariancia sérül

hasonlít a Bose kondenzációhoz, de nem az összes atom gyűlik össze a 0 imp-ú állapotban, hanem 8-10%

$\langle \psi(r) \rangle = \sqrt{n}\, e^{i\varphi}$

ált.: hullfv fázisától nem függ semmi
↳ el lehet forgatni ⟶



most: nem ez van, sérül ez az invariancia

Szupravezetés $e^- + e^-$ szinglett ↑↓ állapot hasonlóan mértékinv. sérül

^3He szuperfolyékonysága 3mK alatt $^3He - {}^3He$ triplett ↑↑

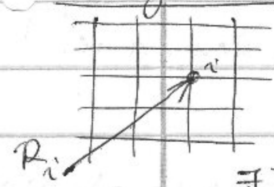
rokon átalakulások ↔ fermionok párba állnak

Fázis (4. EA)

Mágneses rendszerek

↳ effektív spin-modellek – kicser. kh-t kell figy-be venni

Ising-modell



kicsi kh. : $-\mathcal{J} S_i S_j = \begin{cases} -\mathcal{J} & \uparrow\uparrow \downarrow\downarrow \\ \mathcal{J} & \uparrow\downarrow \uparrow\downarrow \end{cases}$

i-edik rácspont Ising-spin : $S_i = \pm 1$ ↑↓

$\left.\begin{array}{l} \mathcal{J} > 0 \text{ ferromágn.} \\ \mathcal{J} < 0 \text{ antif. m.} \end{array}\right\}$ csatolás

fázistér: elemei: spin konfigurációk : $\tilde{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$

2^N állapot létezik

eloszlás: adott hőm. → kanonikus sokaság

↳ $\dfrac{e^{-\beta H}}{Z} \longrightarrow Z = \sum_{\tilde{S}}' e^{-\beta H(\tilde{S})}$

$H(\tilde{S}) = -\frac{1}{2} \sum_{ij}' \mathcal{J}_{ij} S_i S_j -$ tetsz. 2 szomszéd között megenged kh-t

$- \sum_i h_i S_i$ kh. a mágn. térrel $\mu B S$ ↳ energia dim

előbbes: $h_i = H$ (hom. mágn. tér, most H nem a Ham.)

transzlációsszimm. rsz: $\mathcal{J}_{ij} = \mathcal{J}(\underline{R}_i - \underline{R}_j)$

kicsi kh. a rácspontok relatív helyzetétől függ csak.

$F = -k_B T \ln Z$

$m_i = \langle S_i \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{\tilde{S}\}}' e^{-\beta H(\tilde{S})} \cdot S_i = \frac{k_B T}{Z} \frac{\partial Z}{\partial h_i} = -\frac{\partial F}{\partial h_i}$

inhomogén → lokálisan meg lehet hat. a mágn. mom. eltérést

ált. szuszcept. (lin. válaszfgv.)

$\delta m_i = \sum_j' \chi_{ij} \, \delta h_j$

korrelációs fgv: $c_{ij} = \langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle = \langle (S_i - \langle S_i \rangle)(S_j - \langle S_j \rangle) \rangle$

általános szuszc. : $\chi_{ij} = \dfrac{\partial m_i}{\partial h_j} = -\dfrac{\partial^2 F}{\partial h_i \partial h_j}$ = szimmetrikus mtx.

$$= \frac{\partial}{\partial h_j}\left(\frac{k_B T}{Z} \frac{\partial Z}{\partial h_i}\right) = \underbrace{\frac{k_B T}{Z} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial h_j \partial h_i}}_{\frac{\langle S_i S_j \rangle}{k_B T}} - \underbrace{\frac{k_B T}{Z^2} \frac{\partial Z}{\partial h_i} \frac{\partial Z}{\partial h_j}}_{\frac{\langle S_i \rangle \langle S_j \rangle}{k_B T}} = \frac{c_{ij}}{k_B T}$$

fluct. - válasz tétel

makroszkopikus szuszc.:

$h_i = H \quad \delta h_i = \delta H$ mindenütt ua. az értők

$$\delta m_i = \sum_j' \chi_{ij}\, \delta H$$

χ ez a makr. szuszc. (ki kell kötni, hogy hom. a tér)

transzlációsszimm.: $\sum_i' \chi_{ij}$ i-től fgtlen

$$\chi = \sum_j \chi_{ij} = \frac{1}{k_B T}\sum_j' C_{ij} = \frac{1}{N k_B T}\sum_{ij} C_{ij} = \frac{1}{N k_B T}\left(\left\langle \sum_i S_i \sum_j S_j\right\rangle - \left\langle\sum_i S_i\right\rangle\left\langle\sum_j S_j\right\rangle\right)$$

$$\chi = \frac{\langle \Delta M^2 \rangle}{N k_B T}$$ teljes mágnesezettség szórásnégyzet

szimmetriasértés: spontán mágnesezettség ($h_i \to 0$)?

ferromágneses csatolás, legközelebbi szomszédok (nn - nearest neighbor)

$$H(\bar{S}) = -J \underbrace{\sum_{\langle ij \rangle}}_{\text{nn párokra } \Sigma} S_i S_j - H \sum_i S_i$$

$\frac{1}{2}$ elhagyh. a fgtlen Σ-hoz képest

$H=0$: szimm: $S_i \to -S_i$ ($\forall i$-re)

$\forall$ spint átfordítunk

ha van H tér $\to$ ez már nem szimmetria

alapáll.: $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$ az alapállapot szimmetriasértő, nem rend. a

$\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow$ fenti szimm.-val

de megmarad a sértett szimm. nyoma (átford. $\to$ másik alapáll.-ba jutunk)

$$\frac{e^{-\beta H(\bar{S})}}{Z}$$ szimm.

itt azokra az áll.-ra is átlagolok, ahol a szimm. sérül

① $H \neq 0$ $m(H)$ megjelenik a nem 0 mágnesezettség (spontán mágn.)

$$\lim_{H\to 0} m(H) = \begin{cases} 0 & \text{paramágn. fázis} \\ m_s \neq 0 & \text{ferromágn. fázis} \end{cases}$$

(termodin. h.e.-ben jelenik csak meg ez)

② $\langle S_i S_j \rangle \to$, $|R_i - R_j| \to \infty$ hat. es.

távoli spinek: fgtlen vsz-gi változók lesznek

$\langle S_i \rangle \langle S_j \rangle = m_s^2$ spontán mágnesezettség négyzete

Mi inkább az (1) feltételt fogjuk használni.
Bogoljubov-féle kvázi átlagolás → bevezetek egy külső teret (önmagában szimmetriasértést hoz be) akkor is, ha nem realizálható kísérletileg, csak modellben.
végén → 0, megnézzük, a mágnesezettség mihez tart.

nn szomszéd, ferrom. csatolás

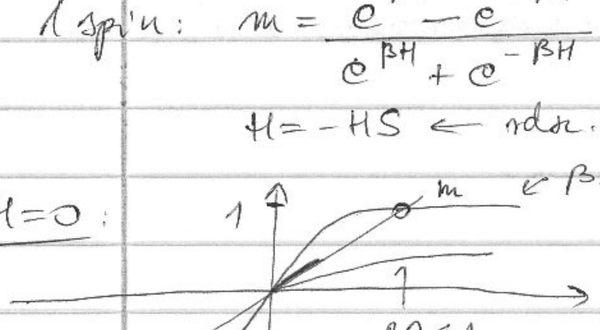
$d=1$ (Ising-lánc) egzakt mo.
↳ telj. mágn. 0 lesz (a szimm. sértés ellenére)
kis T is szétveri a rendeződést
ehhez kis ~~katótáv~~ kh. szüks. (más → lehet szimm. sértő állapot)
$d=2$ egzakt mo. Peierls, Onsager,
$d \geq 3$ egzisztencia (csak a fázisát lehet biz. → tehát $\exists$ olyan véges hőm., ami alatt szimm. sértő fázis alakul ki)

Közelítés: átlagtér-köz.

(1) Weiss-féle gondolatmenet
mágn. mom. hat a környezetére, az visszahat rá
(többi spin → mint egy folytonos közeg)
→ 1 spin: $m = f(H)$
→ spinrdsz. tagjaként, $m = f(H + \lambda m)$
korrekció a környezet miatt (az is mágn. van)

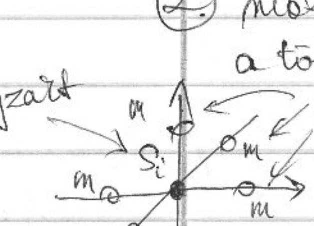
1 spin: $m = \frac{e^{\beta H} - e^{-\beta H}}{e^{\beta H} + e^{-\beta H}} = th(\beta H) \Rightarrow$ Weiss: $m = th(\beta(H+\lambda m))$
$\mathcal{H} = -HS \leftarrow$ rdsz. E-ja

$H=0$:



$\leftarrow \beta\lambda > 1$ ($th(\beta\lambda m)$)
krit. pont: $\beta\lambda = 1$, $\frac{\lambda}{k_B T_c} = 1$

(2.) másik gondolatmenet: 1 kiemelt spint egzaktul kezelünk, a többit pedig átlagolva.



ezeket az átlaggal helyettesítjük.

inhom. mágn. térben: effektív energia:
$$E(S_i) = -\sum_j J_{ij} S_i m_j - h_i S_i = -\underbrace{\left(h_i + \sum_j J_{ij} m_j\right)}_{\text{effektív tér}} S_i$$

homogén rdszben: $\lambda m = (\sum_{ij}' J_{ij}) m$

$$m_i = \text{th}\left[\beta\left(h_i + \sum_j J_{ij} m_j\right)\right]$$ minden i-re fel kell írni (N db egyenlet)

implicit egyenlet

explicitté tehető

$$h_i = \frac{k_B T}{2} \,\text{Arth}\, m_i - \sum_j' J_{ij} m_j$$

$$\text{Arth}\, x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

3) harmadik lehetőség: variációs elv

$Q(\bar{S})$ tetszőleges eloszlás

$E_Q = TS_Q \rightarrow E_Q = \sum_{\bar{S}}' Q(\bar{S}) H(\bar{S})$ en. v.é.-ét számoljuk ki ezzel a Q eloszlással.

$$S_Q = -k_B \sum_{\bar{S}} Q(\bar{S}) \ln Q(\bar{S})$$

ez $\geq F = -k_B T \ln Z$ egzakt szab. en.

$=$ akkor, ha: $Q(\bar{S}) = \frac{1}{Z} e^{-\beta H(\bar{S})}$

független spinek: $Q(\bar{S}) = \prod_i f_i(S_i)$

$f(+1) + f(-1) = 1$ ↑ és ↓ álló spinek vsz-ének összege 1.

$f(+1) - f(-1) = m$

$$f(\pm 1) = \frac{1 \pm m}{2} = \frac{1+mS}{2}$$

az eloszl. fgvnek egy paramétere van: a mágnesezettség v.é.-e

$$Q(\bar{S}) = \prod_i' \left(\frac{1+m_i S_i}{2}\right)$$

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{ij} J_{ij} S_i S_j - \sum_i' h_i S_i$$

$$E_Q = -\frac{1}{2}\sum_{ij}' J_{ij} m_i m_j - \sum_i' h_i m_i$$

$$S_Q = -k_B \sum_i \left(\frac{1+m_i}{2} \ln \frac{1+m_i}{2} + \frac{1-m_i}{2} \ln \frac{1-m_i}{2}\right)$$

$$\frac{\partial(E_Q - TS_Q)}{\partial m_i} = -\sum_j' J_{ij} m_j - h_i + k_B T \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+m_i}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1-m_i}{2}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+m_i}{1-m_i} = \text{Arth}\, m_i$$

minimumot keressük!

$$\frac{\partial^2 (E_Q - TS_Q)}{\partial m_i \partial m_j} = -\mathcal{J}_{ij} + \frac{k_B T}{2}\left(\frac{1}{1+m_i} + \frac{1}{1-m_i}\right) = \frac{k_B T \delta_{ij}}{1-m_i^2} - \mathcal{J}_{ij}$$

ennek kell pozitív definitnek lennie.

h_i előző oldalon szereplő alakjával:

$$\frac{\partial h_i}{\partial m_j} = \frac{k_B T \delta_{ij}}{1-m_i^2} - \mathcal{J}_{ij} = (\chi^{-1})_{ij} \quad \text{szuszc. reciproka}$$

$\Rightarrow$ χ^{-1}_{ij}-nek poz. def.-nek kell lennie.

$\rightarrow$ stabilitási feltétel

(többet kapok $\rightarrow$ több lok. stab. $\rightarrow$ melyik a legmélyebb)

<u>állapotegy</u>: $h_i = \frac{k_B T}{2} \ln \frac{1+m_i}{1-m_i} - \sum_j' \mathcal{J}_{ij} m_j$

$$m_i = \text{th}\left[\beta(h_i + \sum_j' \mathcal{J}_{ij} m_j)\right]$$

ekvivalens alakjai az áll. egy-nek, mindig az éppen szüks.-et kérem.

$$\chi_{ij}^{-1} = \delta_{ij} \frac{k_B T}{1-m_i^2} - \mathcal{J}_{ij} \quad \text{poz. def.}$$

▶ $h_i = 0$ $m_i = 0$ mindig mo. — paramágn. állapot

mikor lesz stabil?

$$\chi_{ij}^{-1} = \delta_{ij} k_B T - \mathcal{J}_{ij} \quad \text{poz. def.}$$

$\hookrightarrow$ diagonizálni tudjuk $\rightarrow$ leegyszerűsíti (sé-ek $\oplus$-ak)

tr. inv. $\rightarrow$ Fourier-tr.: $\mathcal{J}_{ij} = \frac{1}{N}\sum_q e^{iq(R_i - R_j)} \mathcal{J}(q)$

(tr. szimm. mtx. F-tr-val diagonizálható:) $\mathcal{J}(q) = \sum_i' e^{-iq(R_i - R_j)} \mathcal{J}_{ij}$ (j-től fgtlen)

periodikus hat. felt.: $\rightarrow$ $q \in$ 1. Brillouin-zóna

$$\boxed{\chi^{-1}(q) = k_B T - \mathcal{J}(q) > 0} \leftarrow \text{sé-ek}$$

T nagy $\rightarrow$ param. fázis stabil

ha $\mathcal{J}(q) > 0$, és $T\downarrow$ $\rightarrow$ eléri a $k_B T$ a $\mathcal{J}(q)$-t

$\underline{q}_c \rightarrow \max_q \mathcal{J}(q) = \mathcal{J}(q_c)$ $\mathcal{J}$ felveszi a max-át.

stabilitási határ $\rightarrow$ $T\downarrow$ tovább: paramágn. áll. nem stabil

stabilitás: $T > T_c$ $k_B T_c = \mathcal{J}(q_c)$

szuszcept.: $\chi^{-1}(q) = k_B T - \mathcal{J}(q) \geq k_B T - \mathcal{J}(q_c) = k_B(T - T_c)$

$\left(\chi \sim \frac{1}{T - T_c} \text{ Curie-Weiss.}\right)$

$T<T_c$: a paramágn. áll. instabil
(nem min-ot találtunk meg, hanem egy lok. max-ot)

$\chi<0 \to$ mágn. tér és mágnesezettség vált.-nak iránya fordított (instabil helyzet)

várakozás: q_c hullámszámú mágn. szerkezet jön létre

$$m_i = \mathrm{Re}\left(A \cdot e^{i q_c R_i}\right)$$

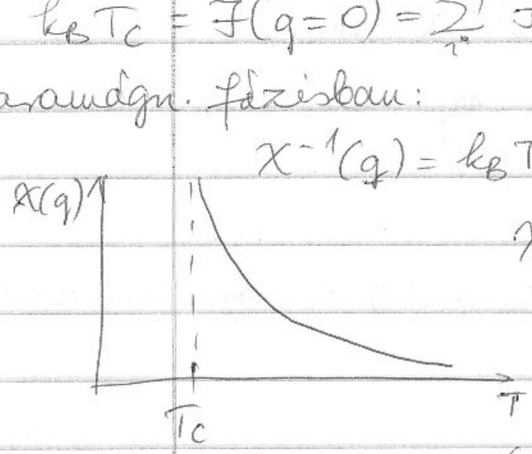
moduláltál áll, síkhull. szerint változik térben.

Ferromágn. állapot: $q_c = 0$ $\quad \mathcal{J}(q=0) \geq \mathcal{J}(q)$
ez a max.

$k_B T_c = \mathcal{J}(q=0) = \sum_i' \mathcal{J}_{ij}$ $\quad q=0$-hoz tart. $\mathcal{J}$-transzformált

paramágn. fázisban:

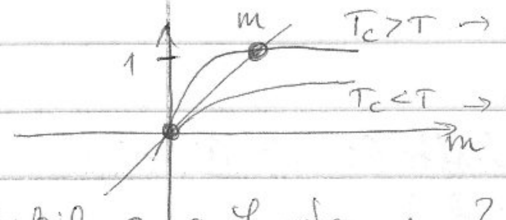
$$\chi^{-1}(q) = k_B T - \mathcal{J}(q), \quad q=0: \ k_B T - \mathcal{J}(0) = k_B(T-T_c)$$



$$\chi(q=0) = \frac{1}{k_B(T-T_c)}$$

Curie-Weiss-tv.

állapotegyenlet: $\left[m = \mathrm{th}\left(\beta m \mathcal{J}(q=0)\right) = \mathrm{th}(\beta m k_B T_c) = \mathrm{th}\left(\frac{T_c}{T} m\right)\right]$



$T_c>T \to$ ferrom. mo-t is

$T_c<T \to$ csak a p. mágn. mot kapjuk meg

Stabil-e a f. mágn. mo?

$$\chi_{ij}^{-1} = \delta_{ij}\frac{k_B T}{1-m^2} - \mathcal{J}_{ij} \overset{\text{diag.}}{\underset{}{\xRightarrow{\mathcal{F}.\text{tr.}}}} \chi^{-1}(q) = \frac{k_B T}{1-m^2} - \mathcal{J}(q) > 0$$

elég a $q=0$ pontot vizsg., mert $\mathcal{J}(q)$ ott a legnagyobb.

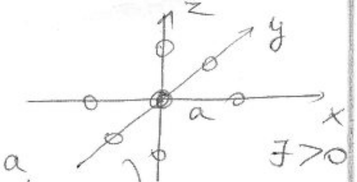
$$\chi^{-1}(q=0) = \frac{k_B T}{1-m^2} - \underbrace{\mathcal{J}(q=0)}_{k_B T_c} > 0 \to \frac{1}{1-m^2} > \frac{T_c}{T}$$

$m>0$: $\quad \dfrac{m}{1-m^2} > \dfrac{T_c}{T} m$

$$\frac{\mathrm{th}\left(\frac{T_c}{T}m\right)}{1-\mathrm{th}^2\left(\frac{T_c}{T}m\right)} > \frac{T_c}{T} m$$

$\dfrac{\mathrm{th}\,x}{1-(\mathrm{th}\,x)^2} > x$ $\quad$ ezt kell belátni $\to \dfrac{\mathrm{ch}^2 x \cdot \mathrm{th}\,x}{\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x} = \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,x > \mathrm{sh}\,x > x$ $\quad (x>0)$

pl.: nn fmágn. csat. SC rácson

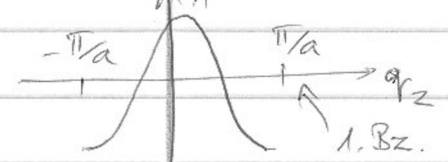


$$\mathcal{J}(q)=\sum_i e^{iq(R_i-R_j)}J_{ij}=J\big(e^{iq_xa}+e^{-iq_xa}+\underset{y \text{ és } z}{\dots}\big)=$$

$$=2J\left(\cos(q_xa)+\cos(q_ya)+\cos(q_za)\right)\rightarrow \mathcal{J}(q=0)=6\cdot J$$

(legköz. szomsz. száma koordin. szám $=6$)

cos → $q=0$-ban valóban max-a van

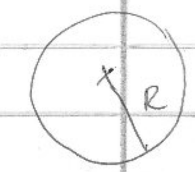


általános rácson ugyanez fm. csat., nn

$$\mathcal{J}(q=0)=z\cdot J \quad z: \text{koordin. szám}$$

Fázis (J, EA)

Átlagtér közelítés:



spin: ⇒ környezete → azokkal kh.
↳ ezeket az átlagukkal helyettesítjük
⇒ térbeli átlag, tfh. R sug. körben u.a. a kh.
⇒ nagy R : térbeli átlag = statisztikus átlag
mikor jó ez? → ha sokkal hat kölcsön

Átlagtér köz. egzakt:

(i) $-\frac{J}{N}\sum_{ij=1}^{N} S_i S_j$

mindenki mindenkivel egyformán hat kölcsön

(ii) d dimenzióban SC rácson legköz. szomsz. kh.

$z = 2d$

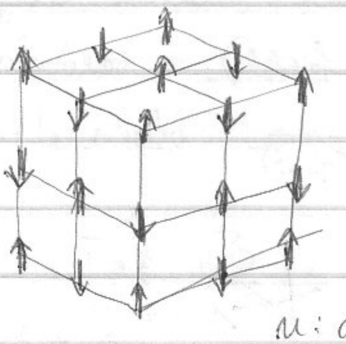
$d \to \infty$

Kritikus pont közelítésben mennyire jó? → ott nagyobb a hatókör, ez kisebb lesz.

Antiferromágnes:

szerkezet: SC rács

mágn. szerk.: 2 fcc alrács (↑ és ↓)



$\underline{Q} = \frac{\pi}{a}(1,1,1)$

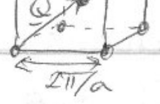
$m_{\ell} = n \cdot e^{iQR_\ell}$

m_ℓ: mágn. az ℓ-edik rácspontban; e^{iQR_ℓ}: rácshelyről rácshelyre ellentétes

n: alrács mágnesezettség

$e^{\cdots}$: a mintázatot adja meg

SC rec. rácsa is SC.



