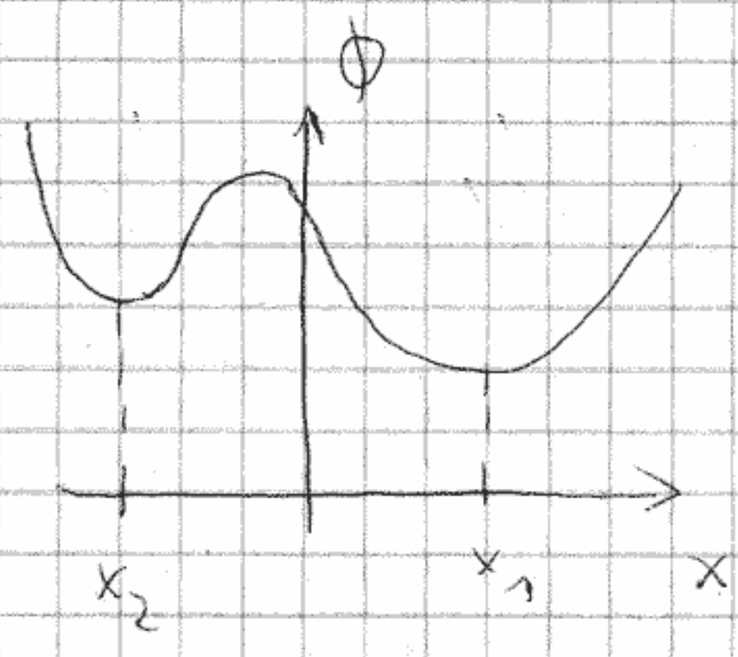
Fázisátalakulások

stabilitás kérdése → fázisátalakulások osztályozása
termodinamikai potenciálok szélsőértékének vizsgálata

<u>a minimumok mélysége változik</u>

(1)



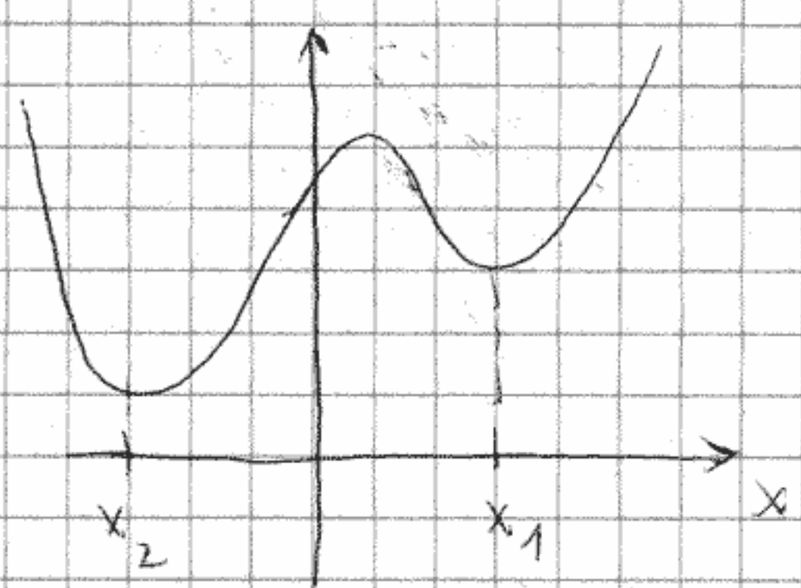
$$P(x) \sim e^{-\frac{\Phi(x)}{k_B T}}$$

- $P(x)$ élés fv.
- $\Phi(x)$ termodinamikai potenciál
  szimm., szélés

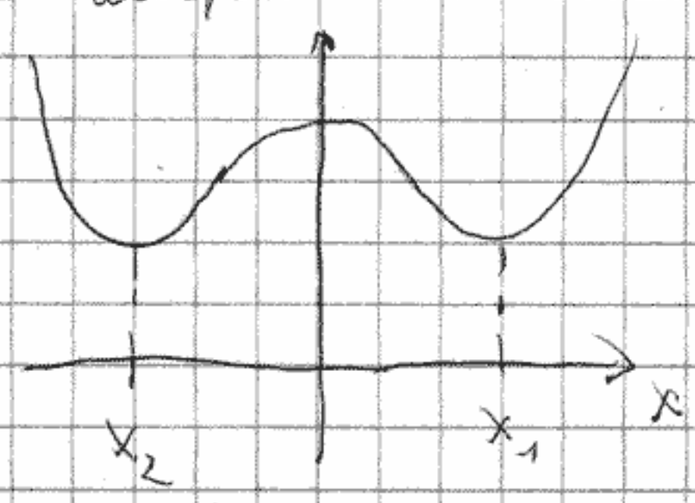
(„ „ , magnetizáltság, stb.)

ΔT ↓ metastabil állapot, fluktuáció kell, hogy ne ragadjon be a rendszer és átkerüljön x_1-be (stabil)

(3)



koegzisztencia állapotok

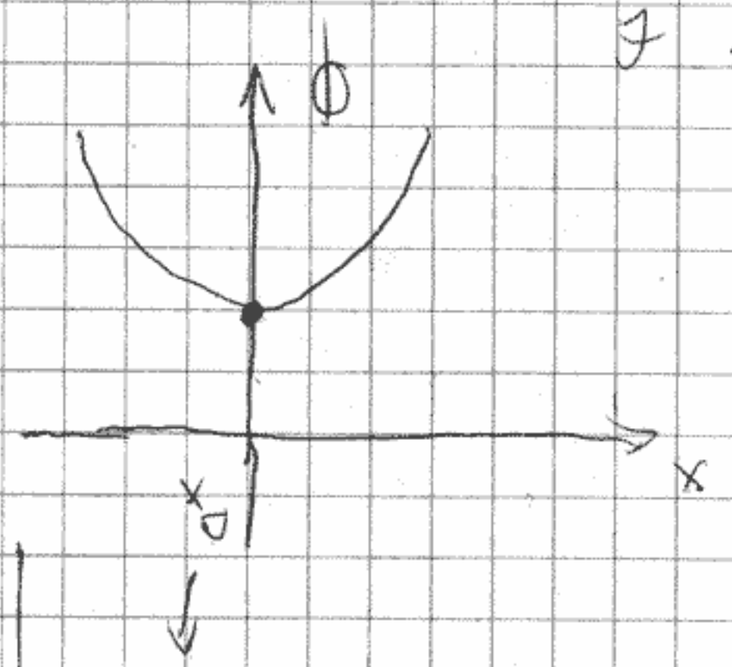


ELSŐRENDŰ FÁZISÁTALAKULÁS
hiszterézis is lehet
pl. gőz/folyadék → $x_{1,2}$ „ „ egy
első derivált ugrik
↳ a termodinamikai
potenciálok kapcsolódó deriváltja

(Ehrenfest-féle osztályozás)

de ez a módszer csak addig működik,
másodrendűnél már divergenciák jönnek létre.

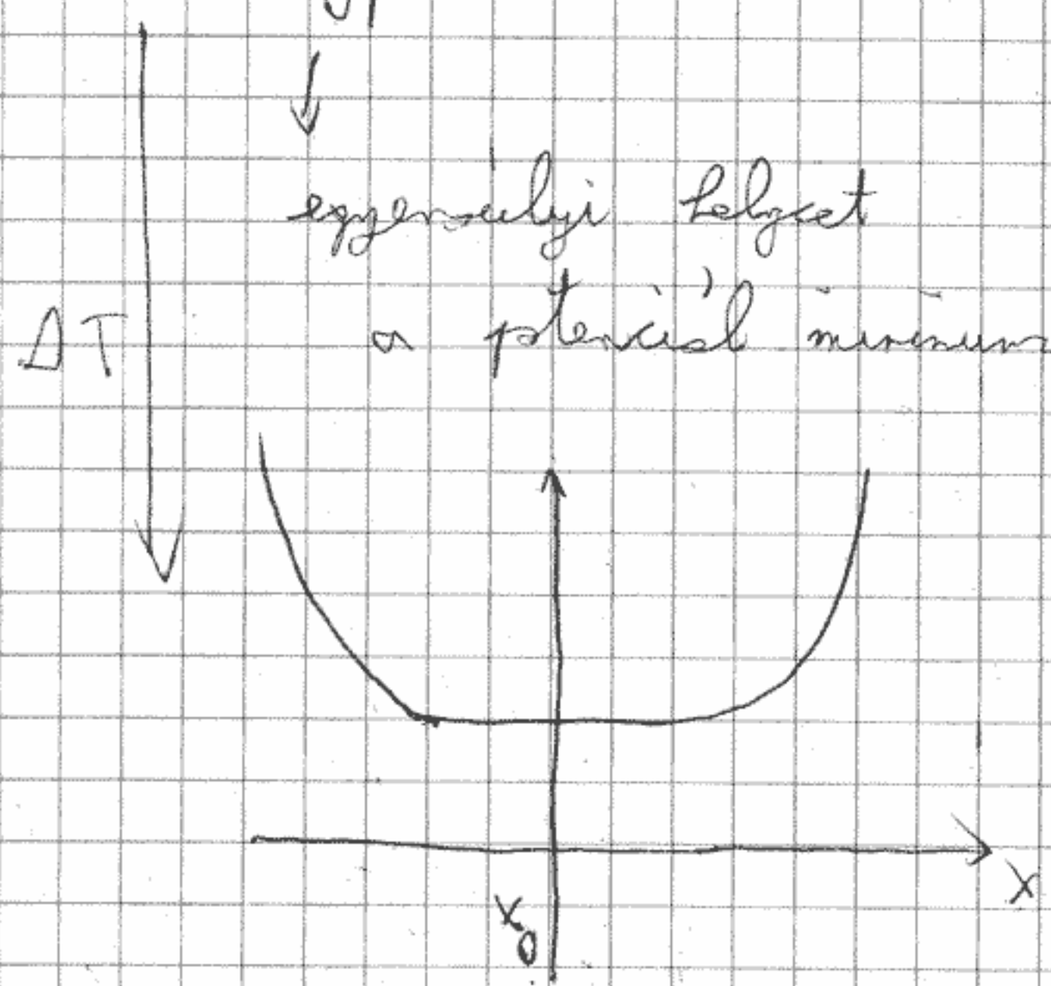
<u>stabilitás kritériuma</u>: állandó V-n vett fajhő pozitív legyen
F maximum! (stat fizi megfogalmazás)



egyensúlyi helyzet
a potenciál minimum

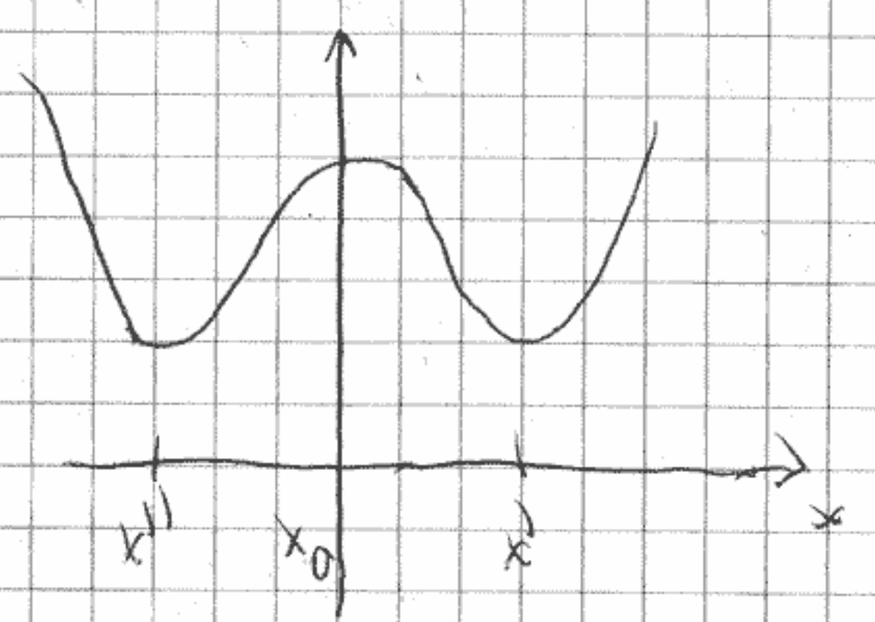
stab. felt.: $\left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{x_0} = 0$ (szükséges)

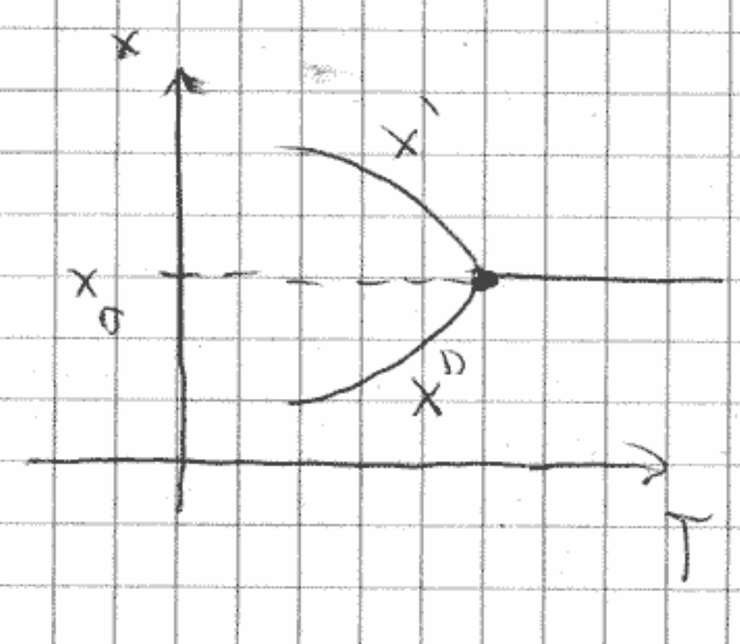
$\left.\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right|_{x_0} > 0$ (elégséges)



stab. határon (első derivált)

$$\left.\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right|_{x_0} = 0$$





<u>folytonos átalakulások</u>

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \chi^{-1}$$ (szuszceptibilitás inverze)

$x = x_0 \rightarrow X$ divergál

pl. ferromágneses anyagban
véges spontán mágnesettséget mintegy
két véges értéke van

(két alapvető mechanizmus)

(ha véges ugrás lenne $\Rightarrow$ másodrendű lenne)

---

másik osztályozás: a rendszer szimmetriái hogyan változnak

(1) nincs szimm. változás (pl. folyadék-gáz átalakulás)

(2) van változás

két szimmetriaban tartó csoport: G_1 és G_2

(2 eset)

$G_1 \subset G_2$
szimmetriasértés
lehet folytonos
(pl. mágnesettség
folytonosan tűnik el)

G_1 és G_2 nem rokon
(1. rendű átalakulás
„ugrásszerű" változás)

ezzel kapcsolatban bevezetjük a RENDPARAMÉTERT

pl. ferromágnes:
mágnesettség: $m = \begin{cases} 0 & \text{paramágnes} \\ \neq 0 & \text{ferromágnes} \end{cases}$

(az erősségét is jelzi)

KONJUGÁLT TÉR: pl. ferromágnes

H nagyobb térerősség

(param. fázis + H → m ≠ 0)

a rendparaméter nem nulla értékét létrehoztam

egy külső térrel

antiferromágnes: ↑↓ kitüntetett irány létrehoztam

egy külső térrel → atomi törzsben rejtőző térrel

nem tudok váltakozóit (csak elektromágneses térrel)

→ nem valós térrel van itt

szimmetria törés esetben általános elmélet:

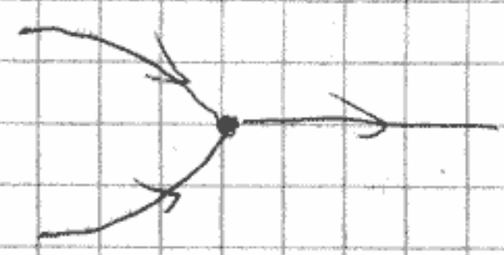
LANDAU-ELMÉLET

történeti áttekintés

- Andrews (1861): CO_2 kritikus pontjának felfedezése

folyk. ⇌ gáz átalakulások

mintha egy ilyen folyamat játszódna le



- Pierre Curie: ferromágn. fázisdiagramjai
- Gibbs: oldatok fázisegyensúlya

(Gibbs-féle fázisszabályok)

1930-as évek: antiferromágnes megtalálása!

He szuperfolyékonyság vizsg

egyszerű elméletek: – van der Waals
– Pierre Weiss – átlagtérelmélet

ezek összefogó: Landau-elm.

Onsager → Ising-modell → van, amire a Landau-elmélet nem jó → mérések, renorm. csoport elmélet

---

stb. látszott a váltás folyamatok lelassulnak, és leginkább az, melyik legjobban érintett a folyamatban a váltás lassul le

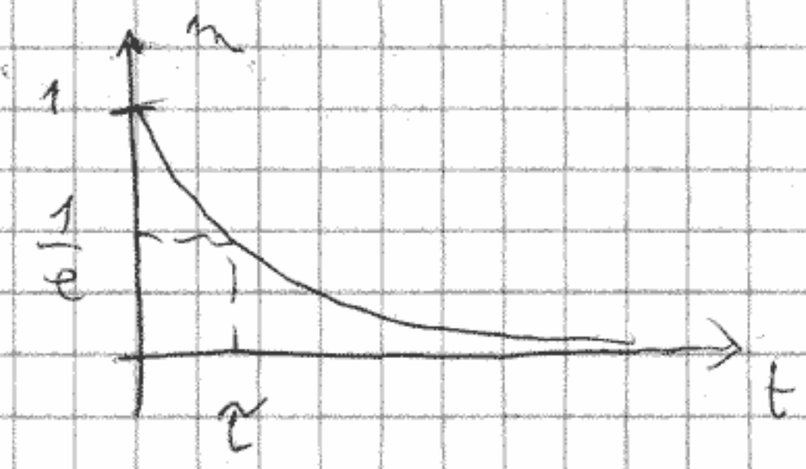
pl. L_p-t lejjebb viszem
körüli izolálás helyzet alatta átforduk

lassú permeábilitás: lassul a mágnes
hogyan közelíti az egyensúlyi értéket?
a relax. idő expoenciálisan ∞

$\downarrow$

divergál

krit. pontban: semmilyen értéket adok neki, az is le fog csengni



pl. kódiffúzió
(diffúziós együtthatók · k^2
nos nem igaz)

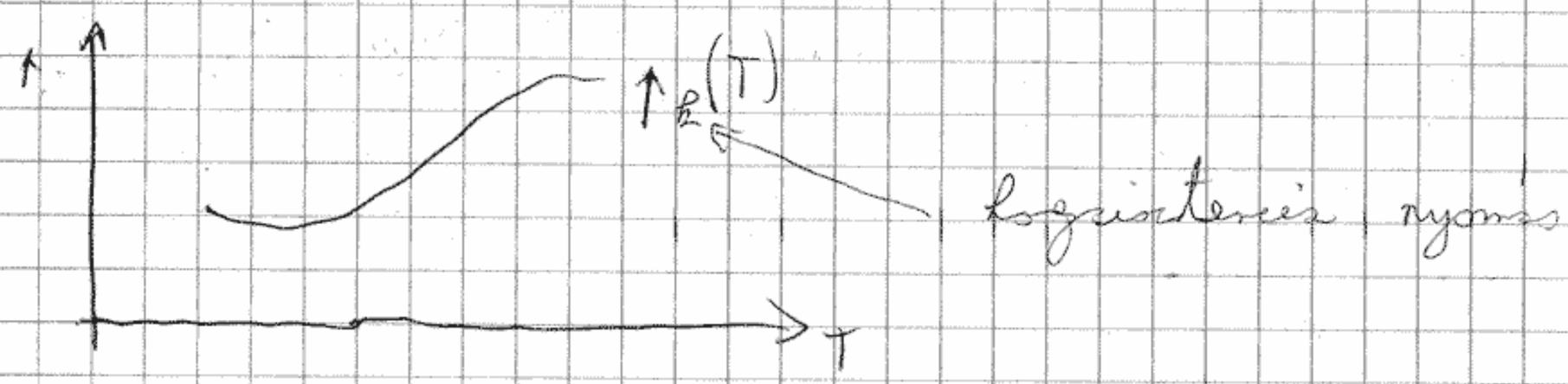
Egykomponensű anyag, tfh. 2 fázis egyensúlyban
sűr. – folyj., folyj. – gőz, sűr. – sűr., pl. jég

termikus, anyagi, mechanikai egyensúly

$T_1 = T_2$ $\quad$ $\mu_1 = \mu_2$ $\quad$ $p_1 = p_2$

$T_1 = T = T_2$ $\qquad$ $p_1 = p = p_2$

$$\mu_1(T,p) = \mu_2(T,p) \Rightarrow p_{koegzisztencia}(T)$$ nyomástartomány



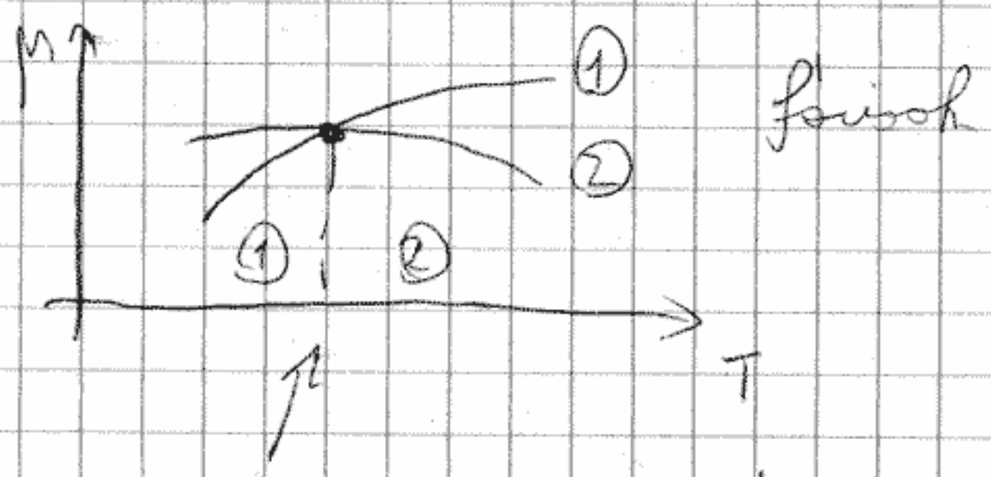
latens hő: $L = T(s_2 - s_1)$

a fázisátalakuláshoz mennyi hőt kell befektetni

szabadentalpia

$$G(T,p) = n \cdot \mu(T,p)$$

p adott:



fázisok

$\mu_1 = \mu_2$ koegzisztencia

$$d\mu = -s\,dT + v\,dp$$

$$\left(\frac{\partial \mu_1}{\partial T}\right)_p > \left(\frac{\partial \mu_2}{\partial T}\right)_p$$

$$-s_1 > -s_2$$

$$\boxed{s_2 > s_1}$$

latens hő kell, ha alacsonyabb T-ről magasabba megy a fázisátalakulás

$$\mu_1(T, p_k(T)) = \mu_2(T, p_k(T))$$

$$-s_1 + v_1 \cdot \frac{dp_k}{dT} = -s_2 + v_2 \cdot \frac{dp_k}{dT}$$

$$\boxed{\frac{dp_k}{dT} = \frac{s_2 - s_1}{v_2 - v_1} \quad \text{Clausius - Clapeyron - egyenlet}}$$

folyadék - gőz átalakulás: ① ②

$$\left.\begin{array}{l} s_2 > s_1 \\ v_2 > v_1 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{dp_k}{dT} > 0$$

↑ gőznyomás

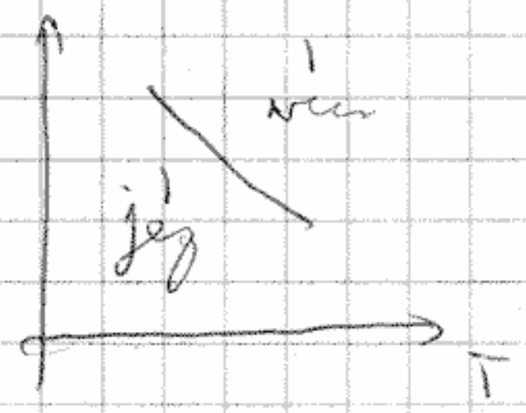
T növekő függvénye

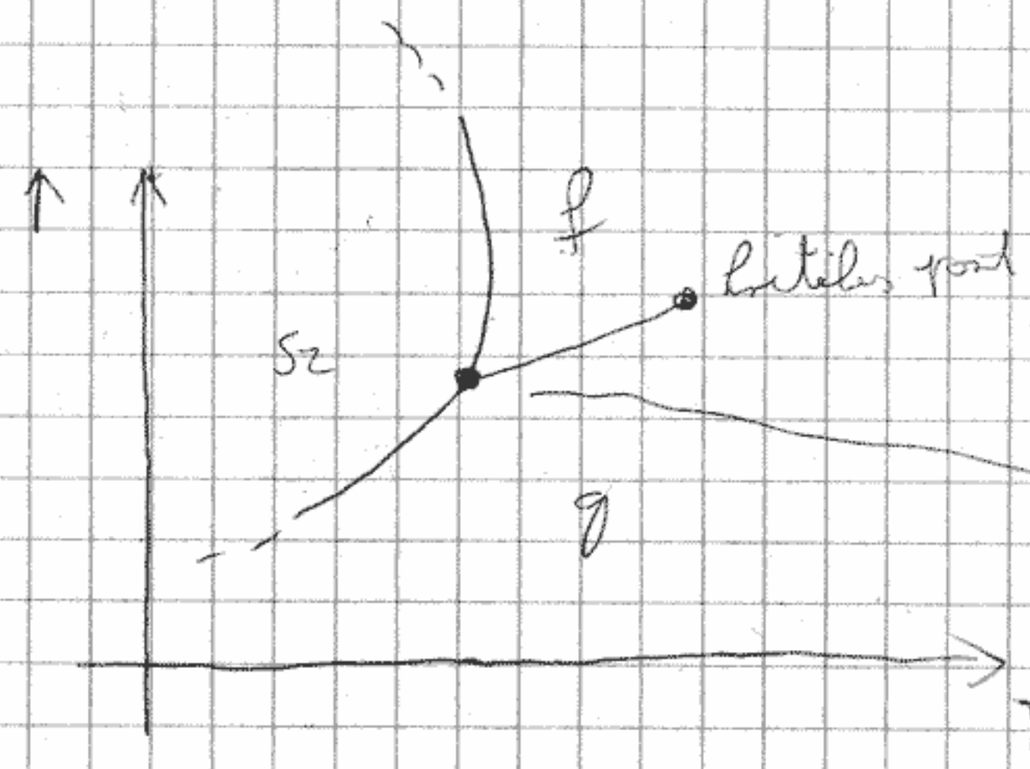
szilárd - folyadék

pl. víz

$$\left.\begin{array}{l} s_2 > s_1 \\ v_2 < v_1 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{dp_k}{dT} < 0$$

nyomás hatására jég megolvad





$T_1 = T_2 = T_3 = T$

$p_1 = p_2 = p_3 = p$

$\mu_1(T,p) = \mu_2(T,p) = \mu_3(T,p)$

$\Downarrow$

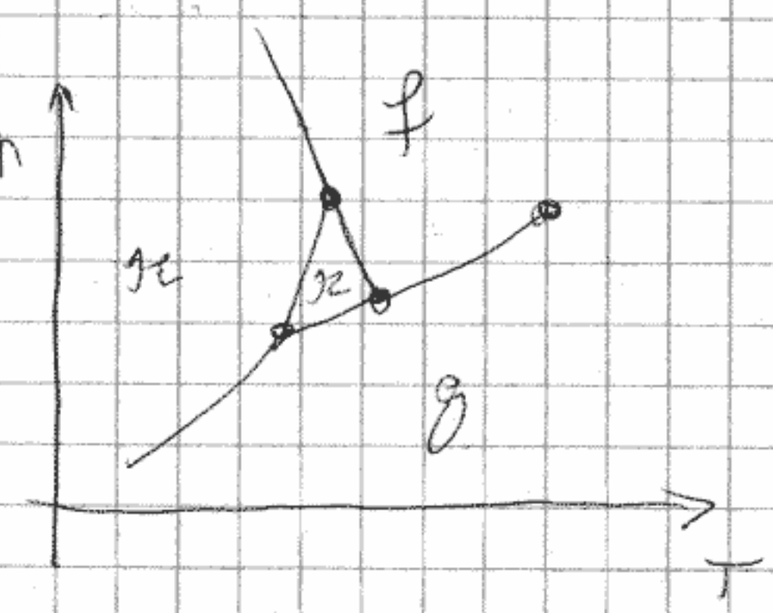
hármspont

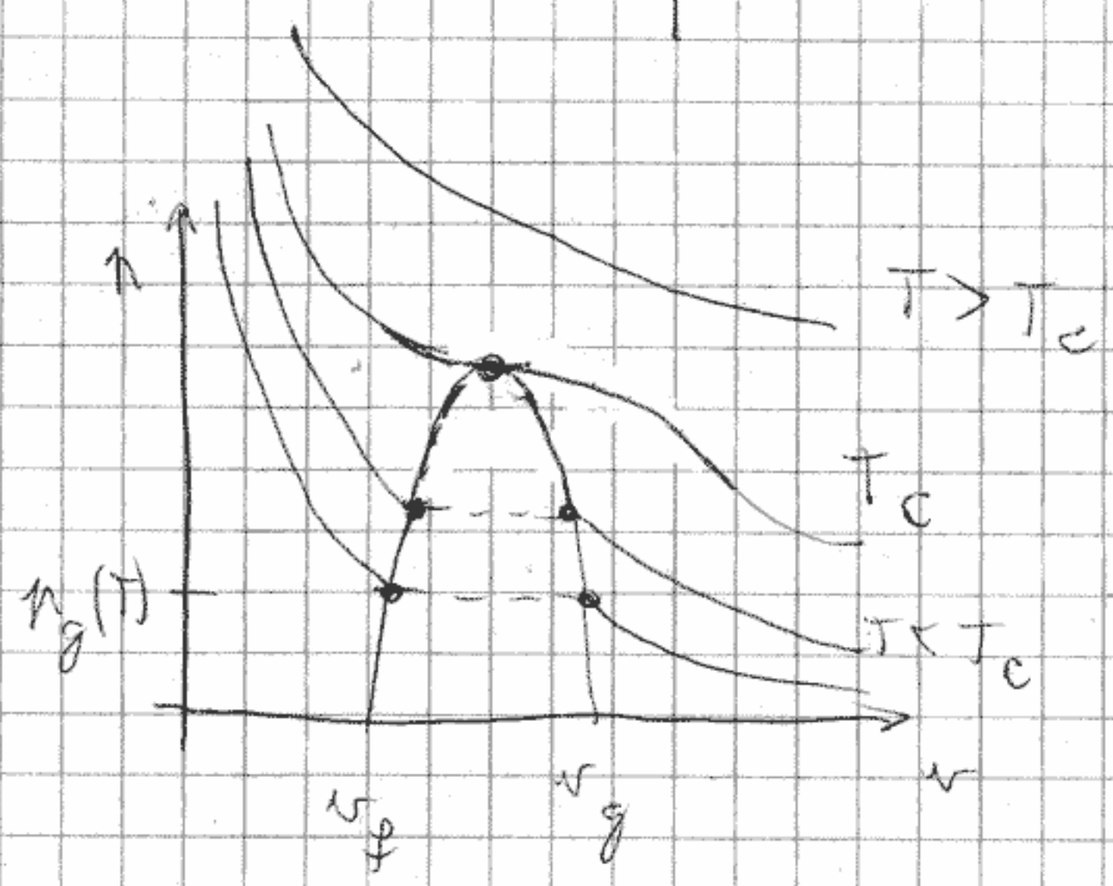
ebben tíbr hármspont is!

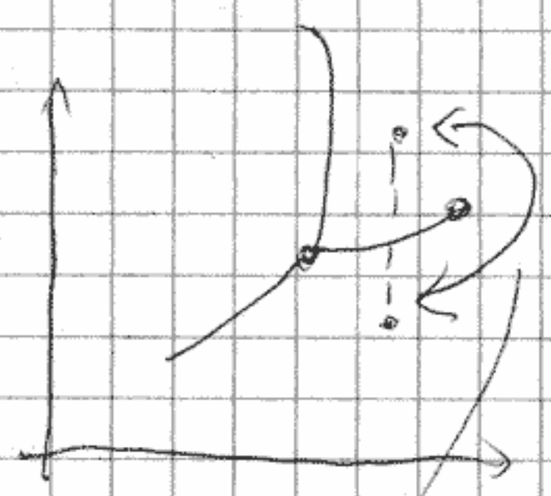
pl.: fém

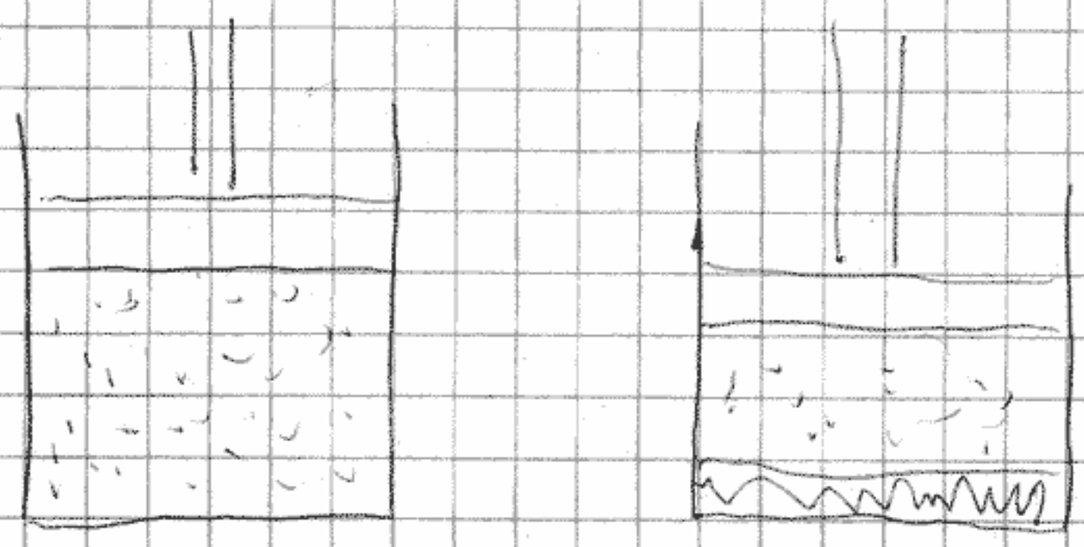
3 db kristály

3-as pont

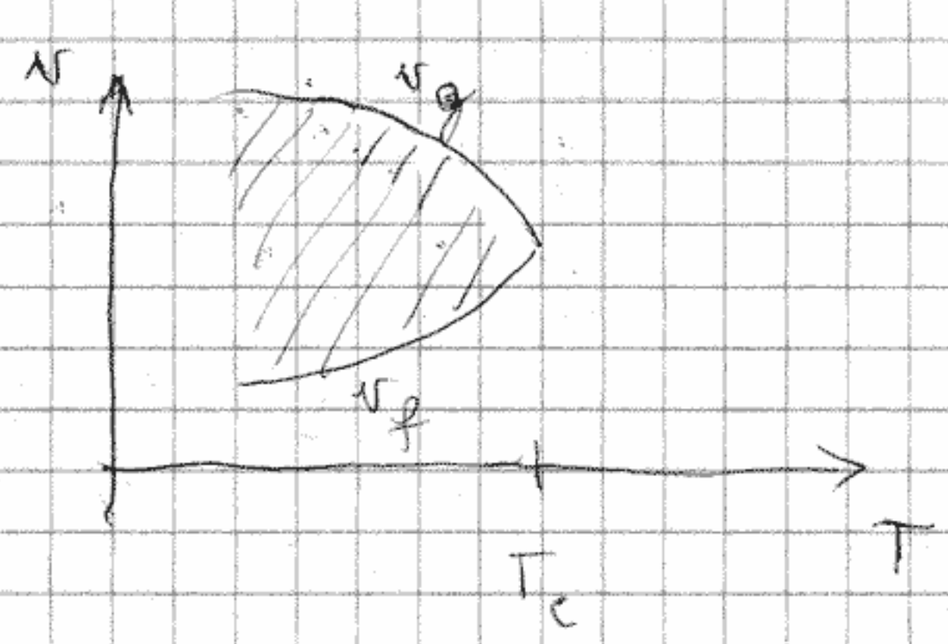








at ebben nem a homogénterem görbe érintője vízszintes



kompresszibilitás:

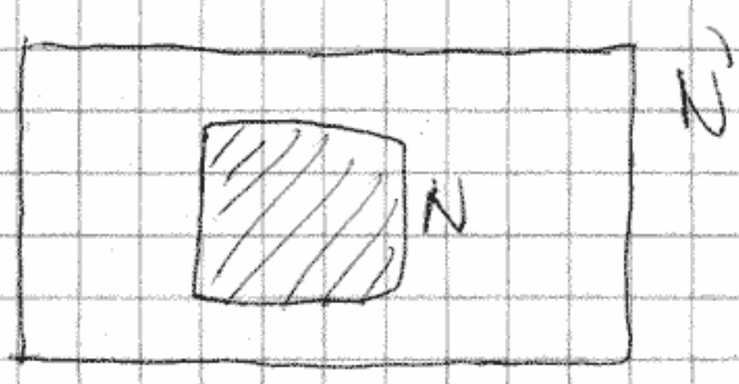
$$\chi_T = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T > 0$$

stabilitási felt.:

$$\chi_T^{-1} > 0$$

$T \to T_c \quad \chi_T^{-1} \to 0$

$\chi_T \to \infty$



$$\Delta N^2 = k_B T \left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_T = k_B T \frac{N^2}{V} \chi_T$$

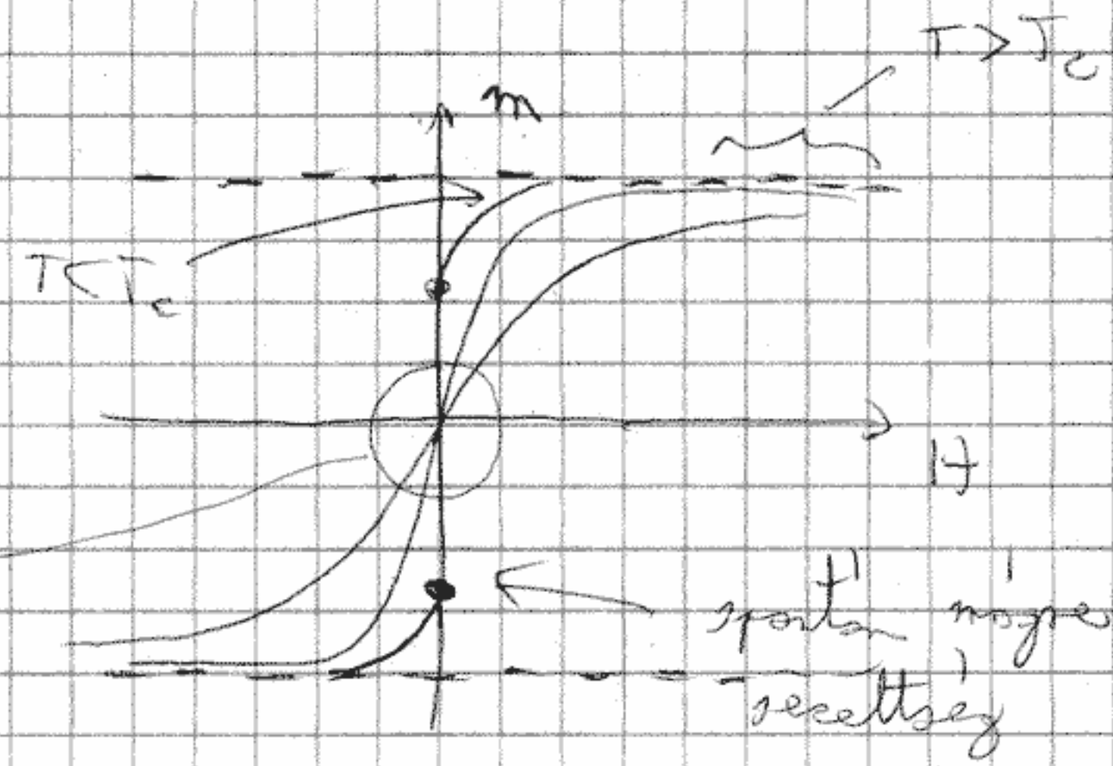
$\Delta N^2 \to \infty$, $\chi_T \to \infty$

eredmény: nagyon erős fényforrás

Ferromágnes fázisdiagramja

homogén mágneses tér

m H T

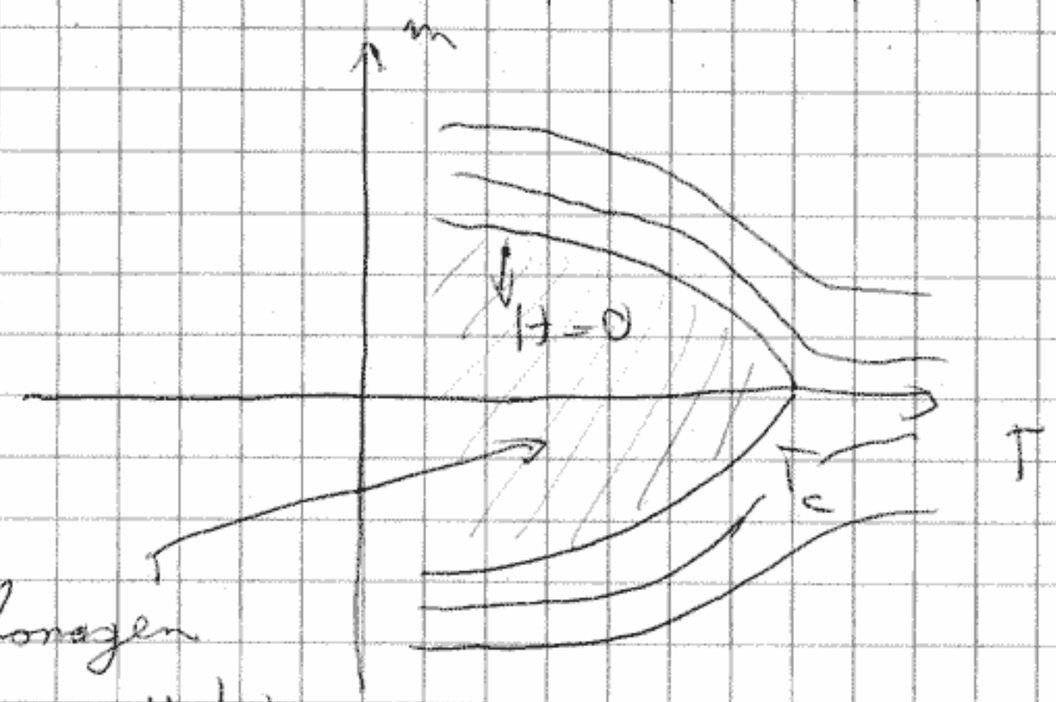


$T = T_c$ -nél itt függőleges

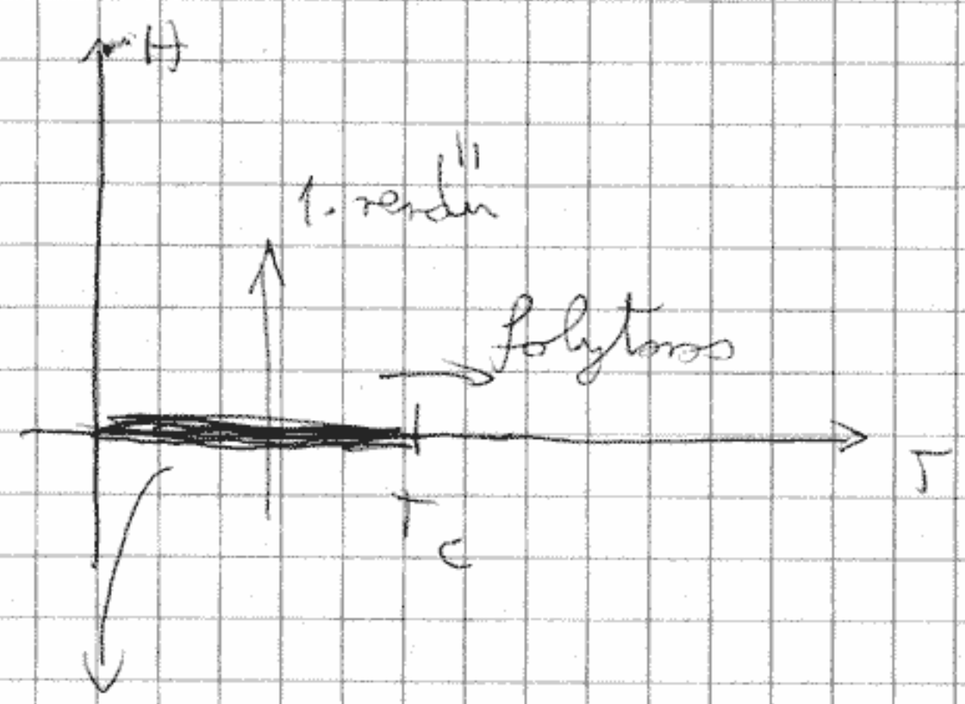
$$\frac{\partial H}{\partial m} = \chi^{-1} \to 0 \quad (T \to T_c)$$

$$\Delta m^2 = k_B T \cdot \left(\frac{\partial m}{\partial H}\right)_T = k_B T \cdot \chi$$

→ mágnesezettség fluktuációk nagyon nagyok lehet látni ($I \sim \chi$)



nincs homogén mágnesezettségű állapot



domének

1 domén esetén H és −H is lehet

→ szimmetriasértésnél a megszerelt tsp. vissza at egyensúlyi a lehetséges állapotokat.

összehasonlítás:

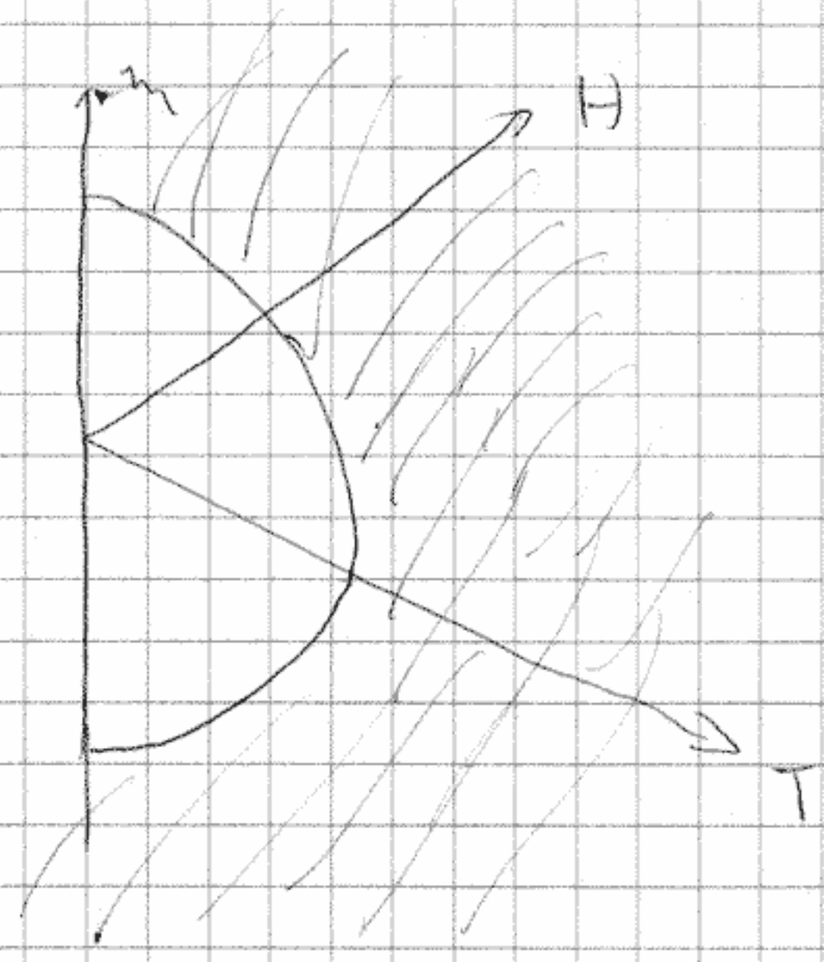
$v \leftrightarrow m$

$p - p_c \leftrightarrow H$

kül.: szimmetriasértés

08.21

m, T, H



$\frac{\partial F(T,H)}{\partial H} = -m$ ⇒ a szabad energiában is tűnés T_c alatt

		T_c
ferromágnesek	Fe	1043
	Ni	630
	Gd	593
szigetelő izotróp ferromágnes	EuO	63
	$CrBr_3$	32,9
	EuS	16,6
	$LiTbF_4$	2,88

jelentősek a dipól kölcsönhatások

<u>rendparaméter</u>: mágnesezettség

egytengelyű $n = 1$

síkrács $n = 2$

izotróp (köbös) $n = 3$

(1,1,1) (1,0,0)

n: rendparaméter komponenseinek száma

<u>korrigált tér</u>:

mágneses tér

(*)

paramágneses fázis

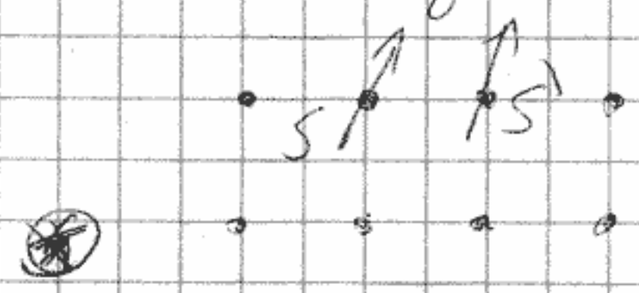
$\langle S_i \rangle = 0$

rendezett fázis

$\langle S_i \rangle \neq 0$

mágneses rendeződés

lokalizált mágneses momentumok ⟷ sormágnesség



$a \sim 2 \cdot 10^{-10}$ m

Milyen erős a dipól kch.? $\frac{\mu_0 \mu_B^2}{a^3} \sim 10^{-23}$ J $\sim$ 1K

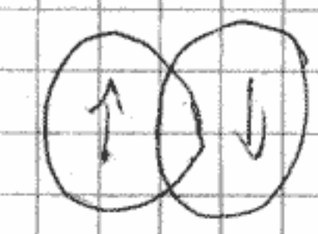
kicserélődési kölcsönhatás → atomi spinek nem szerepel 1 helyen. lenni

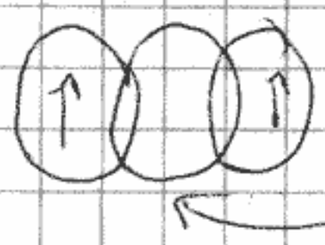
Effektív-spin modellek:

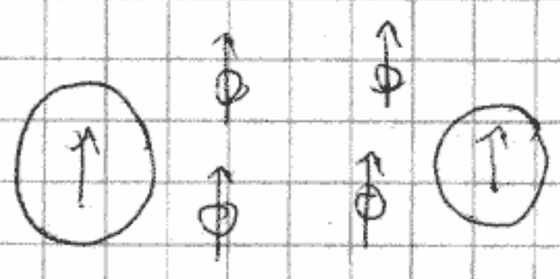
Heisenberg modell: $-J \cdot \underline{S} \cdot \underline{S}$

$J > 0$ ↑↑ ferromágneses

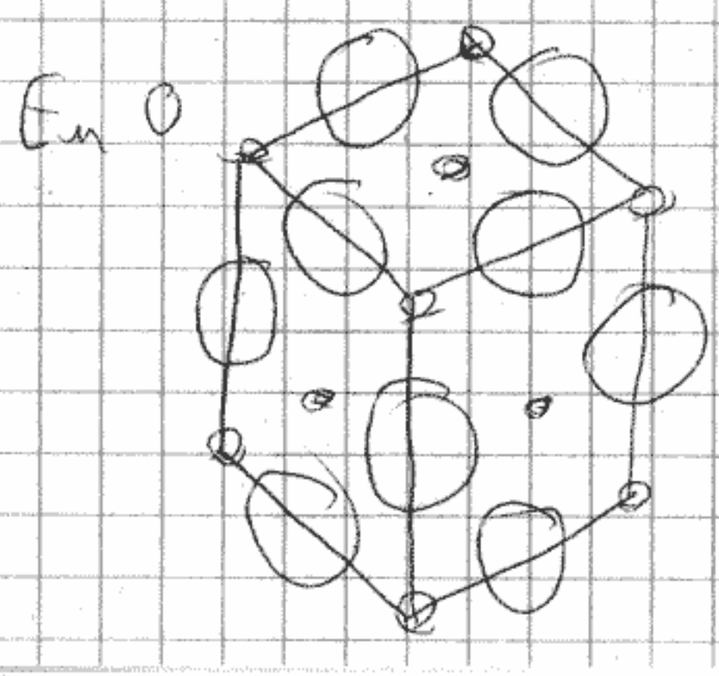
$J < 0$ ↑↓ antiferromágneses

- direkt kicserélődés:  közvetlen átlapolás

- super kicserélődés:  egy nem mágneses atom közvetít

- indirekt kicserélődés 

t mágneses ionok által polarizált e^--ok közvetítik



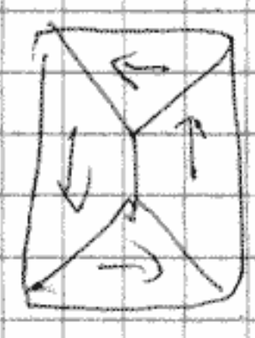
kisebb szerepet mágneses ion: Eu

Példa a superkicserélődésre

antiferromágnesek: van hosszú távú mágneses rend, de nincs eredő mágnesség

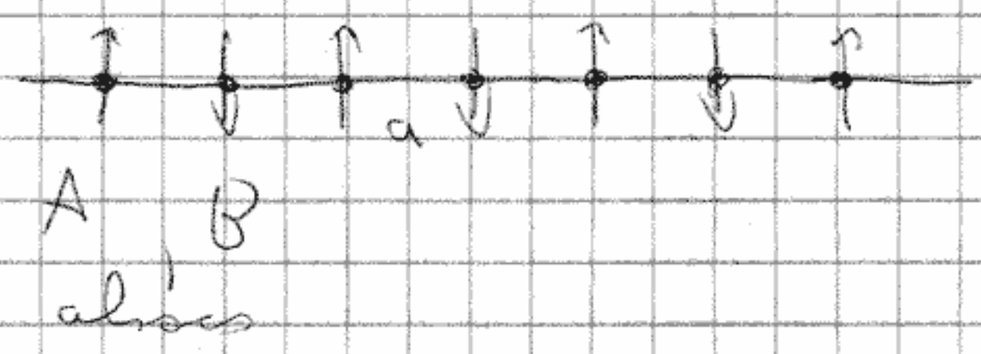
---

dimerszerkezet:



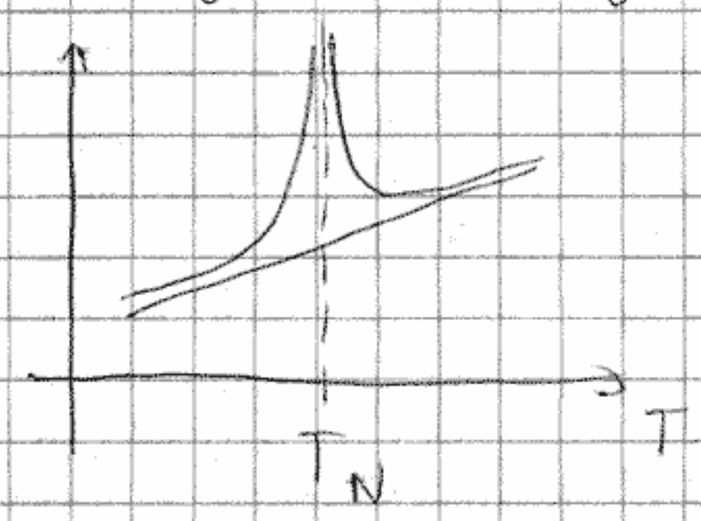
---

2 alács



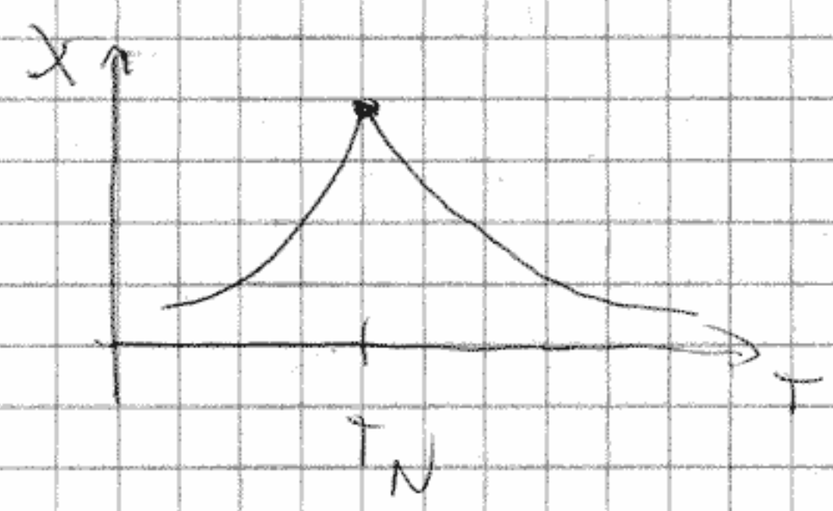
mikroszkópikus jelek az antiferromágnes-paramágnes átalakulásra:

→ fajhő anomália



Néel hőmérséklet

→ susceptibilitás



rendparaméter: alácsmágnesezettség: A alács mágnesezettség

M_A (és $M_B = -M_A$)

(staggered magnetization)

szerkezetvizsgálat: neutrondiffrakció

- hosszú szerkezet: reciprokban állandó: $\frac{2\pi}{a}$

- mágneses szerkezet $T < T_c$-re: $\frac{2\pi}{2a} = \frac{\pi}{a}$ superreflexiók

Néel

alrácsmágnesség mérése: NMR

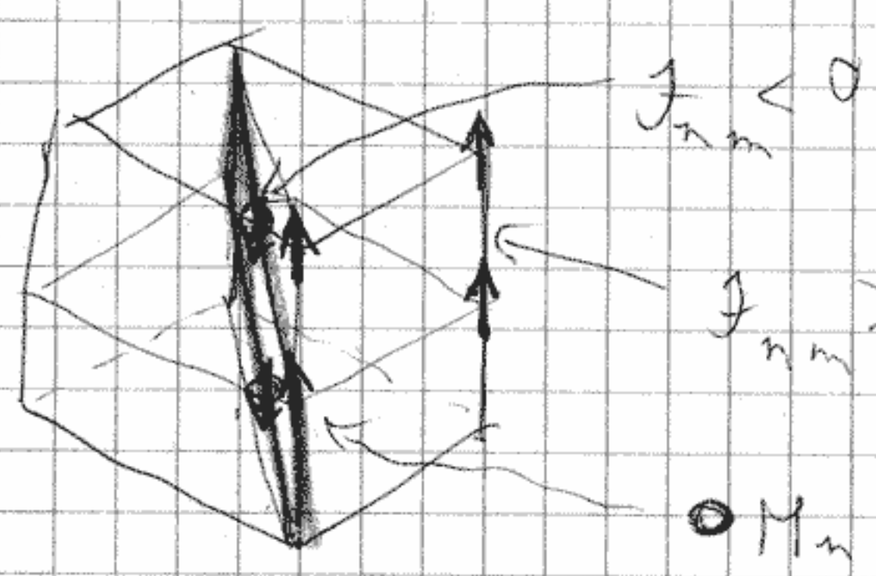
fölhasadásból lehet következtetni

konjugált tér: rácsállandóknak előjelet kellene váltani,

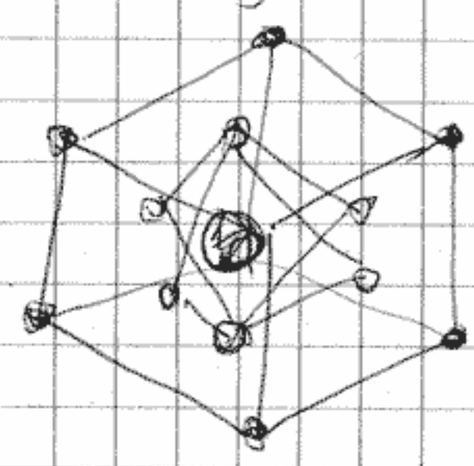
de ilyen csak ropton van

Példa

MnF_2 $T_c = 67\,K$



$RbMnF_3$

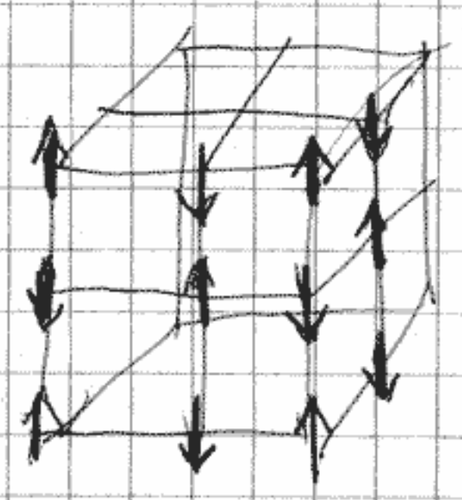


Mn^{2+}

F

Rb^+

Mn^{2+}



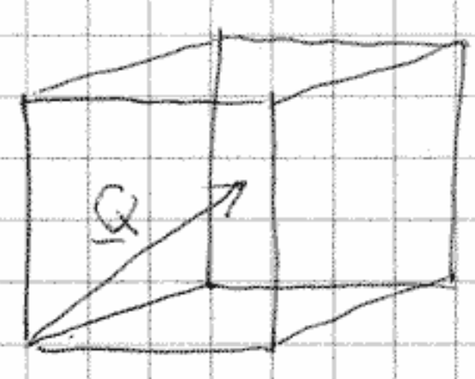
kétrácsú szerkezet:

$T < T_c$ lapcentrált

$\underline{R} = (n_1 a, n_2 a, n_3 a)$ $\qquad e^{i(n_1+n_2+n_3)\pi} = e^{i\underline{Q}\,\underline{R}}$

visszaadja a rácsgeometriát

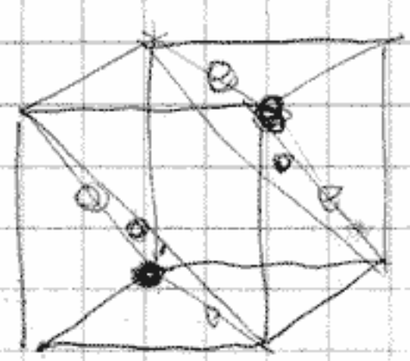
$$Q = \frac{\pi}{a}(1,1,1)$$



$RbMnF_3$ - izotróp mágnes $\qquad T_c = 83\,K$

$MnO \qquad T_c = 122\,K$

belső rács

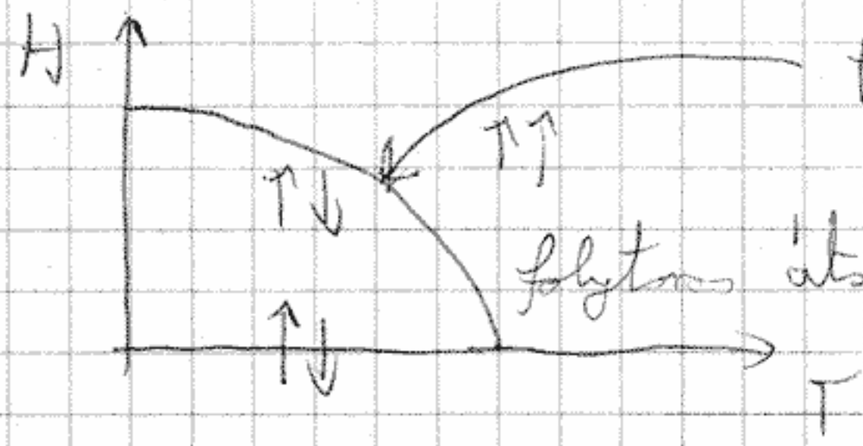


két párhuzamos sík

8 komponensű rendparaméter

$n = 8$

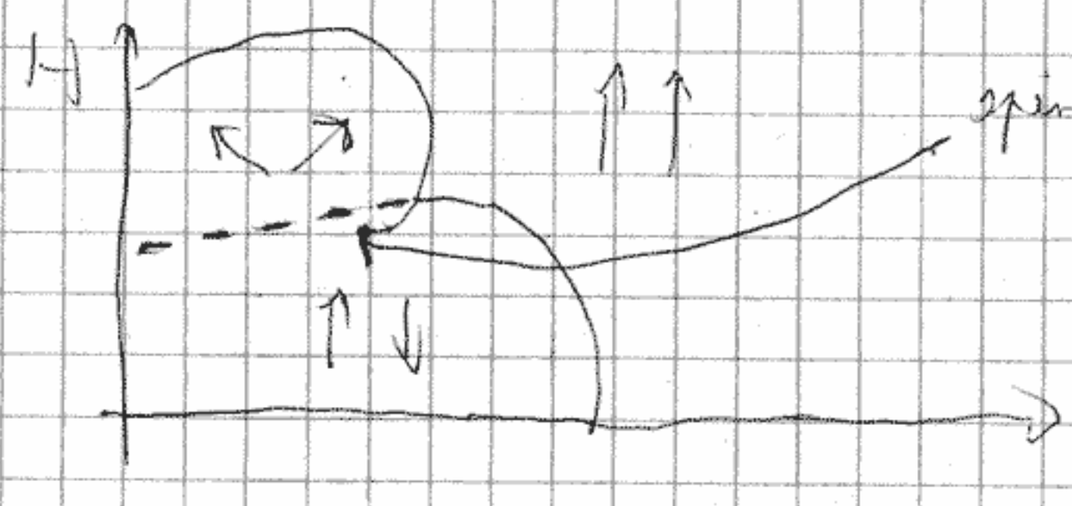
erősen anizotróp (egytengelyű)



tricritikus pont (folytonos és első rendű átalakulás elválasztása)

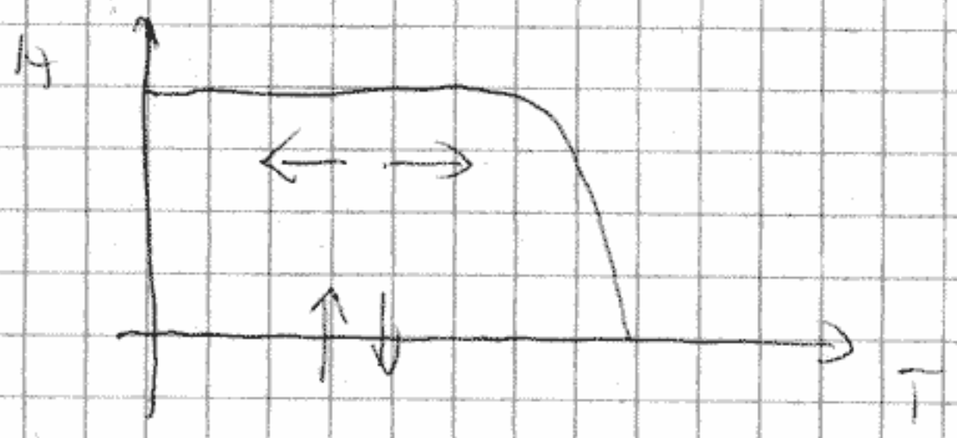
- kiserősödés
- Zeeman (külső tér)
- rács anizotropia

gyengén anizotróp



spinflop - átalakulás
(elsőrendű)

izotróp



pontcsoportok 32
(forgatás, tükrözés)

tércsoportok 230
(+ csúszások, csavartengely)

+ mágnesezettség tükrözése
pontcsoport 122
tércsoport 1651

nem periodikus: inkommenzurábilis szerkezetek

2 periodicitás: • λ_A: térbeli
• λ_B: mágneses
} periodikus

$$\frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \frac{m}{n} \quad \text{(racionális)} \qquad n\lambda_A = m\lambda_B$$

együtt periodikus szerkezet

$\frac{\lambda_A}{\lambda_B}$ = irracionális inkommenzurábilis

kísérletileg: • T-től függ $\frac{\lambda_A}{\lambda_B}$ inkommenzurábilis

• T-től független kommenzurábilis

inkommenzurábilis szerkezetek egyszerűen átrendeződhetnek

<u>Rejtett mágnesek</u>

(rendezetlen szerkezetek)

mágneses EuO (69 K)