$q_c = \underline{Q}$

$J(\underline{Q}) \geq J(q)$ Bz. sarkaiban veszi fel a max-át

$k_B(T_c) = J(\underline{Q})$

áll. egy.: $m_i = \text{th}\left[\beta\sum_j J_{ij} m_j\right]$ külső tér nélküli általános formula

helyettesítsük be:

$$n \cdot e^{iQR_i} = \text{th}\left[\beta \sum_j J_{ij}\, e^{iQR_j} n\right]$$

$$e^{-iQR_i} = \pm 1$$

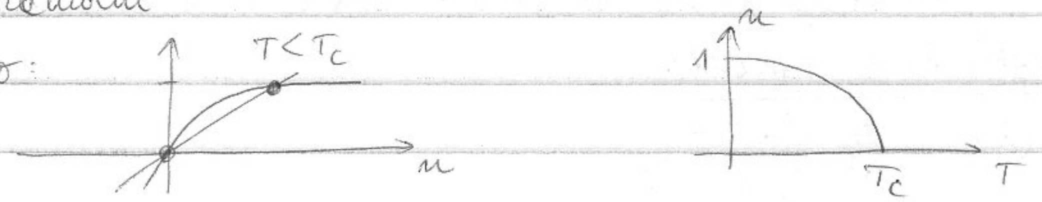
$-\,\mathrm{th}(x) = \mathrm{th}(-x)$ bevihetjük az előjelet, most az egész e-adot is

$$\left[n = \mathrm{th}\Big[\beta \underbrace{\sum_j J_{ij}\, e^{i\underline{Q}(\underline{R}_j-\underline{R}_i)}}_{J(\underline{Q}) = k_B T_C} \cdot n\Big] = \mathrm{th}\left(\frac{T_c}{T} n\right) \right]$$

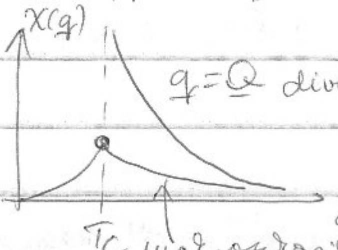
ez pont J-nek a $\underline{Q}$ hull. számhoz tart. J-komp-e

áll. egy ua. mint fm-nél, csak alrács mágn. jött be és T_c-t másképpen kell kiszámolni

grafikus mo:



$T>T_c$: (paramágn.) $\quad \chi^{-1}(q) = k_B T - J(q) \geq k_B T - \underbrace{J(\underline{Q})}_{k_B T_C} = \chi^{-1}(\underline{Q})$



$$\chi(\underline{Q}) = \frac{1}{k_B(T-T_c)}$$

arra adja a választ, mintha staggakott térrel csinálnánk (staggered field) a valóságban nem megoldható

⊛ $\chi(q=0) = \dfrac{1}{k_B T - J(q=0)}$ véges értéke van T_c-n

$T<T_c$: $\quad \chi_{ij}^{-1} = \dfrac{\delta_{ij}\, k_B T}{1-m_i^2} \Rightarrow \chi^{-1}(q) = \dfrac{k_B T}{1-n^2} - J(q)$

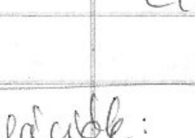
$m_i^2 = n^2$

divergálás hol látszik?

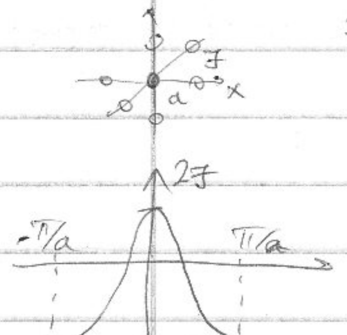
$C_{ij} = k_B T \chi_{ij}$

$C(q) = k_B T \chi(q) \rightarrow$ korr. fgv. a szórási kísérleteknél a hat. ker. metsz.-ben megjelenik $\rightarrow \chi$ divergál $\rightarrow$ ott látszik

korrelációk: $\quad T > T_c \quad$ nn kölcs. hat. SC rács



$$J(q) = J\left(e^{iq_x a} + e^{-iq_x a} + \dots\right) = 2J\left(\cos(q_x a) + \cos(q_y a) + \cos(q_z a)\right)$$



$$C(q) = \frac{k_B T}{k_B T - J(q)}$$

$\mathcal{J}(q)$-t sorbaf. $q=0$ körül, $qa \ll 1$ Bz. méretének sokkal kisebb a hull.szám., vagy: hull. hossz >>> rácsállandó

$$\cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$\mathcal{J}(q) \cong 6\mathcal{J} - \mathcal{J}a^2q^2 + \dots$$

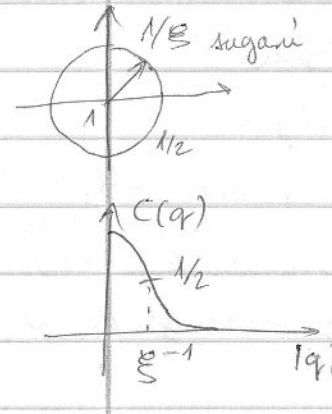
$$C(q) \cong \frac{k_BT}{k_BT - 6\mathcal{J} + \mathcal{J}a^2q^2} = \frac{k_BT}{k_B(T-T_c) + \mathcal{J}a^2q^2} = (*)$$

$6\mathcal{J} = k_BT_c$ krit. ponton $\rightarrow \frac{1}{q^2}$

$T \rightarrow T_c$ kicsi tag van a q^2-es mellett $\Rightarrow$ hull.szám térben keskeny csúcs lesz (gyorsan leesik a felületére)

$$(*) = \frac{1}{\mathcal{J}a^2} \frac{k_BT}{\xi^{-2} + q^2} \qquad \xi^{-2} = \frac{k_B(T-T_c)}{\mathcal{J}a^2} \quad \text{Yukawa-pot. F-tr-ja}$$

ξ: korrelációs hossz $\rightarrow$ megmondja h. milyen gyorsan cseng le a korreláció (a felére) hull.szám térben



valós térben: az erős korreláció tartománya: ξ sug. gömb

$$r \gg a: \quad C(r) \cong \frac{k_BT}{\mathcal{J}a} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-r/\xi}}{r}$$

azon belül erős korr., azon kívül gyorsan lecseng

$$\xi \sim (T-T_c)^{-1/2}$$

fluktuáció koherensen történik az erős korrel. tartományán belül

T_c-hez közeledve $\rightarrow$ egyre nagyobb tartományra igaz

$T_c \rightarrow$ beáll mindegyik

$\frac{1}{r} \rightarrow$ azért lecseng a korrel. (∞ a korr. hossz $\rightarrow$ csak az exp.-ből leolvasva)

<u>antifm.-re</u>: $\mathcal{J} < 0$, $\mathcal{J} = -|\mathcal{J}|$

$$q = Q + \tilde{q}$$

$$\cos(q_x a) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{a} + \tilde{q}_x\right)a\right) = \cos(\pi + \tilde{q}_x a) \cong -1 + \frac{1}{2}(q_x a)^2$$

$$\mathcal{J}(q) = -2|\mathcal{J}|\left(\cos(q_x a) + \cos(q_y a) + \cos(q_z a)\right) \underset{\boxed{\tilde{q}a \ll 1}}{\cong} +6|\mathcal{J}| - |\mathcal{J}|a^2\tilde{q}^2$$

$$C(q) \cong \frac{k_BT}{k_BT - \underbrace{6|\mathcal{J}|}_{k_BT_c} + |\mathcal{J}|a^2\tilde{q}^2} = \frac{k_BT}{k_B(T-T_c) + |\mathcal{J}|a^2\tilde{q}^2}$$

ez más, mint fm-nél

Bz sarka körüli kis gömbben van, nem az origó körüliben (mint fm-nél)

$q = \underline{Q} + \tilde{q}$

$m_i = A \cdot e^{i q R_i} = \underbrace{A \cdot e^{i Q R_i}}_{\text{pont az a.fm.-es struktúrának felel meg}} \cdot e^{i \tilde{q} R_i} \to$ a struktúra modulációja ⇓ hozzákötheteim az amplitúdóhoz

⇒ nagy távolságokon a.fm. str. → arrébb megyek: ott is, de kisebb alrács mágnesezettség → arrébb még kisebb → még arrébb már ellentétes

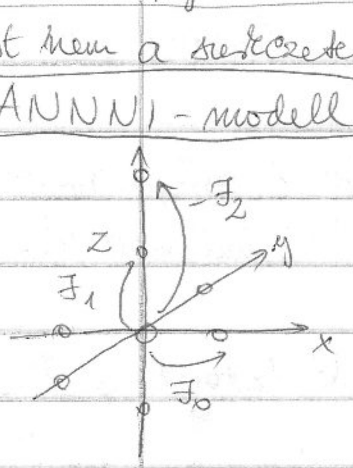
Az $A \cdot e^{i\tilde{q}R_i}$-t úgy fogom fel, mint az alrácsmágn. térben lassú (hosszú hullámú) modulációja

fenom.-nél: a mágnesezettség hosszú hull. fluktuációit kaptuk

általában fogalmazva: a rendparaméter hosszú — ll —

Most nem a szerkezetet rögzítjük, hanem a kh.-ok-t:

$\boxed{\text{ANNNI - modell}}$ (axial-next-nearest-neighbor-Ising)



$$J_{ij} = \begin{cases} J_0 > 0 & \text{nn } x\text{-}y \text{ síkban} \\ J_1 > 0 & \text{nn } z \text{ tengelyen} \\ -J_2 \ (J_2 > 0) & \text{nnn } z \text{ tengelyen} \end{cases}$$

z tengelyen: két ellentétes ir. csatolás → J_1 és J_2 eltérő lesz (versengő kh-ok)

ez a legegyszerűbb ilyen modell, ahol a hatótáv. miatt versengő kh-ok vannak

param. fázis stabilitás (átlagtér-ből)

$$J(q) = 2J_0(\cos(q_x a) + \cos(q_y a) + \cos(q_z a)) + \underbrace{2J_1 \cos(q_z a) - 2J_2 \cos(2q_z a)}_{\text{ennek a max-a adja}}$$

max helyet: $q_c = (0, 0, q_c) \to$ ezt ker.

$$= 2J_1 (\cos(q_z a) - \varkappa \cos(2q_z a)) \qquad \varkappa = \frac{J_2}{J_1}$$

$x = q_z a, \to f(x) = \cos x - \varkappa \cos(2x) = \cos x - \varkappa(2\cos^2 x - 1)$

$f'(x) = -\sin x + 2\varkappa \sin(2x) = -\sin x(1 - 4\varkappa \cos x)$

$f''(x) = -\cos x + 4\varkappa \cos(2x)$

$f'(x) = 0 \to \sin x = 0 \to x = 0 \to f'' = -1 + 4\varkappa < 0, \ \varkappa < \frac{1}{4}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \to x = \pi \to f'' = 1 + 4\varkappa > 0$ (minimum)

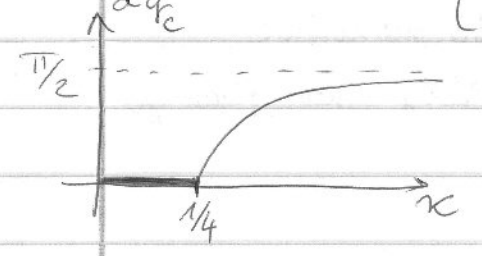
$f'(x) = 0 \to 1 - 4\varkappa \cos x = 0 \to \cos x = \frac{1}{4\varkappa}$ ($\varkappa > \frac{1}{4}$ kell legyen ehhez)

$$f'' = \frac{1 - 16\varkappa^2}{4\varkappa} < 0 \to \text{valóban max, ha } \varkappa > \frac{1}{4}$$

$f(x=0) = 1-\kappa$

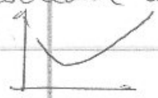
$f(\cos x = \frac{1}{4\kappa}) = \frac{1}{8\kappa} + \kappa$

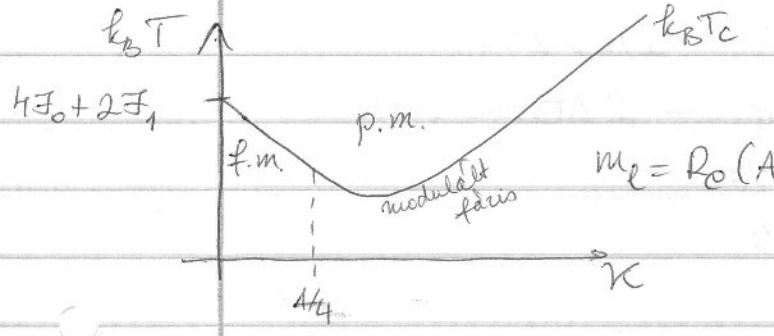
$x = qa \longrightarrow q_c = \begin{cases} 0 \longrightarrow \kappa < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{a}\arccos\frac{1}{4\kappa} \to \kappa > \frac{1}{4} \end{cases}$



$\mathcal{J}(q_c) = k_B T_c \to \mathcal{J}(q_c) = \begin{cases} 4\mathcal{J}_0 + 2\mathcal{J}_1(1-\kappa) \to \kappa < \frac{1}{4} \\ 4\mathcal{J}_0 + 2\mathcal{J}_1(\underbrace{\frac{1}{8\kappa}+\kappa}) \to \kappa > \frac{1}{4} \end{cases}$

a kettő simán illeszkedik össze → ilyen fgv:





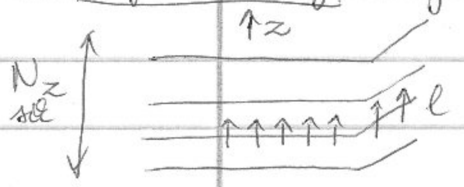
$m_l = R_0(A e^{iq_c R_l})$

itt lin. a fgv.

legerősebb kullámzás: $\frac{\pi}{2a}$ ↑↑ ↓↓ ↑↑ ↓↓

↑↓↑↓ már nincs megengedve, mert κ fgvében aq_c max-a $\frac{\pi}{2}$

<u>alapáll. vizsg</u>: xy síkban f.m. csatolás, mi marad szabadon: síkok egymáshoz képest hogyan állnak



$S_l = \pm 1$

hogyan rendezzük el → E milyen

síkban M db spin

$N = N_z \cdot M$ db spin összesen

minden pár: $\mathcal{J}_0$ energiát ad

a hatáson levőket (négyes kevés) kicsit lazán kezeltük

$E = -\mathcal{J}_0 2 \cdot M N_z - \sum_l \mathcal{J}_1 S_l S_{l+1} \cdot M + \mathcal{J}_2 \sum_l S_l S_{l+2} \cdot M$

x-y sík — 1. szomsz. z ir. — 2. szomsz. kh. z ir.

$\frac{E}{M} + 2N_z \mathcal{J}_0 = \underbrace{-\mathcal{J}_1 \sum_l S_l S_{l+1} + \mathcal{J}_2 \sum_l S_l S_{l+2}}$

Ising-lánc: fm elsőszomsz. kh. és afm. másodszomsz. kh.
↓
egzaktul mo-ható

<u>kiindulás</u>: fm-es áll. ↑↑↑↑ (lánc most már)

doménfalakat beteszünk minden leh. módon
↓
összes konfig.

1 doménfal: $\ldots\uparrow\uparrow\uparrow|\downarrow\downarrow\downarrow\ldots$

$$\Delta E_1 = 2J_1 - 2\cdot 2\cdot J_2 = 2J_1(1-2\kappa)$$

első szomsz. kapcs. elrontottam $\to E\nearrow$ — 2. szomsz. kapcs. kedvezőbb lett, megjavítottam $\to E\searrow$

2 doménfal: $\ldots\uparrow\uparrow\uparrow|\downarrow|\uparrow\uparrow\ldots$ lehető legközelebb mondjuk

$$\Delta E_2 = 2\cdot 2J_1 - 2\cdot 2\cdot J_2 = \Delta E_1 + 2J_1 > \Delta E_1$$ nem olyan jó

tegyük távolabb a két falat:

$\uparrow\uparrow|\downarrow\downarrow|\uparrow\uparrow\ldots$

$$\Delta E_2' = 2\cdot 2\cdot J_1 - 4\cdot 2\cdot J_2 = 2(2J_1 - 4J_2) = 2\Delta E_1$$

2 doménfal mögött min. 2 spin $\to 2\Delta E_1$ en. vált.

több d-fal $\to$ annyiszor ΔE_1

nincs kh. a dfalak között

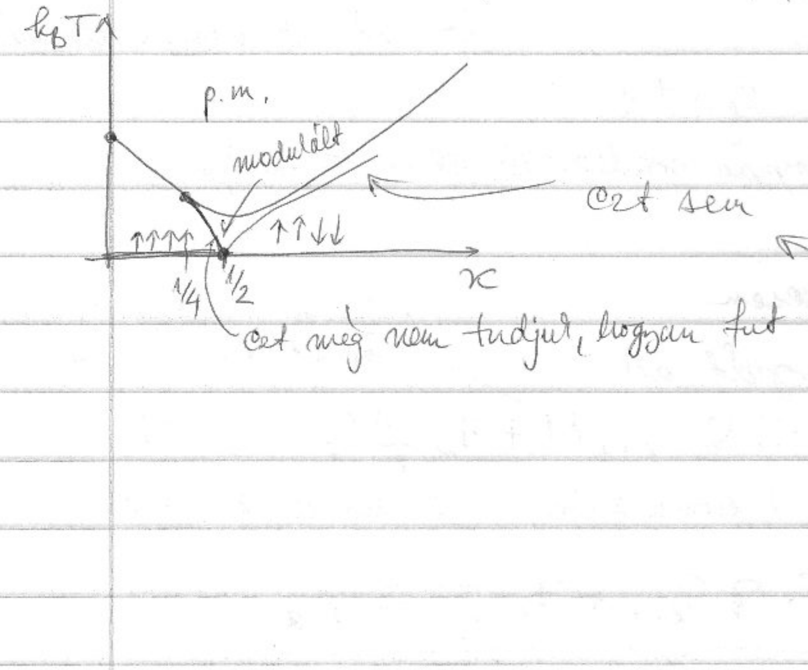
$\kappa < \frac{1}{2} \to E\nearrow$

$\kappa > \frac{1}{2} \to E\searrow$

Alapáll.: $\kappa < \frac{1}{2} \to$ fm

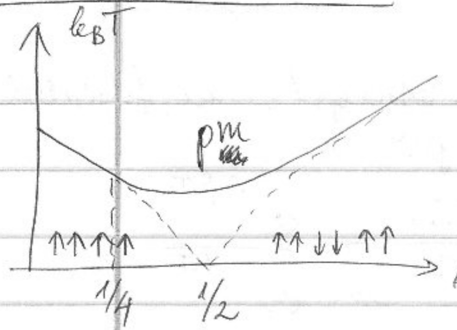
$\kappa > \frac{1}{2} \to \uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\ldots$ a.fm.

ha periódussal $\to \frac{2\pi}{4a} = \frac{\pi}{2a}$ periódussal $\to q_c$



Fázisátal. (6. EA)

ANNNI-modell:



k_BT_c (átlagtér-közel.)

alapáll. (egzakt)

↑ beállás → egy gépi str. beáll-t jelenti

$\varkappa = \frac{J_2}{J_1}$

$g=2$ ↑ $g=4$ → multiplicitás

maradék entrópiával rendelkezik $T=0$-án is

↑↑↑ | ↓↓↓

$\varkappa = 1/2$

$\Delta E_1 = 2J_1(1-2\varkappa) = 0$

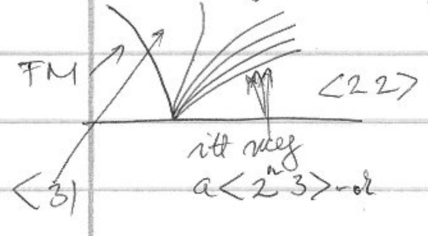
akárhány doménfalat teszek be → energ. nem változik a FM-hez kép.

(csak nem szabad 2 spinnél közelebb vinni őket)

nagyon degenerált állapot

$g \sim e^{\alpha N}$ N: spinek száma

ábra → sokfázisú pont (sok fut ide be v. indul ki innen)



különböző jelölések:

⟨3⟩ ↑↑↑↓↓↓

⟨23⟩ ↑↑↓↓↓

⟨$2^2$3⟩ ↑↑↓↓↑↑↑

⋮

⟨2^n3⟩

⟨2^n3⟩ → megyünk egyre tovább ⟨22⟩-höz közelítve: tolódnak

fázisdiagram → tértek kis értékeitől az 1/4 felé

inkommenzurábilis fázis → nem hosszú életű → gyorsan egy

közeli kis egész számok hányadosának megfelelő kommenz. fázisba ⇒

⇒ lock-in átalakulás

CeSb fázisdiagramja

↳ köbös rács

síkok ↑↓ vagy 0 mágnesezettség → ez változik

Landau-elmélet:

Feltételes szabadenergia (constrained free energy)

bev.

Ising-modell: $M = \sum_i S_i$ i: rácspontok $-N, -N+2, \dots, N-2, N$
↳ mágnesezettség   mindegyik -1

$$\mathcal{P}(M) = \frac{1}{Z} \sum_{\tilde{S}} e^{-\beta E(\tilde{S})}$$

az áll. összeget vmi feltétellel számoljuk ki

$\left(\sum_i S_i = M\right)$
↳ azon spin konf.-ra, amikre igaz ez)

$$= \frac{Z_M}{Z} = \frac{e^{-\beta F_c}}{e^{-\beta F}}$$

$F = -k_B T \ln Z$

$F_c = -k_B T \ln Z_M$

(felt. szab. en.)

$F_c(T, H, M)$

legvalószínűbb M: $F_c(T, H, M) = \min.$

$$\frac{\partial F_c}{\partial M} = 0$$

Kv. mech. rdsz $\to$ $\hat{M}|n\rangle = M_n|n\rangle$

mi a vsége h. $|n\rangle$ áll-ban találom a rsz-t, és ennek megf. M_n mágn-et mérek

$\Rightarrow$ sűr. op.

$$\langle n| \frac{e^{-\beta H}}{Z} |n\rangle$$

$$\mathcal{P}(M) = \sum_{\substack{n \\ (M_n = M)}} \frac{\langle n| e^{-\beta H} |n\rangle}{Z} = \frac{Z_M}{Z}$$

↳ vmilyen pontossággal megegyezik (vizsgálhatunk intv-ot is)

$$Z = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta H} = \sum_n \langle n| e^{-\beta H} |n\rangle$$

$F_c = -k_B T \ln Z_M$

itt is erre jutunk.

Landau-elm. $\to$ $\mathcal{P}(M) = \dfrac{e^{-\beta F_c(T,H,M)}}{e^{-\beta F(T,M)}}$ vszgből F_c ismert!

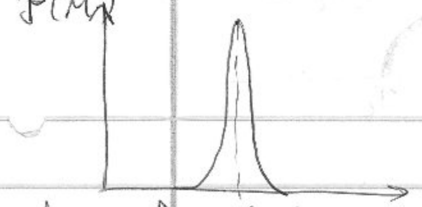
nem számoljuk ki mikr. modellből kiindulva, fenomenologikus konstrukciót csinálunk.