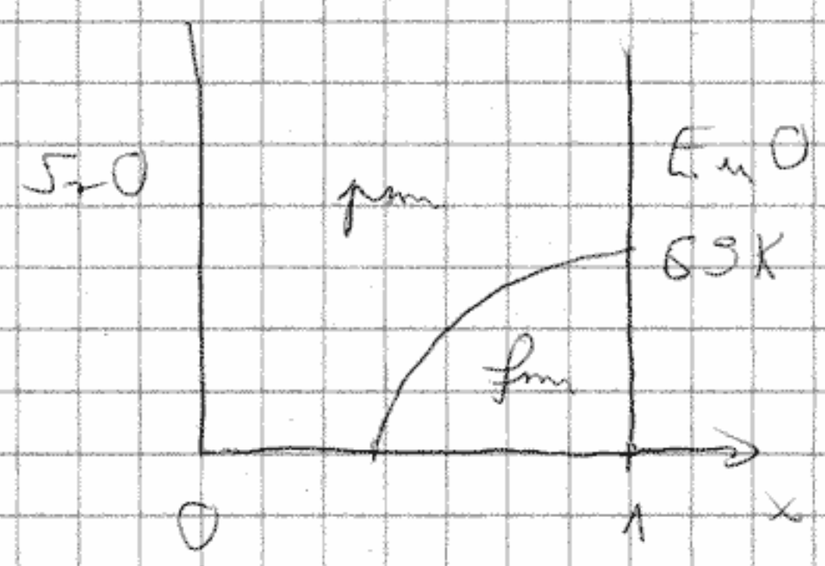
EuS (16,6 K)

vektor ferromágnesek

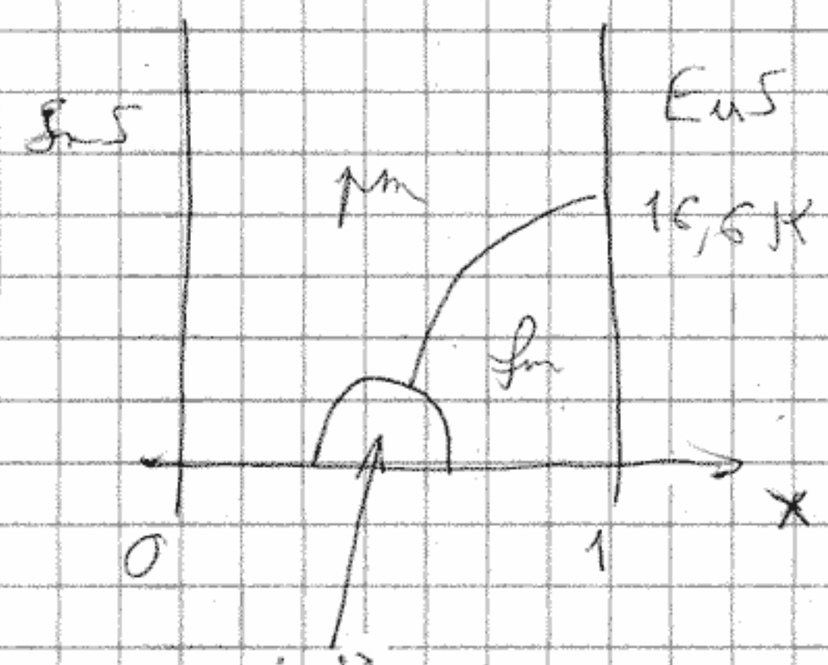
köbös szerkezetű

$Eu \leftrightarrow Sr$

$Eu_xSr_{1-x}O$



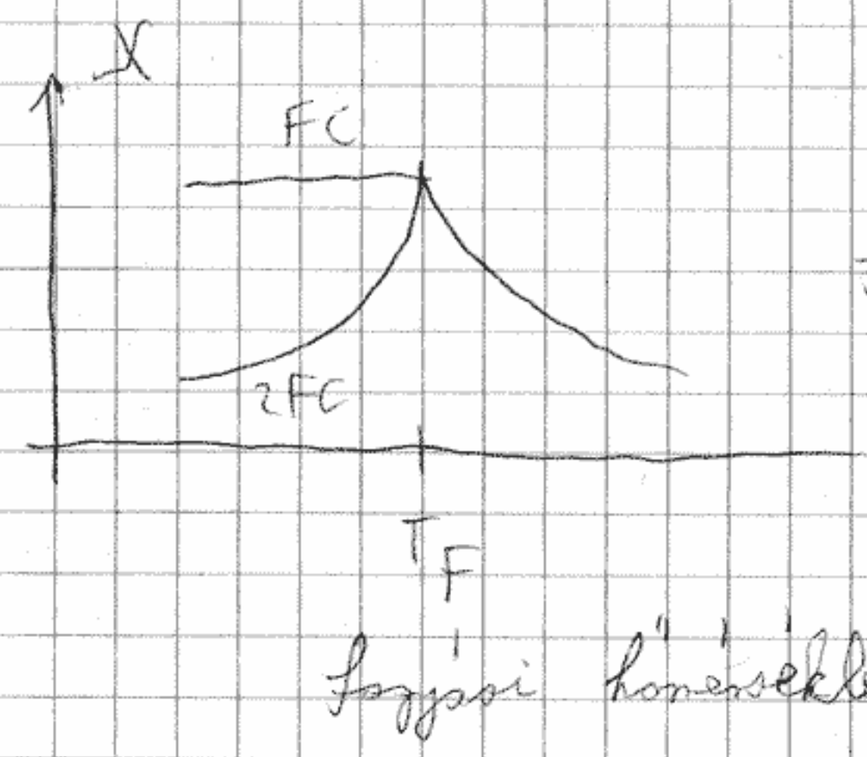
$Eu_xSr_{1-x}S$



spináüveg

rendezetlen befagyott mágnesezettség

$\chi = \frac{M}{H}$



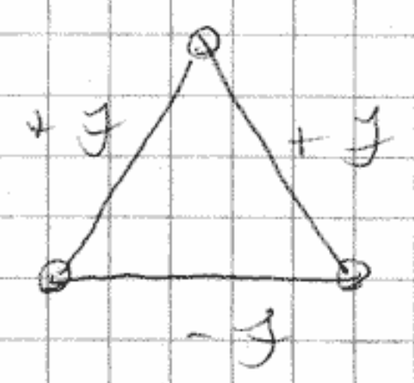
fagyási hőmérséklet

függ az előélettől

nem mágneses fémbe kis koncentrációba mágneses fém

AuFe (Fe koncentráció < 15 at %)

véletlenszerű csatolások, frusztráció

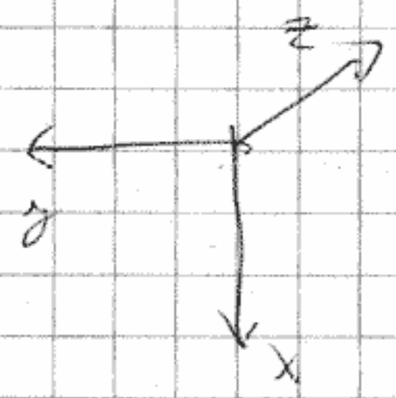


EuS-nál elsőszomszéd FM
másodszomszéd AFM

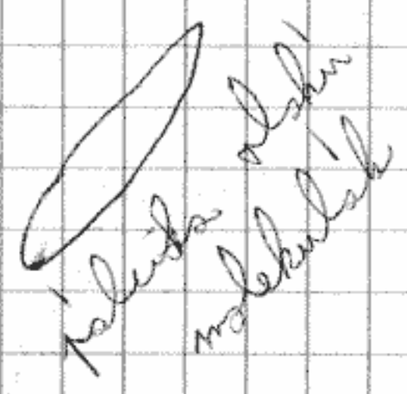
→ spinüveg fázis meg tud jelenni

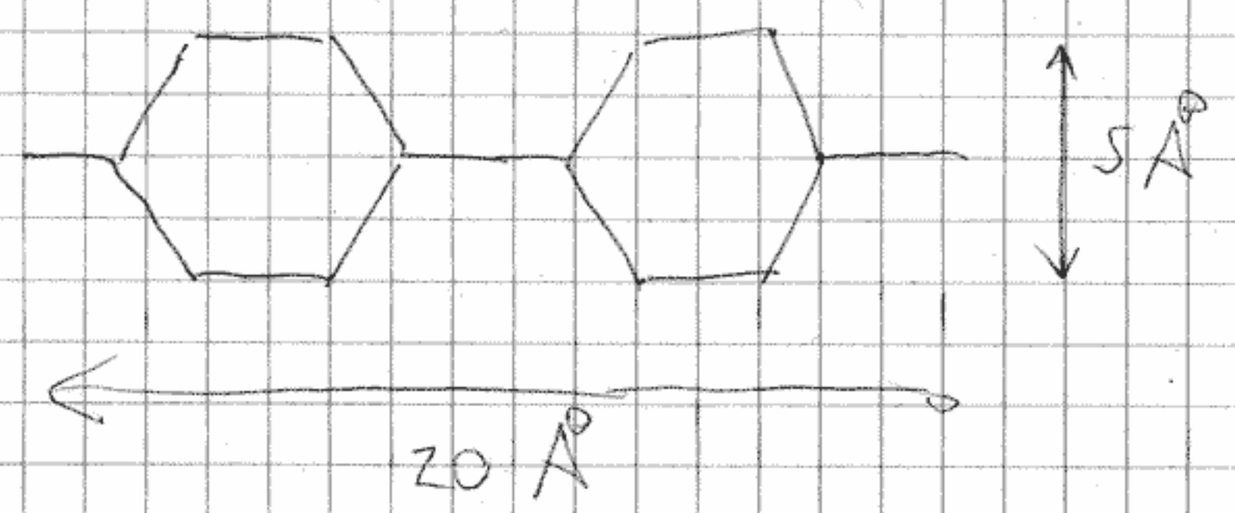
folyadék-kristály

(anizotróp folyadék)



$$\underline{\underline{\chi}} = \begin{pmatrix} \chi_\perp & & \\ & \chi_\perp & \\ & & \chi_\parallel \end{pmatrix}$$





clearing point

szilárd — nematikus — izotróp

116 °C — 135 °C

irányfüggő állapot, de helycsere véletlenszerű

molekulák helycsere és irány véletlenszerű

rendparaméter: $\underline{\nu}$ $(\underline{\nu}^2 = 1)$

$\underline{\nu}$ és $-\underline{\nu}$ irányok ekvivalensek $\langle \nu_\alpha \rangle = 0$

$\langle \nu_\alpha \nu_{\alpha'} \rangle$ izotróp fázisban: $\langle \nu_\alpha \nu_{\alpha'} \rangle = \frac{1}{3}\delta_{\alpha\alpha'}$

$$S_{\alpha\alpha'} = \langle \nu_\alpha \nu_{\alpha'} \rangle - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\alpha'}$$

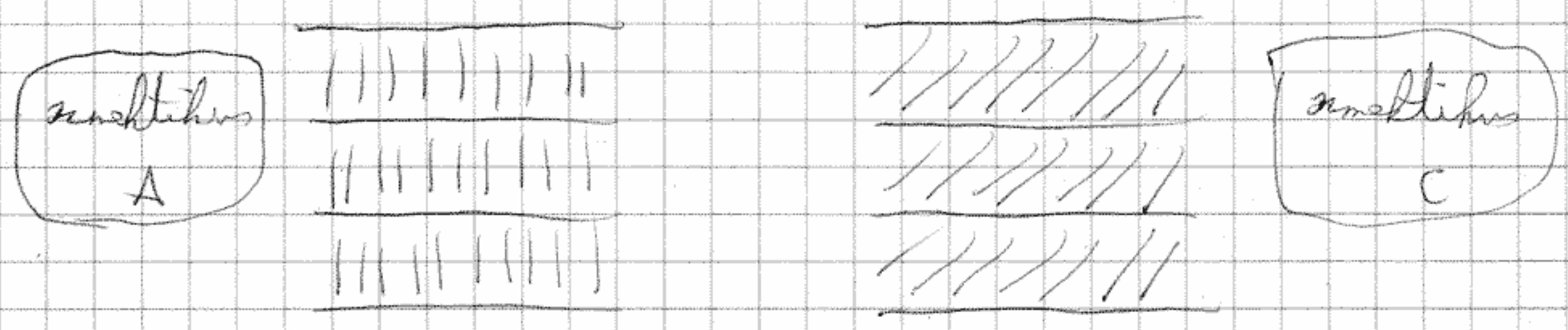
$$\sum_\alpha S_{\alpha\alpha} = 0$$

elforgatáson – fluktuáció – dielektromos tenzor is fluktuál

nem csak át

folytonos szimmetria sérült

nematikus fázisok

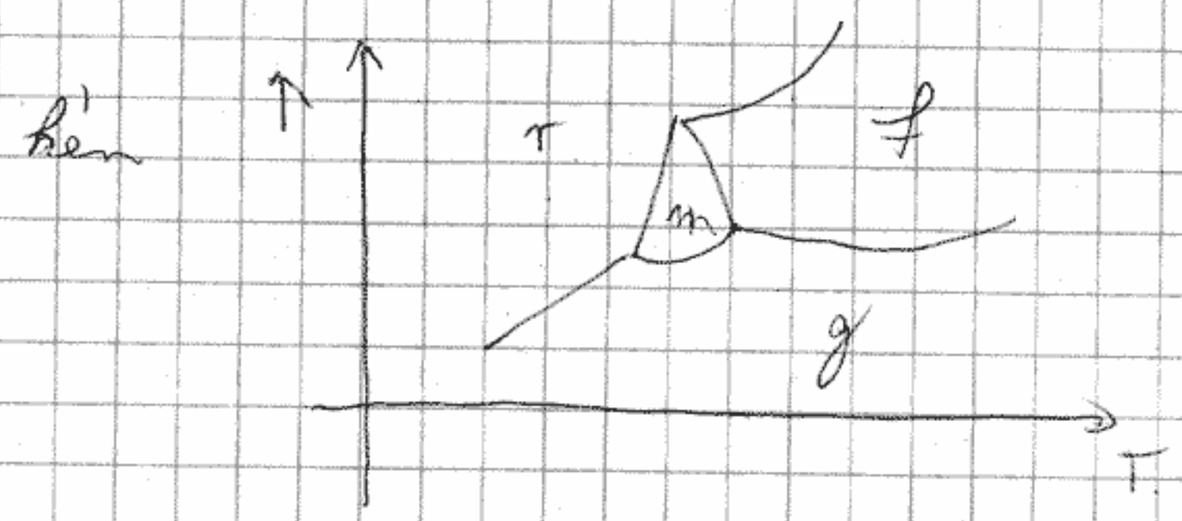


CH_4 CD_4

megoldódásukban
- először forgócsúszósak
- aztán az orientáció

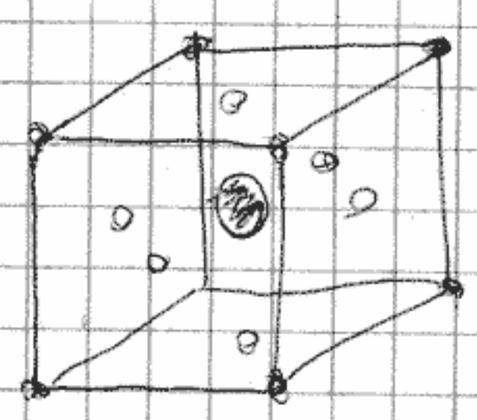
Szerkezeti fázisátalakulások

allotrópia (polimorfia)



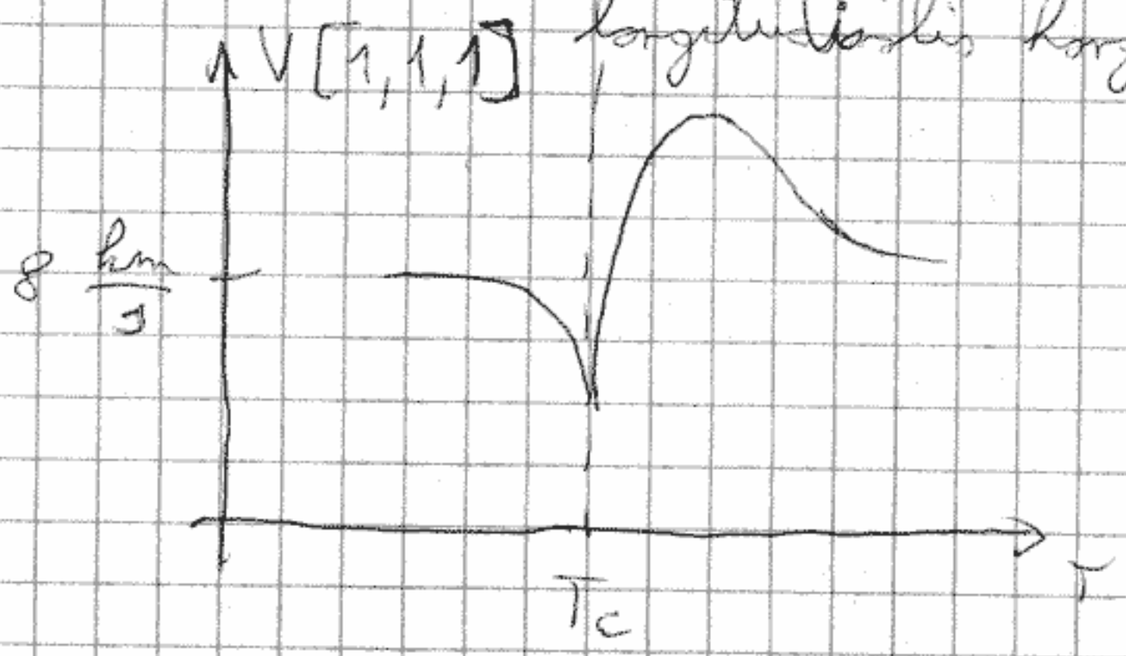
r - rombos
m - monoklin

$SrTiO_3$



Ti^{4+}
Sr^{2+}
O^{2-}

perovszkit: ABO_3



$T_c \sim 105\,K$

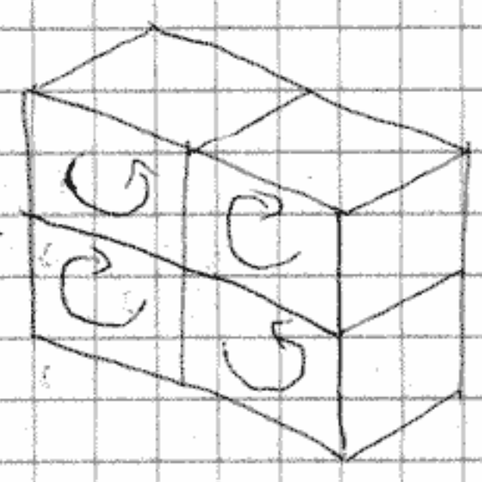
átalakulás

0 – oktaéder elfordul (valamelyik kétszeres tengely körül) az elemi cellához képest

rendparaméter: forgatási szöge

vektor rendparaméter $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$

szomszéd cellában ellentétesen forog



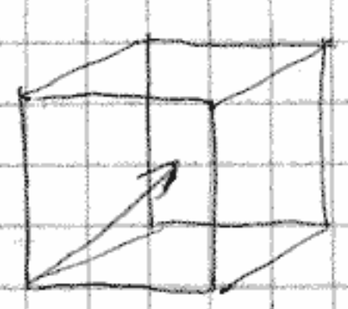
periodicitás:

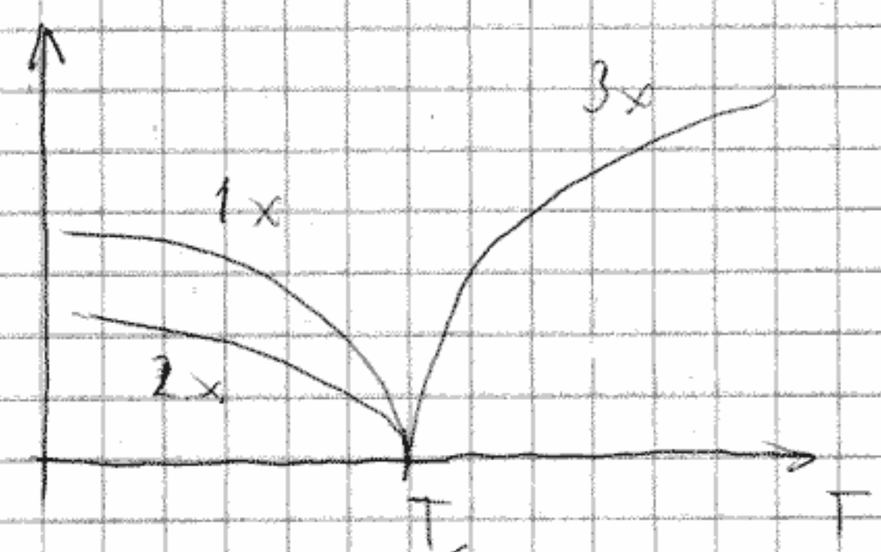
$\underline{R}_i$ cellában $\Phi_i = \Phi \cdot e^{i \underline{Q} \underline{R}_i}$

$\underline{Q} = \frac{\pi}{a}(1, 1, 1)$

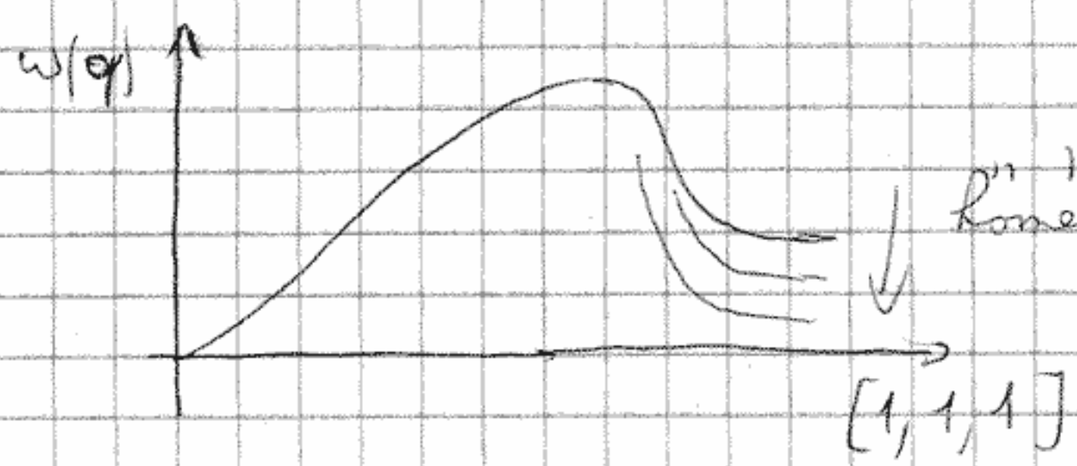
$\underline{R}_i = a(n_{ix}, n_{iy}, n_{iz})$

reciprokrács





fonon módusok

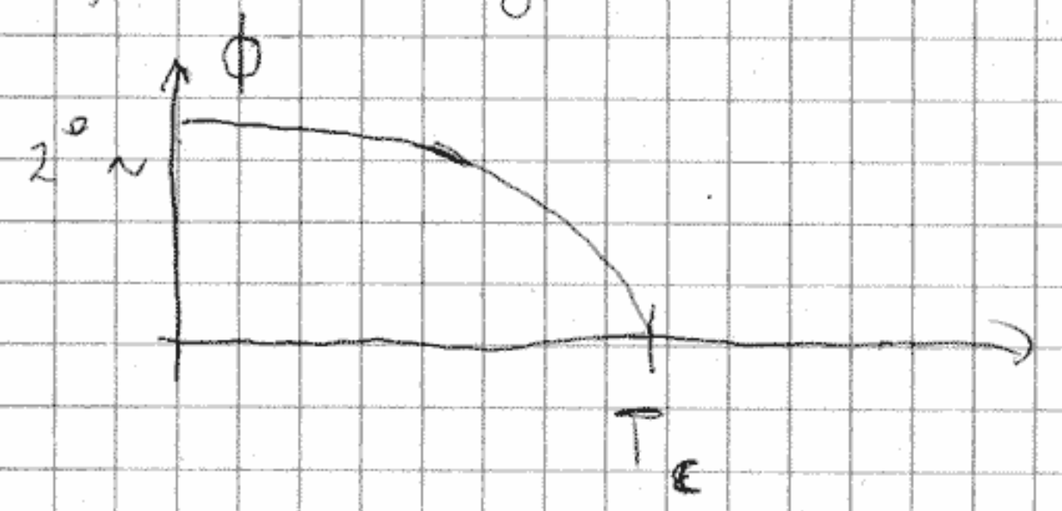


Kimerevedést okoz

lágy fonon

soft phonon

elfordulás szöge



$$\omega^2(Q) \sim T - T_c$$

$$\overline{\Phi^2} = \frac{kT}{m\omega^2} \sim \frac{1}{T - T_c}$$ fluktuáció

fehérvedetnek

hasonló: $LaAlO_3$

$$\Phi \parallel (1,1,1)$$

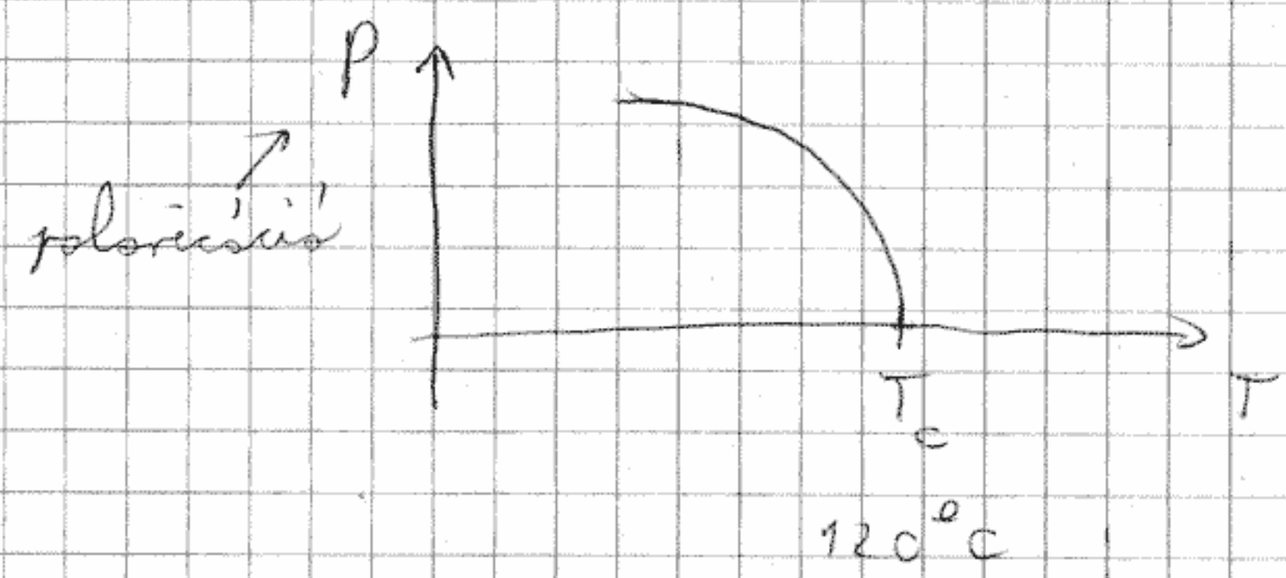
Ha az $SrTiO_3$ átlós irányba nyomást fejtek ki,

akkor itt is: $\Phi \parallel (1,1,1)$

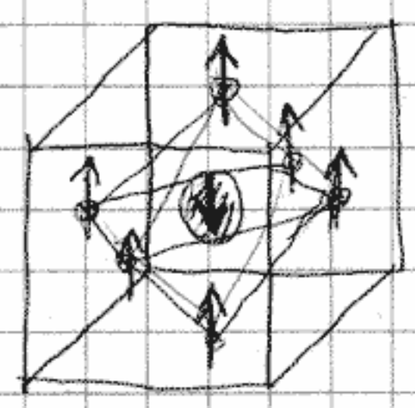
<u>Ferroelektromos átalakulás</u>

$BaTiO_3$ $T_c = 393\ K$

ferroelektromos

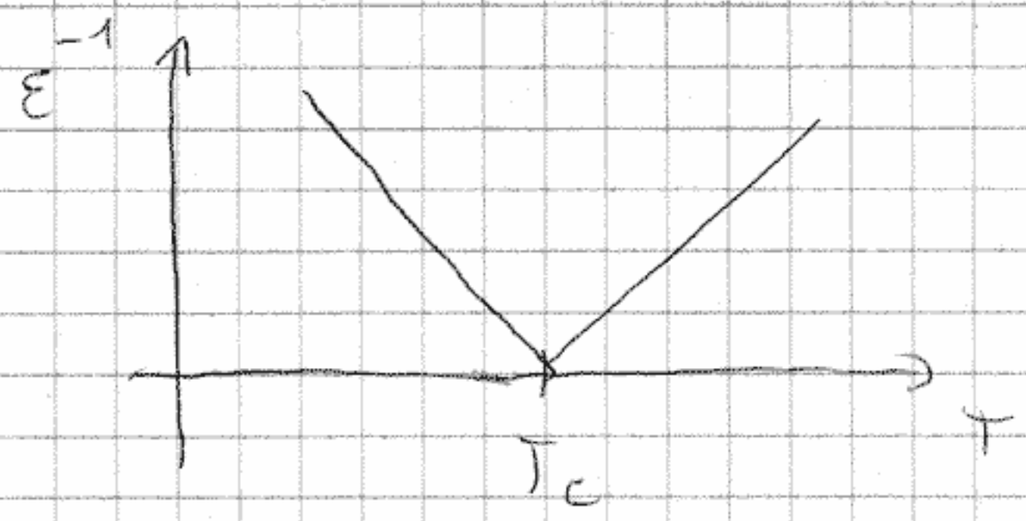


$P \parallel [1,0,0]$

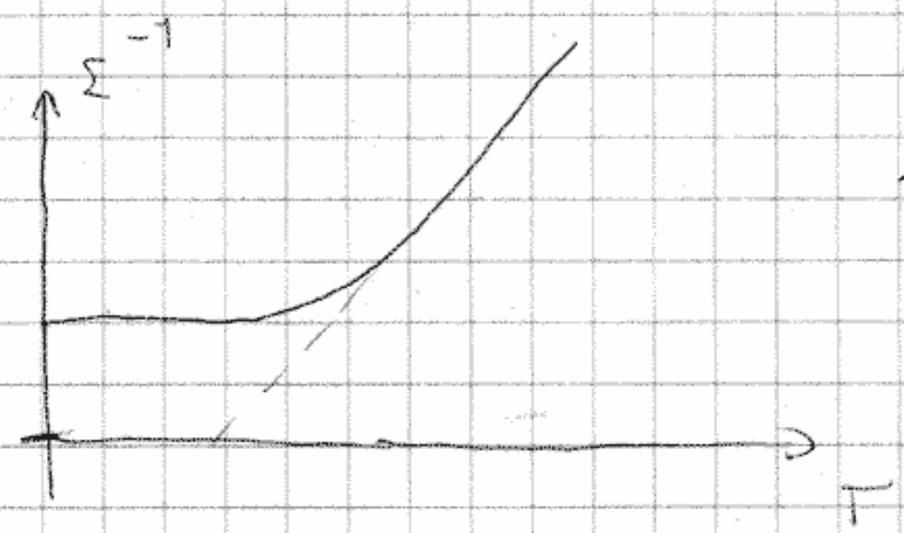


lágy fonon $q=0$

optikai módus



$SrTiO_3$

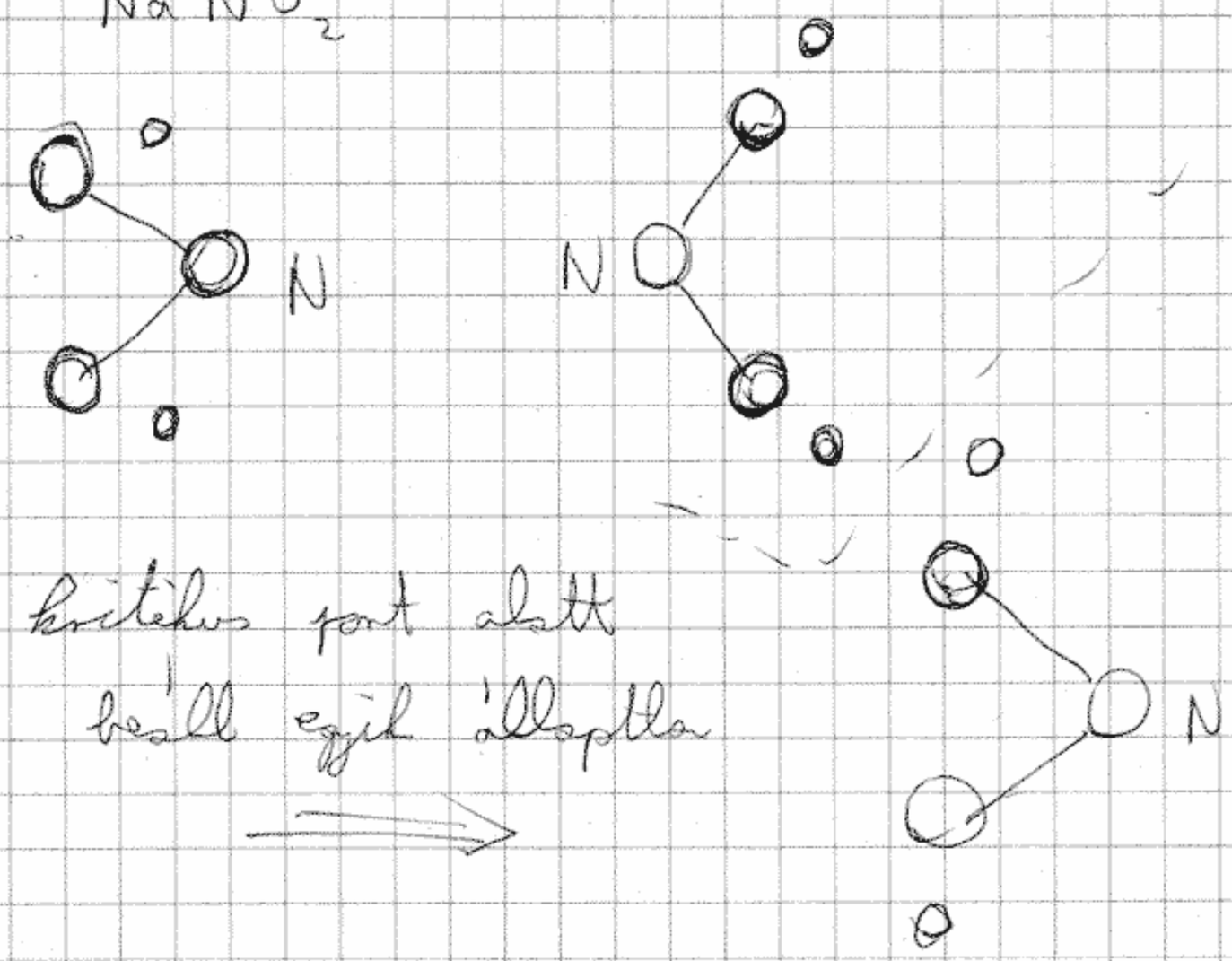


nagyon ferroelektromos

rend – rendezetlenségi ferroelektromos átalakulás

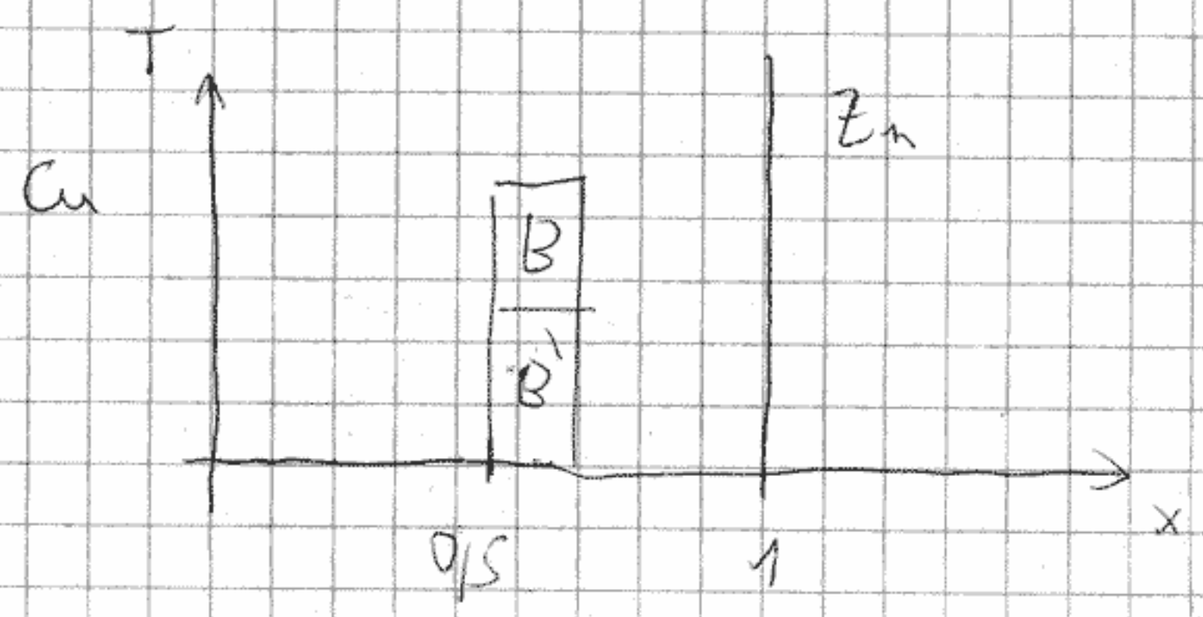
KH_2PO_4 (KDP)