$M = V \cdot m$, m kicsi $\to$ sorfejtés

$$F_c = V\left(w_0 + \frac{a}{2} m^2 + \frac{u}{4} m^4 - mH\right)$$

paraméterek

Landau-elm. köv. feltevése: $P(M)$ éles eloszlás (legvalószínűbb $M \approx \langle M \rangle$)
fluktuációk is érdekelnek → Gauss-köz. (Gauss-görbe)



Általánosítás: $$P(m(\underline{r})) = \frac{e^{-\beta F_c(T, H, m(\underline{r}))}}{e^{-\beta F(T,H)}}$$
mágnesezettség eloszlása

egytengelyű ferromágnes (homogén mágnesezettség)

$$M = Vm$$

$$F_c(T,H,m) = V\cdot \underbrace{\left(w_0 + \frac{a(T)}{2}m^2 + \frac{u(T)}{4}m^4 - mH\right)}_{f(T,H,m)\ \text{(egys. térf.)}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial m} = 0$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial m^2} > 0$ mert min-ot keresünk

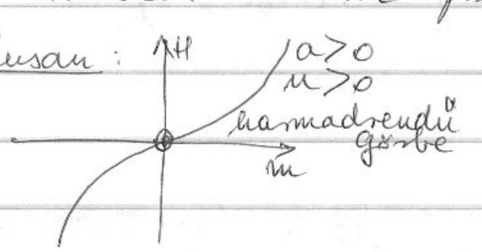
$\boxed{a(T)m + u(T)m^3 - H = 0}$ ez az áll. egyenlet

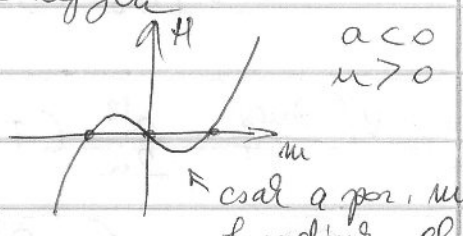
$\boxed{a(T) + 3u(T)m^2 > 0 \text{ a min. helyén}}$

m-ra:
$$\frac{\partial H}{\partial m} = a + 3um^3 = \chi^{-1}$$

χ^{-1} szuszc. inverze poz. kell legyen

grafikusan:





$u(T) > 0$ absz. min. létezésének feltétele

áll. egyenlet → $H=0$ — $m=0$ $a(T)>0$

$m^2 = -\frac{a}{u}$ $a<0$

$$a - 3u\frac{a}{u} = -2a > 0 \ ✓$$

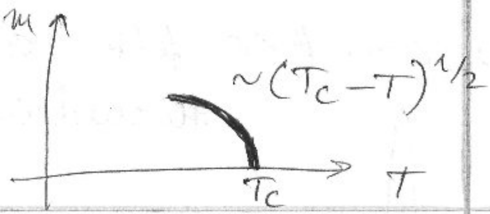
Feltételezés: $a(T)$ előjelet vált T_c-nél

$$a(T_c) = 0$$

→ $a(T) = a'(T - T_c)$ lineárisan vált előjelet

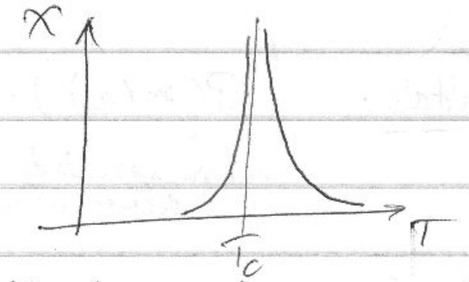
→ $u(T) \approx u(T_c)$

$$m = \sqrt{-\frac{a(T)}{u(T)}} = \sqrt{a'(T_c - T)}$$



$$\chi^{-1} = \begin{cases} a & T > T_c \quad H = 0 \\ -2a & T < T_c \quad H = 0 \end{cases}$$

$$\chi = \begin{cases} \frac{1}{a} = \frac{1}{a'(T - T_c)} \\ \frac{1}{-2a} = \frac{1}{2a'(T_c - T)} \end{cases}$$



szuszc. úgy divergál, mint az átlagtér köz.-nél

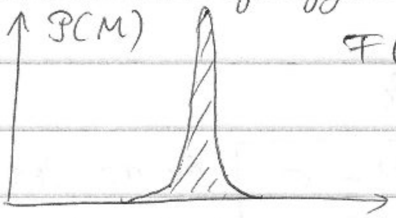
χ^{-1} 0 lesz → nem elég lin. tagig menni a sorfejtésben

$T = T_c \quad u m^3 = H$

STATFIZ: eloszl. fgv. éles ⟹ alatta lévő terület ≈ maximális érték

(Σ-ban a legnagyobb tag ≈ Σ)

most is:



$$F(T,H) \approx F_c(T,H,M)\big|_{min}$$

áll. egyenlet mo-ja

$$F(T, H=0) \approx V \cdot f(T, H=0, m)$$

$T > T_c \quad F = V \cdot w_0(T)$

$$T < T_c \quad F = V \cdot \left(w_0(T) + \frac{a(T)}{2}\left(-\frac{a(T)}{u}\right) + \frac{u}{4}\left(\frac{a(T)}{u}\right)^2\right) =$$

$$= V\left(w_0(T) - \frac{a(T)^2}{4u}\right) = V\left(w_0(T) - \frac{a'^2}{4u}(T - T_c)^2\right)$$

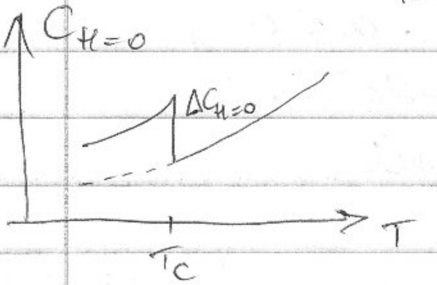
$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = -V\left(\frac{\partial w_0}{\partial T} - \frac{a'^2}{2u}(T - T_c)\right)$$

$$C_{H=0} = T\frac{\partial S}{\partial T} = -V\left(T\frac{\partial^2 w_0}{\partial T^2} - T\frac{a'^2}{2u}\right)$$

(ez $T < T_c$-re szám. $T > T_c$-re u.e. csak második tag nincs)

fajhő

$$C_{H=0}(T \to T_c^-) - C_{H=0}(T \to T_c^+) = V T_c \frac{a'^2}{2u}$$



fluktuációk: $P(m) \sim e^{-\beta(F_c(m) - F_{c\,min})}$

$\bar{m}$ jelölje az áll. egyenlet mo-át (itt van F_c-nek min-a)

min. körül sorf.:

$$F_c(m) - F_c(\bar{m}) = \frac{1}{2} V \underbrace{\left.\frac{\partial^2 f}{\partial m^2}\right|_{\bar{m}}}_{a + 3u\bar{m}^2} (m-\bar{m})^2 + \cancel{\ }$$

Gauss-köz, ezt elh.

$$P(m) \sim e^{-\frac{\beta V}{2}(a+3u\bar{m}^2)(m-\bar{m})^2} = e^{-\frac{\beta V}{2\chi}(m-\bar{m})^2}$$

$$\overline{(m-\bar{m})^2} = \frac{\chi}{\beta V} = \frac{k_B T \chi}{V}$$

krit. pont $\rightarrow$ χ div. $\rightarrow$ gond, egyre nagyobb térf.-nél mondhatjuk, h. a szórásnégyzet elh.

ezeket a flukt.-válasz tétellel levezethettük is felírhattuk volna.

egytengelyű mágnes, inhomogén flukt-kat is figy. vesszük

v. inhom. H teret is megengedünk

$F_c(T, H, m(\underline{r})) = (*)$

gradiens sorfejtés (térbeli deriv.-tak és hatványok) $\rightarrow$ Fourier-képben $\rightarrow$

$\rightarrow$ hullámszám szerinti sorf.

$$(*) = \int d^3r \left\{ \underbrace{w_0(T) + \frac{a(T)}{2} m(\underline{r})^2 + \frac{u(T)}{4} m(\underline{r})^4}_{\text{eddig olyan, mint a hom. rsz, csak } m \text{ függ a helytől}} + \underbrace{\frac{c}{2}(\nabla m(\underline{r}))^2}_{\text{grad tagot betesszük}} - m(\underline{r}) \underbrace{h(\underline{r})}_{h \text{ is függ a helytől}} \right\}$$

absz. min. létezése: $u(T) > 0$, $c(T) > 0$

$\hookrightarrow$ m térbeli vált-nak félkezője

$u(T) \approx u(T_c)$ $\quad c(T) \approx c(T_c)$

$a(T) = \alpha(T - T_c)$

$\rightarrow$ funkcionál min-át keressük:

$F_c(T, H, m(r)) = \text{min.}$

▶ $h(\underline{r}) = H$ homogén tér

$$F_c(T, H, m(\underline{r})) \underset{\substack{\uparrow \\ = \text{ felt.: } \nabla m = 0}}{\geq} \int d^3r \left\{ w_0 + \frac{a}{2} m(\underline{r})^2 + \frac{u}{4} m^4(\underline{r}) - m(\underline{r}) H \right\} \geq$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ = \text{ felt. ha } m = \bar{m}}}{\geq} V \min\left\{ w_0 + \frac{a}{2}\bar{m} + \frac{u}{4}\bar{m} - \bar{m}H \right\}$$

visszakapjuk a hom. eset~~e~~ mo-ját

ez jó

▶ $h(\underline{r})$ inhom. tér cset

$m(\underline{r}) \to m(\underline{r}) + \delta m(\underline{r})$ megváltoztatjuk } min. helyén $\to 0$

mágn. is inhom. lesz $\quad \delta F_C$ ↳ hogyan vált.

$$\delta F_C = F_C(m(\underline{r}) + \delta m(\underline{r})) - F_C(m(\underline{r})) = (*)$$

$$(m + \delta m)^2 = m^2 + 2m\,\delta m + \cancel{\ldots}$$

$$(m + \delta m)^4 = m^4 + 4m^3\,\delta m + \cancel{\ldots}$$

$$(*) = \int d^3r \left\{ am\,\delta m + um^3\delta m + \underbrace{c\,\nabla m\,\nabla\delta m}_{c\cdot\nabla(\delta m\cdot\nabla m) - c\Delta m\cdot\delta m} - h\,\delta m \right\} = (\text{house})$$

div. $\qquad$ divgrad jön be pont

$$\int d^3r\, \nabla(\delta m\cdot\nabla m) = \oiint df\,\delta m\,\frac{\partial m}{\partial n} \leftarrow (\nabla m\cdot\underline{n})$$

div.

periodikus hat. felt.: $\qquad L \qquad$ két szemközti fal $\quad \nabla m \quad \underline{n}$

két felületen ellentétes az $\underline{n}$

$\Rightarrow \oiint = 0$ lesz

$$(\text{house}) = \int d^3r \left\{ (am + um^3 - c\Delta m - h)\,\delta m \right\} = 0$$

⇓ tetszőleges δm esetén

$$\boxed{am + um^3 - c\Delta m = h}$$

(ez pont ehhez a funkcionálhoz tartozó Euler-Lagr.-egy.)

(előző old. $F_C(T, H, m(\underline{r})) = \int d^3r\, f(m(\underline{r}), \nabla m(\underline{r}))$

(*)-os egyenlet

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{\partial m}{\partial x_i}\right)} - \frac{\partial f}{\partial m} = 0$$)

homogén tér $\to$ hom. $m \to \Delta m = 0 \to$ visszakapjuk az előző eredményt

áll. egy: $\to h(\underline{r}) \to h(\underline{r}) + \delta h(\underline{r})$ -t ha a helyzet kicsit megvált. $\to m(\underline{r})$ mennyire vált.?

$m(\underline{r}) \to m(\underline{r}) + \delta m(\underline{r})$

$h(\underline{r})$-hez tart. mo.

egyszerűsítés: $h(\underline{r}) = H + \delta h(\underline{r})$ $\quad$ hom. + inhom. megvált.

$m(\underline{r}) = \bar{m} + \delta m(\underline{r})$

hom. áll. egy mo-a $(a\bar{m} + u\bar{m}^3 = H)$

lineáris rendig tudom, → linearizálnunk kell

$$a(\bar{m}+\delta m)+u(\bar{m}^3+3\bar{m}^2\delta m+\dots)-c\Delta\delta m = H+\delta h(\underline{r})$$

áll. egy. miatt

$$(a+3u\bar{m}^2)\,\delta m(\underline{r}) - c\,\Delta\delta m(\underline{r}) = \delta h(\underline{r})$$ lin. egyenlet m és h között

F-térbe átmegyünk: ← Δ miatt nem tudjuk közv. mo-ni

$$\underbrace{(a+3u\bar{m}^2)\,\delta m_q + c q^2 \delta m_q} = \delta h_q$$

$$\chi^{-1}(q)\,\delta m_q = \delta h_q$$

$$\Rightarrow \chi^{-1}(q) = \frac{1}{a+3u\bar{m}^2+cq^2} = \frac{1}{c}\frac{1}{\xi^{-2}+q^2}$$

$$\boxed{\xi^{-2} = (a+3u\bar{m}^2)/c} \qquad \frac{1}{\text{hossz.}^2}$$

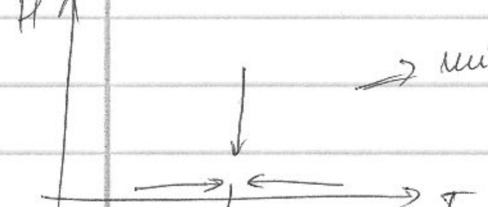
korr. fgv:

$$C(q) = k_B T\,\chi(q) = \frac{k_B T}{c}\frac{1}{\xi^{-2}+q^2}$$ hosszú hull. esetben igaz

erős korreláció az $1/\xi$ tart. belsejében

$$\Rightarrow C(\underline{r}) = \frac{k_B T}{4\pi c}\frac{e^{-r/\xi}}{r} \quad \text{vissza } \mathcal{F}$$

$$\xi^{-2} = \begin{cases} a/c & H=0 \quad T>T_c \\ -2a/c & H=0 \quad T<T_c \qquad (\bar{m}^2 = -a/u) \\ \frac{3u}{c}\left(\frac{H}{u}\right)^{2/3} & H\neq 0 \quad T=T_c \qquad (a=0,\ \bar{m}=(H/u)^{1/3}) \end{cases}$$



→ mindhárom esetben $\xi^{-2}\to 0 \Rightarrow \xi\to\infty$ divergál a korr. hossz.

$$\xi \sim \begin{cases} \frac{1}{(T-T_c)^{1/2}} & H=0 \quad T>T_c \\ \frac{1}{(T_c-T)^{1/2}} & H=0 \quad T<T_c \\ H^{-1/3} & H\to 0 \quad T=T_c \end{cases}$$

erősek a fluktuációk és egyre nagyobb tartományon fognak koherensen fluktuálni (hom. mágn.)

ξ méretű tartományban megjelenik a rendezett fázis.

új rend lokálisan megjelenik a rácsban → egyre nagyobb és nagyobb tart-ban

Fázisát. (7. EA)

negyedrendű tag → ⊕ előjel volt h. min legyen

mi van, ha vhol ⊖ ⇒ hatodrendűt is figy-be kell venni

elsőrendű fázisát.? }
trikritikus pont }

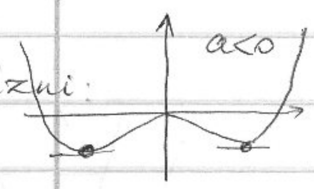
$$f = \frac{F}{V} = w_0 + \frac{a}{2}m^2 + \frac{u}{4}m^4 + \frac{v}{6}m^6$$

absz. min. felt.: $v>0$ (ha u-ra nincs megkötésünk)

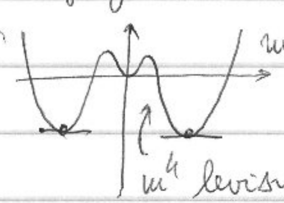
<u>$u>0$:</u> m^6 tag elhagyható

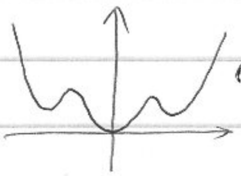
<u>$u<0$:</u>
$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial m} &= am + um^3 + vm^5 = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial m^2} &= a + 3um^3 + 5vm^4 > 0\end{aligned}\right\}$$

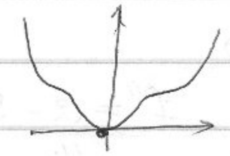
w_0 nem befolyásol → elég az $\frac{a}{2}m^2 + \frac{u}{4}m^4 + \frac{v}{6}m^6$-t nézni:



$0<a<\frac{u^2}{4v}$

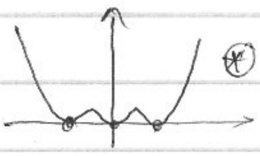






mire lehajtaná, már m^6 dominál

$a > \frac{u^2}{4v}$



<u>$m=0$:</u> mindig mo. $f'=0$, min., ha $a>0$

1 min. 1 max + a párjaik

<u>$m\neq 0$</u> $\Rightarrow a + um^2 + vm^4 = 0$

eggyel kisebb hatványon m (leosztottunk ha $\neq 0$)

$$m^2 = \frac{|u| \pm \sqrt{u^2 - 4av}}{2v} = \begin{cases} 0<a<\frac{u^2}{4v} & 2 \oplus \text{ mo.} \\ a > u^2/4v & \text{nincs valós mo.} \\ a<0 & 1 \oplus \text{ mo.} \end{cases}$$

(csak a felső előjeles)

előző ábrán: 1 és a párja

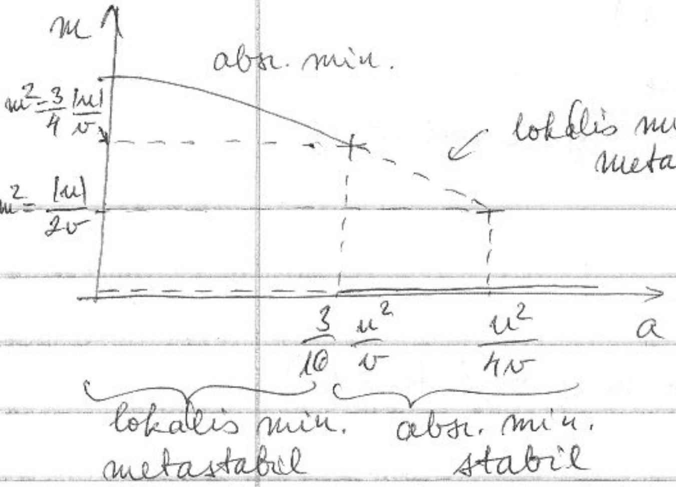
(*)
$$\left.\begin{aligned} a + um^2 + vm^4 &= 0 \\ \frac{a}{2}m^2 + \frac{u}{4}m^4 + \frac{v}{6}m^6 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ egyenletrdsz. a-ra és m-re

$\Leftarrow f - w_0$

$$3a + \frac{3}{2}um^2 + vm^4 = 0$$
$$2a + \frac{u}{2}m^2 = 0 \qquad m^2 = -\frac{4a}{u} \quad (u<0)$$

ezt beh. az elsőbe $\Rightarrow a = \frac{3}{16}\frac{u^2}{v}$

→ <u>u, v fix, a-t változtatjuk</u> → mi lesz a mágnesezettséggel?

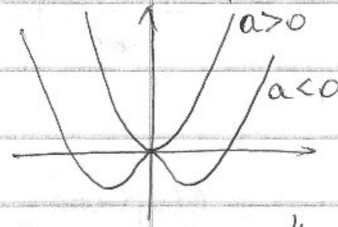


$a = a'(T - T_c)$
túl lehet hűteni a rdszt.
hiszterézis van

(feltesszük, h. u, v a krit. pontban végesek, nem váltanak előjelet)

$u = 0$: $f = w_0 + \frac{a}{2} m^2 + \frac{v}{6} m^6$

$$\left.\begin{array}{l} f' = am + vm^5 = 0 \\ f'' = a + 5vm^4 > 0 \end{array}\right\}$$



$m = 0 \quad f'' = a > 0$

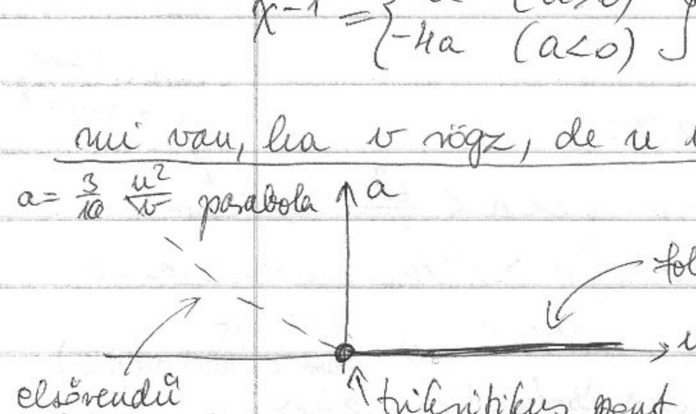
$a < 0$: $a + vm^4 = 0$

$m^4 = -\frac{a}{v} \qquad f'' = a - 5v\frac{a}{v} = -4a > 0$

$m = \left(-\frac{a}{v}\right)^{1/4} \sim (T_c - T)^{1/4}$

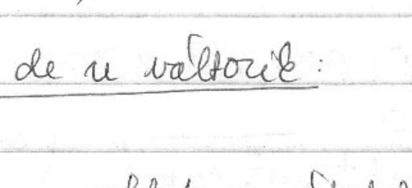
$$\chi^{-1} = \left\{\begin{array}{ll} a & (a>0) \\ -4a & (a<0) \end{array}\right\} \sim |T - T_c|$$

mi van, ha v rögz, de u változik:



pl. egytengelyű AF, tengellyel ∥ tér:

Egy részük ilyen:



Köbös szimmetria: $\underline{m} = (m_1, m_2, m_3)$ vektor

$$f = w_0 + \frac{a}{2}\underline{m}^2 + \frac{u}{4}(\underline{m}^2)^2 + \frac{v}{4}\sum_\alpha m_\alpha^4$$

↳ megtöri a forg. szimm.-t de a 3 komp. szerepe ekviv.

$\sum_{\alpha\neq\beta} m_\alpha^2 \cdot m_\beta^2$ itt is csak a 3 komp., de ez nem fgtlen az eddigiektől

$$(\underline{m}^2)^2 = \sum_\alpha m_\alpha^2 \sum_\beta m_\beta^2 = \sum_\alpha m_\alpha^4 + \sum_{\alpha\neq\beta} m_\alpha^2 m_\beta^2$$

ez már szerepel f-ben

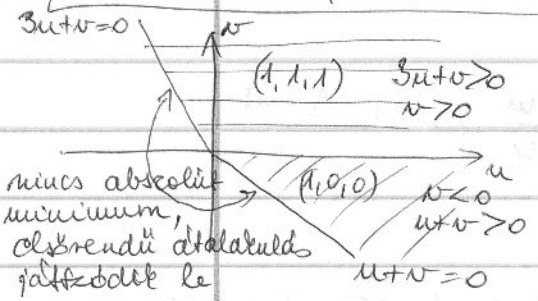
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial m_\alpha} &= a m_\alpha + u \underline{m}^2 m_\alpha + v m_\alpha^3 = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial m_\alpha \partial m_\beta} &= \delta_{\alpha\beta}(a + u\underline{m}^2 + 3v m_\alpha^2) + 2u m_\beta m_\alpha \end{aligned}\right\} \text{poz. definit}$$

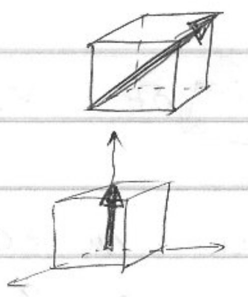
<u>mo. egyik keresése:</u> $\begin{pmatrix} m_1 \neq 0 \\ m_2 = 0 \\ m_3 = 0 \end{pmatrix}$ mo. valamilyen ir-ban → min, ha $a<0$, $\begin{pmatrix} m_1 \neq 0 \\ m_2 \neq 0 \\ m_3 = 0 \end{pmatrix}$ mo valamelyik síkban → sosem min.