$NaNO_2$

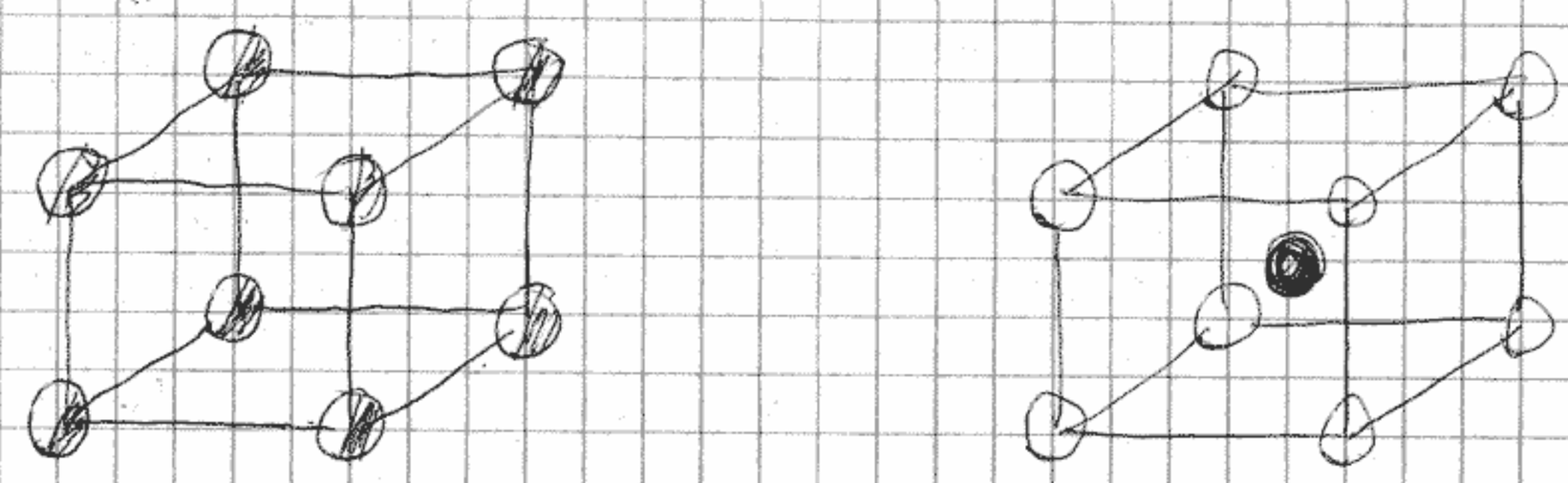


kritikus pont alatt
belső egyik állapotba

rend- rendezetlenség: Cu Zn
(sárgaréz)



(45,8 – 48,9 at % Zn)



B $T > T_c$ véletlenszerű Cu és Zn

B' $T < T_c$ tércentrált

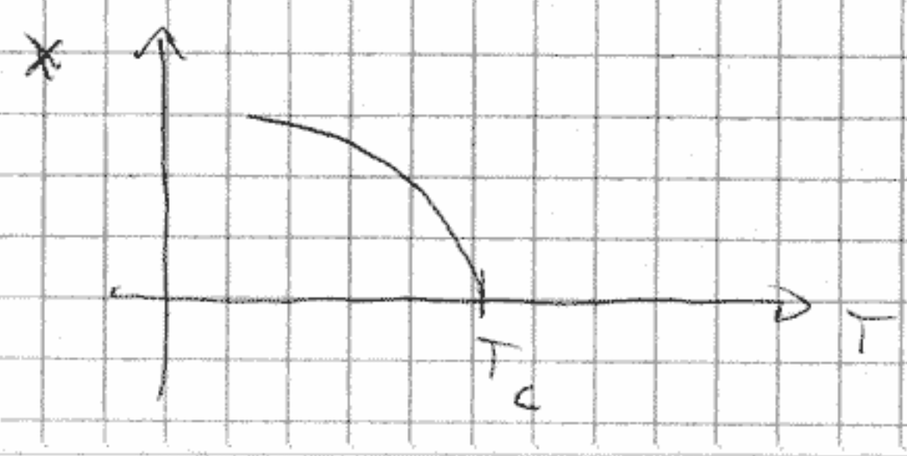
Zn aránya p (azaz N csomóponthoz $p \cdot N$-ben Zn)

Zn atomon

$T < T_c$ $p(1+x)$ valószínűséggel Zn

$T > T_c$ p valószínűséggel Zn

rendparaméter x



rugalmas fázisátalakulás

pl. Nb_3Sn

makroszkópikus deformáció jelenik meg

rendparaméter nyírás (rugalmas deformáció)

inkommenzurábilis szerkezetek

(mágnes, szerkezeti átalakulások, CDW, SDW,
felületi adszorbció)

töltés sűrűség hullámok
spin s. h.

↓

nyomás hatása gőz vagy folyadék

- kis nyomás → a Landau rés szerkezetébe ül bele
- nagy nyomás → saját rácszerkezetét veszi fel
  vagy nem inkommenzurábilis
  a Landau rácsállandójával

Szuperfolyékonyság

↙ ↘

He^4 bozon — He^3 szupravezetők fermionok

rendparaméter

$$\langle \Psi(x) \rangle \neq 0$$

$$\langle \Psi(x) \rangle = \sqrt{n} \cdot e^{i\phi}$$

Landau-elmélet

(fenomenologikus)

rendparaméter milyen szimmetriájú

univerzalitás igénye

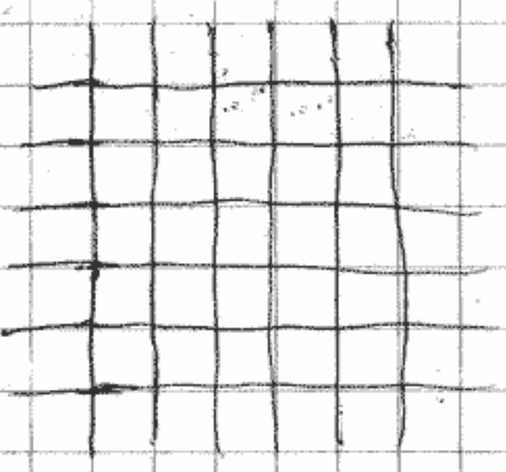
Átlagtér-elmélet

ekvivalens a kritikus pont környékén

Modellek

Ising-modell

(Lenz, Ising)



$S_i = \pm 1$

$$E = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - H \sum_i S_i$$

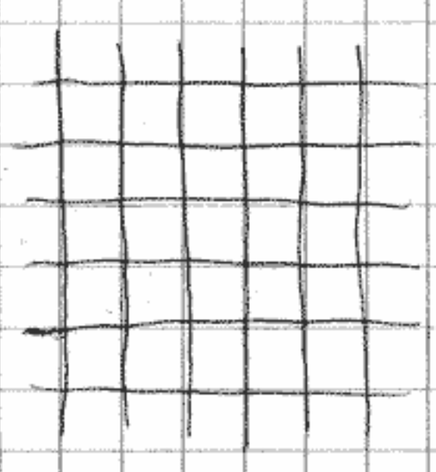
$$-J S_1 S_2 = \begin{cases} -J & \uparrow\uparrow \text{ vagy } \downarrow\downarrow \\ J & \uparrow\downarrow \text{ vagy } \downarrow\uparrow \end{cases}$$

$J > 0$ ferromágneses

$J < 0$ antiferromágneses

Heisenberg-modell

kvantummechanikai spin



$\hat{\underline{S}}_i$ operátor

$$[\hat{S}_{jx}, \hat{S}_{jy}] = i \hat{S}_{jz}$$

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} (\hat{\underline{S}}_i \cdot \hat{\underline{S}}_j)$$

klasszikus változó

$\underline{S}_i^2 = 1$

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \underline{S}_i \cdot \underline{S}_j$$

Heisenberg - modellben

$$(\underline{S}_1 + \underline{S}_2)^2 = \underline{S}_1^2 + \underline{S}_2^2 + 2\,\underline{S}_1 \cdot \underline{S}_2$$

$$\underline{S}_1 \cdot \underline{S}_2 = \frac{1}{2}\left[(\underline{S}_1 + \underline{S}_2)^2 - \underline{S}_1^2 - \underline{S}_2^2\right]$$

$$j(j+1) - s(s+1) - s(s+1)$$

$$j = 2s, \dots, 0$$

maximális érték

$$\frac{1}{2}\left[2s(2s+1) - 2s(s+1)\right] = s^2$$

minimális érték

$$-s(s+1)$$

rövid hatótávolságú kölcsh → 10-ben nincs frissítésük,

Ising-spinek átfordíthatók (diszkrét szimmetria)

Heisenberg-spinek elfordíthatók (folytonos szimmetria)

↳ emiatt 1 és 20-ban nincs frissítésük

<u>szférikus modell</u>

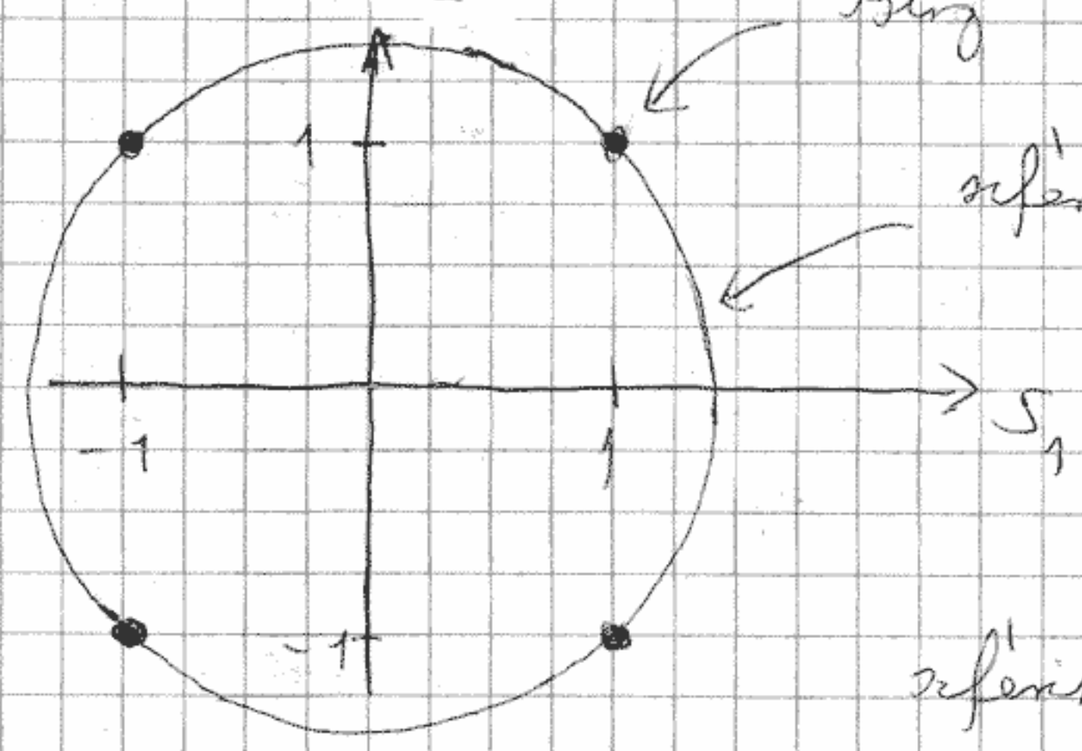
S_i valós változó

$$\sum_{i=1}^{N} S_i^2 = N$$

[Ising-modell $S_i^2 = 1$]

$$-\sqrt{N} < S_i < \sqrt{N}$$

2 spin



szférikus modell megoldható
1, 2, 3 dimenzióban

<u>n vektor modell</u>

$$\underline{S} = (S_1, \dots, S_n) \qquad \underline{S}^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} S_\alpha^2 = 1$$

$$E = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \underline{S}_i \cdot \underline{S}_j$$

$n \to \infty$ megkapjuk a szférikus modellt
egy szabadsági fokra jutó szabadenergia
megegyezik

$$-J_{\alpha\beta} \cdot S_{1\alpha} \cdot S_{2\beta}$$

$$\uparrow$$

$$J^{(s)}_{\alpha\beta} + J^{(as)}_{\alpha\beta}$$

szimmetrikus és antiszimmetrikus rész

$\mathcal{J}^{(S)}_{\alpha\beta}$ ortogonális transzformáció diagonalizálhatók

$$-\mathcal{J}_x S_{1x} S_{2x} - \mathcal{J}_y S_{1y} S_{2y} - \mathcal{J}_z S_{1z} S_{2z}$$

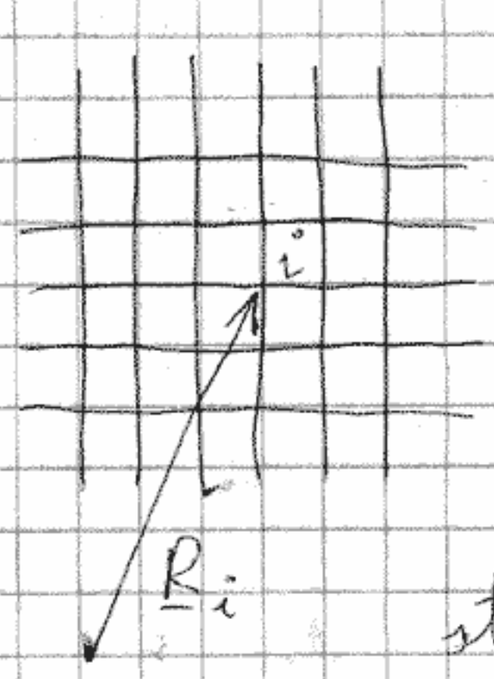
x - y - z modell

$$\mathcal{J}^{(AS)}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} A_\gamma \qquad \begin{pmatrix} 0 & A_3 & -A_2 \\ -A_3 & 0 & A_1 \\ A_2 & -A_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{J}^{(AS)}_{\alpha\beta} S_{1\alpha} S_{2\beta} = \varepsilon_{\gamma\alpha\beta} S_{1\alpha} S_{2\beta} A_\gamma = \underline{A}(\underline{S}_1 \times \underline{S}_2)$$

Dzsaloszinszkij - Moriya - kölcsönhatás

<u>Ising - modell</u>



$S_i = \pm 1$

fázistér: $\tilde{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_N\}$

statisztikus állapot

$$P[\tilde{S}] = \frac{1}{Z} e^{-\beta E[\tilde{S}]}$$

nn (nearest neighbour)

$$E[\tilde{S}] = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - H \sum_i S_i$$

$\underline{H=0}$: $J>0$ ferromagnes csatolás

alapállapot $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$ vagy $\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow$

szimmetria $S_i \to -S_i$ $(\forall i)$ energia változatlan

$\tilde{S}$ szimmetrizáló

statisztikus állapot

$$\sum_i \langle S_i \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\tilde{S}} e^{-\beta E[\tilde{S}]} \sum_i S_i = 0$$

szimmetrizálás jelenése

↳ kvázistatikus módszere $H \neq 0$

$$\sum_i S_i = N \cdot m(H)$$

szimmetrikus

$$\lim_{H \to 0} m(H) = \begin{cases} 0 & \text{paramágnes} \\ \neq 0 & \text{ferromágnes} \end{cases}$$

szimmetriasérült

↳ $\langle S_i S_j \rangle \neq 0$

$|R_i - R_j| \to \infty$

korrelációs rendezettség: $\langle S_i S_j \rangle \to m^2$

$$E[\tilde{S}] = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} J_{ij} \cdot S_i \cdot S_j - \sum_i h_i \cdot S_i$$

$$J_{ii} = \emptyset$$

$$Z = e^{-\beta F} = \sum_{\tilde{S}} e^{-\beta E[\tilde{S}]}$$

$$m_i = \langle S_i \rangle = \frac{1}{Z}\sum_{\tilde{S}} e^{-\beta E[\tilde{S}]} \cdot S_i = \frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial(\beta h_i)} =$$

$$= \frac{1}{\beta}\frac{\partial(\ln Z)}{\partial h_i} = -\frac{\partial F}{\partial h_i}$$

susceptibilitás

$$\chi_{ij} = \frac{\partial m_i}{\partial h_j} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial h_j}\left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial h_i}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial h_i \partial h_j}}_{\beta\langle S_i S_j\rangle} - \underbrace{\frac{1}{\beta Z^2}\frac{\partial Z}{\partial h_i}\frac{\partial Z}{\partial h_j}}_{\beta m_i m_j}$$

$$\delta m_i = \sum_j \chi_{ij}\, \delta h_j$$

korrelációs fv.

$$\chi_{ij} = \beta\left[\langle S_i S_j\rangle - \langle S_i\rangle\langle S_j\rangle\right] = \beta C_{ij}$$

fluktuáció - válasz tétel

$$C_{ij} = \langle (S_i - \langle S_i \rangle)(S_j - \langle S_j \rangle) \rangle$$

mennyire korrelált az átlagtól való eltérés

fluktuáció - válasz tétel

$d=1$ (lánc) nincs kvantumos rendeződés

$T \neq 0$ (az kölcsönhatás)

nincs fázisátalakulás

$d=2$ van kvantumos rendeződés $T < T_c$

(Peierls, Onsager)

$d=3$ egzisztencia, közelítések

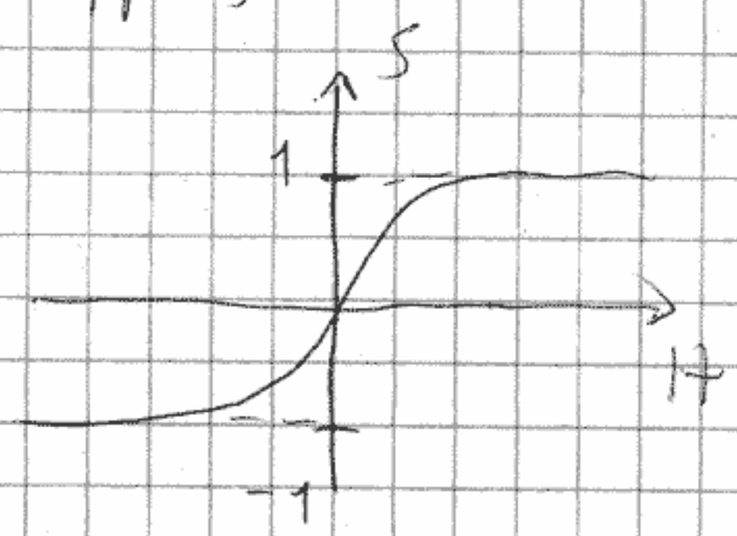
Átlagtérközelítés

(A) P. Weiss

$S = \pm 1$

1 spin mágneses térben (H) $E = -HS$

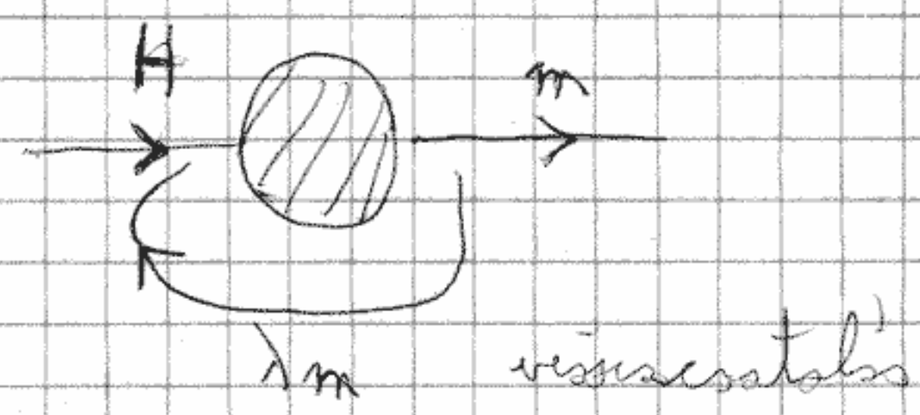
$$\langle S \rangle = \frac{e^{\beta H} - e^{-\beta H}}{e^{\beta H} + e^{-\beta H}} = \mathrm{th}(\beta H)$$



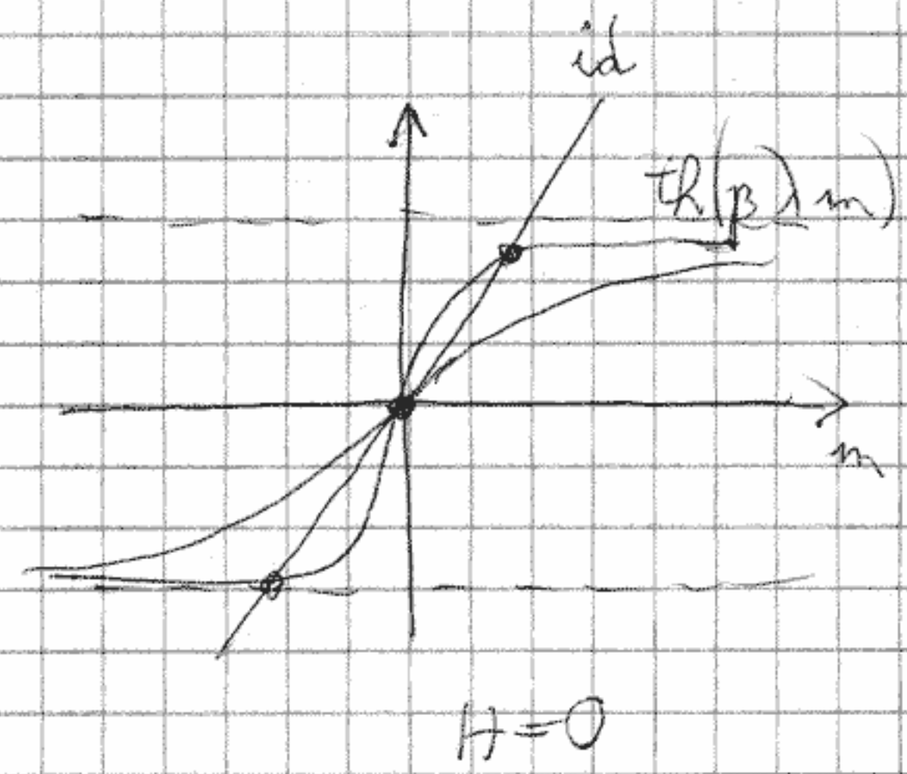
Weiss $H \to H + \lambda m$

belső tér, amit a többi spin az egy kiszemelt hatása

$$m = th\left[\beta(H + \lambda m)\right]$$



visszacsatolás



$\beta\lambda = 1$ határ

$$\lambda = k_B T_c$$

környezet tere visszahat a kiválasztott spinre

(B) 1 spin probléma

S_i egyszt kezelése

többi: átlagértéken befagyasztjuk

i-ik spin energiája: $E = -\sum_j J_{ij} S_i m_j - h_i S_i$

$$= -\left(h_i - \sum_j J_{ij} m_j\right) S_i$$

$$m_i = \langle S_i \rangle = th\left[\beta\left(h_i + \sum_j J_{ij} m_j\right)\right]$$

(C) variáció elv

$G[\tilde{S}]$ tetszőleges eloszlás

$$E_Q = \sum_{\tilde{S}} Q[\tilde{S}] \cdot E[\tilde{S}]$$

$$S_Q = -k_B \sum_{\tilde{S}} Q[\tilde{S}] \ln Q[\tilde{S}]$$

$$E_Q - T \cdot S_Q \geq -k_B T \ln Z = F$$

„=" $\rightarrow$ $Q[\tilde{S}]$ a kanonikus eloszlás

Legjobb független spin-eloszlás

$$Q[\tilde{S}] = \prod_i f_i(S_i)$$

$$\left.\begin{matrix} f_i(+1) \\ f_i(-1) \end{matrix}\right\} \qquad \begin{matrix} f_i(+1) + f_i(-1) = 1 \\ f_i(+1) - f_i(-1) = \langle S_i \rangle = m_i \end{matrix}$$

$$f_i(\pm 1) = \frac{1 \pm m_i}{2} \longrightarrow f_i(S_i) = \frac{1 + m_i S_i}{2}$$

$$Q[\tilde{S}] = \prod_i \frac{1 + m_i S_i}{2}$$

$$E_Q = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} m_i m_j - \sum_i h_i m_i$$

$$S_Q = -k_B \sum_i \left(\frac{1+m_i}{2} \ln \frac{1+m_i}{2} + \frac{1-m_i}{2} \ln \frac{1-m_i}{2} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial m_i}\left(E_Q - T\cdot S_Q\right) = -\sum_j J_{ij} m_j - h_i +$$

$$+ k_B T \underbrace{\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+m_i}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1-m_i}{2}\right)}_{\frac{1}{2}\ln\frac{1+m_i}{1-m_i} = \operatorname{arth}(m_i)} = 0$$

$$h_i + \sum_j J_{ij} m_j = k_B T \operatorname{arth} m_i$$

$$\frac{\partial^2\left(E_Q - T\cdot S_Q\right)}{\partial m_i \partial m_j} = -J_{ij} + \delta_{ij}\frac{k_B T}{2}\left(\frac{1}{1+m_i} + \frac{1}{1-m_i}\right) =$$

$$= -J_{ij} + \frac{k_B T}{1-m_i^2}\delta_{ij}$$

positiv definitnost kell legyen

$$\chi^{-1}_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial m_j} = k_B T \frac{\delta_{ij}}{1-m_i^2} - J_{ij}$$

χ^{-1}_{ij} pozitív definit

<u>Paramagneses megoldás</u>

$h_i = 0 \quad m_i = 0$ mindig megoldás

stabilitás χ^{-1}_{ij} pozitív definit

$$\chi^{-1}_{ij} = k_B T \cdot \delta_{ij} - J_{ij}$$

$\uparrow$

translációs szimmetria

$$J_{ij} = J(\underline{R}_i - \underline{R}_j)$$

Fourier-transzformáció:

$$J(q) = \sum_i e^{-iq(\underline{R}_i - \underline{R}_j)} \cdot J_{ij}$$

$$\chi^{-1}(q) = k_B T - J(q) > 0 \qquad \forall q\text{-ra}$$

q Brillouin-zónában

elegendően nagy hőmérsékleten pozitív szigorú stabil

stabilitás határa $J(q_c) = \max_q J(q)$

$$\boxed{k_B T_c = J(q_c)}$$

$$\chi^{-1}(q) = k_B T - J(q_c) \underbrace{- J(q) + J(q_c)}_{\geq 0}$$

$$\chi^{-1}(q_c) = k_B T - J(q_c) = k_B (T - T_c)$$

$$\boxed{\chi(q_c) = \frac{1}{k_B (T - T_c)}}$$

$T < T_c$ vizsgáljuk

$$m_i \sim e^{i q_c R_i}$$

q_c hullámszámú moduláció szintünk

(A) ferromágneses megoldás

$$h_i = 0 \quad , \quad m_i = m$$

$$q_c = 0 \qquad \max J(q) = J(q=0)$$

$$m = th\left(\beta \sum_j J_{ij} \cdot m\right) = th\left(\beta J(0)\, m\right)$$

$$\frac{J(0)}{k_B T_c} = 1$$

$$\chi^{-1}_{ij} = \delta_{ij} \cdot \frac{k_B T}{1-m^2} - J_{ij}$$

$$\chi^{-1}(q) = \frac{k_B T}{(1-m^2)} - J(q) \geq \frac{k_B T}{1-m^2} - J(0) =$$

$$= \frac{k_B T}{1-m^2} - k_B T_c > 0$$

ekkor stabil

$m > 0$ megoldás

$$\frac{m}{1-m^2} > \frac{T_c}{T} m \qquad m = th\left(\frac{T_c}{T} m\right)$$

$$\frac{th\left(\frac{T_c}{T} m\right)}{1 - th^2\left(\frac{T_c}{T} m\right)} \geq \frac{T_c}{T} m$$

$$\mathrm{ch}\left(\frac{T_c}{T} m\right) \mathrm{sh}\left(\frac{T_c}{T} m\right) \geq \frac{T_c}{T} m$$

$$\mathrm{sh}\, x \geq x$$

$$\frac{1}{2} \mathrm{sh}\left(\frac{2 T_c}{T} m\right) \geq \frac{T_c}{T} m \quad \checkmark$$

$q_c = 0$ rendezés ferromágneses és ez stabil

$$J_{ij} = \begin{cases} J & n\,n \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

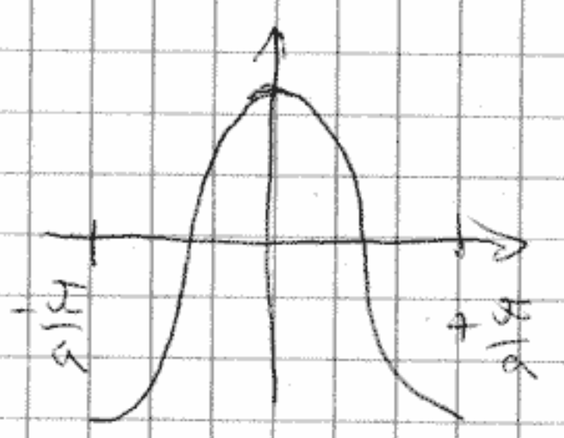
kocsánics

$$J(q) = e^{-iq_x a} + e^{+iq_x a} + \dots =$$

$$= 2J\left[\cos(q_x a) + \cos(q_y a) + \cos(q_z a)\right]$$

$J > 0$ $\qquad -\frac{\pi}{a} < q_x < \frac{\pi}{a}$

maximum $q = 0$



$$m = \mathrm{th}\left(\frac{T_c}{T} m\right) \qquad T_c = J(0) \cdot \frac{1}{k_B}$$

$T \to 0$ $\qquad \mathrm{th}(x) \simeq 1 - 2e^{-2x}$

$m > 0$ $\qquad x \gg 1$

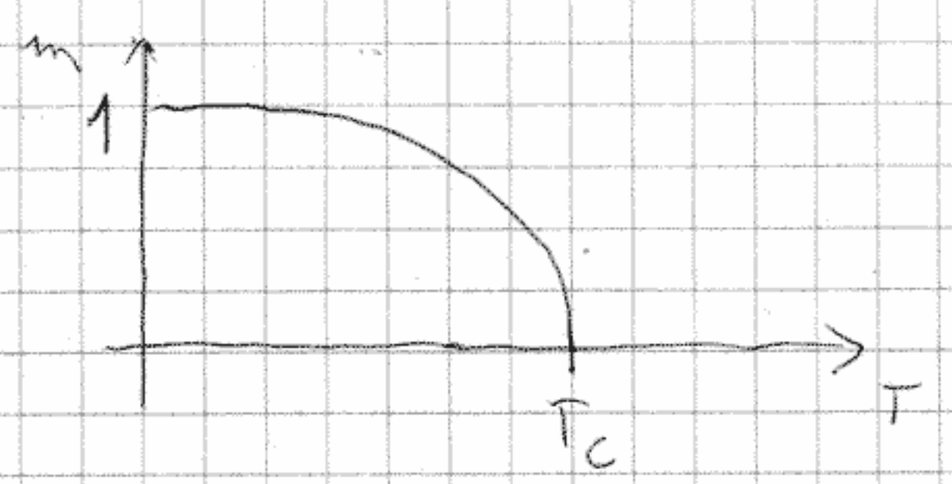
$$m \approx 1 - 2\underbrace{e^{-2\frac{T_c}{T} m}}_{\text{kicsi}} \approx 1 - 2e^{-2\frac{T_c}{T}}$$

kicsi $\Rightarrow m \approx 1$ visszajut a kitevőbe

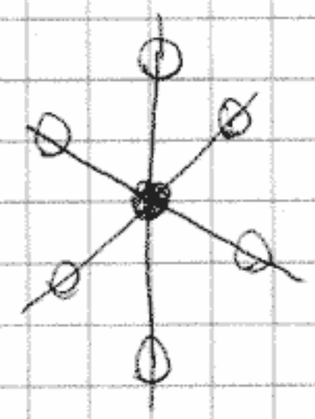
$T \to T_c \qquad th(x) \cong x - \frac{x^3}{3}$

$$m = \frac{T_c}{T} m - \frac{1}{3}\left(\frac{T_c}{T} m\right)^3$$

$$\frac{T_c}{T} - 1 = \frac{1}{3}\left(\frac{T_c}{T}\right)^3 \cdot m^2 \qquad m \cong \frac{T}{T_c}\sqrt{3\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)}$$



S.C. rácson



$$f(q) = 2J\left[\cos(q_x a) + \cos(q_y a) + \cos(q_z a)\right]$$

$f(q=0) = 6 \cdot J = z \cdot J \qquad z$: koordináció szám

$q \cdot a \ll 1$

$$f(q) = 6J - 2J\left[\frac{(q_x a)^2}{2} + \frac{(q_y a)^2}{2} + \frac{(q_z a)^2}{2}\right] =$$

$$= 6J - J a^2 q^2$$

Korrelációs fv.

$$C_{ij} = k_B T \cdot \chi_{ij}$$

$$C(q) = k_B T \cdot \chi(q)$$

$$T > T_c \qquad \chi^{-1}(q) = k_B T - J(q) = k_B T - \overset{k_B T_c}{\overset{\shortparallel}{J(0)}} - J(q) + J(0)$$

$$\underset{qa \ll 1}{\cong} k_B(T - T_c) + J a^2 q^2 =$$

$$= J a^2 \Big(\underbrace{\frac{k_B(T-T_c)}{J a^2}}_{\xi^{-2}} + q^2 \Big) = J a^2 \left(\xi^{-2} + q^2 \right)$$

korrelációs hossz

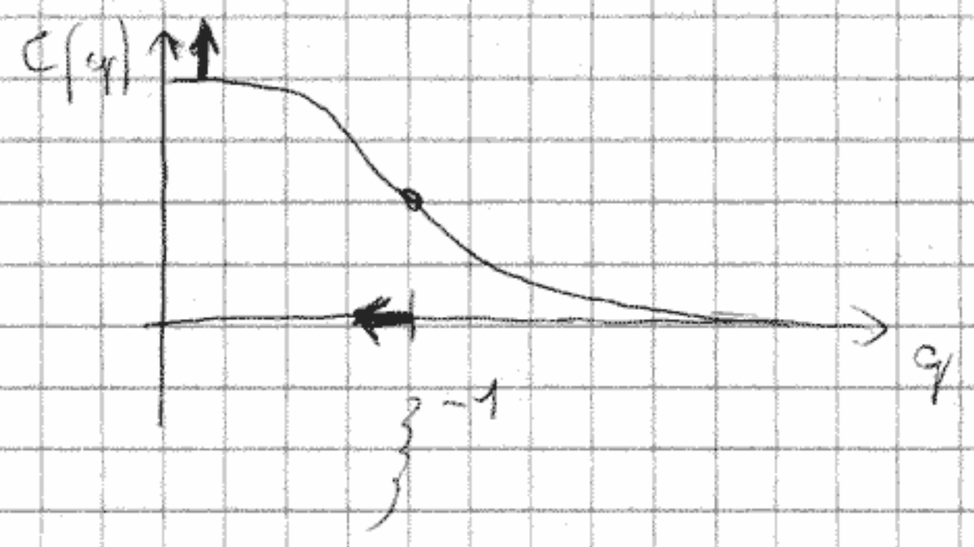
$$T \to T_c \qquad \xi \sim \frac{1}{\sqrt{T - T_c}}$$

$$C(q) \cong \frac{k_B T}{J a^2} \frac{1}{q^2 + \xi^{-2}}$$

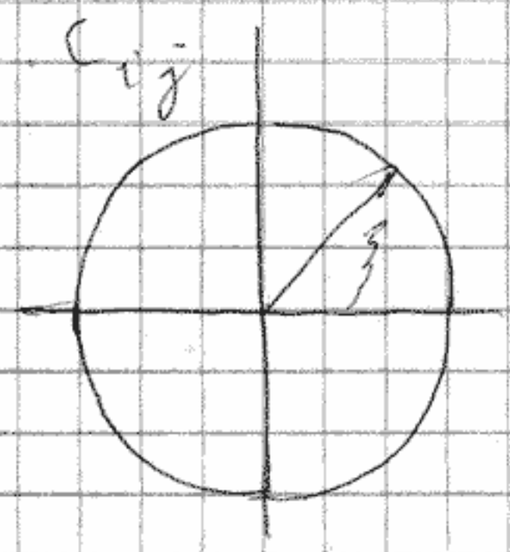
$$C_{ij} = \langle S_i S_j \rangle \qquad S_q = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i e^{-iq R_i} \cdot S_i$$

$$\langle S_q \cdot S_{-q} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i,j} e^{-iq(R_i - R_j)} \underbrace{\langle S_i S_j \rangle}_{\text{csak } (R_i - R_j)\text{-től függ}} =$$

$$= \sum_{\underset{\text{tetszőleges } j\text{-re}}{i}} e^{-iq(R_i - R_j)} \langle S_i S_j \rangle = C(q)$$



$\Rightarrow$



$r = |\underline{R}_i - \underline{R}_j|$

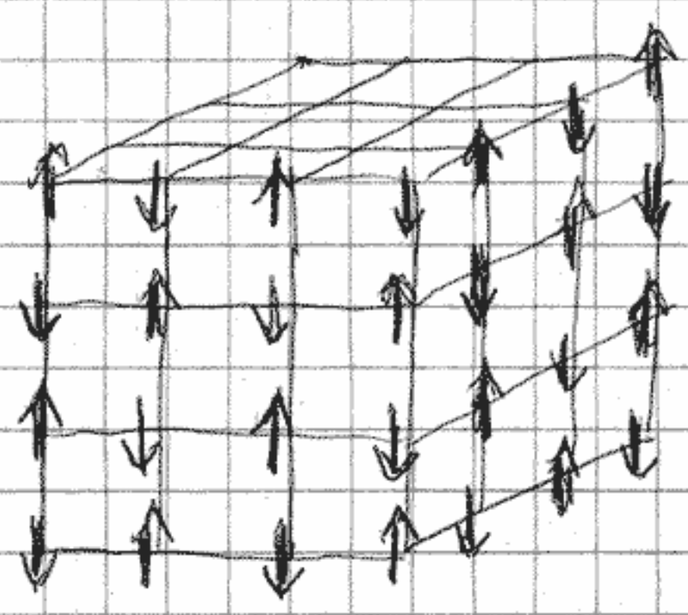
$$C(r) \simeq \frac{1}{4\pi} \frac{k_B T}{J a^2} \frac{e^{-\frac{r}{\xi}}}{r}$$

$r \gg a$

$T = T_c \qquad C(q) = \frac{k_B T}{3a^2} \cdot \frac{1}{q^2} \qquad C(r) = \frac{k_B T}{3a^2} \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r}$

Rozptylová korelácia

(B) Antiferomagnetik



$\vec{\sigma}_i$

i-tý rozptyl

(n_{ix}, n_{iy}, n_{iz})

rovnobežné priesteru

$$e^{i\underline{Q}\underline{R}_i} = \begin{cases} 1 & n_{ix} + n_{iy} + n_{iz} = \text{párne} \\ -1 & n_{ix} + n_{iy} + n_{iz} = \text{nepárne} \end{cases}$$

$\underline{Q} = \frac{\pi}{a}(1,1,1) \qquad \underline{R}_i = a(n_{ix} \cdot \underline{e}_x + n_{iy} \cdot \underline{e}_y + n_{iz} \cdot \underline{e}_z)$

$m_i = n \cdot e^{i\underline{Q}\underline{R}_i}$

$$q_c = \underline{Q} \qquad J(\underline{Q}) = \max J(q)$$

$$k_B T_c = J(\underline{Q})$$

Néel-hőmérséklet

állapotegyenlet $\quad m_i = th\left(\beta \sum_j J_{ij} m_j\right)$

$$n e^{i\underline{Q}\underline{R}_i} = th\left(\beta \sum_j J_{ij} e^{i\underline{Q}\underline{R}_j} n\right)$$

$$n = e^{-i\underline{Q}\underline{R}_i} \cdot th(\ldots) \leftarrow e^{-i\underline{Q}\underline{R}_i} = \pm 1$$

kiemelés th-ba

$$n = th\left(\beta \underbrace{\sum_j J_{ij} e^{-i\underline{Q}(\underline{R}_i - \underline{R}_j)}}_{J(Q) = k_B T_c} n\right)$$

$$n = th\left(\frac{T_c}{T} n\right)$$

$$\chi^{-1}_{ij} = \frac{k_B T}{1 - m_i^2} \delta_{ij} - J_{ij} \qquad m_i^2 = n^2$$

$$\chi^{-1}_{ij} = \frac{k_B T}{1 - n^2} \delta_{ij} - J_{ij}$$

$$\chi^{-1}(q) = \frac{k_B T}{1 - n^2} - J(q) \geq \frac{k_B T}{1 - n^2} - \overbrace{J(Q)}^{k_B T_c}$$

$$\frac{k_B T}{1 - n^2} - k_B T_c > 0$$

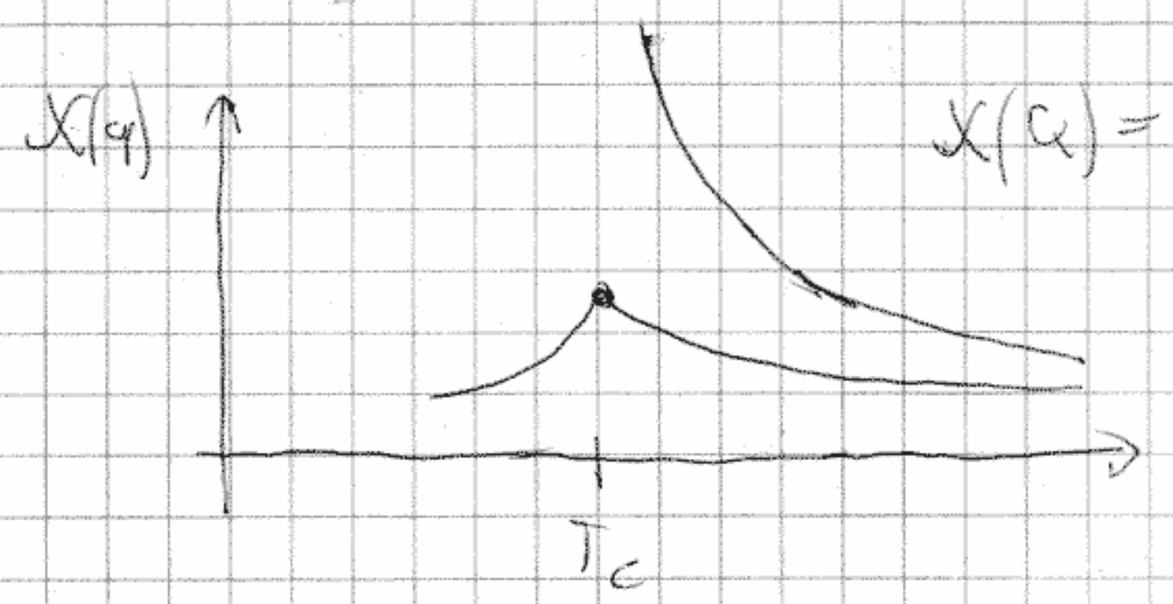
hasonló a ferromágneseshez ⇒ stabil

(~~[illegible]~~)

susceptibilitás $T > T_c$

$$\chi^{-1}(q) = k_B T - J(q) = k_B T - \overbrace{J(Q)}^{k_B T_c} + \underbrace{\left(J(Q) - J(q)\right)}_{\geq 0}$$

$$\chi^{-1}(Q) = k_B (T - T_c)$$



$$\chi(Q) = \frac{C(Q)}{k_B T}$$ ← plusszult neutronszórás

makroszkópikus susceptibilitás

$$\chi^{-1}(q=0) = k_B T - J(q=0)$$

$$C(q) = k_B T \chi(q)$$ s.c. szórás: nem kölcsönhatás

$$J(q) = 2J\left[\cos(q_x a) + \cos(q_y a) + \cos(q_z a)\right]$$

$J < 0$ $\quad |\underline{q} - \underline{Q}|\, a \ll 1$

$$\mathcal{F}(q) = -2|J|\left(-3 + \frac{1}{2}a^2(q-Q)^2 + \dots\right)$$

$$q - Q = \tilde{q}$$

$$\mathcal{F}(q) = \underbrace{6|J|}_{k_B T_c} - |J|\, a^2 \cdot \tilde{q}^2$$

$$C(q) = k_B T \cdot \frac{1}{k_B T - k_B T_c + |J| a^2 \tilde{q}^2} = \frac{k_B T}{|J| a^2} \cdot \frac{1}{\xi^{-2} + \tilde{q}^2}$$

$\tilde{q} \cdot a \ll 1$

$$\xi^{-2} = \frac{k_B (T - T_c)}{|J| a^2}$$

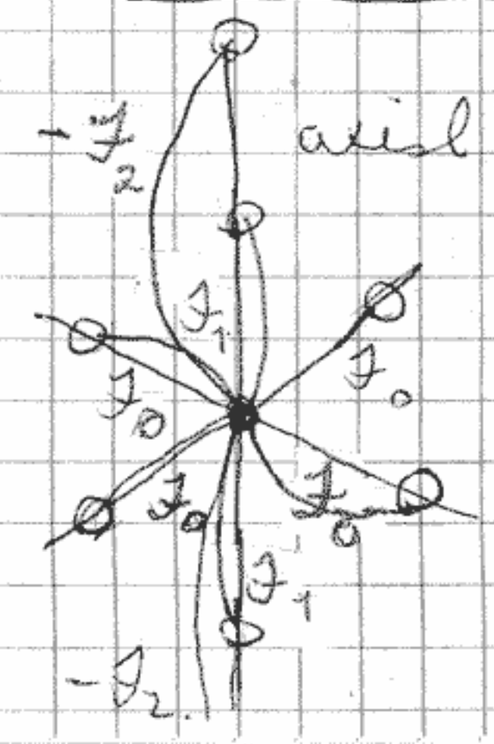
$$C(q) = \langle S_q S_{-q} \rangle$$

$$S_i = \frac{1}{\sqrt{N}} S_q \cdot e^{i q R_i} \qquad q = Q + \tilde{q}$$

$$S_i = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{N}} S_q \cdot e^{i Q R_i}}_{\text{antiferromágneses rend}} \cdot e^{i \tilde{q} R_i}$$

alrácsmágnesezettség hullámszámú modulációja

ANNNI - modell



axial - next nearest neighbour - Ising

x, y irányban elaósorozat

$J_0 > 0$ fm

$-J_2 < 0$ afm

$J_1 > 0$ fm

z irányban elaósorozat

z irányban másodsorozat

átlagtérközelítés

$$J(q) = \sum_i e^{-iq(R_i - R_j)} \cdot J_{ij} =$$

$$= 2J_0\left(\cos(q_x a) + \cos(q_y a)\right) +$$

$$+ 2J_1 \cos(q_z a) - 2J_2 \cos(2 q_z a)$$

$$\max \quad q_c = (0, 0, q_c)$$

$$2J_1\left[\cos(q_z a) - K \cos(2 q_z a)\right] \qquad K = \frac{J_2}{J_1}$$

$$f(x) = \cos x - K \cdot \cos 2x$$

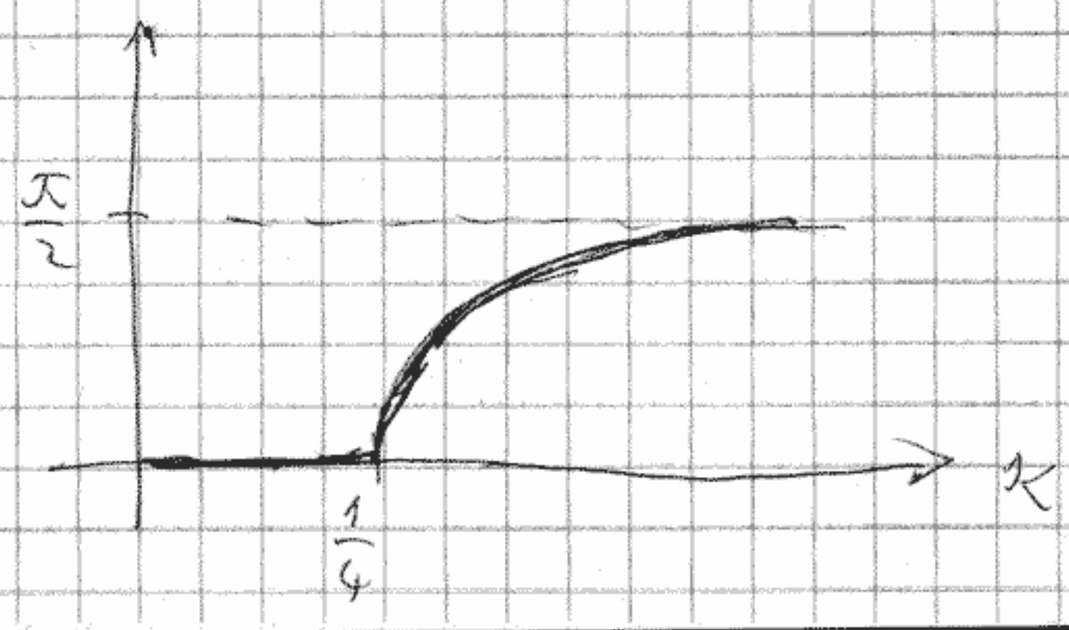
$$f'(x) = -\sin x + 2K \underbrace{\sin 2x}_{2 \sin x \cos x} = -\sin x\,(1 - 4K \cos x)$$

Ⓐ $\sin x = 0$
- $x = 0$ max, ha $K < \frac{1}{4}$
- $x = \pi$ min

Ⓑ $\cos x = \frac{1}{4K}$ $\left(K > \frac{1}{4}\right)$ max, ha $K > \frac{1}{4}$

$f''(x) < 0$ alszik stabilitás

$x = q_c a$

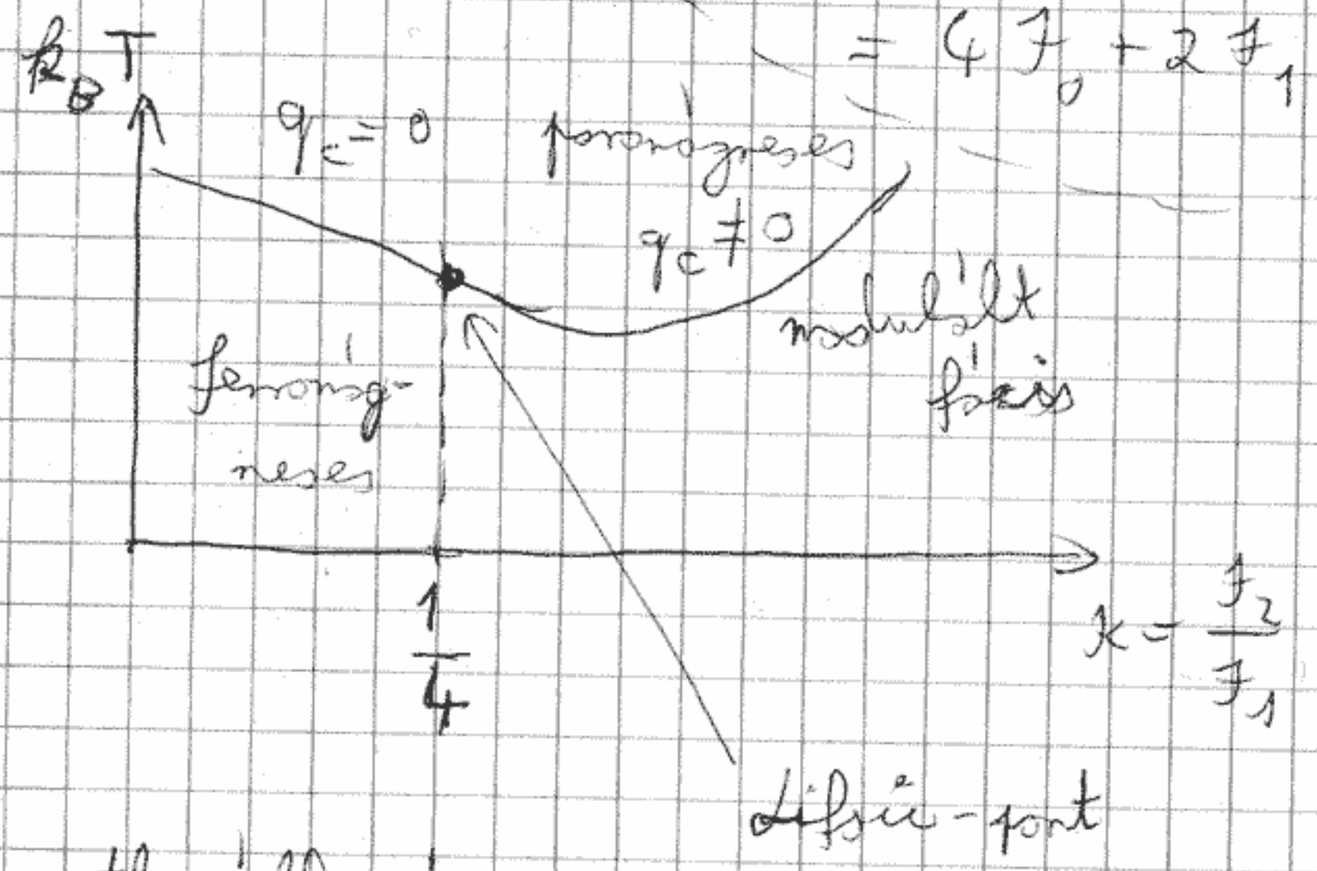


$k < \frac{1}{4}$ $\quad q_c = 0 \rightarrow$ ferromágneses rendeződés

$k > \frac{1}{4}$ $\quad q_c \neq 0 \rightarrow$ modulált fázis

$$m_i \sim \mathrm{Re}\left(e^{i q_c R_{iz}}\right)$$

$$k_B T_c = J(q_c) = \begin{cases} 4J_0 + 2J_1(1-k) \\ 4J_0 + 2J_1\left(\frac{1}{4k} - k\left(2\frac{1}{16k^2} - 1\right)\right) = \\ = 4J_0 + 2J_1\left(\frac{1}{8k} + k\right) \end{cases}$$



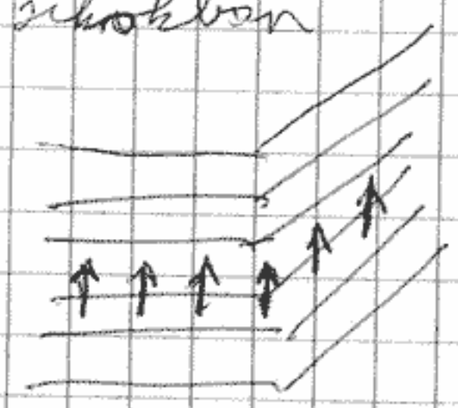
<u>Alapállapot</u>

legalacsonyabb energiájú spinkonfiguráció
ferromágneses rendeződés x-y síkokban

l-ik sík S_l

$\uparrow$

M db spin



N sík

$$E = (-J_0)\,2MN - J_1 \sum_{l=1}^{N-1} S_l \cdot S_{l+1} \cdot M + J_2 \sum_{l=1}^{N-2} S_l \cdot S_{l+2} \cdot M$$

$$\frac{E}{M} = -2N J_0 - J_1 \sum_\ell S_\ell S_{\ell+1} + J_2 \sum_\ell S_\ell S_{\ell+2}$$

1 dimensió Ising-Lenz → fm nn / afm nnn

↑↑↑↑↑↑ ferromagnetes real

↑↑↑|↓↓↓↓ 1 domènfal

$$\Delta E_1 = 2J_1 - 4J_2 = 2J_1(1-2\kappa)$$

$\Delta E_1 > 0 \qquad \kappa < \frac{1}{2}$

$\Delta E_1 < 0 \qquad \kappa > \frac{1}{2}$

↑↑↑|↓|↑↑↑ 2 domènfal

$$\Delta E_2 = 2(2J_1) - 2(2J_2) = \Delta E_1 + 2J_1 > \Delta E_1$$

↑↑↑|↓↓|↑↑↑

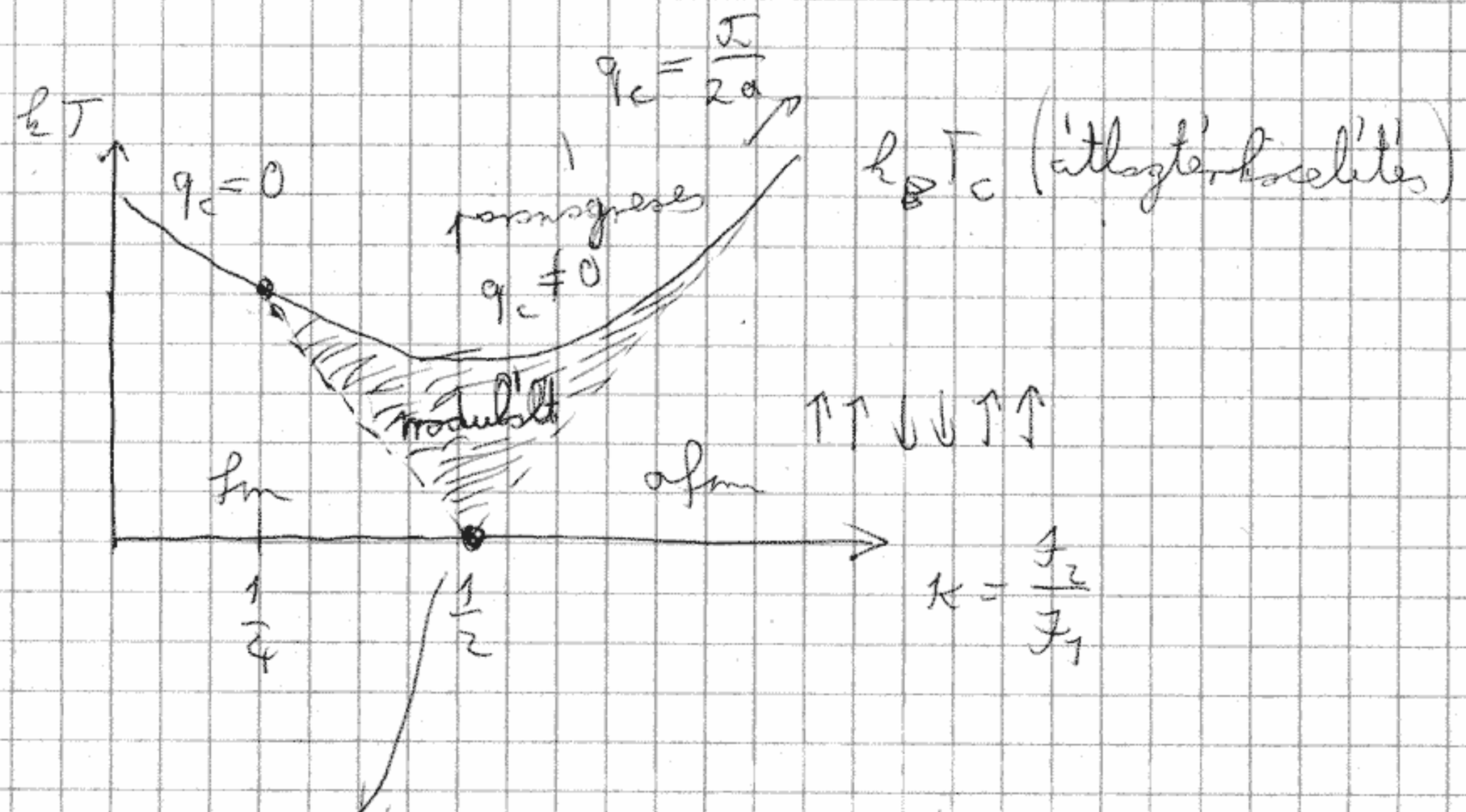
$$\Delta E_2 = 2(2J_1) - 4(2J_2) = 2\Delta E_1$$

Energies mínimes

$\kappa < \frac{1}{2} \quad \Delta E_1 > 0$ ferromagnetes 2× degenerat

$\kappa > \frac{1}{2} \quad \Delta E_1 < 0$ antiferromagnetes 4× degenerat

↑↑↓↓↑↑↓↓↑↑

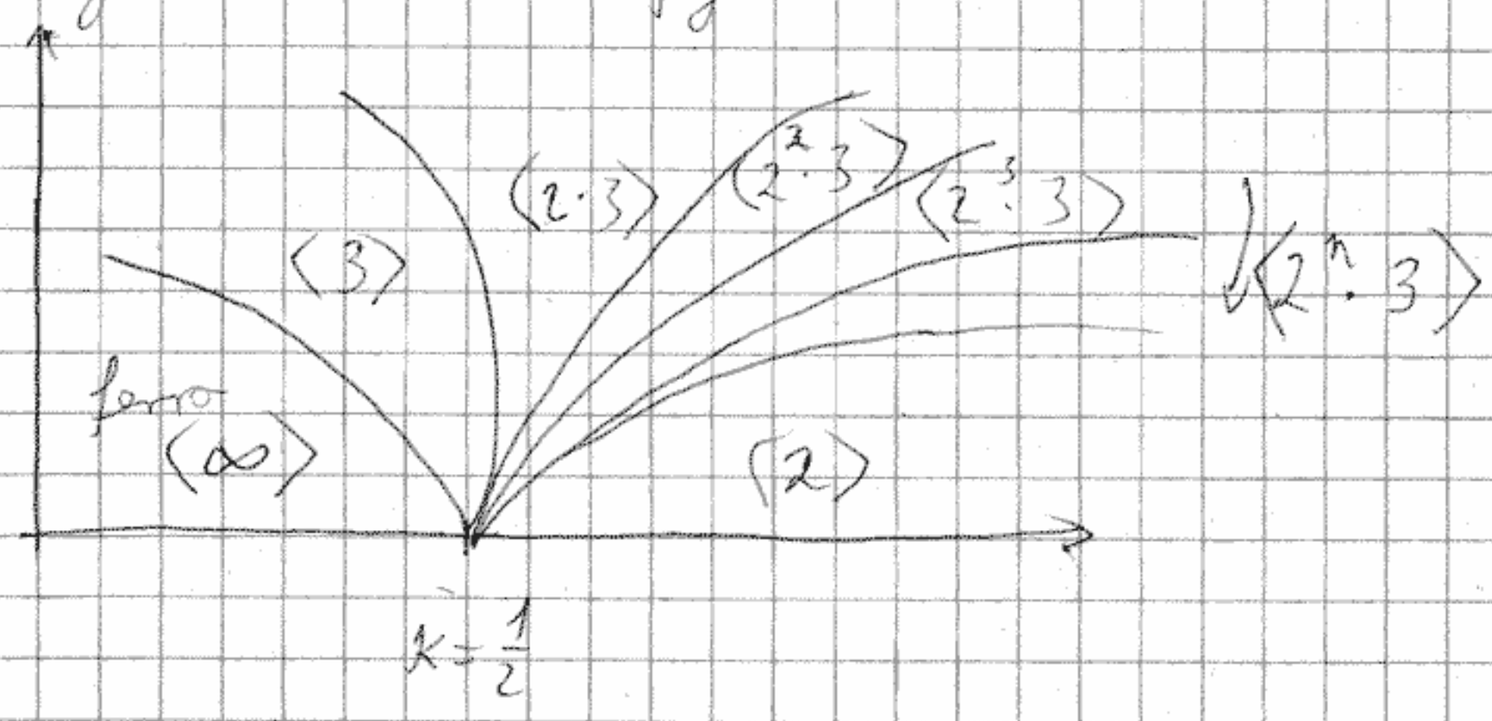


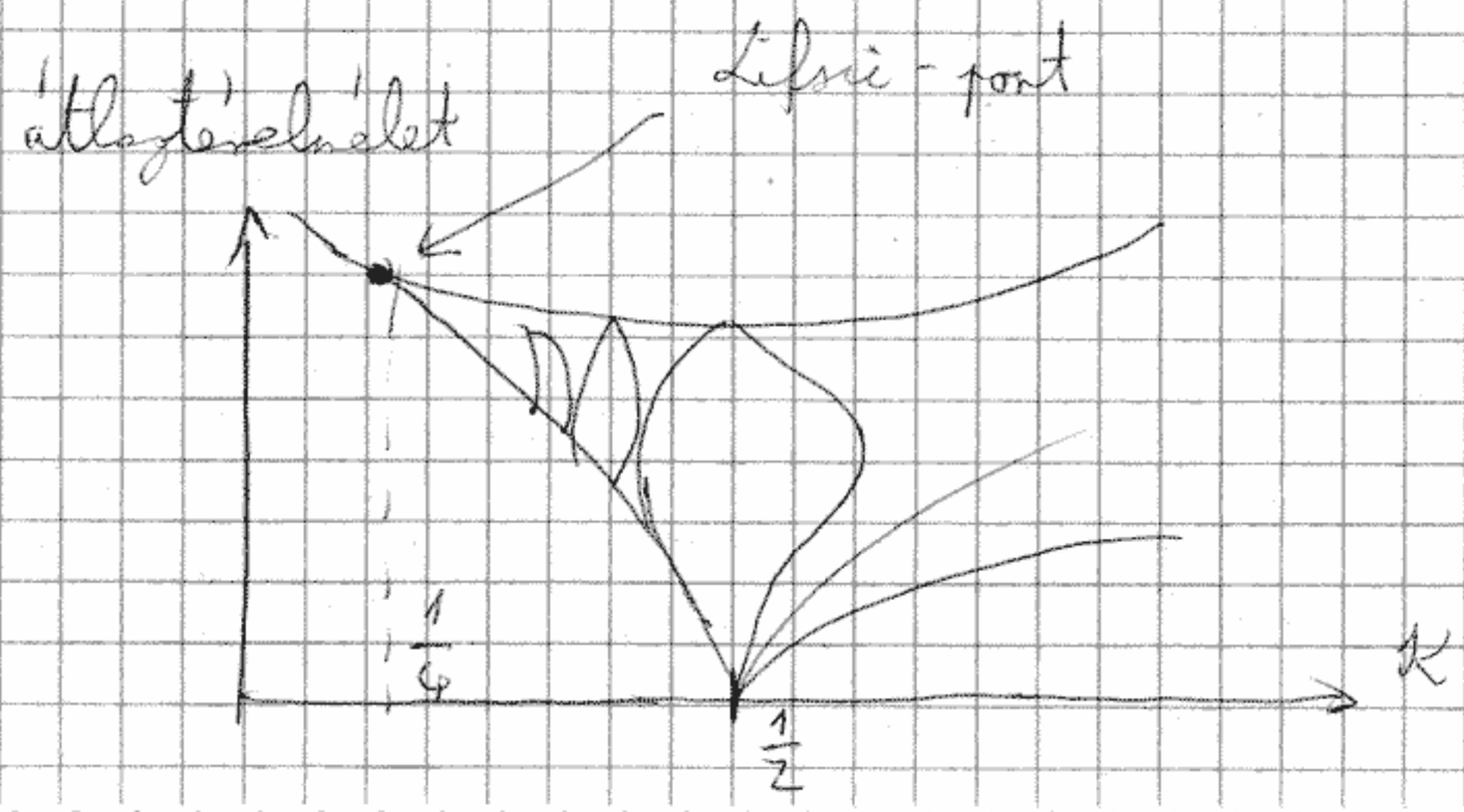
makroszkópikusan degenerált
maradék entropia

$\langle 3 \rangle$ $\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow$

$\langle 2^2 \cdot 3 \rangle$ $\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow$

alacsony hőmérsékleti sorfejtés





$\cos x - K\cos(2x)$ $K=\frac{1}{4}$-nél másodrendű tag előjelet vált

Lifshitz-pont megjelenése viselkedés

jellegű ANNNI modellre

CeSb

rács ferromágneses
antiferromágneses
paramágneses

csak váltogatják egymást

<u>Landau-elmélet</u>

Ising-modell $M=\sum_i S_i$ $-N, -N+2, \dots, N$

$P(M)$ valószínűségeloszlás a makroszkópikus mennyiségre

$$P(M)=\sum_{\tilde{S}}\frac{e^{-\beta E[\tilde{S}]}}{Z}=\frac{Z_M}{Z}$$

← részleges állapotösszeg

$$\tilde{S}\equiv(S_1,S_2,\dots)\quad \sum_i S_i=M$$

azon spinkonfigurációk, amik éppen az M makroszkópikus magnetizáltságot adják

$$F=-k_BT\ln Z \qquad Z=e^{-\frac{F}{k_BT}} \qquad F(T,H)$$

$$Z_M=e^{-\frac{F_c}{k_BT}} \qquad F_c(T,H,M)$$

feltételes szabadenergia

$$P(M) = \frac{1}{Z} \cdot e^{-\frac{F_c(T,H,M)}{k_B T}}$$

F_c minimum

legvalószínűbb M $\quad \left(\frac{\partial F_c}{\partial M}\right)_{T,H} = 0 \qquad \frac{\partial^2 F_c}{\partial M^2} > 0$