$\begin{pmatrix} m_1 \neq 0 \\ m_2 \neq 0 \\ m_3 \neq 0 \end{pmatrix}$ mo valahogy átlósan → min., ha $a<0$ → mikor melyik? → u, v-től függ

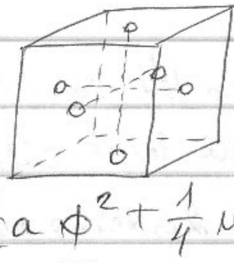
$m_1 = m_2 = m_3$ → testátló

$\boxed{\underline{m} = 0 \text{ min, ha } a > 0}$





Stroncium-titanát már szerepelt: $SrTiO_3$



$\underline{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$

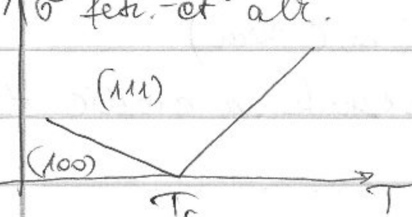
$$f = w_0 + \frac{1}{2} a \Phi^2 + \frac{1}{4} u (\underline{\Phi}^2) + \frac{v}{4} \sum_\alpha \Phi_\alpha^4$$

$(1,0,0) \parallel \Phi$ $v<0$

$LaAlO_3$ $(1,1,1) \parallel \underline{\Phi}$ $v>0$ elfordulás (111) tengely mentén

$SrTiO_3$-at megnyomjuk (111) ir-ban → átalakulhat a másikba

⇒ v nyomásfüggő



Izotróp ferromágnes:

$\underline{H} \neq 0$: $\underline{H} \parallel \underline{m}$

$$m_\alpha = f(H)\frac{H_\alpha}{H} = -\frac{\partial F(H)}{\partial H_\alpha}$$

$$\chi_{\alpha,\beta} = \frac{\partial m_\alpha}{\partial H_\beta} = \delta_{\alpha\beta}\frac{f(H)}{H} + \left(\frac{df}{dH}\frac{1}{H} - \frac{1}{H^2}f(H)\right)\frac{H_\beta H_\alpha}{H} =$$

$$= \frac{df}{dH}\underbrace{\frac{H_\alpha H_\beta}{H^2}}_{\text{projektor}} + \frac{f(H)}{H}\Big(\underbrace{\delta_{\alpha\beta} - \frac{H_\alpha H_\beta}{H^2}}_{\text{ez } H\text{-ra } \perp\text{-en}}\Big)$$

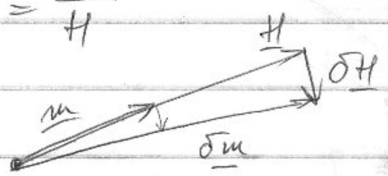
H ir-ra vetít

$\Rightarrow$ χ_L longitud. $\qquad \chi_T$ transzverz.

$\underline{H} = (0,0,H)$

$$\begin{pmatrix} \frac{f(H)}{H} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f(H)}{H} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{df(H)}{H} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \perp\text{-en a } \chi \\ \\ \leftarrow H \text{ ir. a } \chi \end{array}$$

$$\chi_T = \frac{f(H)}{H} = \frac{m}{H}$$



$\chi_T = \frac{\delta m}{\delta H} = \frac{m}{H}$ (has. Δ-ek)

$H \to 0$: p.m. fázisban $m \to 0$

$m = \chi H$ nincs kül. L és T között

def. szerint χ_L, de most χ_T is ennyi

f.m. fázisban m véges

$\chi_T \to \infty$ $\qquad$ nincs tér: en. befektetés nélkül lehet elforgatni

$W = \frac{1}{2}\frac{1}{\chi}m^2$ $\qquad$ van egy kis tér → már nem igaz → $\to \chi_T \to \infty$

Landau-elmélet: $\underline{m} = (m_1, m_2, m_3)$

$$F = \int d^3r \left\{ w_0 + \frac{a}{2}\underline{m}^2 + \frac{u}{4}(\underline{m}^2) + \frac{1}{2}c(\nabla \underline{m})^2 - h\underline{m} \right\}$$

h, m függ a helytől, a, u, c paraméterek

„a" hőm. függő, előjelet vált (u, c nem)

$(\nabla \underline{m})^2 = \sum_\alpha (\nabla m_\alpha)^2$ komponensenként vesszük a gradienst így kell érteni

$a\underline{m} + u m^2 \underline{m} - c\Delta\underline{m} = \underline{h}$ (homogén egyenlet egyszerű általánosítása vektorokra)

$\underline{h} = \underline{H} + \delta\underline{h}(\underline{r})$ inhomogén mágn. teret bekapcsolunk → erre adott válasz → χ, $\underline{H} = (0,0,H)$

$\underline{m} = \underline{m}_s + \delta\underline{m}(\underline{r})$ $\quad \underline{m}_s = (0,0,m_s)$

nem spontán, csak s-sel jelöljük

$a m_s + u m_s^3 = H$

$m^2 \cong m_s^2 + 2\underline{m}_s\delta\underline{m} + \dots$ olh. a négyzetest ($\delta\underline{m}$-ben lin. tagokat tartjuk meg)

$\underline{m}^2\underline{m} = (\underline{m}_s^2 + 2(\underline{m}_s\delta\underline{m}))(\underline{m}_s + \delta\underline{m}) =$

$= \underline{m}_s^2 \cdot \underline{m}_s + 2(\underline{m}_s\delta\underline{m})\underline{m}_s + \underline{m}_s^2\delta\underline{m}$

$a\delta\underline{m} + u\,\underline{m}_s^2\delta\underline{m} + 2u(\underline{m}_s\delta\underline{m})\underline{m}_s - c\Delta\delta\underline{m} = \delta\underline{h}$

z komponens: $a\delta m_z + u m_s^2\delta m_z + 2u m_s^2\delta m_z - c\Delta\delta m_z = \delta h_z$

mo → F-tr. F.komp-ek között egysz. algebrai öf. lesz

$\underbrace{(a + 3u m_s^2 + cq^2)}_{\chi_L^{-1}(q)}\delta m_z(q) = \delta h_z(q)$

x-komponens: (y ekvivalens)

$a\delta m_x + u m_s^2\delta m_x - c\Delta\delta m_x = \delta h_x$

$F \to \underbrace{(a + u m_s^2 + cq^2)}_{\chi_T^{-1}(q)}\delta m_x = \delta h_x$

$m_s(a + m_s^2) = H$

$\chi_T^{-1}(q) = \left(\frac{H}{m_s} + cq^2\right)$ $\quad q \to 0$ komp. → makr. $\chi = \frac{m}{H}$

ezzel összhangban vagyunk

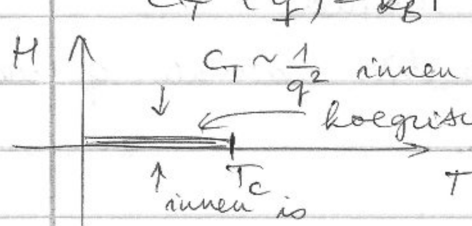
$q=0$: $\chi_T^{-1}(q=0) = \frac{H}{m_s}$

$H=0$: $\chi_T^{-1} = cq^2$ $\quad \chi_T = \frac{1}{cq^2}$ $\quad q \to 0 \Rightarrow \frac{1}{q^2}$-tel divergál

$C_T = \langle S_x(\underline{r})\, S_x(0)\rangle$ korr. fgv. (transzv.)

mikr. mágn. változó

$C_T(q) = k_B T\,\chi(q) = \frac{k_B T}{cq^2}$



$C_T(\underline{r}) \sim \frac{1}{r}$ Landau-elm. egyens. vsz. → korr. fgv. exp. cseng le

itt nem

$C_L \sim \frac{1}{konst. + q^2}$ Yukawa $\to \mathcal{F}^{-1} \to$ exp. lesz

hosszú hullámú fluktuáció a mágn-ben (kis energia kell hozzá)

$C_T(q) = \langle S_x(q) S_x(-q) \rangle$ orientációs fluktuáció

C_T mindig $\frac{1}{q^2}$-tel divergál, nem csak a Landau-elm. miatt jön be, általánosabb vizsg. $\to$ akkor is

---

Goldstone-tétel: globális folytonos szimmetria sérül $\to$ meg kell jelennie egy 0 töm. bozonnak ... (általában megfogalm.)

(kond. any. fiz.: ált. forgásszimmetria)

a.) hosszútávú transzverzális (orientációs) korrelációk

ez megmarad az egész koegzisztencia görbe mentén

$\left(C_T(q) \sim \frac{1}{q^2},\ C_T(r) \sim \frac{1}{r}\right)$

b.) megjelenik egy gap nélküli, propagáló módus (Goldstone-módus)

(hosszú hullámú orientációs fluktuációk)

$\omega(q) \to 0 \ (q \to 0)$ gap nélküli

$\frac{\mathrm{Im}\,\omega(q)}{\mathrm{Re}\,\omega(q)} \to 0$ a csillapítás eltűnik $q \to 0$-ra a propagáláshoz képest

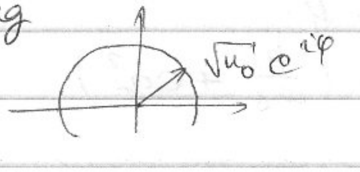
$e^{i(qr - \omega(q)t)} = e^{i(qr - \mathrm{Re}\,\omega(q)t)}\ e^{i\,\mathrm{Im}\,\omega(q)t}$

pl.: ferromágneses / antiferromágneses spinhullámok

^4He-ban második hang

$\left(\begin{array}{l} FM: q^2\text{-es} \\ q^4\text{-es csill} \\ AF: q \text{ fr.} \\ q^2\text{-es csill} \end{array}\right)$

$\langle \Psi(r) \rangle = \sqrt{n_0}\, e^{i\varphi}$



szuperfolyékony állapot $\to \varphi$ rögz. $\to$ forg. szimm. sérül

$\to$ fázisfluktuációk

$\to$ normál és szup. foly. komponens ellentétes fázisban rezeg

$\to$ hőmérséklet hull.

longitud. $\to$ Landau-elmélet $\to$ véges marad

$\hookrightarrow$ komolyabb elm. $\to$ az is div. csak nem q^2 hanem q

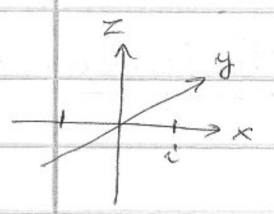
Fázis (8. EA) 11.09.

Átlagtér közelítés – Landau elmélet kapcs.

pl. Ising-modell: nn kh., ferromágneses kh., SC rács

$$h_i = k_B T \,\mathrm{Arth}\, m_i - J \sum'_{\langle ij \rangle} m_j \qquad , \quad \sum'_j J_{ij} m_j$$

↖ nn. szomszédok



$$\mathrm{Arth}\, x \cong x + \frac{x^3}{3} + \dots$$
$(x \ll 1)$

lassan változó mágnesezettség: $m_i = m(\underline{R}_i)$, $h_i = h(\underline{R}_i)$ sima fgv.

$$m(\underline{R}_i \pm a \underline{e}_x) = m(\underline{R}_i) \pm a \frac{\partial m}{\partial x}(\underline{R}_i) + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 m}{\partial x^2}(\underline{R}_i) + \dots$$

a térbeli elrend. miatt

az összegben a középső tag kiesik →

$$\sum'_{\langle ij \rangle} m_j = 6 m(\underline{R}_i) + a^2 \underbrace{\Delta}_{\text{Laplace}} m(\underline{R}_i)$$

$$h(\underline{R}_i) = k_B T m(\underline{R}_i) + \frac{k_B T}{3} m^3(\underline{R}_i) - 6 m(\underline{R}_i) \cdot J - J a^2 \Delta m(\underline{R}_i)$$

$$h(\underline{r}) = \underbrace{(k_B T - \underbrace{6J}_{k_B T_C})}_{a(T)} m(\underline{r}) + \underbrace{\frac{k_B T}{3}}_{u(T)/4} m^3(\underline{r}) - \underbrace{J a^2}_{C(T)} \Delta m(\underline{r})$$

→ Landau elm. áll. egyenletének formája

a kritikus pont körül ≈ konstans

csak a krit. pont körül

átlagtér – Landau ekvivalens a krit. pont körül,

de ez a teljes hőm tart.-ban

ált. $J_{ij} = J(\underline{R}_i - \underline{R}_j)$ a transzlációsszimm. miatt

hogy ez véges legyen: $\sum'_j J_{ij} (x_i - x_j)^2 < \infty$

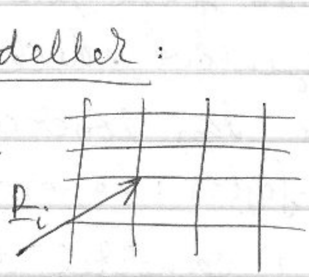
együttható a q^2 előtt (Four. után)

kell, hogy gyorsan levágjon: rövid hatótávú kh. esetén igaz,

h. átl.tér ≈ Landau.

Egzakt mo-k; modellek:

▶ Ising-modell:



$S_i = \pm 1$ $\qquad d = 1,2$

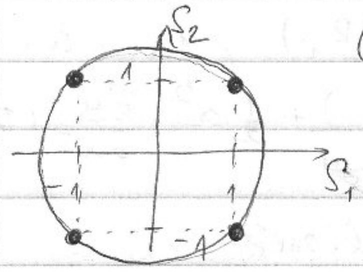
(dim-okban mo-ható)

$$\mathcal{H} = -J \sum'_{\langle ij \rangle} S_i S_j - H \sum_i S_i$$

$d=1$: nincs spont. mágn. — nincs fázisátalakulás (Landau 5. köt.)
$d=2$ van —‖— — egzakt mo. is létezik (Onsager)
$d\geq 3$ van fázisátalakulás, de nincs egzakt mo.

▶ Szférikus modell: Ising: $S_i^2=1$, $\sum_i S_i^2 = N$
szférikus: S_i folyt. valós változó, $\sum_i S_i^2 = N$
(fázistér kibővítve)

$N=2$ (a 4 pont a mo.) Ising



$S_1^2+S_2^2=2$ (kör) szférikus

$$\mathcal{H} = -J\sum_{\langle ij\rangle} S_iS_j - H\sum_i S_i$$

tetszőleges dim-ban meghat-ható a kritikus viselkedés (minden, ami a fázisátalakulás leírásához kell)

▶ n-vektor modell:
$$\underline{S}=(S_1,\dots,S_n),\quad \underline{S}^2=1 \quad \left(\sum_{i=1}^{n} S_i^2=1\right)$$
$$\mathcal{H} = -J\sum_{\langle ij\rangle}(\underline{S}_i\underline{S}_j) - \sum_i(\underline{H}\,\underline{S}_i)$$
max. eltér, ha $\underline{S}_i \parallel \underline{S}_j$ → min H, ha ‖-ak a spinek

$n=1$ → Ising-modell
$n=3$ → mágn. mom-ok ‖-os beállása az E_{min} → klasszikus Heisenberg-modell
$n=2$ → xy modell, planáris ferromágnes (síkba van komponense)
⋮

$\underline{H}=0$ mellett csak skalárszorzatot találunk, ezért a spineket forgatva ez nem változik → $O(n)$ szimm. (forgás- és tükörszimm.)

$n\to\infty$ határeset = szférikus modell
pl. kiszámoljuk az 1 szab. fokra jutó szab. en.-t → a két szab. en. egyenlővé válik
szférikus modellhez így korrekciókat számolhatunk
($\frac{1}{n}$ sorfejtés: korrekció)

Heisenberg-modell: kvantum-i spinekkel dolgozik
$$\underline{S}_i,\quad [S_{ix}, S_{iy}] = i S_{iz},$$
$$\hat{\mathcal{H}} = -J\sum_{\langle ij\rangle}(\hat{S}_i\hat{S}_j) - H\sum_i \hat{S}_i \qquad \hat{S}_i^2 = s(s+1)$$

$$(\hat{S}_i \hat{S}_j) = \frac{1}{2}\left[(\hat{S}_i + \hat{S}_j)^2 - \hat{S}_i^2 - \hat{S}_j^2\right]$$

sé.-ek: $\frac{1}{2}\left(j(j+1) - 2s(s+1)\right)$, $j = 0, 1, 2, \dots 2s$

max. sé: ha $j_{max} = 2s$, $\frac{1}{2}\left(2s(2s+1) - 2s(s+1)\right) = s^2$

$j = 0$ = ellentétes beállás

$\left.\begin{matrix} d=1 \\ d=2 \end{matrix}\right\}$ Heis. mod.: nincs fázisátalakulás

Mermin – Wagner – tétel következménye ez

$m = \langle S_z \rangle \neq 0$ $\underline{H} \parallel z \Rightarrow$ transzverz. korrel. fgvek def.:

$$C_T = \langle S_{ix} S_{jx} \rangle$$

$\downarrow$ Ftr.

$$\frac{C_T(q)}{k_B T} \geq \chi_T(q) \geq \frac{m^2}{Hm + \omega q^2}, \text{ ahol}$$

$$\boxed{\omega = s(s+1) \sum_j |J_{ij}| (R_i - R_j)^2}$$

véges, elég gyorsan csengjék le (rövid hatótáv)

ferrom. és antif.-re is igaz lesz

$H \to 0$, m véges, C_T legalább $\frac{1}{q^2}$ szerint divergál

$$\langle S_{ix}^2 \rangle \leq s(s+1) = \frac{1}{N} \sum_q C_T(q) = \frac{v_0}{(2\pi)^d} \int dq^d\, C_T(q)$$

(teljes spin)^2 – e konstans) $q \in BZ$ BZ térf. dim.

$q=0$ körül:

$$\int_0 dq\, d^{d-1} \frac{1}{q^2} \text{ divergál, ha } d = 1 \text{ v. } 2$$

ellentmondás: véges mo. $\geq$ divergens

feloldás: véges mágnesezettségünk van

ezért nincs $d=1,2$-ben fázisátalakulás

minél jobban összeszorítjuk a teret, annál radikálisabb a fluktuációk hatása.

▶ $d=3$: egzisztencia-tételek:

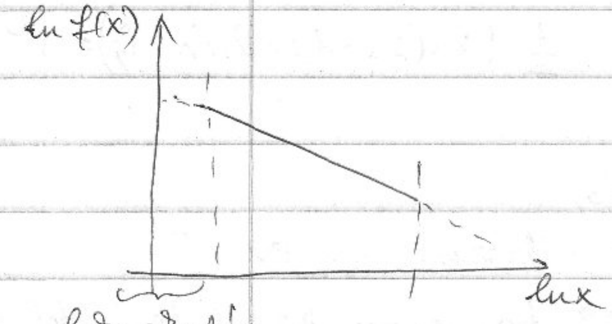
Fröhlich – Simon – Spencer – tétel (kl. Heis. mod.):

$d \geq 3$ van f. átalak.

▶ $d=3$: Dyson – Lieb – Simon – tétel: antiferromágneses kv. Heis. modell $d \geq 3$ van f. á.

$$f(x) \underset{x\to 0}{\cong} Ax^{\lambda} + \dots$$

$\ln f(x) \cong \lambda \ln x + \dots$, most: $x = \frac{T-T_c}{T_c} = t$ redukált hőm., $x=q$



lekerekedés:

véges méret, szennyezések, makroszkopikus inhomogenitások

krit. exponensek:

$m \sim |t|^{\beta}$ $\quad H=0,\ t<0$

$m^{\delta} \sim H$ $\quad H\neq 0,\ t=0$

$\chi \sim |t|^{-\gamma}$ $\quad H=0,\ t>0$ v. $t<0$

$C_{H=0} \sim |t|^{-\alpha}$ $\quad$ — ‖ —

$\xi \sim |t|^{-\nu}$ $\quad$ — ‖ —

(korrel. hossz) (divergál)

$\xi \sim |H|^{-\mu}$ $\quad H\neq 0,\ t=0$

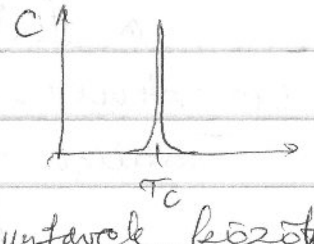
$C(q) \sim \frac{1}{q^{2-\eta}}$ $\quad H=0,\ t=0$ krit. áll.

	klasszikus exponensek	$d=2$ Ising	$d=3$ Szférikus modell	mérés (tdj. szórtatás)
β	$1/2$	$1/8$	$1/2$	$\approx 1/3$
γ	1	$7/4$	2	$\approx 4/3$
δ	3	15	5	≈ 5
α	0 (ugrás)	0 (ln)	-1 (nem div. de szing.)	≈ 0
ν	$1/2$	1	1	$\approx 2/3$
η	0	$1/4$	0	≈ 0 ($<0{,}1$)
μ	$1/3$			

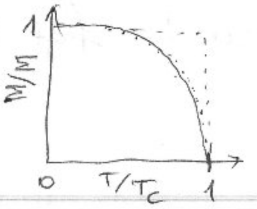
Ising $d=2$

$$\left.\begin{matrix} T>T_c \\ H=0 \end{matrix}\right\} F \simeq a - \frac{b}{2}(T-T_c)^2 \ln|T-T_c|$$

$(T\to T_c)$

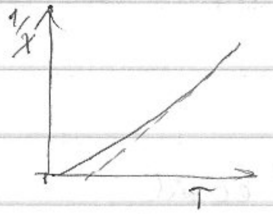


ln divergál a leglassabban a hatványfgvek között

▶ Ni spontán-telítettségi mágn.: 

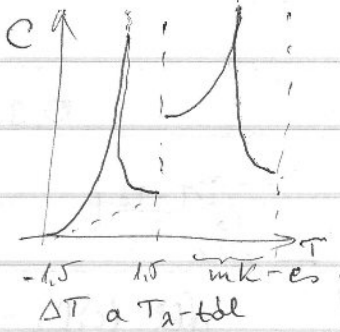
Landau-elm. jól illeszkedik

▶ $\frac{1}{\text{szuszc.}}$, -- Curie-Weiss-tv



eltérés már látszik

▶ Szup. foly. He fajhője divergens kis edényben (gravitáció: lent nagyobb a nyomás) → a nyomás gradiens miatt homályos a mérés

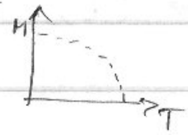


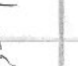
↳ űrben: $\alpha < 0$, a C véges marad, a deriváltja divergál

▶ $SrTiO_3$: oxigén oktaéderek elfordulnak a függőleges tengely körül
elfordulás mértéke (self-konzisztens fonon közelítéssel)

▶ (elford. szögének)$^2 \sim T$: 

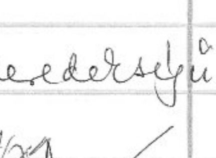
elromlik

kiegyenesíthető: $\varphi^3 \sim T \to$ egyenes jobban, mint φ^2 

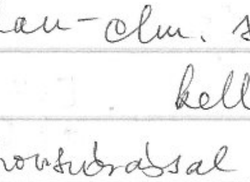
▶ MnF magn. rezonanciával vett mágnesezettség — T
3. hatványt ábrázolva egyenest kapunk: 

▶ szuszc. a Bz szélén: neutronszórással log-log skálán ↘ egyenes
1,27, 1,32 a kritikus exp-ek (Tc fölött v. alatt mérünk)

▶ ferromágn.: Fe χ-je log-log: ↘ egyenes — T ábr.
1,33 a krit. exp.
Landau-elm. szerint (-1)-es meredekségű egyenest kellene látni

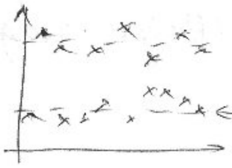


▶ Fe $1/\chi$ neutronszórással $\sim \frac{T-T_c}{T_c}$ 1,3 mered. $+\delta$

▶ izotóp fmágn. 