<u>ált. eset</u>

$$\hat{M}|M_n\rangle = M_n|M_n\rangle \qquad \text{(degenerált)}$$

$$P(M_n) = \mathrm{Tr}\left(\frac{e^{-\beta\hat{H}}}{Z}|M_n\rangle\langle M_n|\right) = \langle M_n|\frac{e^{-\beta H}}{Z}|M_n\rangle$$

$$P(M) = \frac{1}{Z}\underbrace{\sum_{\substack{n \\ M_n = M}} \langle M_n| e^{-\beta\hat{H}}|M_n\rangle}_{\text{rendszer állapotösszeg}}$$

$$Z_M = e^{-\frac{F_c(T,M)}{kT}}$$

$$Z = \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta H}\right) = \sum_n \langle M_n| e^{-\beta\hat{H}}|M_n\rangle$$

<u>Landau-elmélet</u>

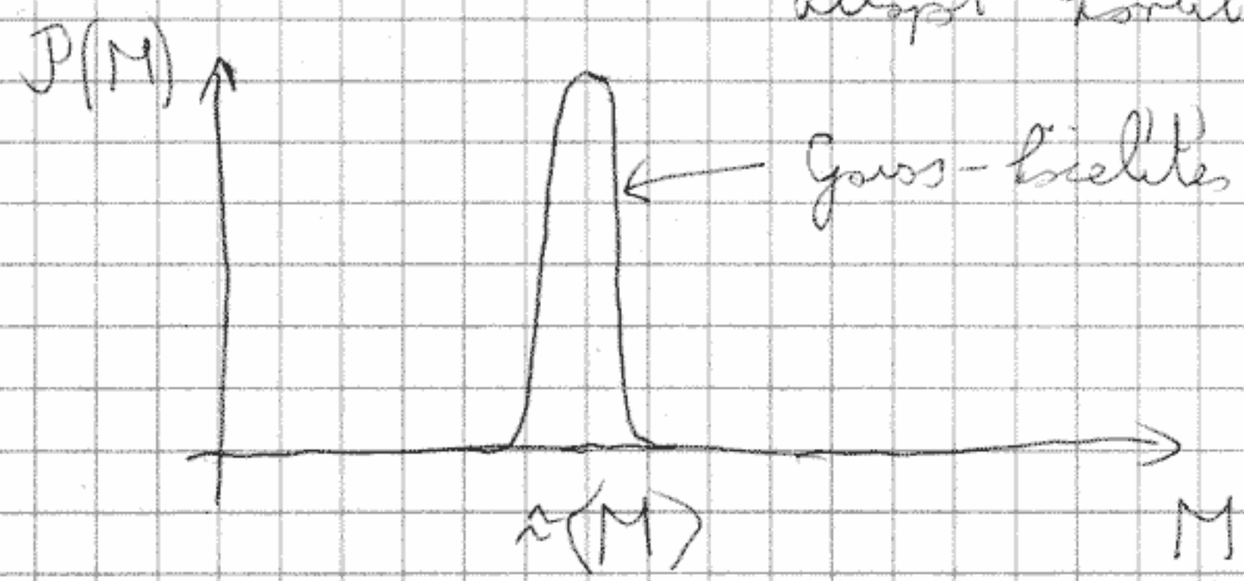
$F_c(T,M,H)$ fenomenologikus meghatározás

T_c környékén: M kicsi $\rightarrow$ sorfejtés M hatványai szerint

és elmélésfv.

legvalószínűbb $M \approx \langle M \rangle$

fluktuációk: Gauss-közelítés a normális valószínűségi állapot körül



<u>Egytengelyű ferromágnes</u>

$$F_c(T,H,M) = V f_c(T,H,m)$$

$$M = mV$$

$$f_c(T,H,m) = w(T) + \frac{a(T)}{2} m^2 + \frac{u(T)}{4} m^4 - mH$$

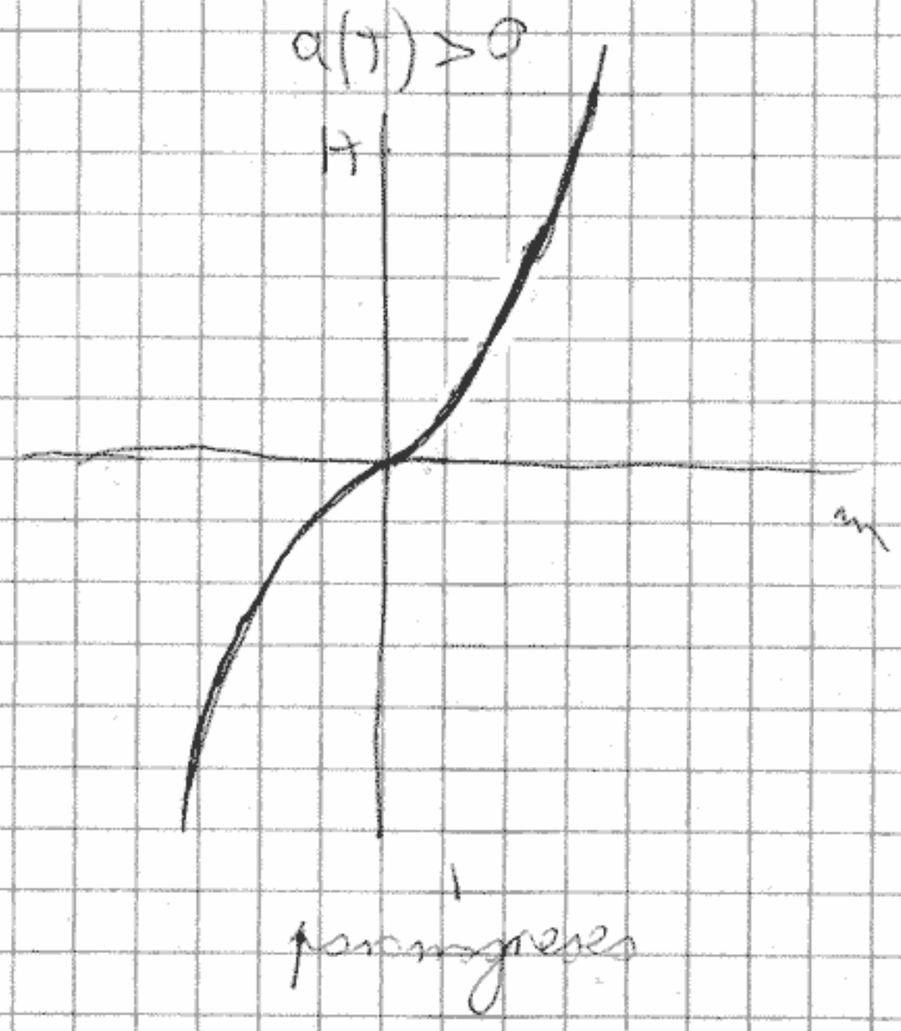
$u(T) > 0$ abszolút minimum létezésének feltétele

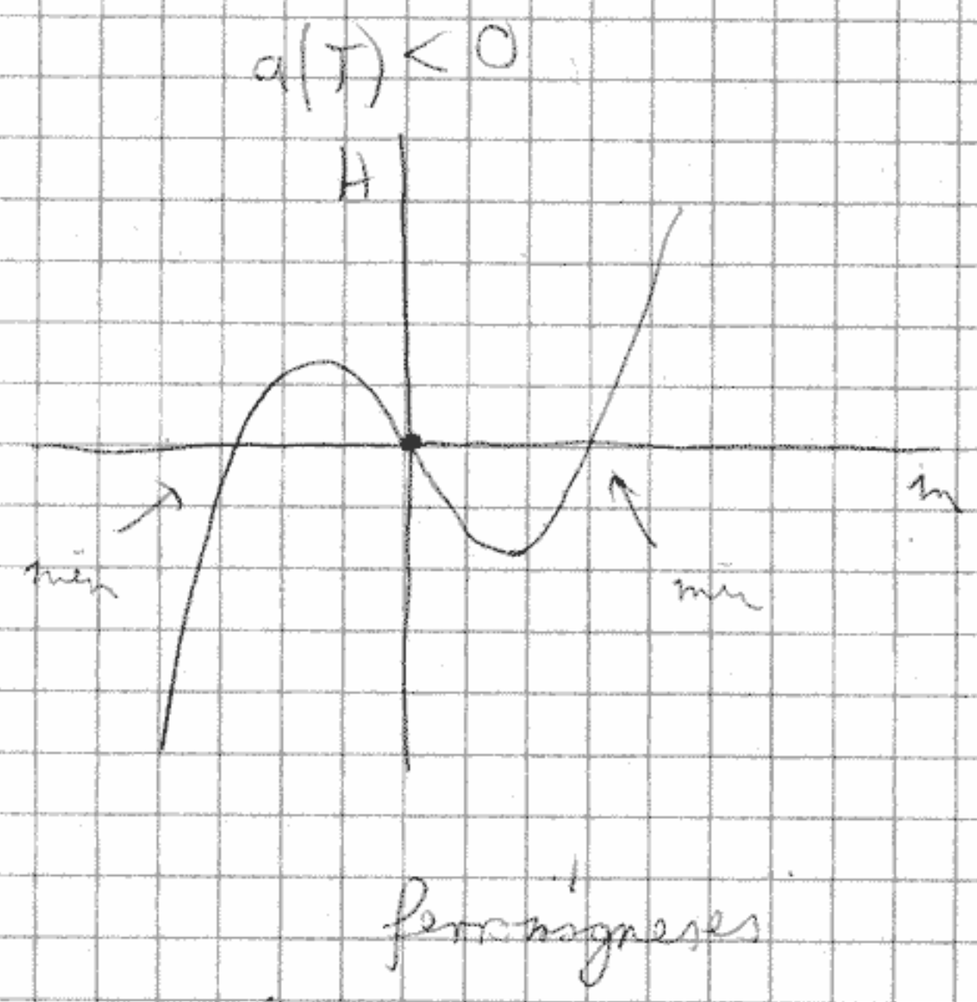
időtükrözése → megszerettszi előjelet vált csak páros hatványok

$$\frac{\partial f_c}{\partial m} = 0 \qquad a(T)\, m + u(T)\, m^3 - H = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_c}{\partial m^2} > 0 \qquad a(T) + 3\, u(T)\, m^2 > 0$$

$$\chi^{-1} = \frac{\partial H}{\partial m} = a + 3u \cdot m^2 > 0$$





$a(T)$ előjelet vált T_c-ben

$a(T) = a'(T - T_c)$ lineáris a Landau-féle modellben.

$u(T) > 0$ mindig $\rightarrow$ u = konstans

a Landau-féle modellben

$H = 0$

$$a m + u m^3 = 0 \rightarrow m = 0 \qquad \chi^{-1} = a > 0$$

$$\rightarrow m^2 = -\frac{a}{u} = \frac{a'(T_c - T)}{V}$$

$$\chi^{-1} = a + 3 u m^2 = -2a > 0$$

$$\chi = \begin{cases} \frac{1}{a} = \frac{1}{a'(T - T_c)} & T > T_c \\ -\frac{1}{2a} = -\frac{1}{2a'(T - T_c)} & T < T_c \end{cases}$$

$H \neq 0 \qquad a = 0 \qquad H = u \cdot m^3$

$$m = \left(\frac{H}{u}\right)^{\frac{1}{3}}$$

fázis

$$F(T, H) \approx F_c(T, H, M)\Big|_{\text{minimuhely}}$$

, mivel az abszolútfüggvény helyben és csúcs!

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{Z} e^{-\frac{F_c}{k_B T}}$$

$$f(T, H=0, m) = w(T) + \underbrace{\frac{a(T)}{2} m^2(T) + \frac{u}{4} m^4(T)}_{\frac{a}{2}\left(-\frac{a}{u}\right) + \frac{u}{4}\left(-\frac{a}{u}\right)^2} =$$

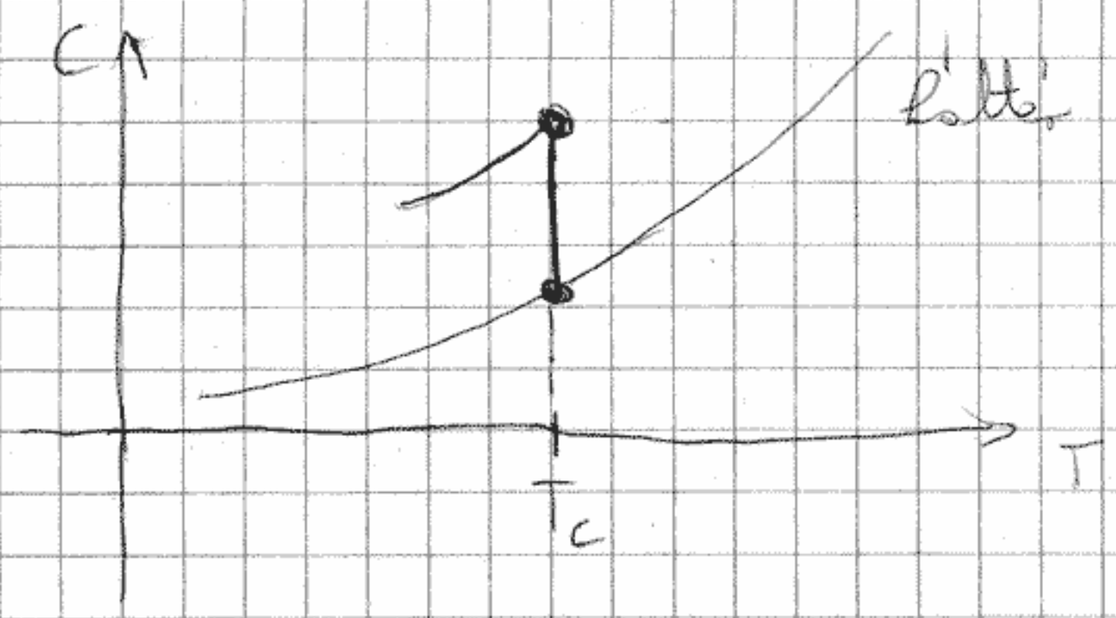
$$= \begin{cases} w(T) & T > T_c \\ w(T) - \frac{a^2}{4u} & T < T_c \end{cases}$$

$$S = -\frac{\partial f}{\partial T} = -\frac{\partial w}{\partial T} + \frac{2a'^2(T - T_c)}{4u} \qquad T < T_c$$

$$C = T \cdot \frac{\partial S}{\partial T} = -T \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial T^2} + \underbrace{\frac{a'^2}{2u} T}$$

$\downarrow$ szima fv.

ugrás a fajhőben a fázisátalakulásnál



Eltér $\left(-T\frac{\partial^2 w}{\partial T^2}\right)$

$$\Delta C_{H=0} = C_{H=0}(T_c^-) - C_{H=0}(T_c^+) = \frac{a^2}{2u} T_c$$

<u>fluktuáció</u> $T > T_c$ $\qquad H = 0$

$$F = V\left(w + \frac{a}{2} m^2 + \cancel{\frac{u}{4} m^4}\right)$$

$$\mathcal{P}(M) \sim e^{-\frac{F_c}{k_B T}} \sim e^{-\frac{Va}{2k_B T} m^2}$$

$$\langle m^2 \rangle = \frac{k_B T}{Va} = \frac{k_B T \chi}{V} \qquad M = m \cdot V$$

$$\langle M^2 \rangle = k_B T \cdot V \cdot \chi$$ fluktuáció - szórás tétel

<u>sorfejtésben eggel tovább menve</u>

$$f = w + \frac{a}{2} m^2 + \frac{u}{4} m^4 + \frac{v}{6} m^6 \quad (v > 0)$$

<u>$u > 0$</u>

T_c csak elhanyagolható járulékot ad

$\underline{u < 0}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial m} &= a m + u m^3 + v m^5 = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial m^2} &= a + 3 u m^2 + 5 v m^4 > 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &m = 0 \text{ mindig megoldás} \\ &\chi^{-1} = a > 0 \end{aligned}$$

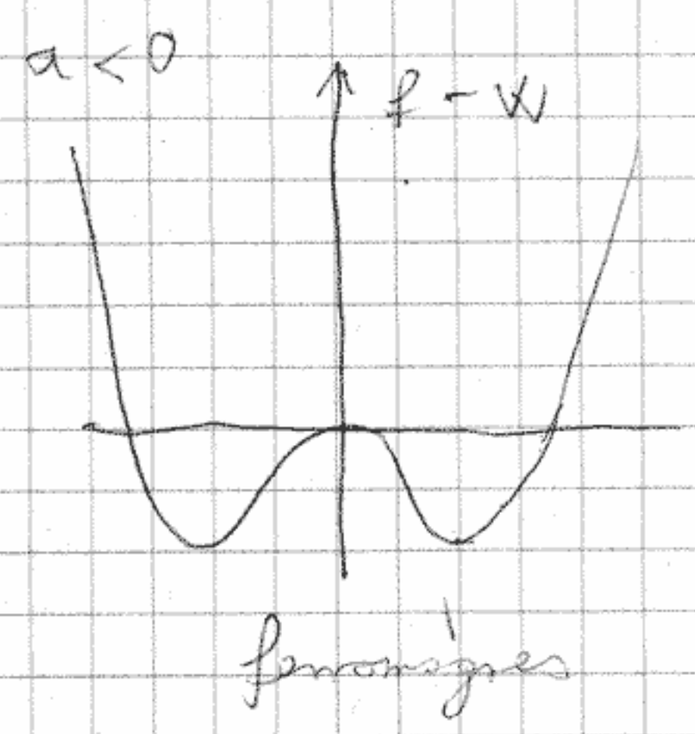
$m \neq 0 \qquad a + u m^2 + v m^4 = 0$

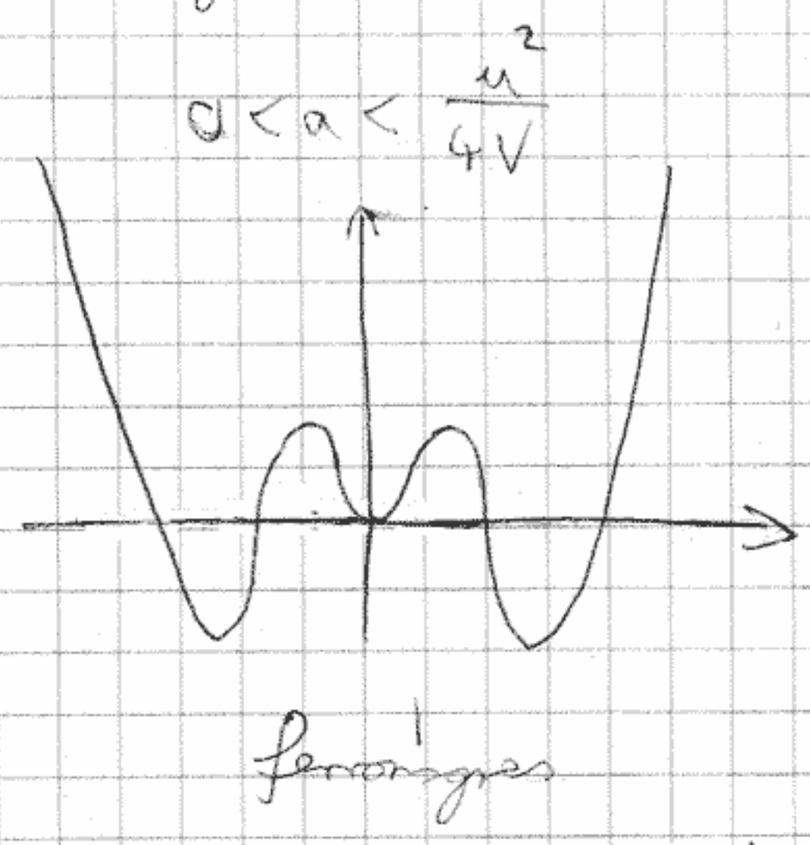
$$m^2 = \frac{-u \pm \sqrt{u^2 - 4 a v}}{2 v}$$

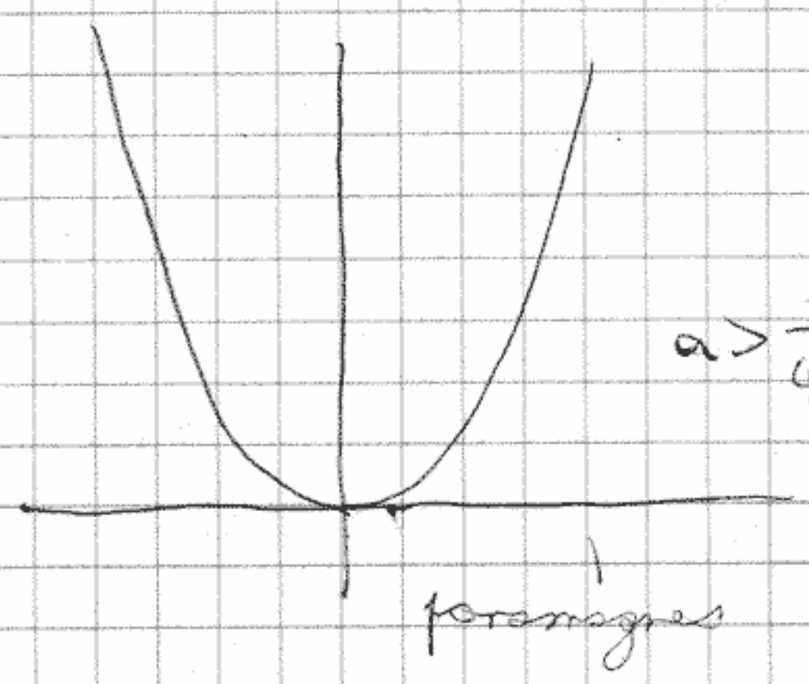
$a > \frac{u^2}{4v}$ nincs valós megoldás

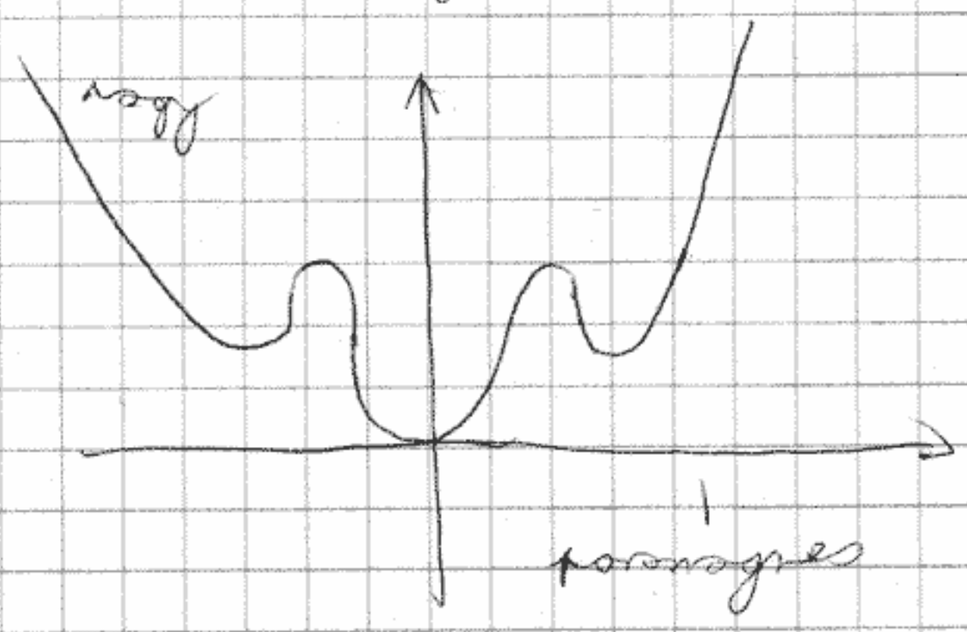
$0 < a < \frac{u^2}{4v}$ 2 valós pozitív megoldás

$a < 0$ 1 valós pozitív megoldás

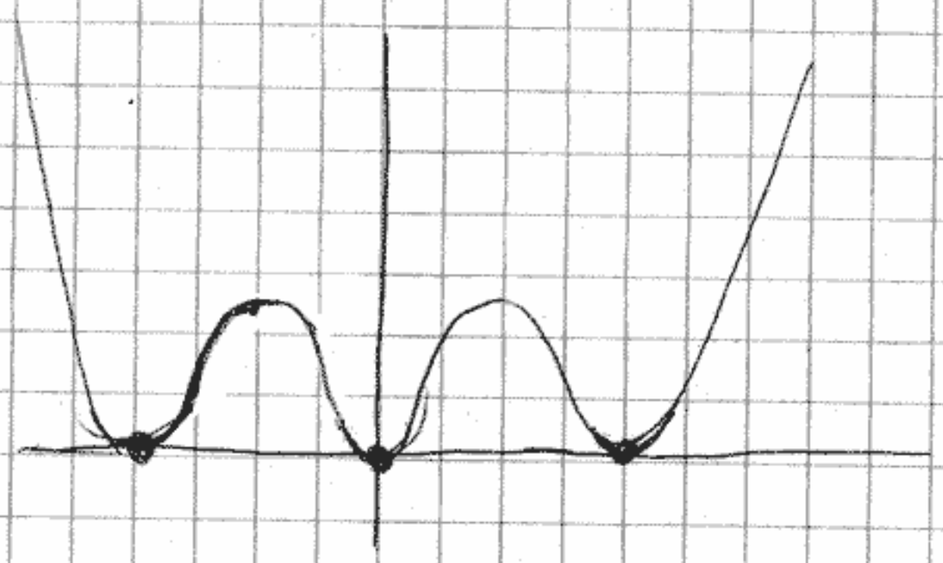








fázisátalakulás



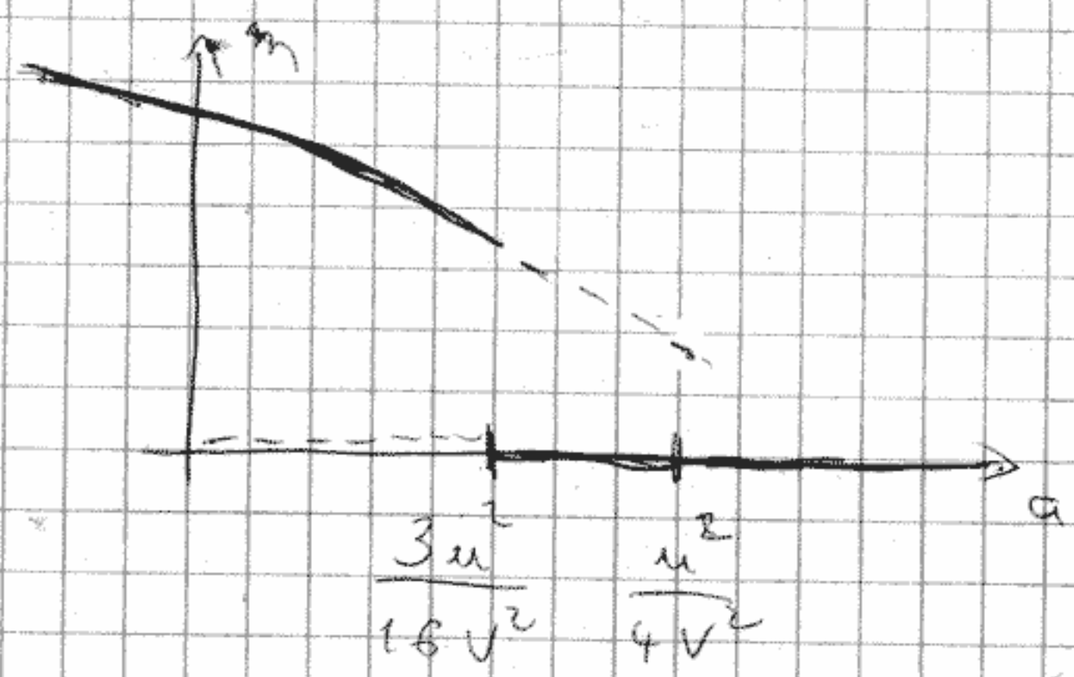
$f - w = 0$

$$\frac{a}{2}m^2 + \frac{u}{4}m^4 + \frac{V}{6}m^6 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} a + u m^2 + V m^4 &= 0 \quad (1) \\ 3a + \frac{3}{2} u m^2 + V m^4 &= 0 \quad (2) \end{aligned}\right\}$$

$$-2a - \frac{u}{2}m^2 = 0 \qquad m^2 = -\frac{4a}{u} \qquad \text{(1)-be visszatesz}$$

$$a - 4a + V\frac{16a^2}{V^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3u^2}{16V}$$



1. rendű átalakulás

$v \to 0$ kicsi vagyunk az folytonos átalakulástól

$u = 0$

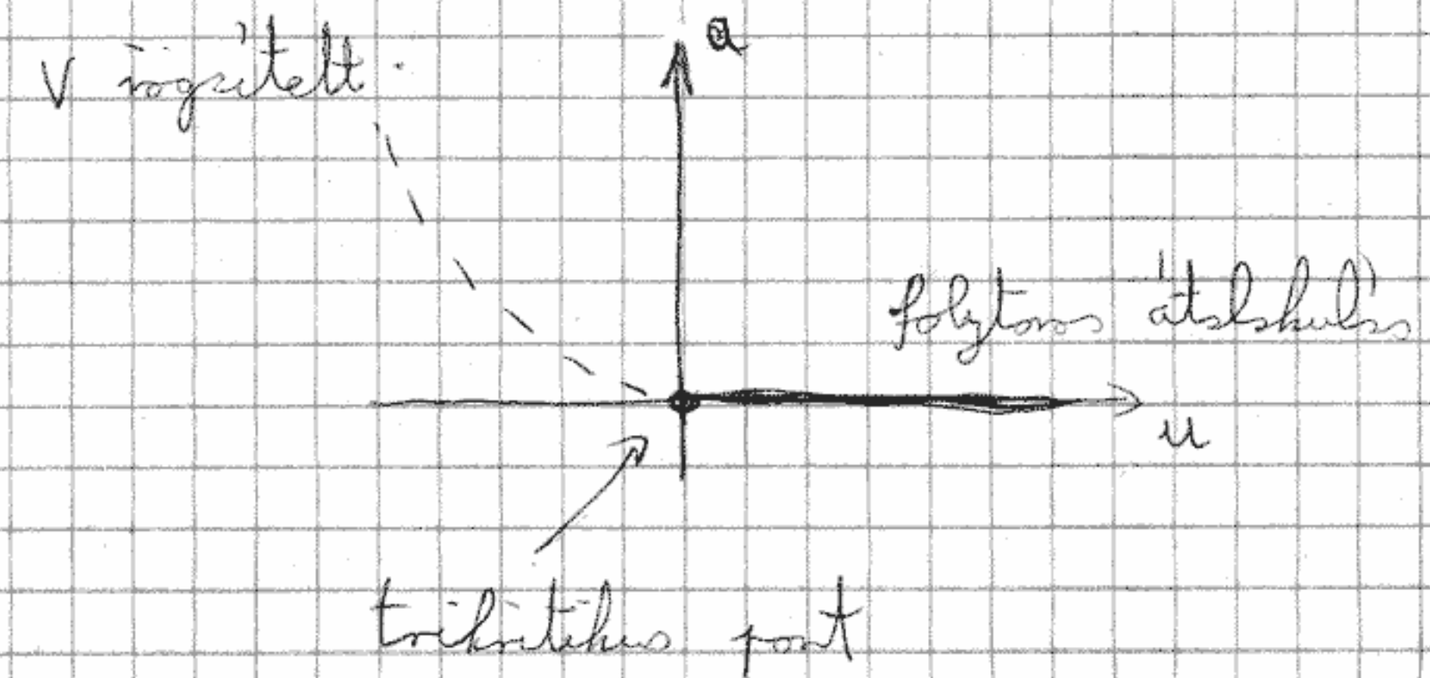
$$f = w + \frac{a}{2}m^2 + \frac{V}{6}m^6$$

$$am + Vm^5 = 0 \longrightarrow m = 0 \qquad \chi^{-1} = a > 0$$

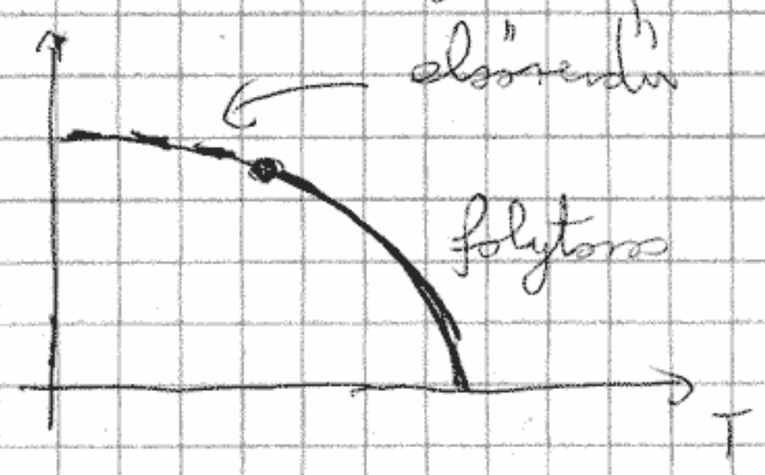
$$\downarrow$$

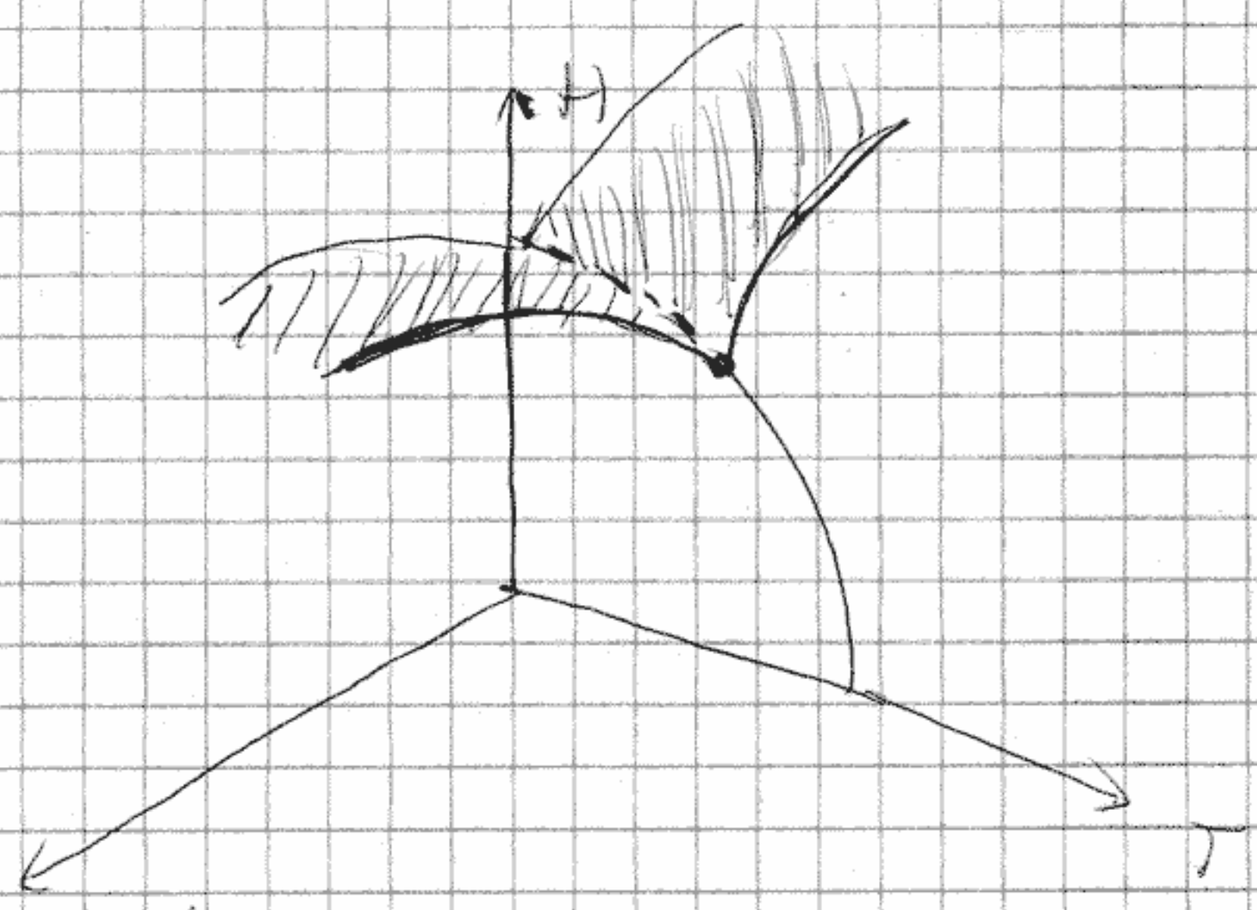
$$m^4 = -\frac{a}{V} \qquad \chi^{-1} = a + 5Vm^4 > 0$$