0,69 mer. $\left(\frac{2}{3}\right)$

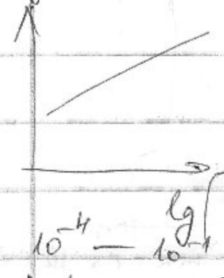
▶ krit. hőm. ξ hullámszám fgv.



ξ = 0 illesztés rosszabb
0,068 a legjobb érték
ξ ≠ 0, de kicsi

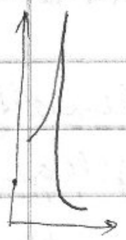
▶ EuO T_c alatt $\frac{1}{\chi}$ ~ intenzitás v. q^2 fgvében egyenesek
$\chi \sim \frac{1}{q^2}$

▶ foly-gáz átalakulás



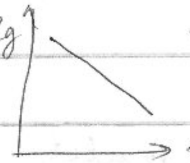
He - krit. pont körül
0,354 meredekség ($\sim\frac{1}{3}$)

▶ Ar

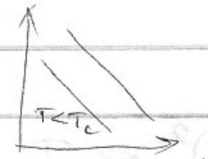


áll. térf.-on mért fajhő viselkedése
(történelmi: első, ahol a divergenciát ki tudták mutatni)

▶ Xe: ξ

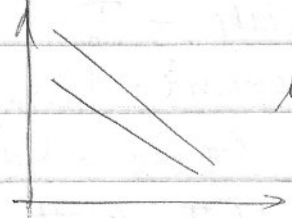


$\nu = 0{,}57$



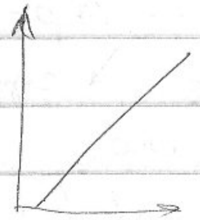
$\gamma = 1{,}21$
(egykomp. rendszerben $\gamma \sim 1{,}2$)
jóval nagyobb, mint a Landau-jósolt 1 érték

▶ CO_2 fényszórással



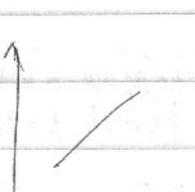
$\mu = 0{,}63$
szuszc. kitevő 1,2

▶ felületi fesz: Xe



$\sigma \sim (T-T_c)$ átlagtér elm-ből
nem lineárisan, hanem 1,3-as kitevővel
krit. ponthoz közel eltér az Eötvös által mért 1-től

▶ magn.^{2} - redukált hőm^2:



közel a Landau-elm-hez, de logaritmikus korrekciók vannak rajta

$d \geq 4$: Landau-elm működik, alatta nem!
↳ ∀ d-ben uaz az exp. jelenne meg, de ez nem így van
$\beta \sim 1/3$, $\mu \sim 2/3$ → univerzalitás miatt mégis csak jelen van (hosszútávú korrelációs fluct. jelenléte)

Fázis (9. EA)

Ginsburg-kritérium

→ Landau-elmélet önmagában konzisztens-e?

V térfogat M mágnesezettség

$$\overline{\Delta M^2} = k_B T V \chi$$

egységnyi térf. szuszc. $\chi = \frac{\partial m}{\partial H}$

$$\frac{\overline{\Delta M^2}}{\overline{M}^2} = \frac{k_B T V \chi}{V^2 m^2} = \frac{k_B T \chi}{V m^2}$$ termodin. h.e-ben igaz szigorúan

mikor igaz → a legnagyobb korr. hossznál nagyobb legyen sok egymástól fgtlen (már nem korrelált) blokk

erősen korrelált blokkra: $V \sim \xi^d$ (korr. hossz.) $\frac{\overline{\Delta M^2}}{\overline{M}^2} = \frac{k_B T \chi}{m^2 \xi^d} \ll 1$, akkor a Landau-elm. érvényes

Landau-elmélet kitevőivel

$$\frac{\chi}{m^2 \xi^d} \sim |t|^{-\gamma - 2\beta + d\nu} \sim |t|^{-1-1+\frac{d}{2}} \sim |t|^{-2+d/2}$$

$t = \frac{T - T_c}{T_c}$

ha $-2 + d/2 < 0$ → divergál, nem marad érvényben $|t| \to 0$-ra a $\frac{\overline{\Delta M^2}}{\overline{M}^2} \ll 1$ feltétel.

$\boxed{d < 4}$ -re nem konzisztens

$d \geq 4$: konzisztens lehet a $\mathcal{L}$-elmélet.

Persze lehet olyan h. adott T tartományban érvényes

Ginsburg: ne legyünk közel a krit. ponthoz.

T_c T

sorfejtés: elég közel kell lennünk a krit. ponthoz (lehessen sorf.)

a két szempont kijelöl egy ablakot.

$$\frac{k_B T \chi}{\xi^3 m^2} = \frac{k_B T \frac{1}{2a'(T_c - T)}}{\frac{a'(T_c-T)}{u} \xi_0^3 \left(\frac{T_c - T}{T_c}\right)^{-3/2}} = \frac{k_B u}{2a'^2 T_c \left(\frac{T_c - T}{T_c}\right)^{1/2} \xi_0^3} \leq \mathcal{O}(1)$$

Fajhő ugrás: $\Delta C_{H=0} = V \frac{a'^2 T_c}{2u}$ → $\boxed{\frac{V k_B}{4 \Delta C_{H=0} \xi_0^3} \leq \left(\frac{T_c - T}{T_c}\right)^{1/2}}$

vannak olyan rdszer, ahol ez nagy

pl. szupravez. → Cooper-pár mérete (100–1000 Å)

ott jól teljesül a $\mathcal{L}$-elmélet.

Magas hőmérsékleti sorfejtés

gerj. en. $\ll k_B T$ ⇒ a gerj. biztosan megjelenik

$\forall$ gerj.-re igaz $\Rightarrow$ a rdsz. minden állapota azonos vsggel jelenik meg.

$\frac{\Delta E}{k_B T} \ll 1$ $\quad e^{-\beta H} = 1 - \beta H + \frac{1}{2}\beta^2 H^2 + \dots$

$T \to \infty$: 1 dominál $\to$ 1 a vsg.

$Z = \mathrm{Tr}(e^{-\beta H}) = \mathrm{Tr}\,1 - \beta\,\mathrm{Tr}\,H + \frac{1}{2}\beta^2\,\mathrm{Tr}(H^2)$

össze kell számolni az állapotokat (véges áll. kell)

$\mathrm{Tr}\,1$-et kiemeljük:

$\frac{\mathrm{Tr}\,H}{\mathrm{Tr}\,1} \to$ energ. a v.é-e, ha $\forall$ áll. azonos vsgű

további tagok a momentumai

pl: Ising-modell (nn. kh-ok, $H=0$)

$$H = -J\sum_{\langle ij\rangle}' S_i S_j$$

$$\boxed{e^{-\beta H} = e^{K\sum_{\langle ij\rangle} S_i S_j} = (*)}$$

$K = \beta J = \frac{J}{k_B T}$

J kh-i energiához képest k_BT hol tart

$$(*) = \prod_{\langle ij\rangle} e^{K S_i S_j} = \prod_{\langle ij\rangle} (\mathrm{ch}\,K + S_i S_j\,\mathrm{sh}\,K) =$$

$e^{\pm x} = \mathrm{ch}\,x \pm \mathrm{sh}\,x$ $\qquad S_i S_j = \pm 1$

P: nn. szomszédpárok száma

$P = \frac{Nz}{2} = \frac{\text{spinek \#} \cdot \text{koord. szám}}{2}$

$$\boxed{= (\mathrm{ch}\,K)^3 \prod_{\langle ij\rangle} (1 + v S_i S_j)}$$

Boltzmann-felnyerő alapja

$v = \mathrm{th}\,K = \mathrm{th}\left(\frac{J}{k_B T}\right)$

ez a kif. v-nek P-fokú polinomja

v hatványai $\to$ egyben egy magas hőm-i sor

Állapotösszeg: $Z = \sum_{\{S\}}' e^{-\beta H} = \sum_{S_1=\pm1} \dots \sum_{S_N=\pm1} (\mathrm{ch}\,K)^P \prod_{\langle ij\rangle} (1 + v S_i S_j)$

beszorzás után:

$S_1^{P_1} S_2^{P_2} \dots S_N^{P_N}$ ha nem szerepel a spin, oda p-be 0-t írok. (p: hányszor szerepel az adott spin a szorz-ban)

v^l együtthatójában: $\sum_i' p_i = 2l$

$$\sum_{S_1=\pm1} \dots \sum_{S_N=\pm1}' S_1^{P_1} \dots S_N^{P_N} = \left(\sum_{S_1=\pm1} S_1^{P_1}\right) \dots \left(\sum_{S_N=\pm1}' S_N^{P_N}\right) = (*)$$

$$\sum_{S=\pm1} S^p = \begin{cases} 2, & \text{ha } p \text{ páros} \\ 0, & \text{ha } p \text{ ptlan} \end{cases}$$

$$ⓧ = \begin{cases} 2^N, & \text{ha } \forall\, p_i \text{ páros} \\ 0, & \text{ha } \exists \text{ ptlan } p_i \end{cases}$$

sok tényező a szorzatban, ebből valamennyi 0.

$$Z = (\operatorname{ch} K)^{\mathcal{P}}\, 2^N \sum_{l=0}^{\mathcal{P}} v^l g(l)$$

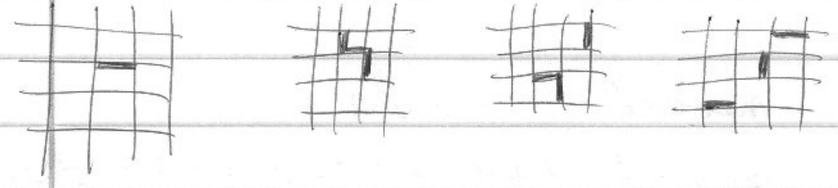
hány olyan kiválasztás van, ahol $\forall$ kitevő páros

$g(l)$: l nn pár kiválasztása után azon kiválasztások száma, amelyekben $\forall$ spin pos. hatványon van.

→ kombinatorikai probléma → képezhető gráfok összeszámolására a rácson, ahol az Ising-mod-t vizsgáljuk → kijelölünk egy gráfot.

l nn pár kiválasztása ⇒ l élű gráf a rácson.

$l=1$ $l=3$



sok lehetőség van

(2 pálban)

$l=4$: □ → ez a spin pos. hatv-on szerepel, mert 2nn ltban is benne van.

→ amiből pos. vonal ~~szerepel~~ indul ki, az pos. hatványon szerepel.

⇒ csupa pos. hatvány = a gráf $\forall$ csúcsából pos. számú él indul

$g(l) = \{l$ élből álló gráfok, amelyekben $\forall$ csúcsból pos. számú él indul$\}$

$Z = (\operatorname{ch} K)^{\mathcal{P}}\, 2^N (\ldots$

$g(0) = 1$ 1 féleképpen tudom csak megcsin. h. nem választok ki nn-t

$g(1) = 0$ mindenképpen 0

$g(2) = 0$ ez is két szabadon marad

$g(3) = 0$

$g(4) = N$ ezt kell csin., ez bárhol lehet → ebből N db van

első korrekció: amikor zárt hurkot tudunk csin.

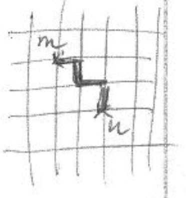
korrelációs fgv:

$$C_{mn} = \langle S_m S_n \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{S\}} \left(e^{-\beta H} S_m S_n\right) = \frac{1}{Z} (\operatorname{ch} K)^{\mathcal{P}} \sum_{S} \left(S_m S_n \prod_{\langle ij \rangle} (1 + v S_i S_j)\right) =$$

$m = n$: $C_{mn} = 1$ itt már szerepel az m-edik és az n-edik spin ⇒ itt ptl. szor kell szerepelnie

gráfok: $m \neq n$

m-ből és n-ből ptl. él indul ki, az összes többiből pos.



$$= \frac{\cancel{(\mathrm{ch}\, K)^{P} 2^{N}} \sum_{l=0}^{P} \eta_{mn}(l)\, v^{l}}{\cancel{(\mathrm{ch}\, K)^{P} 2^{N}} \sum_{l=0}^{P} g(l)\, v^{l}}$$

$\eta_{mn}(l) = \{$ l élből álló gráfok száma, amelyekben m, n pontokból páratlan, a többiből páros él indul

$m = n$:  $\eta_{mn}(l) = g(l)$

1 vonallal : legnagyobb távolság : $l \to$ rácsállandó (ennél tovább nem terjednek ki a korrelációk)

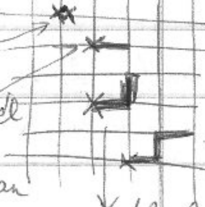
szuszceptibilitás : $k_B T \chi = k_B T \sum_m \chi_{mn} = \sum_m C_{mn} = (*)$

korr. fgv. egyik indexét rögzítem, a másikkal végigmegyek a rácson.

$$(*) = \frac{\sum_{l=0}^{P} \eta(l)\, v^{l}}{\sum_{l=0}^{P} g(l)\, v^{l}} \qquad \eta(l) = \sum_m \eta_{mn}(l)$$

<u>Pl. síkbeli □-rács:</u> nevező: $1 + N v^4 + \dots$

számláló: $1 + 4v + 4\cdot 3\cdot v^2 + 4\cdot 3\cdot 3\cdot v^3 +$
$+ 4\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot v^4 - 2\cdot 4\cdot v^4 +$
$+ N v^4$



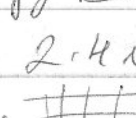
1

$l=1$, 1 él de 4 irányban $4v$

12 lehetőség 2 éllel

folytathatom 3 ir-ban $12 \cdot 3$

de mi van ezzel: □ vagy □ hurkot 2x kapom meg $\to$
$\to$ le kell vonni $2\cdot 4 v^4$

de zárt hurok így is lehet :  $+ N v^4$ itt minden csúcsból pos. él.

$$k_B T \chi = \frac{1 + 4v + 12 v^2 + 36 v^3 + 100 v^4 + N v^4 + \dots}{1 + N v^4 + \dots}$$

itt nincs N függés

itt em: N-ek kiesnek

$\frac{1}{1+x} \simeq 1 - x \to k_B T \chi \cong 1 + 4v + 12 v^2 + 36 v^3 + 100 v^4 + \cancel{N v^4} - \cancel{N v^4} + \dots$

minden rendben, ki fog esni.

első zárt hurokig : $k_B T \chi = 1 + z v + z(z-1) v^2 + \dots$

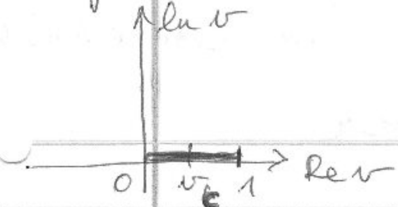
z: koord. szám

elvben tetszőleges rendig el lehet menni (szisztematikusan folytatom)

$k_B T \chi(v) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v^n$ elvben egy ∞ sor.

$v = \mathrm{th} \frac{J}{k_B T}$ az a_n ch-okat valameddig ki tudjuk számolni.

komplex v-sík



$$v_c = \operatorname{th} \frac{J}{k_B T_c}$$

$$v \to v_c^{-0}, \quad \chi(v) \to \infty$$

↳ felülről tartunk a krit.-hoz

$\Rightarrow$ konverg. sugár: $\rho \leq v_c$

a divergencia szempontjából nem az első néhány tag fontos, hanem pont az, amit már nem számolok ki. $\Rightarrow$ a krit. viselkedésre nem tudunk véges rendig elmenve közelíteni, ha nem teszünk bele vmi $\oplus$ infót.

$\to$ hányados módszer feltételezi, h. $\rho = v_c$

$$\chi(v) \sim \left(1 - \frac{v}{v_c}\right)^{-\gamma} \text{ hatv. fgv. szerint div.}$$

$$\sim (T - T_c)^{-\gamma} \text{ sima fgv.}$$

$$\left(\operatorname{th} \to \text{lin. köz. } \left(v = \operatorname{th} \frac{J}{k_B T}\right)\right)$$

d'Alembert kritérium:

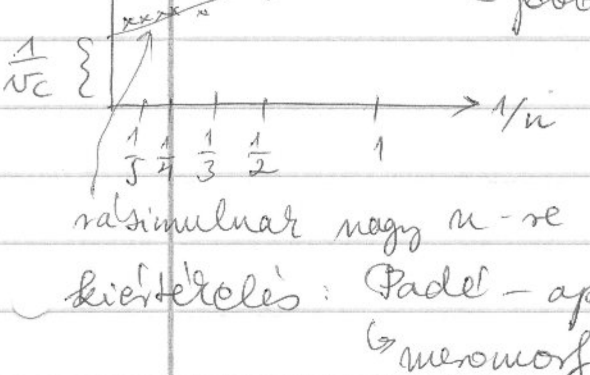
$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| = \frac{1}{\rho} \quad \text{(ha létezik)}$$

$\chi(v)$ és $\left(1 - \frac{v}{v_c}\right)^{-\gamma}$ ugyanott, ugyanúgy divergál $\Rightarrow \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|$ a két eh.-ók aránya esetben „összesimul" (kb. u.akkorák lesznek), ha $n \gg 1$

$$\left(1 - \frac{v}{v_c}\right)^{-\gamma} = 1 + \gamma \frac{v}{v_c} + \frac{\gamma(\gamma+1)}{2} \left(\frac{v}{v_c}\right)^2 + \ldots + \frac{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}{n!} \left(\frac{v}{v_c}\right)^n + \ldots$$

$\chi(v)$ sorából kapott $\frac{a_n}{a_{n-1}}$-nek $\ominus$-nek kell lenni ezzel!

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \cong \frac{\gamma + n - 1}{n} \frac{1}{v_c} = \frac{1}{v_c}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{n}\right)$$



nem mindig működik

kiértékelés: Padé-approximánsok (kifinomultabb közelítés)

↳ meromorf fgv. (csak pólusa van)

→ racionális törtfgvekkel közelíthető tetsz. pontossággal.

gond: χ → hatványfgv. szingularitása van nem egész kitevővel

$$z^{\nu} = e^{\nu \ln z} \rightarrow \text{elágazási pontja van}$$

nem meromorf fgv.

$$\frac{\partial \ln \chi}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial \nu}\left(-\gamma \ln\left(1-\frac{\nu}{\nu_c}\right)+\ldots\right) = -\gamma \frac{1}{1-\frac{\nu}{\nu_c}} + \ldots$$

ennek már pólusa van → meromorf, lehet alkalmazni

Fáris (10. EA)

Magas hőmérsékleti sorok
kritikus exponensek → érzéketlenek lehetnek biz. részletekre
krit. hőmérséklet → az érzékeny
→ összefüggések a krit. exponensek között

Rushbrooke - egyenlőtlenség:

$$\text{termo} \rightarrow \quad c_p - c_V = \frac{TV\alpha^2}{\kappa_T} = \frac{T\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p^2}{-\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T}$$

hőtágy. eh. ; kompr.

ennek megfelelője:

$$C_H - C_M = \frac{T\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H^2}{\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T}$$

áll. mágn. tér, ill. áll. mágnesezettség esetén mért fajhő

$$c_M > 0 \rightarrow \underbrace{C_H}_{\sim|t|^{-\alpha}} \geq \frac{T\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H^2}{\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T} \sim |t|^{\beta-1+\beta-1+\gamma}$$

szukcesszív deriváltak; de az ^{2}-en van; nevező: $t^{-\gamma}$

$|t| \rightarrow 0$ határesetben fennmarad az egyenlőtlenség, ha

$$-\alpha \leq 2\beta + \gamma - 2$$

$$2\beta + \gamma + \alpha \geq 2$$ meg vannak szorítva a krit. exponensek

Landau-elm: $2\cdot\frac{1}{2} + 1 + 0 = 2$ ✓

2d Ising egzakt: $2\cdot\frac{1}{8} + \frac{7}{4} + 0 = 2$ ✓

3d Ising magas hőm. sor:

$$\left.\begin{aligned} \beta &= 0{,}312 \approx \frac{5}{16} \\ \gamma &= 1{,}25 \approx \frac{5}{4} \\ \alpha &= 0{,}12 \approx \frac{1}{8} \end{aligned}\right\} \rightarrow 2\cdot\frac{5}{16} + \frac{5}{4} + \frac{1}{8} = 2 \ ✓$$

mindig egyenlőséget kapunk → mélyebb dolog van itt, mint amit a termodin. őf-ek megkövelnek

továbbiak: pl. Griffiths - egyenlőtlenség: $\gamma \geq \beta(\delta - 1)$ $(H - m^{\delta})$

stb → krit. exponensek nem fgtlek egymástól

korr. hossz ∀ határon túl növekszik → koherens fluktuációk nagy tartományokban

karakterisztikus hosszúságok: rácsállandó (a)
kh. hatótáv. (R)
korr. hossz (ξ)

a, R → mikroszkopikusak

$\xi \to \infty$ ...

megfigyelés: valamilyen léptékkel nézzük → ennél rövidebb hull. hosszak kisimulnak

→ jóval hosszabb: homogénnek látom

⇒ leírás függ attól, hogyan viszonyul a lépték a karakt. hosszakhoz.

belső lépték hiánya → skálázás

termodin.: ∀ korr. hossznál nagyobb léptékű tömböket vizsgálunk

→ függetlennek tekinthetők a tömbök

→ extenzív termodin. mennyiségek: $\lambda S(E,V,N) = S(\lambda E, \lambda V, \lambda N)$

intenzív : $\underbrace{T(E,V,N) = T(\lambda E, \lambda V, \lambda N)}$

ez a termodin. skálázás

krit. pont közelében:

termodin. skálázás $C(r) \sim \delta(r)$

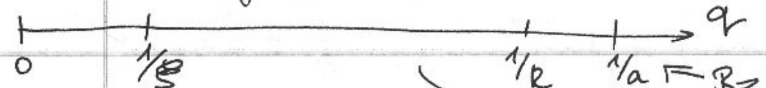
függetlenség a szomszédos tömbök között

$R \ll r \ll \xi$ nagy ablak, r-et nagyságrendekkel változtatva sem jutok egyik kar. hosszúság közelébe sem

erős korrel. lépték nélkül

↳ hatványfgv.: $C \sim \frac{1}{r^{d-2-\eta}}$

hullámszám nyelvén u.ez:



← Bz. mérete

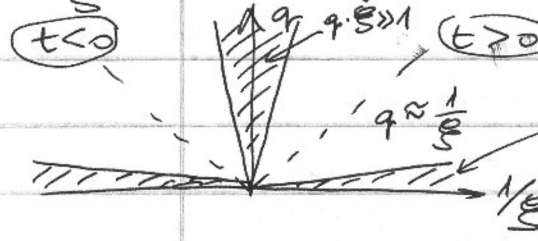
$\mathcal{F}(\delta) =$ konst. → konst. korr. → $C(q) \sim \frac{1}{q^{2-\eta}}$

↳ $C(q=0) = k_B T \chi$ hatv. fgv. $\xrightarrow{\mathcal{F}}$ hatv. fgv.

$\chi \sim |t|^{-\gamma} \sim \xi^{\gamma/\nu}$

$\xi \sim |t|^{-\nu}$

$\frac{1}{\xi}$ -vel mérjük, h. milyen közel vagyunk a krit. ponthoz (v. milyen távol tőle)



$q\xi \ll 1$ → sima illesztés:

$\xi^{\gamma/\nu} \sim \frac{1}{\xi^{-(2-\eta)}} \Rightarrow \frac{\gamma}{\nu} = 2-\eta$

máris öf. a krit. exp-ek között

dimenzióanalízis: $C(q,\xi) = C(q=0,\xi)\,\phi(q\cdot\xi)$

felt: a kritikus viselkedés szempontjából csak egyetlen jellemző hosszúság van.

$\Rightarrow q\cdot\xi$ lesz ϕ-ben

$$\boxed{C(q,\xi) = \xi^{\gamma/\nu} f(q\xi)}$$

$q\xi \ll 1$ esetben: $f(q\xi) \simeq f(0)$ véges origóbeli értékkel közelíthető

$q\xi \gg 1$: $f(x) \simeq x^{-\gamma/\nu}$

$$C(q\xi) \sim \xi^{\gamma/\nu} (q\xi)^{-\gamma/\nu} \sim q^{-\gamma/\nu}$$

átskálázás: $q \to \lambda q \qquad \xi \to \xi/\lambda$

$$\underline{\underline{C(q,\xi)}} = \lambda^{\gamma/\nu} \left(\xi/\lambda\right)^{\gamma/\nu} f\Big(\underbrace{\lambda q \tfrac{\xi}{\lambda}}\Big) = \underline{\underline{\lambda^{\gamma/\nu}\, C(\lambda q, \xi/\lambda)}}$$

$q\xi$ értékét nem változtatja ez az átskálázás

Ez az aláhúzott tulajdonság: általánosított homogén fgv.

homogén fgv: $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^p f(x,y)$

ált. hom. fgv: $f(\lambda^a x, \lambda^b y) = \lambda^p f(x,y)$

$\lambda^a \equiv \tilde\lambda$ elnev. $\qquad \lambda = \tilde\lambda^{1/a}$

$$f(\tilde\lambda x, \tilde\lambda^{b/a} y) = \tilde\lambda^{p/a} f(x,y)$$

ált. hom. fgv. tulajdonságai:

▶ 1) 1 kivételével $\forall$ változóját 0-vá teszem → hatv. fgv.

$y=0$: $f(\lambda x, 0) = \lambda^p f(x,0)$

válasszuk: $\lambda x = x_0$ rögzített érték

$$f(x_0, 0) = \left(\frac{x_0}{x}\right)^p f(x,0)$$

1 változós homogén fgv. hatványfgv.

▶ 2) parciális deriváltjai is ált. hom. fgvek

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \to \lambda^a f_x(\lambda^a x, \lambda^b y) = \lambda^p f_x(x,y)$$

átvisszük, λ^{p-a} lesz.

→ látszik, h. ált. hom. fgv.

változó csere: $\xi \to t$ red. hőm. $\quad \xi \sim |t|^{-\nu}$

$$\xi/\lambda = \frac{\xi_0 |t|^{-\nu}}{\lambda} = \xi_0 \left(\frac{|t|}{\lambda^{-1/\nu}}\right)^{-\nu} = \xi_0 \left(\lambda^{1/\nu} |t|\right)^{-\nu}$$

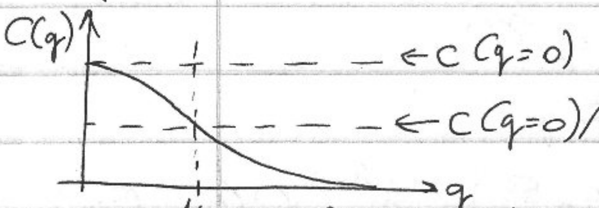
$$\boxed{C(q,t) = \lambda^{\gamma/\nu}\, C(\lambda q, \lambda^{1/\nu} t)}$$

> $C(q,t,H)$ H-tól is függhet. Általánosítás → $H=0$-ra vissza kell kapni ezt.

$$\boxed{C(q,t,H) = \lambda^{\gamma/\nu}\, C(\lambda q, \lambda^{1/\nu} t, \lambda^{1/\mu} H)}$$ analógia miatt

↑ skálázási hipotézis $\qquad t=0:\ \xi \sim H^{-\mu}$

$$\left(\frac{\left.\frac{\partial^2 C}{\partial q^2}\right|_{q=0}}{C|_{q=0}} = \xi^2 \text{ korr. hossz. négyzete} \right)$$



$1/\xi$ ez lehet pl. def.

$$\frac{1}{2} C(q=0,t,H) = C\left(\frac{1}{\xi}, t, H\right)$$

$$\frac{1}{2} C(q=0, \lambda^{1/\nu} t, \lambda^{1/\mu} H) = C\left(\frac{\lambda}{\xi}, \lambda^{1/\nu} t, \lambda^{1/\mu} H\right)$$

$$\frac{\lambda}{\xi(t,H)} = \frac{\lambda}{\xi} = \phi(\underbrace{\lambda^{1/\nu} t, \lambda^{1/\mu} H}_{\text{ezeknek vmi fgve}}) = \frac{1}{\xi(\lambda^{1/\nu} t, \lambda^{1/\mu} H)}$$

$$\xi(t,H) = \lambda \cdot \xi(\lambda^{1/\nu} t, \lambda^{1/\mu} H)$$

$H=0 \qquad \xi(t,0) = \lambda \cdot \xi(\lambda^{1/\nu} t, 0)$

$$\lambda^{1/\nu} t = \pm t_0 \qquad \lambda = \left|\frac{t_0}{t}\right|^{\nu}$$

$$\xi(t,0) = \left|\frac{t_0}{t}\right|^{\nu} \xi(\pm t_0, 0) \sim |t|^{-\nu}$$

Át a termodinamikai mennyiségekre:

$$C(q=0,t,H) \underset{\text{flukt.-válasz tétel}}{=} k_B T\, \chi(t,H) \Rightarrow \chi(t,H) = \lambda^{\gamma/\nu} \chi(\lambda^{1/\nu} t, \lambda^{1/\mu} H)$$

ált. hom. fgv.

egy kitevő választható λ-nak

$$\lambda^{1/\nu} = \tilde{\lambda}$$

$$\boxed{\chi(t,H) = \tilde{\lambda}^{\gamma} \chi(\lambda t, \tilde{\lambda}^{\nu/\mu} H)} \qquad \frac{\nu}{\mu} \equiv \Delta \text{ elnev.}$$

~-ot elhagyjuk, átskál. faktor

$$\boxed{\chi(t,H) = \lambda^{\gamma} \chi(\lambda t, \lambda^{\Delta} H)}$$

$$\chi = \frac{\partial m(t,H)}{\partial H} \qquad m(t,H) = \lambda^{\gamma-\Delta} m(\lambda t, \lambda^{\Delta} H)$$

ált. hom. fgv → deriv. → ált. hom. fgv.

visszafelé persze nem feltétlen igaz (feltéve hogy az integr. állandó eldobható → igaz)

$$m = -\frac{\partial f(t,H)}{\partial H} \qquad \boxed{f(t,H) = \lambda^{\gamma - 2\Delta} f(\lambda t, \lambda^{\Delta} H)} \quad \text{szab. en. sűr.}$$

3 exponens : ν, μ, γ

minden további termodin. korelációs mennyiség kiszámolható ezekből, így azok is ettől a 3 exp-től függnek

SKALÁRTÖRVÉNYEK

$$C(q,t,H) = \lambda^{\mu/\nu} C(\lambda q, \lambda^{1/\nu} t, \lambda^{1/\mu} H)$$

$t=0$, $H=0$:
$$C(q,0,0) = \lambda^{\gamma/\nu} C(\lambda q, 0, 0) = \left(\frac{q_0}{q}\right)^{\gamma/\nu} \underbrace{C(q_0, 0, 0)}_{\text{véges}} \sim \frac{1}{q^{\gamma/\nu}}$$

$\lambda q = q_0$ rögzített

def: $C \sim \frac{1}{q^{2-\eta}} \rightarrow \boxed{2-\eta = \frac{\gamma}{\nu}}$

$\underline{H=0}$ $$m(t,0) = \lambda^{\gamma-\Delta} m(\lambda t, 0) = \left|\frac{t}{t_0}\right|^{\Delta-\gamma} \underbrace{m(-t_0, 0)}_{\text{véges}} \sim |t|^{\Delta - \gamma}$$

$t<0$: $\lambda t = -t_0 \rightarrow \lambda = \left|\frac{t_0}{t}\right|$ nem vagyunk a kritikus pontban

def: $m \sim |t|^{\beta}$ $\quad \boxed{\beta = \Delta - \gamma}$

$\underline{t=0}$: $$m(0,H) = \lambda^{\gamma - \Delta} m(0, \lambda^{\Delta} H)$$

$\lambda^{\Delta} H = H_0 \qquad \lambda = \left(\frac{H_0}{H}\right)^{1/\Delta}$

$$m(0,H) = \left(\frac{H}{H_0}\right)^{\frac{\Delta-\gamma}{\Delta}} \cdot \underbrace{m(0, H_0)}_{\text{véges}} \sim H^{\frac{\Delta - \gamma}{\Delta}}$$

def: $m^{\delta} \sim H$
$m \sim H^{1/\delta}$ $\quad \boxed{\frac{1}{\delta} = \frac{\Delta - \gamma}{\Delta}}$

$$f(t,0) = \lambda^{\gamma - 2\Delta} f(\lambda t, 0) = \left|\frac{t}{t_0}\right|^{2\Delta - \gamma} f(\pm t_0, 0) \sim |t|^{2\Delta - \gamma}$$

$\lambda t = \pm t_0 \qquad \lambda = \left|\frac{t_0}{t}\right|$

def: $f \sim |t|^{2-\alpha}$ (→ hogy 2x deriv. után $|t|^{-\alpha}$-t kapjunk)

$\boxed{2-\alpha = 2\Delta - \gamma}$

3 exponens: $\gamma, \nu, \mu \xrightarrow{\text{kifej.}} \eta, \beta, \delta, \alpha$ $\qquad$ segédmennyiség: $\Delta = \frac{\nu}{\mu}$

$\underline{2-\alpha} = 2(\Delta - \gamma) + \gamma = \underline{2\beta + \gamma}$ ez a Rush... egyenlőtlenség egyenlőség formájában

Tehát a skálahipotézis szerint 3 független exponens van.

másik következménye a sk. hip-nek:

„data collapse"

skálázott állapotegyenlet: $m(t,H)=\lambda^{\gamma-\Delta}\, m(\lambda t, \lambda^{\Delta} H) = (*)$

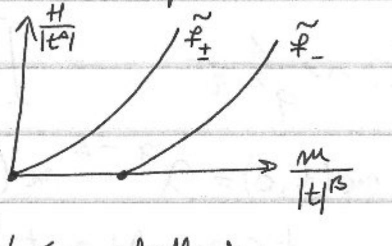
$$\lambda t = \pm t_0 \qquad \lambda = \left|\frac{t_0}{t}\right|$$

$$(*) = \left|\frac{t}{t_0}\right|^{\underbrace{\Delta-\gamma}_{\beta}} m\left(\pm t_0, \left|\frac{t_0}{t}\right|^{\Delta} H\right)$$

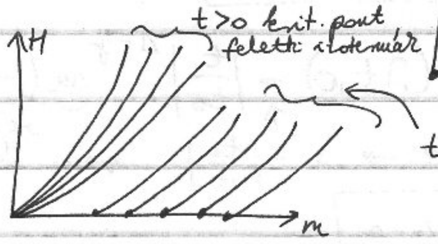
t_0-at elhagyva:

$$m(t,H) = |t|^{\beta}\, \tilde{f}_{\pm}\left(\frac{H}{|t|^{\Delta}}\right)$$

$\pm$: krit. pont felett / alatt



átskálázás nélkül:



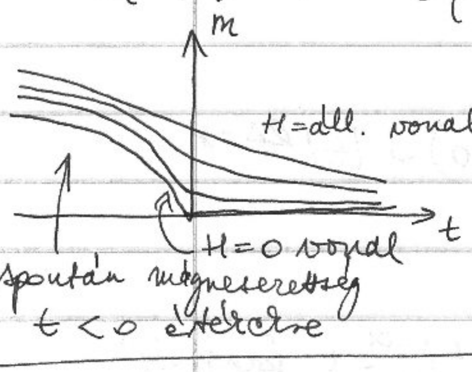
adat összeesés ⇒ az izotermák összeesnek 1 izotermára a skálázás után

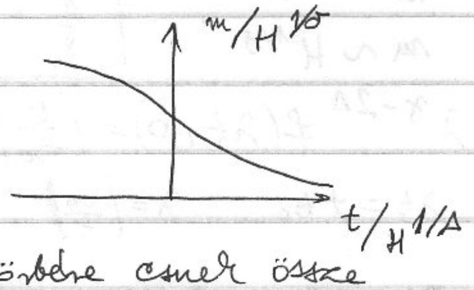
$$m(t,H) = \lambda^{\gamma-\Delta}\, m(\lambda t, \lambda^{\Delta} H) = \left(\frac{H}{H_0}\right)^{\frac{\Delta-\gamma}{\Delta}} m\left(\left(\frac{H_0}{H}\right)^{1/\Delta} t, H_0\right) =$$

$$\lambda^{\Delta} H = H_0 \qquad \lambda = \left(\frac{H_0}{H}\right)^{1/\Delta}$$

$$= \left(\frac{H}{H_0}\right)^{1/\delta} m\left(\left(\frac{H_0}{H}\right)^{1/\Delta} t, H_0\right)$$

$$m(t,H) = H^{1/\delta}\, G\left(\frac{t}{H^{1/\Delta}}\right)$$





egy görbére esnek össze

---

harmadik lehetőség: állandó mágnesezettség

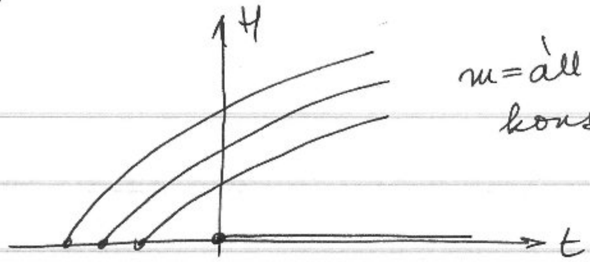
$$\lambda^{\beta}\, m(t,H) = m(\lambda t, \lambda^{\Delta} H)$$

$$\lambda^{\beta} m = m_0 \longrightarrow \lambda = \left(\frac{m_0}{m}\right)^{1/\beta}$$

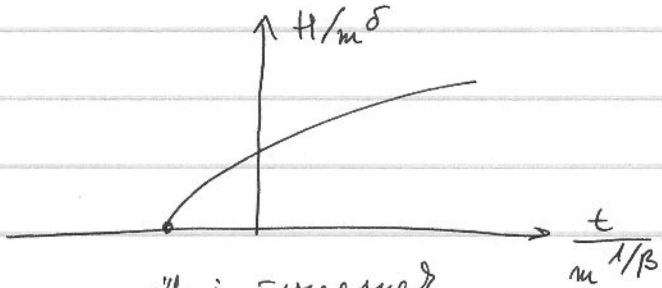
$$m_0 = m\left(\left(\frac{m_0}{m}\right)^{1/\beta} t, \left(\frac{m_0}{m}\right)^{\Delta/\beta} H\right)$$

$$\frac{1}{\delta} = \frac{\Delta-\gamma}{\Delta} = \frac{\beta}{\Delta}$$, ami ott van, pont a δ

$$\frac{H}{m^{\delta}} = h\left(\frac{t}{m^{1/\beta}}\right)$$



$m=$ áll. vonalak
konstans mágnesezettségű vonalak



itt is összeesnek

Fázisátalakulások (11. EA)

Hipe-skálatörvény

felt: egyetlen karakterisztikus hossz van (korr. hossz, mint múltkor)

$$\frac{\overline{\Delta M^2}}{\bar{M}^2} = \frac{k_B T \chi}{m^2 V}$$

ha $\frac{k_B T \chi}{m^2 \xi^d} \ll 1$ (a rel. fluktuációk kicsik) → Landau-elmélet használható →

→ Ginzburg-kritérium: $\frac{k_B T \chi}{m^2 \xi^d} \sim |t|^{-\gamma-2\beta+d\nu} \sim |t|^{\frac{d}{2}-2}$

$-1-1+\frac{d}{2}$ fenntartható $|t| \to 0$-ra, ha $d>4$

$d<4$: def: R, ahol $\frac{k_B T \chi}{m^2 R^d} \sim \mathcal{O}(1)$

új karakterisztikus hosszúság

ha csak egy van, az azt jelenti, hogy $R \sim \xi$

$\frac{k_B T \chi}{m^2 \xi^d} \sim \mathcal{O}(1)$ (minden divergáló hosszúság egyformán divergál)

$\hookrightarrow \sim |t|^{-\gamma-2\beta+d\nu}$, $\mathcal{O}(1)$ maradhat $|t| \to 0$-ra, ha

$$-\gamma-2\beta+d\nu=0$$

$\boxed{d\nu = \gamma+2\beta}$ hipe-sk. tv.

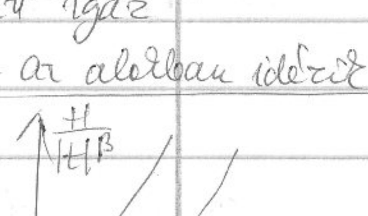
új öf, ebben benne van a dimenzió is → Landau-elm.: nem teljesíti $|t| \to 0$, 4 dim. alatt a L-elm. nem működik, az abból számolt mennyiség div.

Landau-exponensekkel: $\frac{d}{2}=2$ $d=4$ csak itt igaz

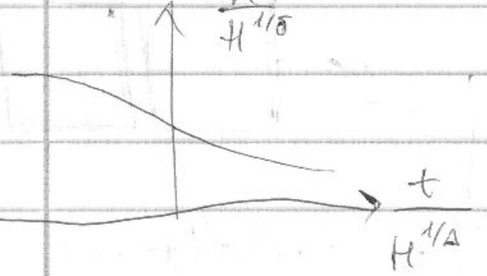
$\gamma+2\beta+\alpha = 2 \to \boxed{d\nu = 2-\alpha}$ akkor ebben az alakban idézik

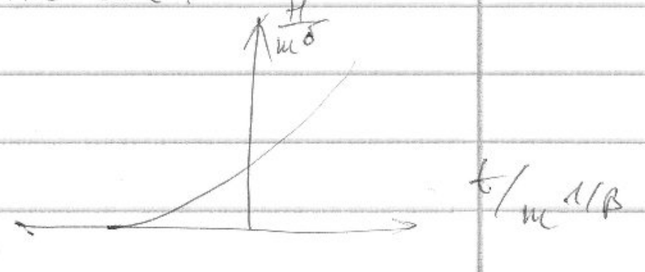
Adatösszeesések:

- izotermák $\frac{m}{|t|^\beta} = F_\pm\left(\frac{H}{|t|^\beta}\right)$



- H = konst. — m = áll.





Ábrák:

▶ $CrBr_3$ izotermák → tényleg egy görbe.

▶ $CrBr_3$ $H=$ konst. görbe

EuO, Ni, Pd_3Fe, YIG ($Y_3Fe_5O_{12}$) → még a különböző anyagokra is egybeesik (csak egy konst. szorzóval kellett őket összeskálázni)

folytonos vonal → Heisenberg-modellből → stimmel

skálafüggvények is megegyeznek különböző rendszerben

▶ $CrBr_3$ $m=$ áll. görbe

$m \leftrightarrow \rho-\rho_c$

$H \leftrightarrow \mu(\rho,t)-\mu(\rho_c,t)$ megfeleltetéssel foly-gáz átalakulás vizsgálható

He^4, CO_2

~ nagyjából az exponenseket mérik (univerzalitás)

Renormálási csoport transzformáció

(ez nem az, mint térelméletben!)

minimális hosszúság: l_{min} (szil. test: rácsállandó, gáz: szabad úthossz)

mélyebbre megyünk → atomok mérete → mag mérete

ami alatta van → átlag

a minimális hossz meghatározza a fiz. leírást is

$\lambda \gg l_{min}$ hull. hosszúságú jelenségek leírása

renorm. csop. tr. → változtatjuk l_{min}-t → hogyan vált. a leírás?

transzformáció lépései: ① $l_{min} \to b \cdot l_{min}$ megnöveljük

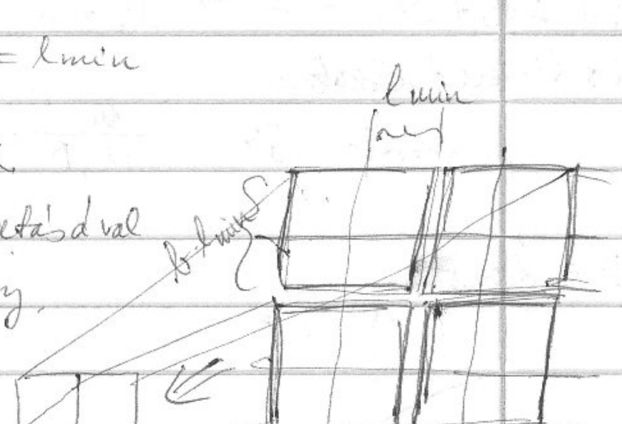
($l_{min} < \lambda < b \cdot l_{min}$ kiküszöbölése)

② átskálázás: $x' = \frac{x}{b}$ (zsugorítjuk)

$$l'_{min} = \frac{b \cdot l_{min}}{b} = l_{min}$$

a rszt. felosztjuk blokkokra

ami ennél kisebb: átl. hatással vesszük figy.