$a(T) = \dot{a}(T - T_c)$ $\qquad$ $m \sim (T_c - T)^{\frac{1}{4}}$



példa: antiferromágnes





h_s staggered mágneses tér

Kétis szimmetria

$$\underline{m} = (m_1, m_2, m_3)$$

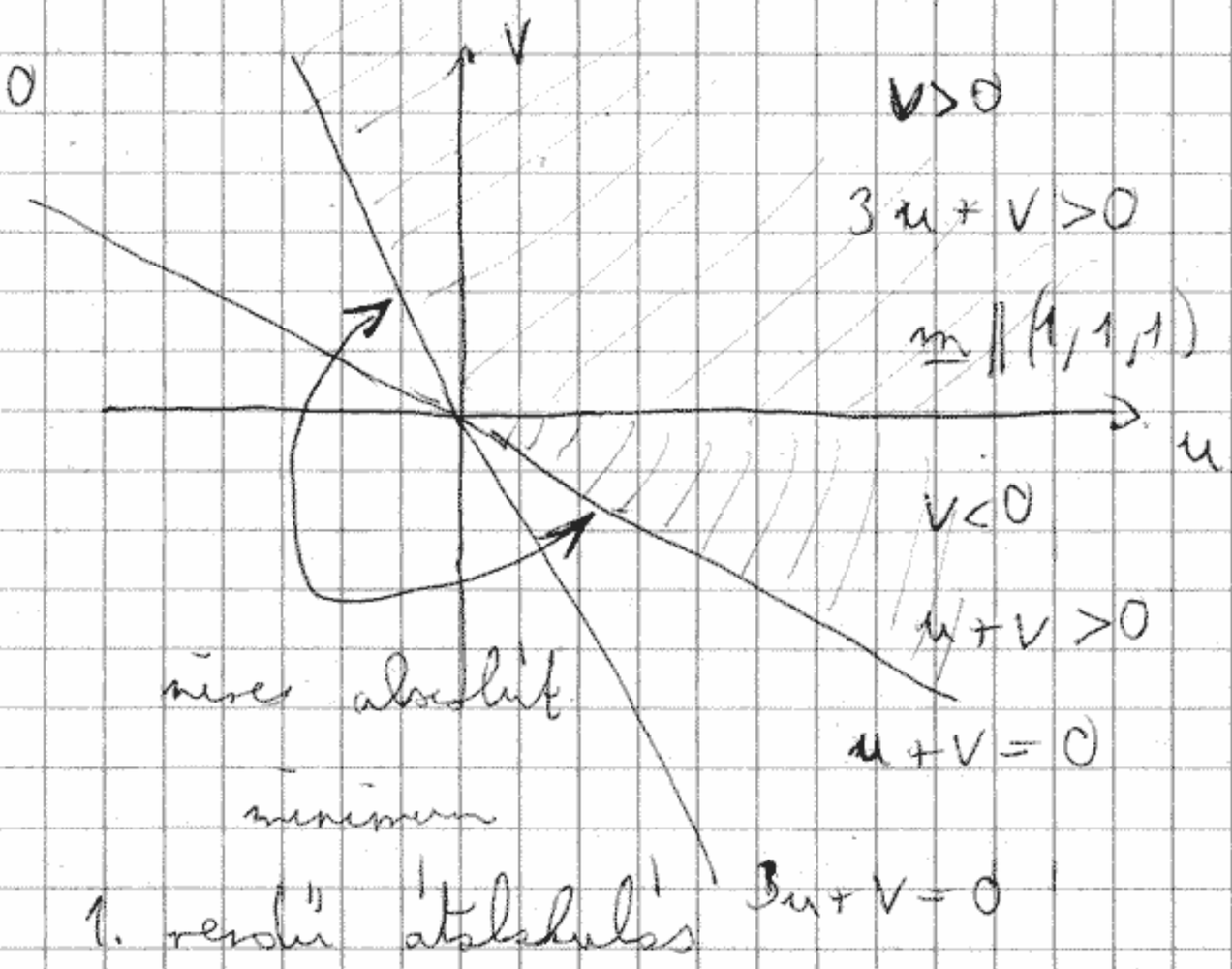
$$F_c = V \cdot f_c$$

$$f_c = W(T) + \frac{a}{2}\underline{m}^2 + \frac{u}{4}(\underline{m}^2)^2 + \frac{v}{4}\sum_\alpha m_\alpha^4$$

$$\frac{\partial f_c}{\partial m_\alpha} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f_c}{\partial m_\alpha \partial m_\beta} = \chi_{\alpha\beta}^{-1} \text{ pozitív definit}$$

$a > 0$ $\quad \underline{m} = 0$ stabil

$a < 0$



$v = 0$ izotróp → nincs kitüntetett irány

$\underline{m}$ tetszőleges irányba mutat

$SrTiO_3$ $(1,0,0)$ rendeződés (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3)

$LaAlO_3$ $(1,1,1)$ rendeződés

} kösd hozzá

Csoportelméleti módon vizsgálva az f_c alakját, meg lehet mondani, hogy van-e 2. rendű átalakulás

Inhomogén mágeseredettség

mágeseredettség sűrűség: $S(\underline{r})$

$$P[T, h(\underline{r}), S(\underline{r})] \sim e^{-\frac{1}{k_B T} F_c[T, h(\underline{r}), S(\underline{r})]}$$

$$F_c[T, h(\underline{r}), S(\underline{r})] = \int d^3r \left[w(T) + \frac{a(T)}{2} S(\underline{r})^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{u(T)}{4} S(\underline{r})^4 - h(\underline{r}) S(\underline{r}) + \frac{1}{2} c(T) \left(\underline{\nabla} S(\underline{r})\right)^2 \right]$$

abszolút minimum $\quad u(T) > 0 \qquad c(T) > 0$

$\uparrow$

kilában gyorsan oszcilláló mágeseredettség bírói az energiát

$$\left.\begin{array}{l} u(T) \cong u(T_c) \qquad c(T) \cong c(T_c) \\ a(T) = a'(T - T_c) \end{array}\right\}$$

a legegyszerűbb modellfüggvények, amik tudják az előjelkövetelményeket

$h(\underline{r}) = H$ homogén tér

$$F_c \geq \int d^3r \left[w(T) + \frac{a}{2} S^2 + \frac{u}{4} S^4 - H \cdot S \right] \geq$$

$$= \uparrow \qquad\qquad \geq V \cdot \min_m \left\{ w(T) + \frac{a}{2} m^2 + \frac{u}{4} m^4 - H \cdot m \right\}$$

$S(\underline{r}) = \text{konstans}$

$\uparrow$

= a minimumhely

inhomogén $h(\underline{r})$ tér

$$S(\underline{r}) \to S(\underline{r}) + \delta S(\underline{r}) \quad \text{variáció}$$

$$\delta F_c = \int d^3r \left[a\,\delta S + u\,S^3 \cdot \delta S - h \cdot \delta S + c\,\underbrace{\underline{\nabla} S \cdot \underline{\nabla} \delta S} \right]$$

parciális integrálás $\rightarrow$ $\underline{\nabla}(\delta S\, \underline{\nabla} S) - \delta S \cdot \Delta S(\underline{r})$

kiintegrálható és

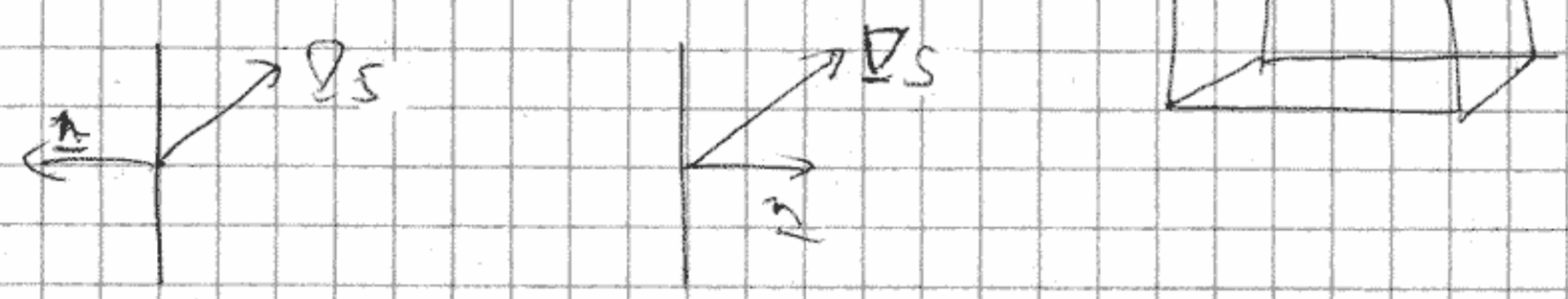
$$\int d^3r\, \underline{\nabla}(\delta S \cdot \underline{\nabla} S) = \oint d\underline{F} \cdot (\delta S\, \underline{\nabla} S) := 0$$

felületi tag

kétféle módon tehető nullává:

a) $\delta S = 0$ a felületen, amit a ∞-be viszünk

b) periodikus kényszerfeltétel téglatestben



a két lapra vett integrál kiejti egymást

Ha a felületi effektusokat akarjuk vizsgálni, akkor az anyag fizikai kényszerfeltételek írják fel és nem tartják a felületi tagot.

De most nem akarjuk.

$$\delta F_c = \int d^3r \left\{ a s + u s^3 - c \Delta s - h \right\} \delta s = 0$$

tetszőleges

$$a s(\underline{r}) + u s^3(\underline{r}) - c \Delta s(\underline{r}) = h(\underline{r})$$

Euler-Lagrange egyenlet:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial s}{\partial x_\alpha}\right)}\right) - \frac{\partial L}{\partial s} = 0 \rightarrow \text{egyenes}$$

$$\left.\begin{aligned} h(\underline{r}) &= H + \delta h(\underline{r}) \\ s(\underline{r}) &= m + \delta s(\underline{r}) \end{aligned}\right\}$$ homogén esetben lépést hiz
inhomogén perturbáció

δs és δh lin. kapcsolata: lineáris válaszfüggvény
(susceptibilitás)

$$\cancel{a m} + a \delta s(\underline{r}) + u\left(\cancel{m^3} + 3 m^2 \delta s + \dots\right) - c \Delta \delta s = \cancel{H} + \delta h$$

$$\left(a + 3 u m^2\right) \delta s(\underline{r}) - c \Delta \delta s(\underline{r}) = \delta h(\underline{r})$$

Fourier-transformáció: $\Delta \rightarrow -q^2$

$$\underbrace{\left(a + 3 u m^2 + c q^2\right)}_{\chi^{-1}(q)} \delta s_q = \delta h_q$$

$$\xi^{-2} = \frac{a + 3 u m^2}{c}$$

$$\chi^{-1}(q) = c\left(\frac{a + 3 u m^2}{c} + q^2\right) = c\left(\xi^{-2} + q^2\right)$$

$$\chi(q) = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{\xi^{-2} + q^2}$$

$$C(q) = k_B T \cdot \chi(q)$$

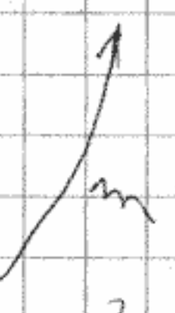
korelační - vlastní tátel

$$C(q) = \frac{k_B T}{c} \cdot \frac{1}{\xi^{-2} + q^2}$$

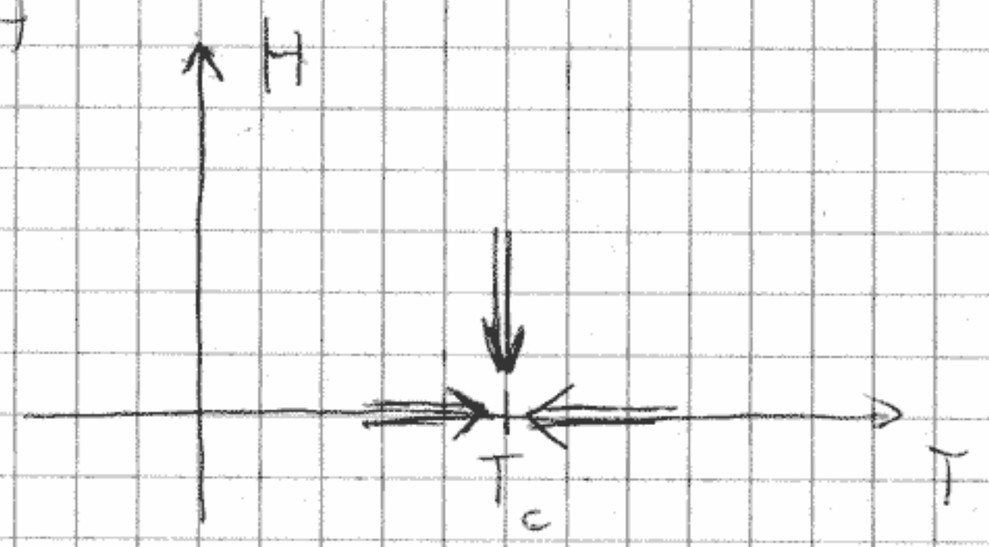
$$C(r) = \frac{k_B T}{c} \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{-\frac{r}{\xi}}}{r}$$ Yukawa - alsk

ξ a korelační délka

$$\xi^{-2} = \frac{a + 3um^2}{c} = \begin{cases} \frac{a}{c} & T > T_c \quad H = 0 \\ -2\frac{a}{c} & T < T_c \quad H = 0 \quad m^2 = -\frac{a}{u} \\ \frac{3u}{c}\left(\frac{H}{u}\right)^{\frac{2}{3}} & T = T_c \quad H \neq 0 \quad um^3 = H \end{cases}$$



$$am + um^3 = H$$



$$\xi \sim \frac{1}{|a|^{\frac{1}{2}}} \sim \frac{1}{|T - T_c|^{\frac{1}{2}}}$$

$$\xi \sim H^{-\frac{1}{3}}$$

$T = T_c \quad H = 0$ kossitování korelačních

$$C(q) = \frac{k_B T}{c} \cdot \frac{1}{q^2} \qquad C(r) = \frac{k_B T}{c} \cdot \frac{1}{4\pi r}$$

- egzakt eredmények (modellrendszerek) — 2d Ising-modell — kritikus
  szférikus-modell — exponensek

- becslések

redukált hőmérséklet $t = \frac{T - T_c}{T_c}$

$$\left.\begin{array}{l} t<0 \\ H=0 \end{array}\right\} \quad m \sim |t|^{\beta}$$

$$\left.\begin{array}{l} t>0 \text{ vagy } t<0 \\ H=0 \end{array}\right\} \quad \chi \sim |t|^{-\gamma}$$

$$t=0, \; H \neq 0 \qquad m^{\delta} \sim H$$

$$\left.\begin{array}{l} t>0 \text{ vagy } t<0 \\ H=0 \end{array}\right\} \quad C_{H=0} \sim |t|^{-\alpha}$$ fajhő

$$\left.\begin{array}{l} t>0 \text{ vagy } t<0 \\ H=0 \end{array}\right\} \quad \xi \sim |t|^{-\nu}$$

$$t=0 \quad H \neq 0 \qquad \xi \sim H^{-\mu}$$

$$t=0 \quad H=0 \qquad C(q) \sim \frac{1}{q^{2-\eta}}$$

exponensek $\beta \; \gamma \; \delta \; \alpha \; \nu \; \mu \; \eta$

Landau-elmélet	d=2 Ising (pontos)	d=3 Ising	mérések
$\beta = \frac{1}{2}$	1/8	0,33	~ 1/3
$\gamma = 1$	7/4	1,24	~ 4/3
$\delta = 3$	15	4,82	~ 5
$\alpha = 0$ (ugrás)	0 (log t)	0,11	~ 0
$\nu = \frac{1}{2}$	1	0,63	~ $\frac{2}{3}$
$\mu = \frac{1}{3}$			
$\eta = 0$	1/4	0,03	~ 0

Landau-elmélet dimenziótól független, ez nem teljesül viszont a mérésekkel és a modell eredményekkel

Korrektens-e a Landau-elmélet?

Ginzburg-kritérium

$$M = \int d^d r \, \langle S(r) \rangle = V \cdot m$$

$$\chi = \frac{1}{k_B T} C(q=0) = \frac{1}{k_B T} \cdot \frac{1}{V}$$

$\uparrow$

$\chi(q=0)$

Ginzburg-kritérium (folytatás)

$$\Delta M^2 = \left\langle \int d^d r \, (s(\underline{r}) - m) \cdot \int d^d r' \, (s(\underline{r}') - m) \right\rangle =$$

$$= \int d^d r \int d^d r' \, C(r - r') = \int d^d r' \, C(q=0) =$$

$$= V \cdot C(q=0) = V k_B T \cdot \chi$$

relatív szórás $T < T_c$

$$\frac{\Delta M^2}{M^2} = \frac{V k_B T \chi}{V^2 m^2} = \frac{k_B T \chi}{V m^2}$$

ezt az a termodinamikai kritérium vetette

hiszen relatív fluktuációk

$\sim \xi$ lin. méretű tartomány

$$\frac{\Delta M^2}{M^2} \sim \frac{k_B T \chi}{\xi^d m^2} \sim |t|^{-1-1+\frac{d}{2}}$$

$$\chi \sim |t|^{-1} \qquad m \sim |t|^{\frac{1}{2}} \qquad \xi \sim |t|^{-\frac{1}{2}}$$

$|t| \to 0$ esetén hiszi szerint a relatív fluktuáció,

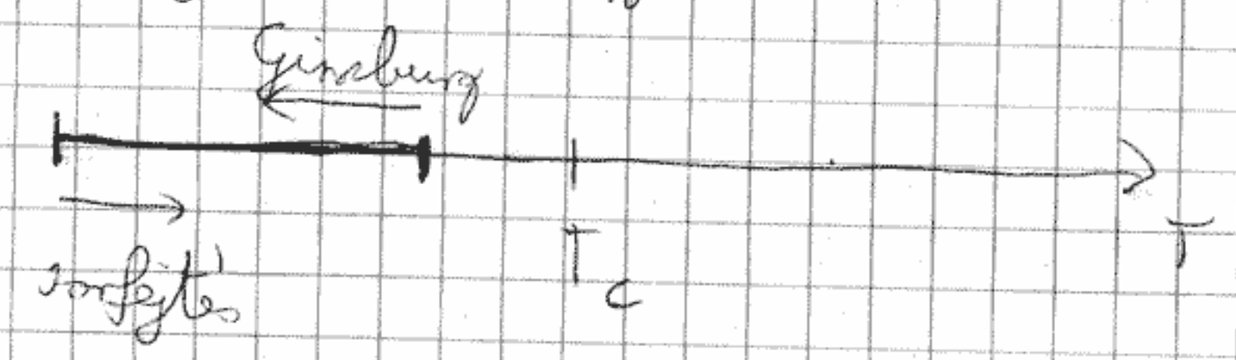
ha $-2 + \frac{d}{2} \geq 0$ $\boxed{d \geq 4}$

kisebb dimenziókban Landau-elmélet nem működhet

6 dimenziós fokú London-elmélet konzist, ha rögzítjük a ξ és κ

$\underline{d=3}$: $|t| \to 0$ elromlik a London-elmélet

érvényes lehet egy adott



itt viselkedhet jól a London-elmélet

$$\frac{k_B T \kappa}{\xi^3 m^2} = \frac{k_B T \frac{1}{2a(T_c - T)}}{\xi_0^3 \left(\frac{T - T_c}{T_c}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{a(T_c - T)}{u}} =$$

$$= \frac{k_B u}{2 a^2 T_c \left(\frac{T_c - T}{T_c}\right)^{\frac{1}{2}} \xi_0^3} \ll 1$$

$$\Delta C_{H=0} = V \cdot \frac{a^2 T_c}{2u}$$

$$\frac{V k_B}{4 \Delta C_{H=0} \xi_0^3} < \left(\frac{T_c - T}{T_c}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\downarrow$

mérhető paraméterek

szupravezetés

$\xi_0 \sim 1000$ Å $\Rightarrow$ sokkal kisebb mérettek a kritikus pontho, nehezen mérhető ki az ettől való eltérés

London-elmélet és átlagtérelmélet kritikus pont körül hasonló eredményt ad

<u>Izotróp ferromágnes</u>

$$\underline{m}(\underline{H}) = f(H)\cdot\frac{\underline{H}}{H} \qquad m_\alpha = f(H)\,\frac{H_\alpha}{H}$$

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{\partial m_\alpha}{\partial H_\beta} = \frac{df}{dH}\cdot\frac{H_\beta H_\alpha}{H^2} - \frac{1}{H^2}f(H)\,\frac{H_\beta H_\alpha}{H} + \frac{f(H)}{H}\delta_{\alpha\beta}$$

$$= \underbrace{\frac{df}{dH}\cdot\frac{H_\alpha H_\beta}{H^2}}_{\underline{H}\text{ irányú projektor}} + \underbrace{\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{H_\alpha H_\beta}{H^2}\right)\frac{f(H)}{H}}_{\underline{H}\text{-ra merőleges vetítő projektor}}$$

$$\underline{H} = (0, 0, H)$$

$$\underline{\underline{\chi}} = \begin{pmatrix} \frac{f(H)}{H} & & \\ & \frac{f(H)}{H} & \\ & & \frac{df}{dH} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_T & & \\ & \chi_T & \\ & & \chi_L \end{pmatrix}$$

$\underline{H \to 0}$ $\quad T > T_c$: $f(H) \to 0$ $\qquad \frac{f(H)}{H} \simeq \chi$

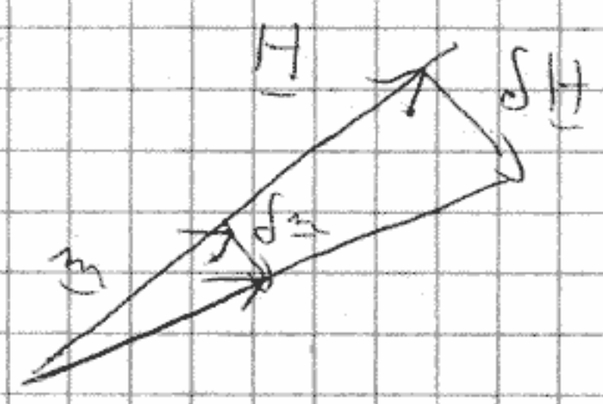
$$f(H) \simeq \chi \cdot H$$

mind ugyanaz $\chi_L \simeq \chi_T \simeq \chi$

$$\frac{df}{dH} \simeq \chi$$

$T < T_c$ $\quad f(H) \to m_s$

$\chi_T = \frac{m_s}{H} \to \infty$ divergál az egész alacsony hőmérséklet tartományban



$$\chi_T = \frac{\delta m}{\delta H} = \frac{m}{H}$$

Landau-elmélet

$$F_\epsilon = \int d^3r \left\{ W_0 + \frac{a}{2} \underline{S}(\underline{r}) + \frac{u}{4} \left(\underline{S}(\underline{r})^2 \right)^2 - \underline{h}(\underline{r}) S(\underline{r}) + \right.$$

$$\left. + \frac{c}{2} \underbrace{\left(\underline{\nabla} \underline{S} \right)^2}_{\sum_{\alpha=1}^{3} \left(\underline{\nabla} S_\alpha \right)^2 = \sum_{\alpha,\beta} \left(\partial_\beta S_\alpha \right)^2} \right\}$$

$$S(\underline{r}) \to S(\underline{r}) + \delta S(\underline{r})$$

$$a \underline{S}(\underline{r}) + u \underline{S}(\underline{r})^3 - c \Delta \underline{S}(\underline{r}) = \underline{h}(\underline{r})$$

$$\downarrow$$

$$\left(\underline{S}(\underline{r})^2 \right) \underline{S}(\underline{r})$$

Langevin: $a \cdot \underline{m} + u \cdot \underline{m}^3 \cdot \underline{m} = \underline{H} \qquad \underline{H} \parallel \underline{m}$

$$a \cdot m + u \cdot m^3 = H$$

$$\underline{S}(\underline{r}) = \underline{m} + \delta \underline{S}(\underline{r})$$

$$\underline{h}(\underline{r}) = \underline{H} + \delta \underline{h}(\underline{r})$$

$$\underline{S}^2 \simeq \underline{m}^2 + 2\underline{m}\,\delta\underline{S}$$

$$a \cdot \delta \underline{S} + u\left(\underline{m}^2 \delta \underline{S} + 2(\underline{m}\,\delta\underline{S})\,\underline{m}\right) - c\,\Delta\,\delta\underline{S} = \delta\underline{h}$$

$$\underline{H} = (0, 0, H) \qquad \underline{m} = (0, 0, m)$$

$$a \cdot \delta S_z + u m^2 \delta S_z + 2u(m \cdot \delta S_z)\, m - c\,\Delta\,\delta S_z = \delta h_z$$

$$(a + 3u m^2 - c\Delta)\,\delta S_z = \delta h_z$$

Fourier: $\underbrace{(a + 3u m^2 + c q^2)}_{\chi_z^{-1}(q)}\,\delta S_{z,q} = \delta h_{z,q}$

$$a\,\delta S_x + u m^2 \delta S_x - c\,\Delta\,\delta S_x = \delta h_x$$

Fourier: $\underbrace{(a + u m^2 + c q^2)}_{\chi_\perp^{-1}(q)}\,\delta S_{x,q} = \delta h_{x,q}$

$$\left.\begin{array}{l} T > T_c \\ H \to 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \chi_L^{-1}(q) = a + c\,q^2 \\ \chi_T^{-1}(q) = a + c\,q^2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} T < T_c \\ H \to 0 \end{array}\right\} \quad \chi_L^{-1}(q) = \frac{H}{m} + c\cdot q^2$$

$$\chi_T^{-1}(q) = c\cdot q^2$$

szingularitás a kvázistatikus görbén $(T < T_c)$

$$C_T(q) = k_B T\, \chi_T(q) \sim \frac{1}{q^2}$$

$$C_T = \langle S_x(\underline{r})\, S_x(0) \rangle \sim \frac{1}{r}$$

hosszútávú korrelációk

<u>Goldstone - tétel</u>

(Goldstone - szingularitás)

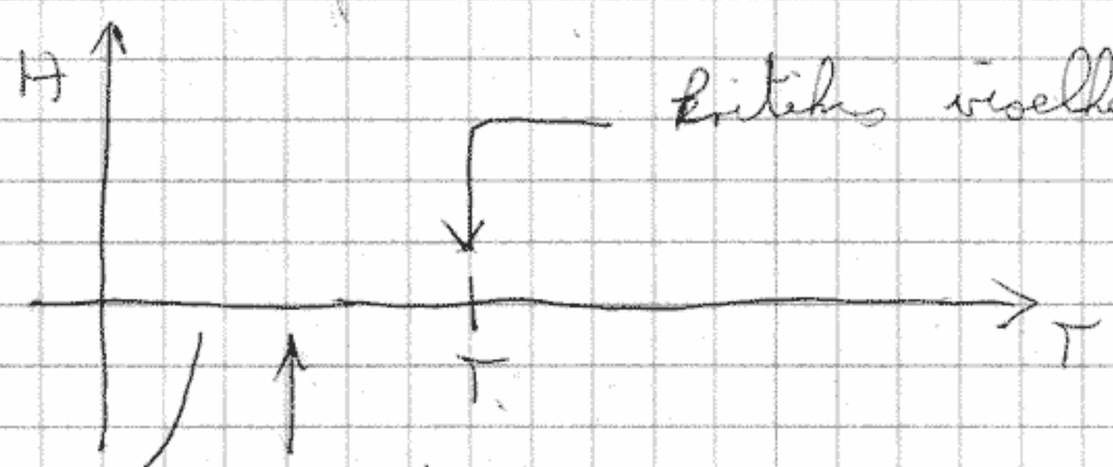
folytonos szimmetria sérülése esetén

(1) transzverzális korrelációk hosszútávúak

(hatványfüggvény lecsengés) $C_T(q) \sim \frac{1}{q^2}$

(2) gap nélküli propagáló módusok megjelenése

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Re}\,\omega(q) \to 0 \\ \dfrac{\mathrm{Im}\,\omega(q)}{\mathrm{Re}\,\omega(q)} \to 0 \end{array}\right\} \quad q \to 0$$

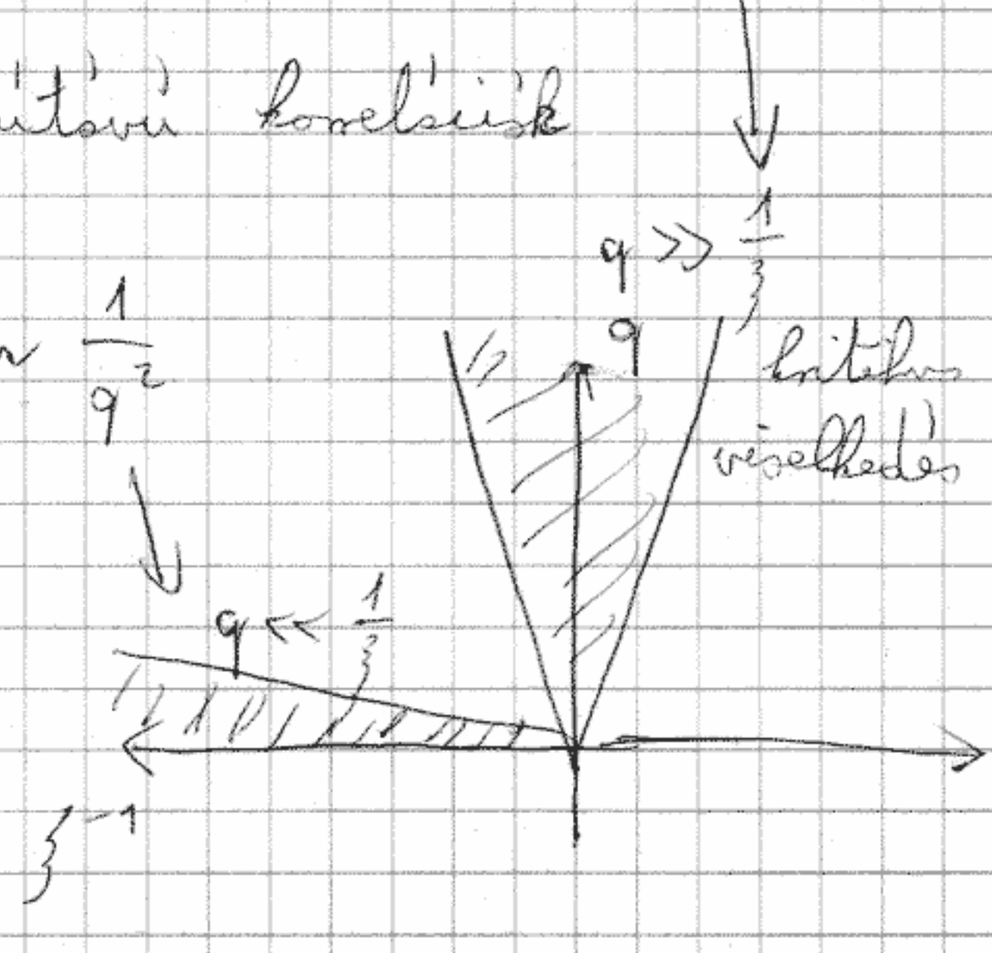


kritikus viselkedés $C \sim q^{-(2-\eta)}$

Kopinterio

jobbról singularitás: hasítható korelációk

Goldstone-módus $C_T(q) \sim \frac{1}{q^2}$



Mermin - Wagner tétel

$\underline{H} = (0, 0, H)$

$\underline{m} = (0, 0, m)$

$$C_T^{(V)} = \langle S_x(V)\, S_x(0) \rangle$$

$$C_T(q) = k_B T\, \chi_T(q)$$

$C_T(q) \sim \frac{1}{q^2}$ ($H = 0$, $m \neq 0$, J_{ij} kicserélődési kölcs. rövid hatótávolságú)

$\sum_i |J_{ij}| (\underline{R}_i - \underline{R}_j)^2$ véges

$$\langle S_x(0)^2 \rangle < s(s+1)$$

$$\langle S_x(0)\, S_x(0) \rangle = \frac{1}{N} \sum_q C_T(q) = \frac{V_{BZ}}{(2\pi)^d} \int_{BZ} d^d q \; C_T(q)$$

$$\int_0 dq \cdot q^{d-1} \frac{1}{q^2} = \int_0 dq \cdot q^{d-3}$$

egy és két dimenzióban nincs kvantumos rendeződés

Magashőmérsékleti sorok

$$e^{-\beta \hat{H}} = 1 - \beta \hat{H} + \frac{1}{2} \beta^2 \hat{H}^2 \pm \dots \qquad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

$$\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta \hat{H}}\right) = \mathrm{Tr}\, \hat{I} - \beta\, \mathrm{Tr}\, \hat{H} + \dots$$

véges számú állapot esetén működik

Ising-modell

$H = 0$ nincs kölcsönhatás $\quad H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j$

$$e^{-\beta H} = e^{K \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j} = \prod_{\langle i,j \rangle} e^{K S_i S_j} \qquad K = \frac{J}{k_B T}$$

$$e^{\pm x} = \operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x \qquad S_i S_j = \pm 1$$

$$e^{-\beta H} = \prod_{\langle i,j \rangle} \left(\operatorname{ch} K + \underbrace{S_i S_j}_{\pm 1} \operatorname{sh} K \right) =$$

$$= (\operatorname{ch} K)^P \cdot \prod_{\langle i,j \rangle} \left(1 + v S_i S_j \right)$$

$$v = \operatorname{th} K = \operatorname{th}\left(\frac{J}{k_B T} \right)$$

P: ennyi szomszéd van V ~~[illegible]~~ összesen

$\frac{N \cdot z}{2}$ a termodinamikai határesetben

z: 1 pont szomszédainak a száma

$$Z = (\operatorname{ch} K)^P \cdot \sum_{S_1, \dots, S_N} \prod_{\langle i,j \rangle} \left(1 + v S_i S_j \right) = \dots$$

$$\prod_{\langle i,j \rangle} \left(1 + v S_i S_j \right) = 1 + v \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j +$$

$$+ v^2 \sum_{\substack{\langle i,j \rangle \\ \langle m,n \rangle \\ \langle i,j \rangle \neq \langle m,n \rangle}} S_i S_j S_m S_n + \dots$$

$$\sum_{S_1 \dots S_N} S_1^{r_1} \cdot S_2^{r_2} \cdot \dots \cdot S_N^{r_N} =$$

$$= \left(\sum_{S_1} S_1^{r_1}\right)\left(\sum_{S_2} S_2^{r_2}\right) \cdot \dots \left(\sum_{S_N} S_N^{r_N}\right)$$

$$r_i = 0, 1, 2, \dots, z$$

$$\sum_{S_i} S_i^{r_i} = \begin{cases} 2 & \text{ha } r_i \text{ páros} \\ 0 & \text{ha } r_i \text{ páratlan} \end{cases}$$