$l'_{min} = l_{min}$ átskálázás

Statfiz: fiz. rdsz: fázistér + eloszlásfgv. kell a leíráshoz
S $\mathcal{P}$
+ szabadsági fokok száma N

① lépés: S' a változók egy részét eliminálták, átalakul a fázistér
$\mathcal{P}'$ kevesebb változó eloszlásfgve egy új eloszlásfgv.
N' lecsökkent $N' = \frac{N}{b^d}$
(② átskálázás → mási csak a hosszúság ... változója)
$\{S, \mathcal{P}\} \Rightarrow \{S', \mathcal{P}'\}$
Ha S' és $\mathcal{P}'$
$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{P}'$
$z = \sum$
(...

valszám: 2 vagy változó $p(x,y)$ közös eloszl. fgv.
egyik változó nem érdekel → arra kiintegr. → a másik eloszl. fgve adódik
$\mathcal{P}(x) = \int dy\ p(x,y)$
$H \Rightarrow H'$ transzfd feltételes szabadenergiának nevezzük
(k_BT egységekben, tehát H dim.tlan)
ha H paraméterezhető: $H[K] \to H' = H[K']$
$K \to K'$ a paraméterben egy transzformációt

transzf. valós (valódi) térben (blokk-transzf., decimálás (tizedelés))
Pl: síkbeli Δ rács (Ising modell, nn. kh)

$\sigma_i = \pm 1$
$\tilde{\sigma}$ konfig. } fázistér
$e^{-H(\tilde{\sigma})}$ } eloszlás

blokkok: → blokkrács: Δ rács ez is
rácsall. $\sqrt{3}\,a$
$b = \sqrt{3}$ az átskálázás

I-edik blokk

blokk-spin:

$$S_I = \text{sign}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) = \pm 1$$

↑↑↑	↓↓↓
↑↑↓	↓↓↑
↑↓↑	↓↑↓
↓↑↑	↑↓↓
+1	−1

fele +1 „többségi szabály"
fele −1 amelyikből több van, az az előjel

blokkspin konfiguráció: $\tilde S$

$$P'(\ ) = \frac{1}{Z}\sum_{\substack{\tilde\sigma \\ (\tilde S\ \text{rögz.})}} e^{-H(\tilde\sigma)} = (*)$$

összegzünk az eredeti spin konfigurációkra ($\forall$ spinre külön Σ: $\sum_{\sigma_1}\sum_{\sigma_2}\dots\sum_{\sigma_N}$) azzal a mellékfeltétellel, hogy a blokkspin konf.-t rögzítjük

$$(*) = \frac{1}{Z} e^{-H'(\tilde S)}$$ a transzformáció tehát megvalósítható

nn kh-t nem is használtuk ki

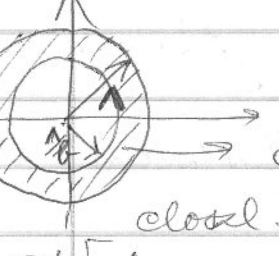
Leo Kadanoff találta ki magát a blokk tr-t.

→ transzf. hullszám térben: kontinuum-modellek

rendparaméter: $\phi(\underline{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_q e^{i\underline{r}q}\phi_{\underline{q}}$

fázistér: $\{\phi_q\}_q$

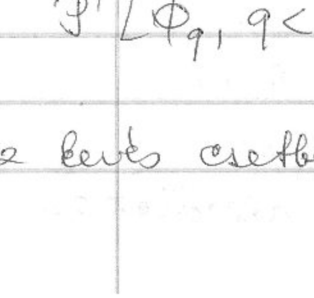
periodikus hat. felt.: diszkrét q-k



Λ levágás $l_{min} \sim \frac{1}{\Lambda}$

ezen gömbben lévő hull.számok jönnek szóba

transzf: $\frac{\Lambda}{b}$ ($l_{min} \nearrow \Rightarrow \Lambda \searrow$)



kiküszöböljük a $\frac{\Lambda}{b} < q < \Lambda$ hull.számokat

ezekre integrálni kell az eloszl. fgvt

eloszl. fgv: $P[\phi_q]$

$$P'\left[\phi_q, q<\frac{\Lambda}{b}\right] = \int \prod_{k>\frac{\Lambda}{b}} d\phi_k\, P[\phi_k]$$

ez kevés esetben végezhető el, de ki van jelölve fázistér: most is egy gömbön belüli hull. hosszak

átskálázás $\longrightarrow \Lambda' = \frac{\Lambda}{b} \cdot b = \Lambda$ felfújom az eredeti méretre

($\Rightarrow$ a hullámszámok ritkábban fognak elhelyezkedni, mint eredetileg)(ha diszkrét hull. szám van.)

$$P[\phi_q] = \frac{1}{Z} e^{-H[\phi_q]}$$

Miért nevezik renormálásnak?

elvégezzük b-vel, aztán mégegyszer b'-vel

$$l_{min} \xrightarrow{b} b\, l_{min} \xrightarrow{b'} b b' l_{min}$$

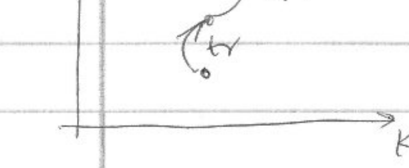
egy tr-val is megy

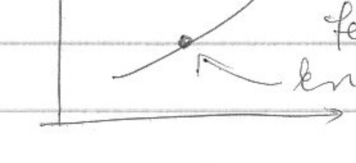
R_b b paraméterű tr. $R_{b'} R_b = R_{bb'}$

nem csoport $\rightarrow$ nincs inverze a tr-nak (nem szeparítjuk a szab. fokokat)

trafó a paramétertérben: $\underline{K} = (K_1, K_2, \ldots)$

$(K_1, K_2) = \underline{K}$ 2 paraméter



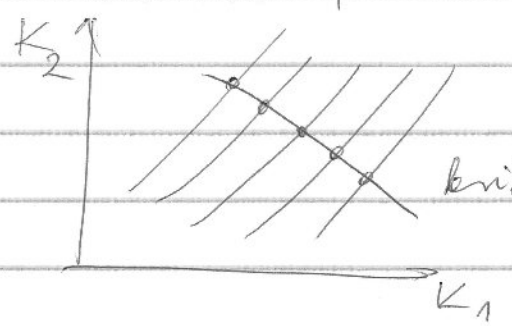


egy adott fiz. rsz. egy vonalnak felel meg $(K_1(T), K_2(T))$

kritikus pont $(K_1(T_c), K_2(T_c))$

kül. fiz. rsz. krit. pontjai (u.a. a rsz. kül. param.-kel)

$\hookrightarrow$ kritikus felület



kritikus felület (most csak vonal)

Fázis (12.EA) 12.07.

Renorm. csop. tr.

① $l_{min} \to b\, l_{min}$

② átskálázás $\quad x' = \frac{x}{b}$

$$l'_{min} = \frac{b\, l_{min}}{b} = l_{min}$$

fázistér S, S' $\quad e^{-\mathcal{H}[K']} = \sum_{S-S'} e^{-\mathcal{H}[K]}$

$$K \to K'$$

korrel. hossz: $\xi' = \frac{\xi}{b}$ vagy $\boxed{\frac{\xi(K)}{b} = \xi' = \xi(K')}$

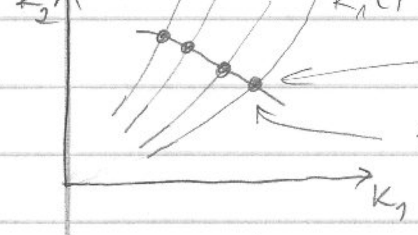
minden blokk egymástól függetlenül viselkedik (f')

Szab. en. sűr.-e: $\frac{F}{N} = \frac{F}{b^d N'} \to f' = b^d f$, $\boxed{b^d f(K) = f(K')}$

blokkok száma

eredeti szab. fokok számát visszakapom

Tfh: $K = (K_1, K_2)$ 2 paraméter (több is lehet, de ezt könnyebb ábrázolni)



$K_1(T)K_2(T)$ ← csak a hőm-et vált.

← ha $\exists$ fázisátalakulás $\Rightarrow$ kritikus pont: $K_1(T_c)K_2(T_c)$

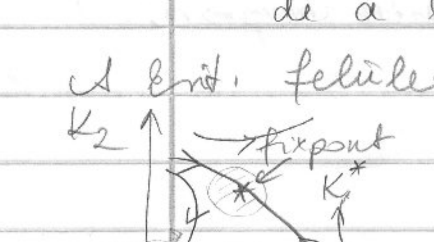
krit. felület a krit. pontokból

elforg. → krit. rdsz-ből krit. rdsz.

a hatványfgv. megmarad nagyobb blokkokra is

de a krit. hosszon is túlléphetek!

A krit. felület invariáns felület ($\xi = \infty$, azaz hatv. fgv. korrel.)



↳ ha róla indulok $\Rightarrow$ nem megyek le róla

legegyszerűbb: (vonzó) fixpontból engedem a trafót

←: diszkrét lépésekkel haladok felé

ezt találjuk mindig a krit. jelenségeket mutató rendszerekben

korrel. hossz a Bloch-méretnél kisebb → gyakorlatilag 0.

ha a krit. felület közelében vagyunk

↓ a fixpont környékét vizsgáljuk, ahol linearizált transzfót lehet végezni

$K_1' = F_1(K_1, K_2)$
$K_2' = F_2(K_1, K_2).$

fixpont: $K_1^* = F_1(K_1^*, K_2^*)$
$K_2^* = F_2(K_1^*, K_2^*)$

linearizáljuk a problémát: $K_1 = K_1^* + \delta K_1$
fixpont helyén számolva $K_2 = K_2^* + \delta K_2$

$$K_1' = F_1(K_1^*, K_2^*) + \frac{\partial F_1^*}{\partial K_1}\delta K_1 + \frac{\partial F_1^*}{\partial K_2}\delta K_2$$

$$K_2' = F_2(K_1^*, K_2^*) + \frac{\partial F_2^*}{\partial K_1}\delta K_1 + \frac{\partial F_2^*}{\partial K_2}\delta K_2$$

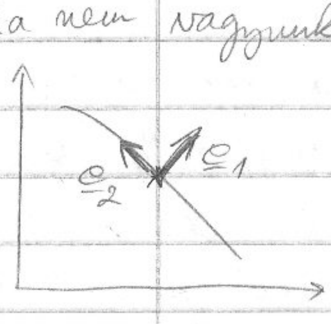
$$\underline{\delta K}' = \underline{\underline{L}}\, \underline{\delta K}$$

$$\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1^*}{\partial K_1} & \frac{\partial F_1^*}{\partial K_2} \\ \frac{\partial F_2^*}{\partial K_1} & \frac{\partial F_2^*}{\partial K_2} \end{pmatrix}$$

b átskálázási tényező a paraméter

$$\begin{cases} \underline{\underline{L}}\,\underline{e}_1 = \lambda_1(b)\,\underline{e}_1 \\ \underline{\underline{L}}\,\underline{e}_2 = \lambda_2(b)\,\underline{e}_2 \end{cases}$$

$\underline{e}_2$ a krit. felületben fekszik.
vonzó irány $\Rightarrow \lambda_2(b) < 1$
ha nem vagyunk a krit. felületen $\Rightarrow \underline{e}_1$ taszító irány $\Rightarrow \lambda_1^{(b)} > 1$
tetszőleges pont leírható $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ e.h-jaként



hatv. fgvek.

félcsoport tul.: $\lambda_2(b)\,\lambda_2(b') = \lambda_2(bb')$, $\lambda_2 = b^{y_2}$
$\lambda_1(b)\,\lambda_1(b') = \lambda_1(bb')$, $\lambda_1 = b^{y_1}$

$\lambda_2 < 1 \Rightarrow y_2 < 0$
$\lambda_1 > 1 \Rightarrow y_1 > 0$

lokálisan új bázist választhatunk $\qquad$ linearizált környezetben vagyunk, vagyis az egyenesen

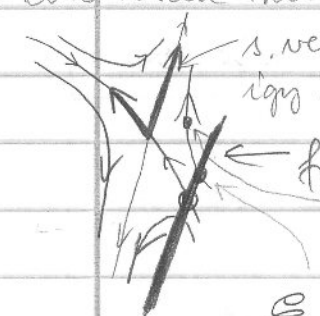
$$\delta \underline{K} = t_1 \underline{e}_1 + t_2 \underline{e}_2$$

tr.: $\delta \underline{K}' = \underline{\underline{L}}\, \delta \underline{K} = t_1\, b^{y_1} \underline{e}_1 + t_2 \cdot b^{y_2} \underline{e}_2$

▶ $\xi(t_1, t_2) = \xi(K^*, \delta K) = \xi(\underline{K}^* + t_1 \underline{e}_1 + t_2 \underline{e}_2)$

$$\left.\begin{aligned} \xi(t_1, t_2) &= b\, \xi(b^{y_1} t_1, b^{y_2} t_2) \\ \blacktriangleright f(t_1, t_2) &= b^{-d} f(b^{y_1} t_1, b^{y_2} t_2) \end{aligned}\right\} t_1, t_2 \text{ ált. homogén fgve.}$$

h. konkrétan mi a transzf.: nem érdekes, csak a módszer.



s. vektor

így viszi a rdszt trajektor

← kritikai rdsz. $\quad t_1(T)$

$\quad t_2(T)$

(trajonált.)

$$\xi(t_1(T), t_2(T)) = b \cdot \xi(b^{y_1} t_1(T), b^{y_2} t_2(T))$$

az összefüggés a két pontot hozza ö.f.-be

▶ $t_1(T_c) = 0$ $\qquad$ red. hőm.

$t_1(T)$ előjelet vált: $t_1(T) \sim \dfrac{T - T_c}{T_c} = t$

▶ $t_2(T_c) \neq 0$ $\quad$ (milyen távol, kivéve ha a fixponton át-menő vonalat vizsg.)

$$b^{y_1} t_1(T) = \pm t_0 \rightarrow b = \left|\frac{t_0}{t_1(T)}\right|^{1/y_1} \qquad \left|\frac{t_1(T)}{t_0}\right|^{-\frac{y_2}{y_1}} \to 0$$

$$\xi(t_1(T), t_2(T)) = \underbrace{\left|\frac{t_0}{t_1(T)}\right|^{1/y_1}}_{t^{-1/y_1}} \cdot \xi\Big(\pm t_0, \underbrace{\left|\frac{t_0}{t_1(T)}\right|^{y_2/y_1} \cdot t_2(T)}_{}\Big) \simeq$$

ha $T \to T_c$ $\qquad \dfrac{y_2}{y_1} < 0$ $\qquad$ az egész tart 0-hoz.

$$\left.\begin{aligned} \simeq \left|\frac{t_0}{t_1}\right|^{1/y_1} \xi(\pm t_0, 0) &\sim |t|^{-1/y_1} \\ \text{def.: } \xi &\sim |t|^{-\nu} \end{aligned}\right\} \boxed{\nu = \frac{1}{y_1}}$$

ξ: hatv. fgv. és divergál.
(univerzalitás is látható)

irreleváns paraméterek: a viselkedést nem befolyásolják

(6) $f(t_1(T), t_2(T)) = b^{-d} f(b^{y_1} t_1(T), b^{y_2} t_2(T))$

$$b^{-d} = \left|\frac{t_0}{t_1(T)}\right|^{-\frac{d}{y_1}} f\Big(\pm t_0, \underbrace{\left|\frac{t_1(T)}{t_0}\right|^{-\frac{y_2}{y_1}} \cdot t_2(T)}_{\to 0}\Big) \simeq$$

$$\simeq \left|\frac{t_1(T)}{t_0}\right|^{d/y_1} f(\pm t_0, 0) \sim |t|^{d/y_1}$$

a korrekciók a vezető tagot nem befolyásolják

def.: $f \sim |t|^{2-\alpha}$ $\quad \frac{d}{y_1} = 2-\alpha$

α és ν összeköti a hiperskála-tv.-t.

ha linearizálható $\Rightarrow$ h. s. tv. is teljesül. $\boxed{d\nu = 2-\alpha}$

O: véges szám $\to$ vezető tagot adja

ha singuláris $f(\pm t_0, 0) \Rightarrow$ tovább kell menni

Landau-elm. nem fér össze a hip. s. tv-nyel.

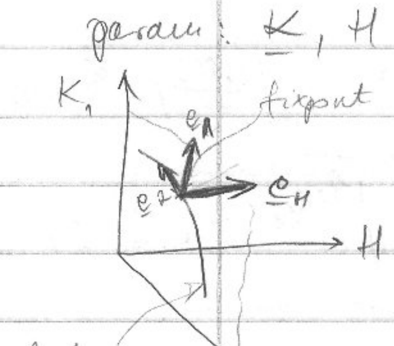
↳ ebbe a csop elm-be nem fér bele a $\mathcal{L}$-viselkedés, csak úgy, h. a singularitások helyrekorrak

megj.: • a stab. en. redukálás két paraméter a skálázásban

• kilátorkik magunkat a fixpont lin. környezetére.

Terjesszük ki a vizsgálatot a mágn. térre is. (konjugált tér)

param.: $\underline{K}$, H



krit. áll-ban (felület) fixpontban $\Big\}$ $H = 0$

linearizált transzf.

$$\begin{pmatrix} \ast & \ast & 0 \\ \ast & \ast & 0 \\ 0 & 0 & \ast \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ H \end{pmatrix}$$

→ mágn. tértől fgtlen

→ mágn. teret jellemző

s. irányok nem változnak meg

lin. tr: $H' = b^{y_H} H$

$$\xi(t_1, t_2, H) = b\, \xi(b^{y_1} t_1, b^{y_2} t_2, b^{y_H} H)$$

tér bekapcs. $\Rightarrow$ T a H fgv-ben is divergál (tudjuk)

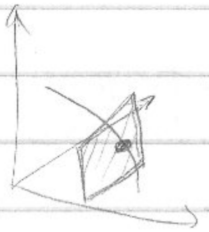
taszító irány: $b^{y_H} > 1$, $y_H > 0$

$t_1(T), t_2(T) \Leftarrow$ fiz. rdsz.

$b^{y_1} t_1(T) = \pm t_0$ $\qquad \left|\frac{t_0}{t_1}\right|^{1/y_1} = b$

$$\xi(t_1(T), t_2(T), H) = \left|\frac{t_0}{t_1}\right|^{1/y_1} \xi\Big(\pm t_0, \underbrace{\left|\frac{t_1(T)}{t_0}\right|^{-\frac{y_2}{y_1}} t_2(T)}_{\to 0}, \left|\frac{t_0}{t_1(T)}\right|^{\frac{y_H}{y_1}} H\Big)$$

a fiz. rdsz. egy terület a krit. pont körül



$t_1 \to 0 \Rightarrow$ növekszik a tényező

a viszonyuktól (H-val) függ

nem hagyhatom el

$$\xi(t_1(T), t_2(T), H) = \left(\frac{t_0}{t_1(T)}\right)^{1/y_1} \xi\Big(\pm t_0, 0, \frac{H}{\left|\frac{t_1(T)}{t_0}\right|^{y_H/y_1}}\Big)$$

$$\left|\frac{t_1(T)}{t_0}\right| = |t| \Rightarrow \xi \overset{\text{aszimptotikusan igaz}}{\simeq} |t|^{-1/y_1} \underset{(\text{ksi})}{\Xi}\left(\frac{H}{|t|^{y_H/y_1}}\right)$$

$|t| \neq 0 \quad H = 0: \quad \xi \sim |t|^{-1/y_1} \Rightarrow \nu = \frac{1}{y_1}$

$|t| = 0 \quad H \neq 0: \quad \xi$ $|t|$-től fgtlen, $\Xi(x) \sim x^{-\frac{1}{y_H}}$

$$\left.\begin{array}{l} \xi \sim \cancel{|t|^{-1/y_1}} \cdot \dfrac{H^{-1/y_H}}{\cancel{|t|^{(y_H/y_1)\cdot(-\frac{1}{y_H})}}} \sim H^{-1/y_H} \\ \text{def: } \xi \sim |H|^{-\mu} \end{array}\right\} \boxed{\mu = \frac{1}{y_H}}$$

elnev.

$\frac{y_H}{y_1} = \frac{1}{\mu} \cdot \nu = \Delta$

$$\xi \simeq |t|^{-\nu} \,\Xi\left(\underset{\text{red. vált.}}{\frac{H}{|t|^{\Delta}}}\right)$$

$\xi(t, H) = \lambda\, \xi(\underbrace{\lambda^{1/\nu} t}, \lambda^{\Delta} H)$ skálahip. ξ-re

$\lambda^{1/\nu} t = \pm t_0$ rögz. érték

$\lambda = \left|\frac{t_0}{t}\right|^{\nu}$ $\qquad t_0 > 0$, ha $t > 0$

$$= \left|\frac{t}{t_0}\right|^{-\nu} \xi\Big(\pm t_0, \frac{H}{\left|\frac{t}{t_0}\right|^{\nu/\mu}}\Big)$$

$$f(t_1(T), t_2(T), H) = b^{-d} f(b^{y_1} t_1(T), b^{y_2} t_2(T), b^{y_H} H)$$

behelyett.: $b^{y_1} t_1(T) = \pm t_0$

$$= \left|\frac{t_0}{t_1(T)}\right|^{d/y_1} f\Big(\pm t_0, \underset{t_1(T)\to 0}{0}, \frac{H}{\left|\frac{t_1(T)}{t_0}\right|^{y_H/y_1}}\Big)$$

$$f \simeq |t|^{\frac{d}{y_1}} \mathcal{F}_\pm\left(\frac{H}{|t|^\Delta}\right) = |t|^{2-\alpha} \mathcal{F}_\pm\left(\frac{H}{|t|^\Delta}\right)$$

$\pm$ krit pont fölött-alatt a fgv más és más.

$$\frac{d}{y_1} = d\nu = 2-\alpha$$

igazoltuk, h. a fixpont lin. környezetében a skálahip. teljesül ha a $t_2 = 0$ határesetben a fgv. nem viselkedik singulárisan.

<u>Nemlineáris skálaterek:</u>

$$\left.\begin{array}{lll} g_1(\underline{K}) & \xrightarrow{tr.} & g_1' = g_1(K') = b^{y_1} g_1(K) \\ g_2(\underline{K}) & & g_2' = g_2(K') = b^{y_2} g_2(K) \end{array}\right\}$$

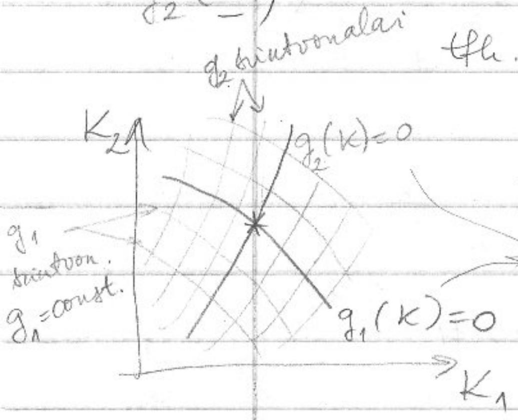
tfh. a továbbiakban, h. ezek a fgvek megkonstruálhatók + invertálhatóak, meghatározzák egymást

tul.-ok: • fixpont ($\underline{K}$, $\underline{K}'$ helyébe K^*)

csak 0 lehet: $g_1(K^*) = \underbrace{b^{y_1}}_{\neq 1} g_1(K^*) \Rightarrow$

$\Rightarrow g_1(K^*) = 0$

$\ldots \Rightarrow g_2(K^*) = 0$



g_1 ostérc állandóan $\nearrow$

g_2 — " — $\searrow$

fixpontba jutás: $g_1 = 0$ (g_2 magától lecsökken 0-ra)

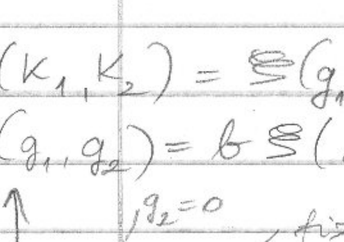
krit. felületen: $g_1(\underline{K}) = 0$

linearizált környezetben: $g_1(\underline{K}) \simeq t_1(\underline{K})$

$g_2(\underline{K}) \simeq t_2(\underline{K})$

$$\mathcal{S}(K_1, K_2) = \mathcal{S}(g_1, g_2)$$

$$\mathcal{S}(g_1, g_2) = b\, \mathcal{S}(b^{y_1} g_1, b^{y_2} g_2)$$



$g_1(T), g_2(T)$

$g_1(T) \sim t$ (arányos) (a red. hőm-el)

$(T \to T_c)$

$T \to T_c$:

$$\xi\left(g_1(T), g_2(T)\right) = b\,\xi\left(b^{y_1} g_1(T), b^{y_2} g_2(T)\right) =$$

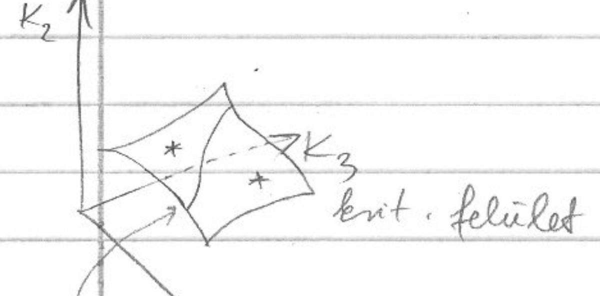
$b^{y_1} g_1(T) = \pm t_0$ (krit. pont $\begin{cases} \text{felett } +t_0 \\ \text{alatt } -t_0 \end{cases}$)

$$= \left|\frac{t_0}{g_1(T)}\right|^{1/y_1} \xi\Bigg(\pm t_0, \underbrace{\left|\frac{t_0}{g_1(T)}\right|^{y_2/y_1}}_{\substack{\to 0 \\ (\text{ha } g_1(T)\to 0)}} g_2(T)\Bigg) \simeq |t|^{-1/y_1}\xi(\pm t_0, 0)$$

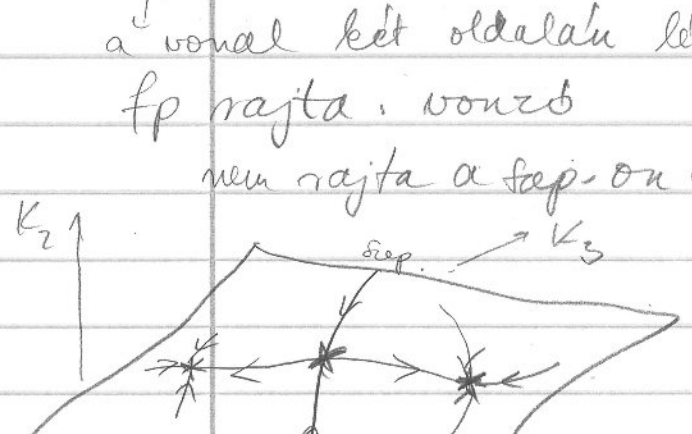
$$\left|\frac{g_1(T)}{t_0}\right| = |t|$$

a viselkedés ezzel kiterjed (majdnem) az egész paramétertérre.
(fixpont körül, de lehet több fixpont is)

Pl.: 3 paraméter

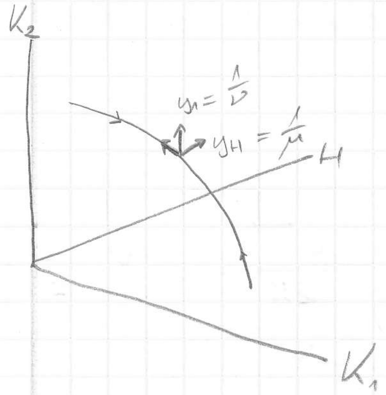


a vonal két oldalán lévő pontok a megfelelő fp-hoz mennek
fp rajta: vonzó
nem rajta a szep-on: taszító



minden fp-nak van vonzási tartománya
az univerzalitás korlátozott
(csak a vonzási tart.-ra igaz egy adott fp. esetén.)

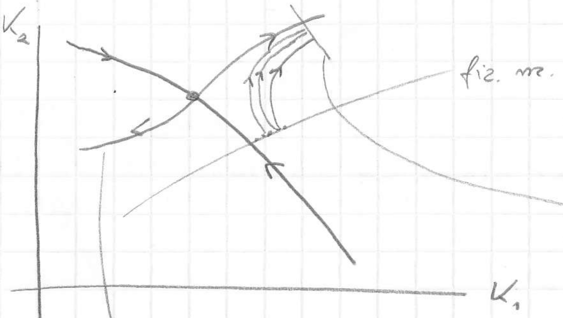
Fázisátalakulások 13. ea



tr: konstruktív → adott rsz-re megmondja, mit kell csin

sima tr, de
maga a konstrukció ált. nehéz

H teret most nem vesszük figy.:



Mi van, ha vmi fv-t akarunk kiszámolni?

itt mindig el tudom végezni a számolásokat

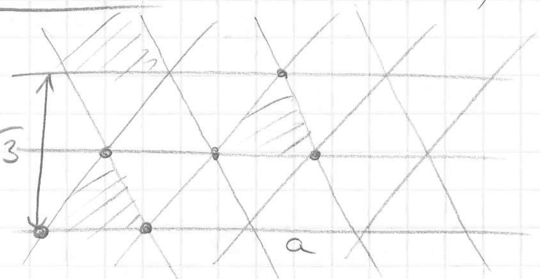
tr során távolodók, mintha a fix pontból jönnének

(9) ↓ $b^{y_1} t_1 = t_1' = t_0$ (rögzítjük)

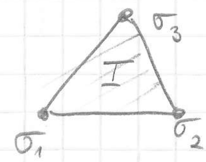
egyre többször kell alk a tr-t, h ide kijussunk, de ott már megy a számolás

↓(10)

Konkrétan: síkbeli Δ-rács, Ising-modell, nn kh.



I-edik blokk:



$\Rightarrow S_I = \mathrm{sgn}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$

blokkspin

$S_I = \pm 1$

(többség $+1 \to +1$
$-1 \to -1$)

blokkok: újra is Δ-rácsot alk $\to b = \sqrt{3}$

$$H = -K \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i = (*)$$

$$\frac{J}{k_B T} = K \qquad h = \frac{H}{k_B T}$$

feltételes vszg → mi a vszge h adott blokkspin konf. létrejön

$$(*) = -K \underbrace{\sum_I}_{\Sigma \text{ a blokkokra}} \overbrace{\Big(\sum_{\substack{\langle ij \rangle \\ (i,j \in I)}} \sigma_i \sigma_j\Big)}^{\text{1 blokkra von.}} - K \overbrace{\sum_{\langle I,J \rangle} \Big(\sum_{\substack{\langle ij \rangle \\ (i \in I,\, j \in J)}} \sigma_i \sigma_j\Big)}^{\text{ami a blokkokat köti össze (nn. blokkok)}} - h \sum_I \Big(\sum_{\substack{i \\ (i \in I)}} \sigma_i\Big)$$

$(i,j \in I) \to$ i és j benne van az I-edik blokkban első tag, ⊖ előjelet is beleértve: H_0

második és harmadik: $+V$ (⊖ előjeleket is beleértve)

$H = H_0 + V$ tehát

H_0: ftlen blokkokat ír le önmagában

$$\rightarrow \sum_{(\tilde\sigma|\tilde s)}' e^{-H} = \sum_{(\tilde\sigma|\tilde s)}' e^{-H_0} e^{-V} = Z_0 \sum_{(\tilde\sigma|\tilde s)}' \frac{e^{-H_0}}{Z_0} e^{-V} = (*)$$

az összes $\tilde\sigma$ konfig, azzal a feltétellel, h $\tilde s$ konfig rögzített

Z_0: ftlen blokkspin-rsz feltételes állapotösszege

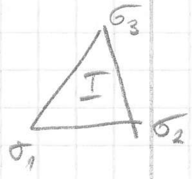
$$Z_0 = \sum_{(\tilde\sigma|\tilde s)}' e^{-H_0}.$$

e^{-V} átlagát számoljuk igazából azzal a feltétellel: a blokkspin konf. rögzített

$$(*) = Z_0 \cdot \langle e^{-V} \rangle_0$$

ez jelöli

$$Z_0 = \sum_{(\tilde\sigma|\tilde s)}' e^{-H_0} = \sum_{(\tilde\sigma|\tilde s)}' \prod_I e^{+K \sum_{\langle ij \rangle,\, i,j\in I} \sigma_i \sigma_j} = \square$$



$S_I = 1$:

σ_1	σ_2	σ_3	$e^{+K(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}$
↑	↑	↑	e^{+3K}
↑	↑	↓	e^{-K}
↑	↓	↑	e^{-K}
↓	↑	↑	e^{-K}

$\rightarrow \Sigma \rightarrow e^{3K} + 3e^{-K}$

$S_I = -1$

↓	↓	↓
↓	↓	↑
↓	↑	↓
↑	↓	↓

$e^{3K} + 3e^{-K}$

összes spint megforg.
↳ rel. helyzet nem változik
u.a. jön ki

ftlenül attól, mire rögzítjük, u.a. lesz

$$\square = \prod_I e^{3K} + 3e^{-K} = \left(e^{3K} + 3e^{-K}\right)^{N/3}$$

$\rightarrow$ közelítés kell: $\langle e^{-V} \rangle_0 \approx e^{-\langle V \rangle_0}$ a kumuláns sor 1. rendet tart. meg

Ha:
X vszgi vált. $\rightarrow \langle e^{\lambda x} \rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \lambda^l \langle x^l \rangle$ sor $\rightarrow$ elő-i: momentumok

momentum generátor-fv

↳ $\ln \langle e^{\lambda x} \rangle = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \lambda^l \kappa_l$

elh-ők: kumulánsok

$\langle e^{\lambda x} \rangle = 1 + \lambda \langle x \rangle + \dots$

$\ln \langle e^{\lambda x} \rangle = \ln(1 + \lambda \langle x \rangle + \dots) \simeq \lambda \langle x \rangle$

kumuláns sorral való közelítés → valahol megállunk a kumulánsokkal

most: 1. tagnál

$$V = -K \sum_{\langle I J \rangle} \Big(\sum_{\substack{\langle ij \rangle \\ i \in I \\ j \in J}} \sigma_i \sigma_j \Big) - h \sum_I \Big(\sum_{\substack{i \\ i \in I}} \sigma_i \Big)$$

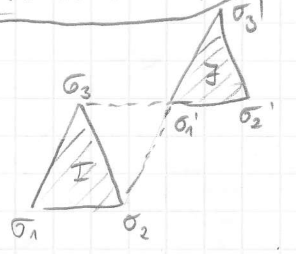
$S_I = +1$

$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$:	$\sigma_1 e^{K(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}$:
↑ ↑ ↑	$1 \cdot e^{3K}$
↑ ↑ ↓	$1 \cdot e^{-K}$
↑ ↓ ↑	$1 \cdot e^{-K}$
↓ ↑ ↑	$-1 \cdot e^{-K}$
⊕	$e^{3K} + e^{-K}$

$S_I = -1 \quad \to \quad -(e^{3K} + e^{-K})$ (σ_1 mindig előjelet vált, ennyi a kül. az előzőhöz képest)

$\Rightarrow \langle \sigma_1 \rangle_0 = S_I (e^{3K} + e^{-K}) \cdot \frac{1}{(e^{3K} + 3e^{-K})}$ — $\frac{1}{Z_0}$ a normálás ide tartozó része

többi: u.e.



$$\langle \sigma_1' \sigma_3 \rangle_0 = \langle \sigma_1' \rangle_0 \langle \sigma_3 \rangle_0 = (e^{3K} + e^{-K})^2 S_J S_I \cdot \frac{1}{(e^{3K} + 3e^{-K})^2}$$

$\langle \sigma_1' \sigma_2 \rangle_0 = \langle \sigma_1' \sigma_3 \rangle_0$ u.e.

$$g(K) = \frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}}$$ elnev.

$\langle \sigma_1 \rangle_0 = S_I \, g(K)$

$\langle \sigma_1' \sigma_3 \rangle_0 = g^2(K) \, S_I S_J$

$Z_0 \cdot \langle e^{-V} \rangle_0$ adja meg a blokkspinek eloszlását $\underset{\text{köz.}}{\approx} Z_0 \cdot e^{-\langle V \rangle_0} =$

$$= \underbrace{\left(e^{3K} + 3e^{-K}\right)^{N/3}}_{\text{blokkspinektől ftlen}} \cdot \exp\Big\{ \underbrace{K \sum_{\langle I J\rangle} 2\cdot g(K)^2 \cdot S_I S_J + h \sum_I{}' 3 g(K) S_I}_{K' \sum'_{\langle I,J\rangle} S_I S_J + h' \sum_I S_I} \Big\}$$

2 Δ közötti 2 kötés

↳ beolvasztható a normálásba

pontosan olyan formájú, mint az eredeti energia csak −1-gyel szorozva

Δ rácson def Ising modell eloszlását kapjuk, csak a paraméterek változtak

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} K' &= 2K g(K)^2 \\ h' &= 3 g(K) h \end{aligned}}$$

a paraméterek transzformációja ez.

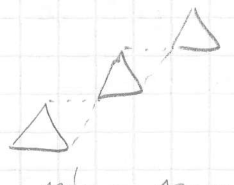
renorm. csop. tr.

Kumul. sor köv. tagja:

$$\langle e^{-V}\rangle_0 = \exp\left(-\langle V\rangle_0 + \frac{1}{2}\left(\langle V^2\rangle_0 - \langle V\rangle_0^2\right) + \dots\right)$$

itt vágunk el

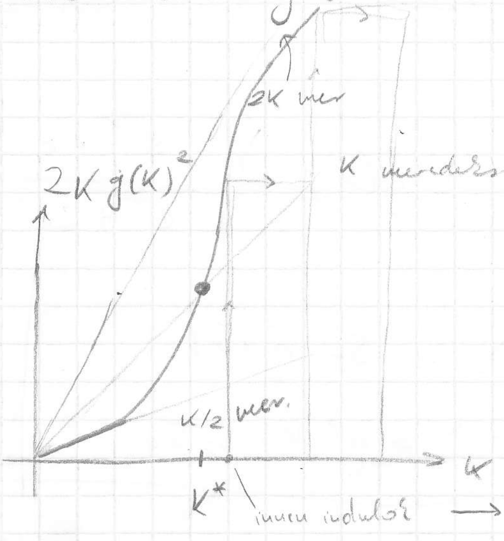
$\langle V\rangle_0$-t számoljuk: megjelennek 3 spint tart. tk.



paraméterek száma szaporodik

Nincs egyértelmű szisztematikus válasz h mikor kell megállni.

$$g(K) = \frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}}$$



fixpont: $2K^* g(K^*)^2 = K^*$

másik oldal: akkor is távolodok

nem stabil, taszító fixpont

$$e^{4K^*} = \frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \quad \to \quad K^* = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right) = 0{,}336\,\frac{J}{k_B T_c}$$

$$g(K^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

→ linearizálni kell az egyenletet: $\cancel{K^*} + \delta K' = \cancel{2K^* g(K^*)^2} + \underbrace{\frac{d}{dK}\left(2Kg(K)^2\right)\Big|_*}\,\delta K$

$$\frac{d}{dK}\left(2K\cdot g(K)^2\right) = 2g(K)^2 + 4Kg(K)\underbrace{\frac{dg(K)}{dK}}$$

$$\frac{d}{dK}\left(\frac{e^{4K}+1}{e^{4K}+3}\right) = \frac{8e^{4K}}{(e^{4K}+3)^2}$$

ide be kell írni a fenti * helyen kiszámolt értékeket (fixpont körül linearizálunk)

$$\frac{d}{dK}\left(2Kg(K^2)\right)\Big|_* = 1 + \frac{16\sqrt{2}\,e^{4K^*}K^*}{(e^{4K^*}+3)^2} = 1{,}624$$

$$\left.\begin{aligned} \delta K' &= 1{,}624\cdot\delta K \\ \delta K' &= b^{y_1}\,\delta K, \quad b=\sqrt{3} \\ (\sqrt{3})^{y_1} &= 1{,}624 \end{aligned}\right\} \quad y_1 = \frac{\ln 1{,}624}{\ln\sqrt{3}} = 0.883$$

$y_1 = \frac{1}{\nu}$ tudjuk

másik ól (h-ra): $3g(K) > \frac{3}{2} > 1$

lin. egyenlet: $h' = \underbrace{3g(K^*)}_{\frac{3}{\sqrt{2}}}h \qquad h' = b^{y_H}h$

$$(\sqrt{3})^{y_H} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$y_H = \frac{1}{\mu} = \frac{\ln(3/\sqrt{2})}{\ln\sqrt{3}} = 1{,}369$$

kritikus exponensek kijöttek.

Összehasonlítás más elmélettel:

	Renorm csop tr	egzakt Ising	átlagtér köz
$K^* = K_c = \frac{J}{k_B T_c}$	0,336	0,274 (Δ-rács)	$\frac{1}{z} = \frac{1}{6}$
$\frac{1}{\nu}$	0,883	1	2
$\Delta = \frac{\nu}{\mu}$	$\frac{1{,}369}{0{,}883} = 1{,}55$	$\frac{15}{8} = 1{,}875$	$\frac{3}{2}$

$\frac{1}{\nu}$, $\frac{\nu}{\mu}$ az egzakt eredményhez közeledett

K^+ ott is az egzakt ~~m~~ eredmény irányába mozdult el

(direkt.-hez képest)

Valós tér (blokk) transzformáció:

Kadanoff: variációs eljárás (így rendel hozzá 1 blokkhoz 1 spint)

pl $d=2$ Ising $d\nu = 1,988$ (2 kéne legyen)

$\delta = 15,04$ (15 — " —)

közeli értékek

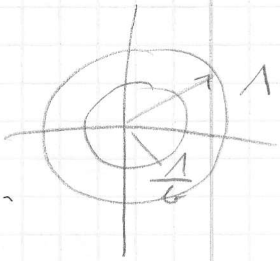
Monte Carlo renorm csop tr. (Ma, Swendsen)

~ jó egyezés az egzakttal

$\mu = 1,00\ldots$

Hullámszámtérbeli transzformáció:

rendpar: $\phi(r) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_q e^{iqr} \phi_q$



ϕ^4 modell:

$$H = \int d^d r \left\{ \frac{r}{2}\phi^2 + \frac{u}{4}\phi^4 + \frac{c}{2}(\nabla\phi)^2 \right\}$$

ez a Landau elm. felt. szab.en.-ja k_BT egységekben

e^{-H}

u nélkül → Gauss eloszlás

u figyelembevétele: perturb. számítás

kettős sorfejtés: egyik par: u

másik: $\varepsilon = 4-d$

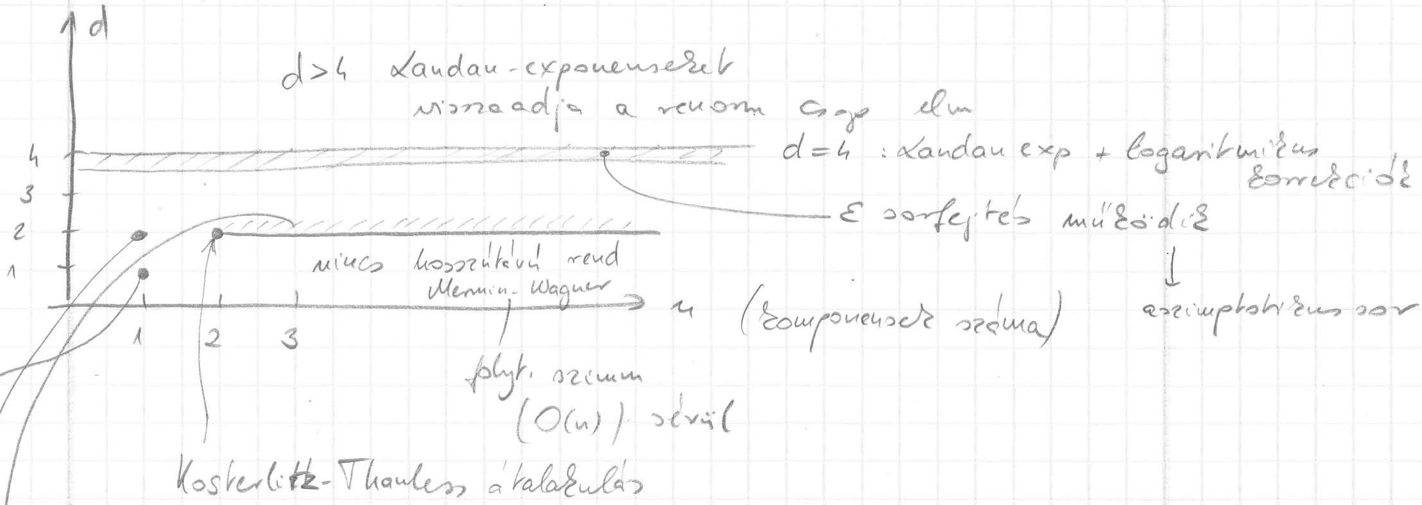
u-ban és ε-ban u.o. hatványig kell elmenni a sorfejtéssel

ϕ több komponensű $\phi = (\phi_1 \ldots \phi_n)$ itt $\phi^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} (\phi_\alpha^2)$ skalárszorzatnak megf.

$\phi^4 = (\phi^2)^2$

$(\nabla\phi)^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} (\nabla\phi_\alpha)^2$

O(n) szimm.



alacs. köm. renorm csop tr → sorfejtés ez is $\varepsilon' = d-2$ sorfejtés

2d Ising

1d Ising → 2d Ising irányába is lehet csin sorfejtést

3d : Mit lehet csinálni?

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{n+2}{4(n+8)}\varepsilon + \dots$$ ez adódik az ε sorf.-ből

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4\cdot 9}\varepsilon + \dots = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{12}$$

extrapoláljuk ezt $d=3$-ra : $\nu = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \simeq 0,58$

mérés $\cong 2/3$ ⟶ elég jó

másod, harmadrend ⟶ elromlik

Padé - Borel - összegzés → pontosabb eredmények
(részletei : bonyolultak)

$n = 1$-re
$$\left.\begin{aligned} \nu &= 0,6300 \pm 0,0008 \\ \gamma &= 1,2402 \pm 0,0009 \end{aligned}\right\}$$

magaskőm sorf. 3d Ising : $\gamma = 1,240 \pm 0,002$

Renorm csop tr -t kik találták ki

Kadanoff → blokk tr

Wilson → tr elviss a fiz sz vonalról
fixpont k. krit vs. összeköthető
erre ő jött rá

sasvari.web.elte.hu → tételek

januárban 3 vizsganap lesz