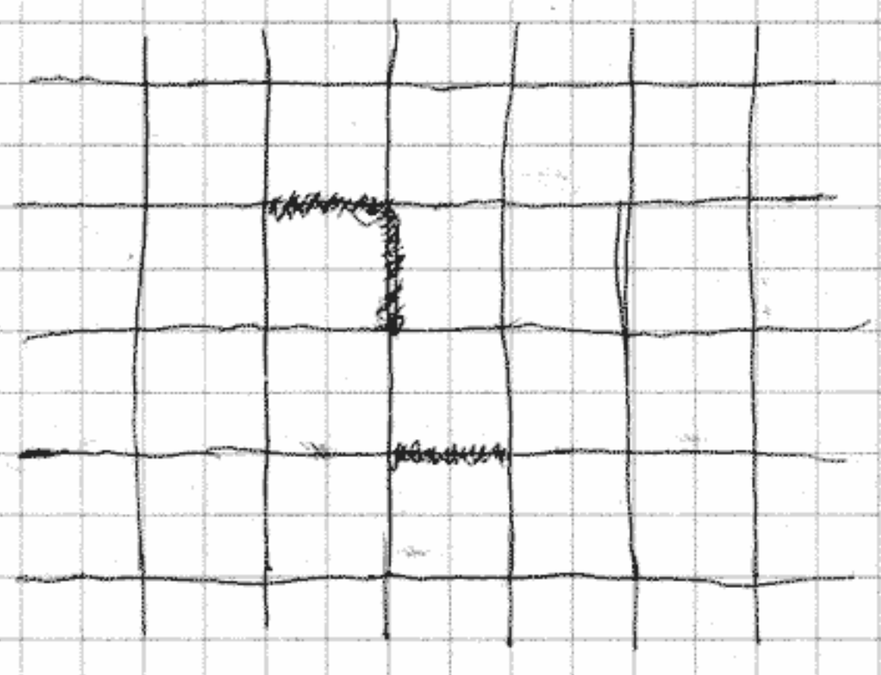
$$S_i \in \{+1, -1\}$$

$$\sum_{S_1 \dots S_N} S_1^{r_1} \cdot S_2^{r_2} \cdot \dots \cdot S_N^{r_N} = \begin{cases} 2^N, & \text{ha minden } r_i \text{ páros} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$Z = (\cosh K)^p \cdot \sum_{l=0}^{p} v^l \cdot 2^N \cdot g(l)$$

$\downarrow$

hány fajta olyan páros kiválasztás létezik, ahol l db legközelebbi szomszédot választunk ki úgy, hogy minden S_i páros számszor szerepel



gráfok

minden pontba páros él fusson be

$g(l)$: l élből álló gráfok, páros fokszámú csúcsokkal

négyzetrács

$g(0) = 1$

$g(1) = 0$

$g(2) = 0$

$g(3) = 0$

$g(4) = N$

$$Z = (\cosh K)^P \cdot 2^N \cdot (1 + N v^4 + \dots)$$

korrelációs fv.: $C_{mn} = \langle S_m S_n \rangle =$

$$= \frac{1}{Z} \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta H} S_m S_n\right) = \frac{1}{Z} (\cosh K)^P \cdot$$

$$\cdot \underbrace{\sum_{S_1 \dots S_N} \left(\prod_{\langle i,j \rangle} (1 + v S_i S_j) \cdot S_m S_n \right)}_{2^N \cdot \sum_{l=0}^{P} v^l \cdot \eta_{mn}(l)}$$

$$\eta_{mn}(l) = g(l)$$

$$\chi = \sum_m \chi_{mn} = \frac{1}{k_B T} \sum_m C_{mn}$$

$$k_B T \cdot \chi = \sum_m C_{mn} = \frac{1}{Z} (ch\, K)^D \cdot 2^N \cdot \sum_{l=0}^{D} v^l \cdot \eta(l)$$

$$\eta(l) = \sum_m \eta_{mn}(l)$$

$$k_B T \cdot \chi = \frac{\sum_{l=0}^{D} v^l \cdot \eta(l)}{\sum_{l=0}^{D} v^l \cdot g(l)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v^n$$

négyzetrácson

$\eta(0) = 1$

$\eta(1) = z$ (legfeljebb szomszédok száma)

$\eta(2) = 4 \cdot 3$

$\eta(3) = 4 \cdot 3 \cdot 3$

$\eta(4) = 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 - 8 + N$

$$k_B T \cdot \chi = \frac{1 + 4v + 12v^2 + 36v^3 + 100v^4 + Nv^4 + \dots}{1 + Nv^4 + \dots}$$

$$= 1 + 4v + 12v^2 + 36v^3 + 100v^4 + \dots$$

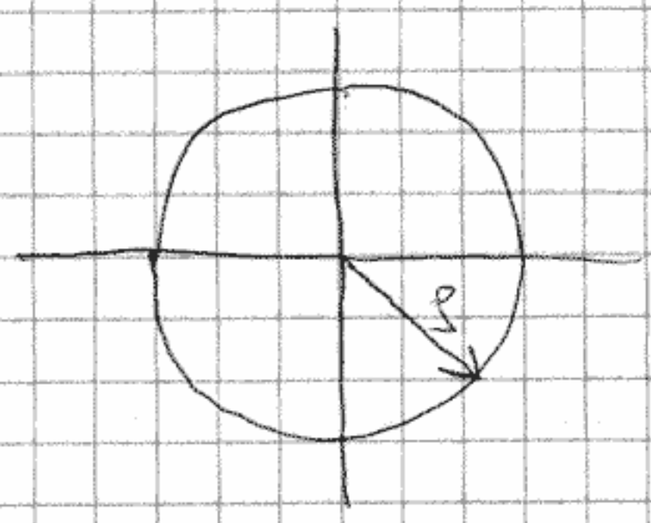
$$v = \operatorname{th} K = \operatorname{th} \frac{J}{k_B T}$$

$$0 \le v \le 1$$

$T \to \infty$ $\qquad$ $T = 0$

$$\chi \sim (V_c - V)^{-\gamma} \sim (T - T_c)^{-\gamma}$$

$$k_B T \cdot \chi(V) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot V^n$$



ρ: konvergencia sugár

$|V| < \rho$ a sor konvergens

$|V| > \rho$ divergens

$\underline{\rho \le V_c}$

<u>kritikus viselkedés</u>

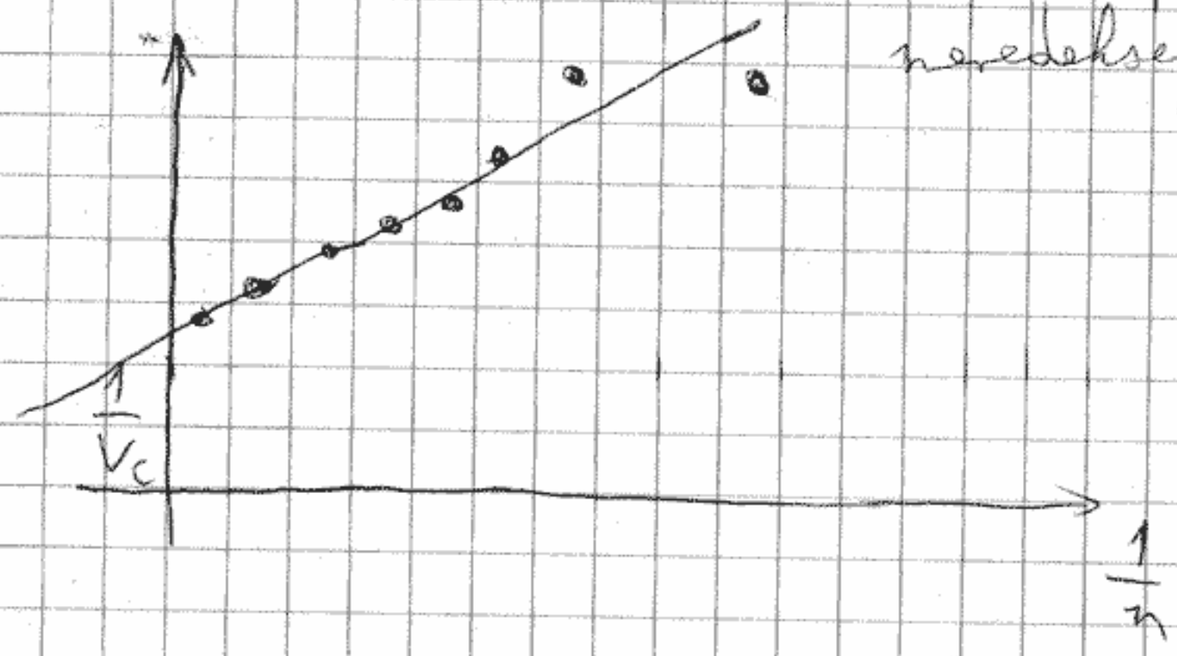
$\rho = V_c$

$$\chi \simeq A\left(1 - \frac{V}{V_c}\right)^{-\gamma} = A\left(1 + \gamma \frac{V}{V_c} + \frac{\gamma(\gamma+1)}{2}\left(\frac{V}{V_c}\right)^2 + \right.$$

$$\left. \dots + \frac{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}{n!}\left(\frac{V}{V_c}\right)^n + \dots \right)$$

d'Alembert kritérium $\qquad \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{\rho}$

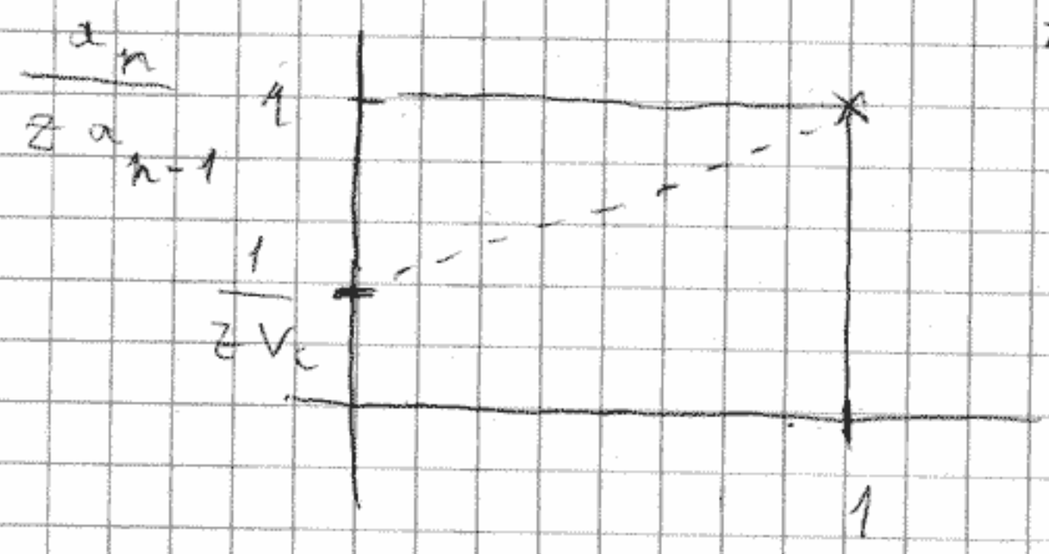
$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \simeq \frac{\gamma + n - 1}{n} \cdot \frac{1}{v_c} = \frac{1}{v_c}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{n}\right)$$



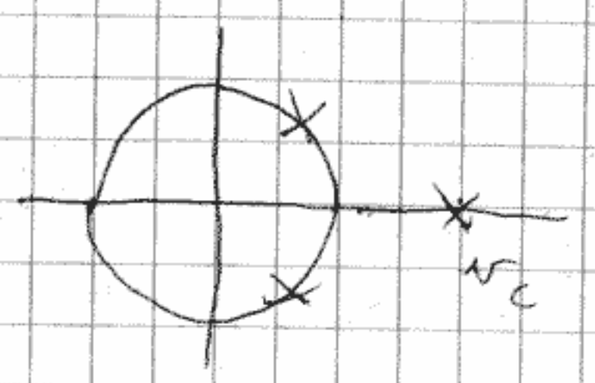
meredekség $\frac{\gamma - 1}{v_c}$

$$k_B T \cdot X(v) = 1 + z \cdot v$$

koordináták szám



ha $\rho < v_c$, akkor asztatikus folytatással eljutottak



módszerek: – váltók transzformációja
– Padé – approximáció

mennyiségek függvények közelítése

$$\frac{\partial \ln \chi(v)}{\partial v} = \frac{\partial\left(-\gamma \ln(v_c - v)\right)}{\partial v} = -\frac{\gamma}{v - v_c}$$

$$P_{LM} = \frac{p_0 + p_1 v + p_2 v^2 + \dots + p_L v^L}{1 + q_1 v + \dots + q_M v^M}$$

Padé approximáció

2D Ising-modellben

↳ kritikus kitevőket különböznek — nem univerzális

↳ kritikus exponens megegyezik — univerzális

<u>Rushbrooke-egyenlőtlenség</u>

folyadékok $C_p - C_V = \frac{T \cdot V \alpha^2}{\kappa_T} =$

$$= VT \frac{\left[\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right]^2}{-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T} = T \frac{\left[\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right]^2}{-\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T}$$

mágnesek $C_H - C_M = T \cdot \frac{\left[\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H\right]^2}{\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T}$

$C_M > 0$

$$C_H > \frac{T\left[\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H\right]^2}{\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T}$$

$T < T_c$ $\quad C_H \sim |t|^{-\alpha}$

$$M \sim |t|^{\beta}$$

$$\chi \sim |t|^{-\gamma}$$

$$A \cdot |t|^{-\alpha} > B\,|t|^{2(\beta-1)+\gamma}$$

$$|t| \to 0$$

$$-\alpha \leq 2\beta - 2 + \gamma$$

$$\boxed{2\beta + \gamma + \alpha \geq 2}$$

<u>Landau</u> $\alpha = 0 \quad \beta = \frac{1}{2} \quad \gamma = 1$

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 1 + 0 = 2$$

<u>2d Ising</u> $\alpha = 0 \quad \beta = \frac{1}{8} \quad \gamma = \frac{7}{4}$

$$2 \cdot \frac{1}{8} + \frac{7}{4} + 0 = 2$$

egyenlőségek formájában teljesülnek a fentit

további egyenlőtlenségek is vannak, ezek is egyenlőségek formájában teljesülnek

skálahipotézis

termodinamikai skálázás

$$\lambda S(E,V,N) = S(\lambda E, \lambda V, \lambda N)$$

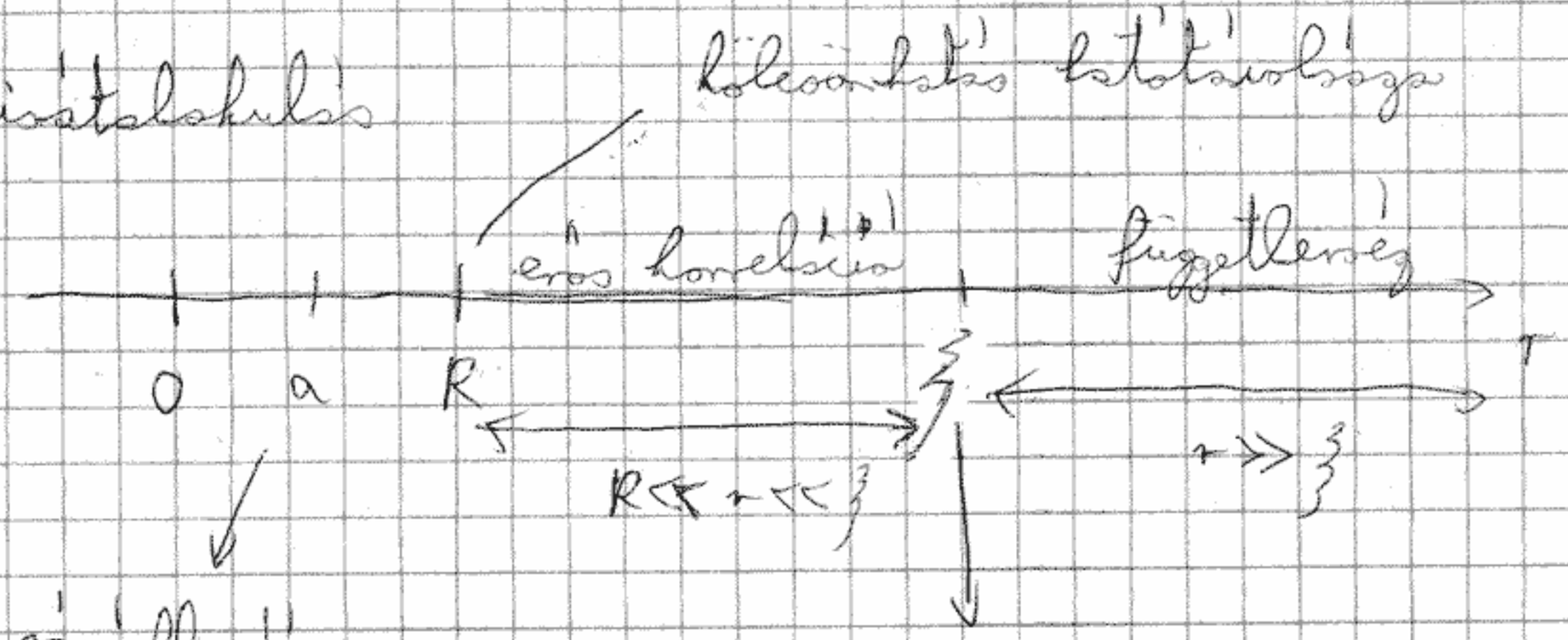
hidrodinamikai skálázás

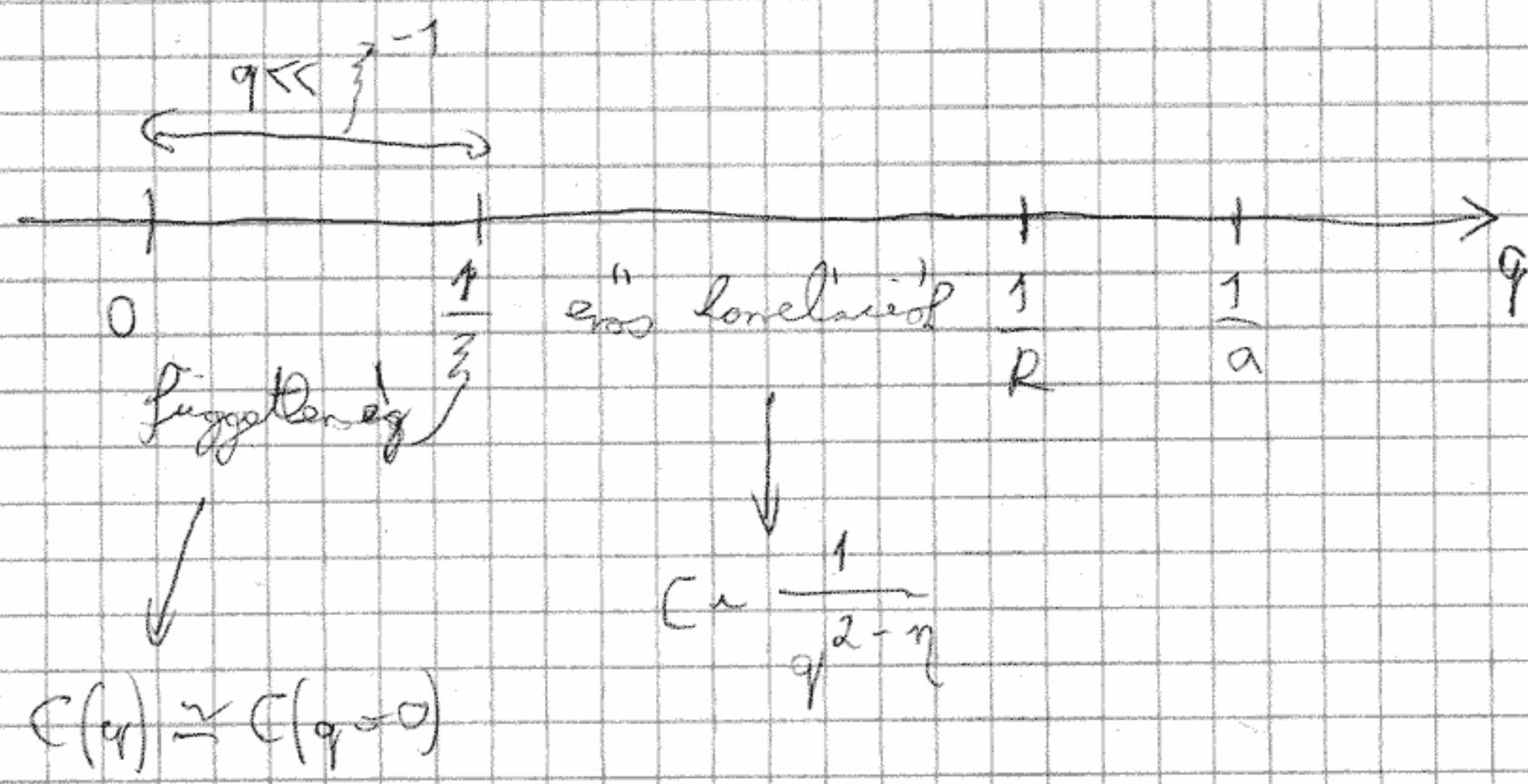
korrelációs törvények

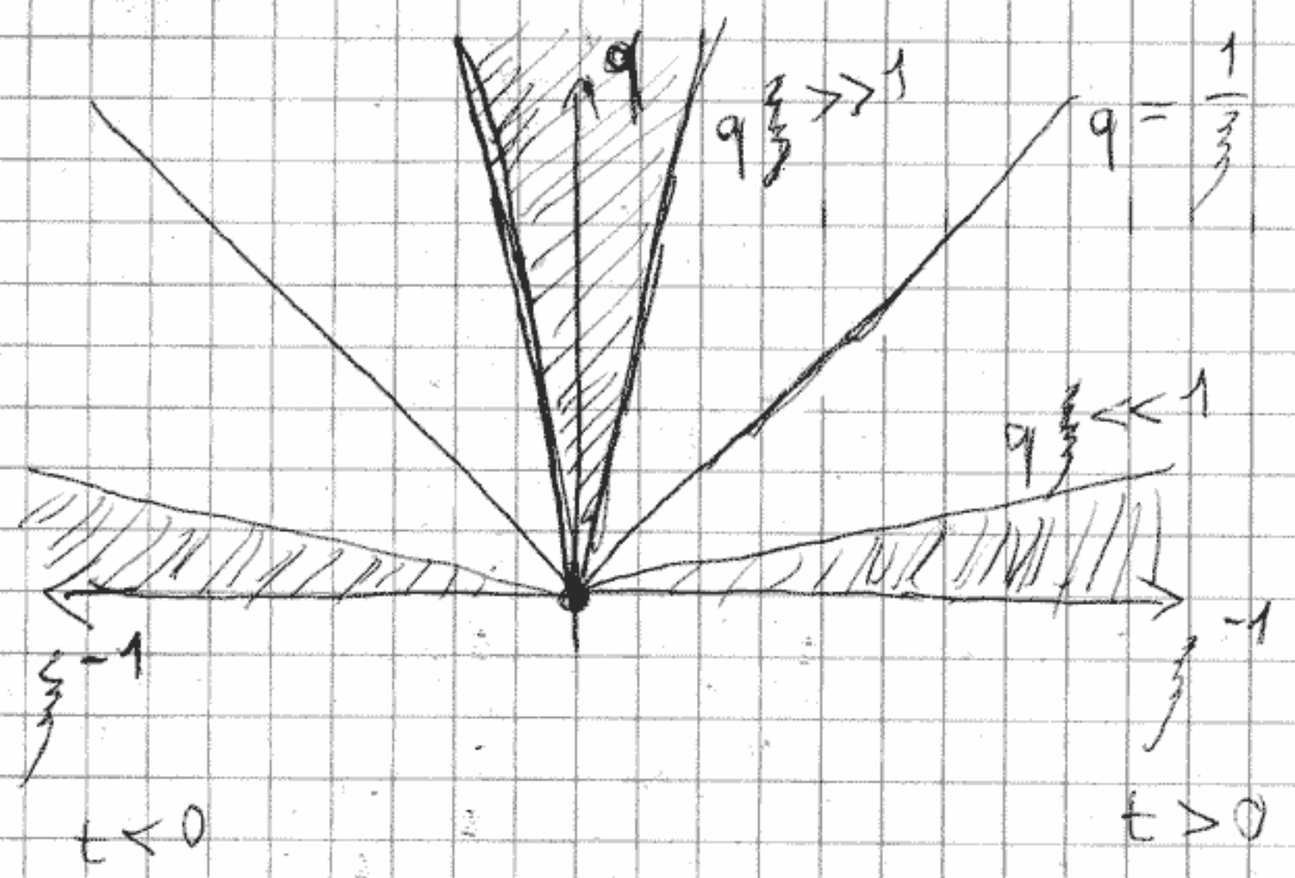
across Reynolds, ... korrelációs

fázisátalakulás

kölcsönhatás hatótávolsága







$q\xi \gg 1$

$$\boxed{C \sim \frac{1}{q^{2-\eta}}}$$

$q\xi \ll 1$

$$C \simeq C(q=0)$$

$$\boxed{C \sim \xi^{\frac{\gamma}{\nu}}} \Longleftarrow \begin{cases} \ell_B T \cdot \chi \sim |t|^{-\gamma} \\ \xi \sim |t|^{-\nu} \end{cases}$$

(A) asimptotikus viselkedések ring illesztése

singularitás csak a $q=0$, $\xi^{-1}=0$ pontban

illesztés $q = \frac{1}{\xi}$-nél

$$\xi^{\frac{\gamma}{\nu}} \sim \xi^{2-\eta} \qquad \boxed{\gamma = \nu(2-\eta)}$$

skálatörvény

(B) egyetlen karakterisztikus hosszúság: ξ

$$C(q,\xi) = C(q=0,\xi)\cdot \Phi_{\pm}(q\cdot\xi) = \xi^{\frac{\gamma}{\nu}} \cdot f_{\pm}(q\cdot\xi)$$

$$A\xi^{\frac{\gamma}{\nu}}$$

dimenziótlan fv.

$$x = \frac{x'}{b} \qquad \xi = \frac{\xi'}{b} \qquad q = b \cdot q'$$

$$C(q, \xi) = \xi^{\frac{\gamma}{\nu}} \cdot f_{\pm}(q \cdot \xi) = \left(\frac{\xi'}{b}\right)^{\frac{\gamma}{\nu}} \cdot \underbrace{f_{\pm}\left(b \cdot q' \cdot \frac{\xi'}{b}\right)}_{f_{\pm}(q' \cdot \xi')}$$

$$C\left(b \cdot q', \frac{\xi'}{b}\right) = b^{-\frac{\gamma}{\nu}} \cdot C(q', \xi')$$

visszaolvasva

$q' \to q$

$\xi' \to \xi$

$$\boxed{C(q, \xi) = b^{+\frac{\gamma}{\nu}} \cdot C\left(b \cdot q, \frac{\xi}{b}\right)}$$

általánosított homogén fv.

$$\xi = \xi_0 \cdot |t|^{-\nu} \qquad \frac{\xi}{b} = \xi_0 \cdot \left(\frac{|t|}{b^{-\frac{1}{\nu}}}\right)^{-\nu} =$$

$$= \xi_0 \cdot \left(b^{\frac{1}{\nu}} \cdot |t|\right)^{-\nu}$$

$$\boxed{C(q, t) = b^{\frac{\gamma}{\nu}} \cdot C\left(b q, b^{\frac{1}{\nu}} \cdot t\right)}$$

$t = 0$

$$C(q, 0) = b^{\frac{\gamma}{\nu}} \cdot C(b \cdot q, 0) = \left(\frac{q_0}{q}\right)^{\frac{\gamma}{\nu}} \cdot C(q_0, 0) \sim q^{-\frac{\gamma}{\nu}}$$

$b q = q_0$ rögzített

def. $C(q) \sim \dfrac{1}{q^{2-\eta}}$ $\qquad \boxed{2 - \eta = \frac{\gamma}{\nu}}$

$$C(q,\xi) = \xi^{\frac{\gamma}{\nu}} \cdot f_{\pm}(q\cdot\xi)$$

$$q\cdot\xi \ll 1 \qquad f_{\pm}(q\cdot\xi) \simeq f_{\pm}(0)$$

$$q\cdot\xi \gg 1 \qquad f_{\pm}(q\cdot\xi) \sim (q\cdot\xi)^{-\frac{\gamma}{\nu}}$$

$$C \sim q^{-\frac{\gamma}{\nu}}$$

$$\xi \sim |t|^{-\nu} \quad (H=0)$$

$$\xi \sim H^{-\mu} \quad (t=0)$$

$$\boxed{C(q,t,H) = b^{\frac{\gamma}{\nu}} \cdot C\left(b\cdot q,\ b^{\frac{1}{\nu}}\cdot t,\ b^{\frac{1}{\mu}}\cdot H\right)}$$

skálaský homogenní fce

$$\chi = \frac{1}{k_B T} \cdot C(q=0)$$

$$\chi(t,H) = \frac{1}{k_B T_c} C(q=0,t,H) =$$

$$= \frac{1}{k_B T_c} b^{\frac{\gamma}{\nu}} \cdot C\left(q=0,\ b^{\frac{1}{\nu}}\cdot t,\ b^{\frac{1}{\mu}}\cdot H\right) =$$

$$= b^{\frac{\gamma}{\nu}}\ \chi\left(b^{\frac{1}{\nu}}\cdot t,\ b^{\frac{1}{\mu}}\cdot H\right)$$

FÁZISÁTALAKULÁSOK VEGF

általánosított homogén fv.

$$\lambda^n \cdot f(x,y) = f(\lambda^a x, \lambda^b y) \qquad \tilde{\lambda} = \lambda^a$$

$$\tilde{\lambda}^{\frac{n}{a}} \cdot f(x,y) = f(\tilde{\lambda} x, \tilde{\lambda}^{\frac{b}{a}} y)$$

egyik megválasztható 1-nek

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\lambda^n f_x(x,y) = f_x(\lambda^a x, \lambda^b y) \cdot \lambda^a$$

$f(x,0)$ hatványfv.

$$\lambda^n f(x,0) = f(\lambda^a x, 0) \qquad \lambda^a x = x_0$$

rögzített

$$\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{n}{a}} f(x,0) = f(x_0, 0)$$

$$\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{n}{a}} \cdot f(x,y) = f\left(x_0, \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{b}{a}} y\right)$$

susceptibilitás

$$\chi(t,H) = k_B T \cdot C(q=0,t,H) =$$

$$= k_B T\, b^{\frac{z}{\nu}} \cdot C(q=0, b^{\frac{1}{\nu}} \cdot t, b^{\frac{1}{\mu}} \cdot H) =$$

$$= b^{\frac{\gamma}{\nu}} \cdot \chi\left(b^{\frac{1}{\nu}} \cdot t,\ b^{\frac{1}{\mu}} \cdot H\right) = b^{\gamma} \cdot \chi\left(bt,\ b^{\frac{\nu}{\mu}} \cdot H\right) =$$

$$= b^{\gamma} \cdot \chi\left(bt,\ b^{\Delta} H\right) \qquad \Delta = \frac{\nu}{\mu}$$

$$\chi = \frac{\partial m}{\partial H}$$

$$m(t,H) = b^{\gamma-\Delta} \cdot m\left(bt,\ b^{\Delta} \cdot H\right)$$

$$m = -\frac{\partial f}{\partial H}$$

$$\boxed{f(t,H) = -b^{\gamma-2\Delta} \cdot f\left(bt,\ b^{\Delta} H\right)}$$

szabadenergia illetve a korrelációs
függvénye való feltételezések
$\Rightarrow$ skálaelmélet

$\boxed{\gamma, \nu, \mu}$ három exponensből indulunk ki

$$C(q,0,0) = b^{\frac{\gamma}{\nu}} \cdot C(bq,0,0) \qquad bq = q_0$$

$$= \left(\frac{q_0}{q}\right)^{\frac{\gamma}{\nu}} \cdot C(q_0,0,0)$$

$$C(q) \sim \frac{1}{q^{\frac{\gamma}{\nu}}} \qquad \text{def.} \quad C(q) \sim \frac{1}{q^{2-\eta}}$$

$$\boxed{\nu(2-\eta) = \gamma}$$

$$m(t,0) = b^{\gamma-\Delta} \cdot m(bt,0) = \qquad (t<0)$$

$$b \cdot t = -t_0$$

$$= \left|\frac{t}{t_0}\right|^{\Delta-\gamma} \cdot m(-t_0,0)$$

$$m(t,0) \sim t^{\Delta-\gamma} \qquad \boxed{\Delta-\gamma = \beta}$$

$$\text{def.} \sim t^{\beta}$$

$$m(0,H) = b^{\gamma-\Delta} \cdot m(0, b^{\Delta} H) \qquad b^{\Delta} \cdot H = H_0$$

$$m(0,H) = \left(\frac{H}{H_0}\right)^{\frac{\Delta-\gamma}{\Delta}} \cdot m(0,H_0)$$

$$m(0,H) \sim H^{\frac{\Delta-\gamma}{\Delta}} \qquad \boxed{\frac{1}{\delta} = \frac{\Delta-\gamma}{\Delta}} = \frac{\beta}{\Delta}$$

$$\text{def.} \sim H^{\frac{1}{\delta}}$$

$$f(t,0) = b^{\gamma-2\Delta} \cdot f(bt,0)$$

$$H=0 \qquad bt = \pm t_0 \qquad b = \left|\frac{t_0}{t}\right|$$

$$f(t,0) = \left|\frac{t}{t_0}\right|^{2\Delta-\gamma} \cdot f(\pm t_0, 0) \qquad \boxed{2-\alpha = 2\Delta-\gamma}$$

$$\text{def.} \quad f(t,0) \sim |t|^{2-\alpha}$$

$$\begin{pmatrix}\gamma\\ \nu\\ \mu\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}\beta\\ \eta\\ \delta\\ \alpha\end{pmatrix}$$

$$2 = 2\Delta - \gamma - \alpha =$$

$$= 2(\Delta - \gamma) + \gamma + \alpha$$

$$2 = 2\beta + \gamma + \alpha$$

Táblák korábban

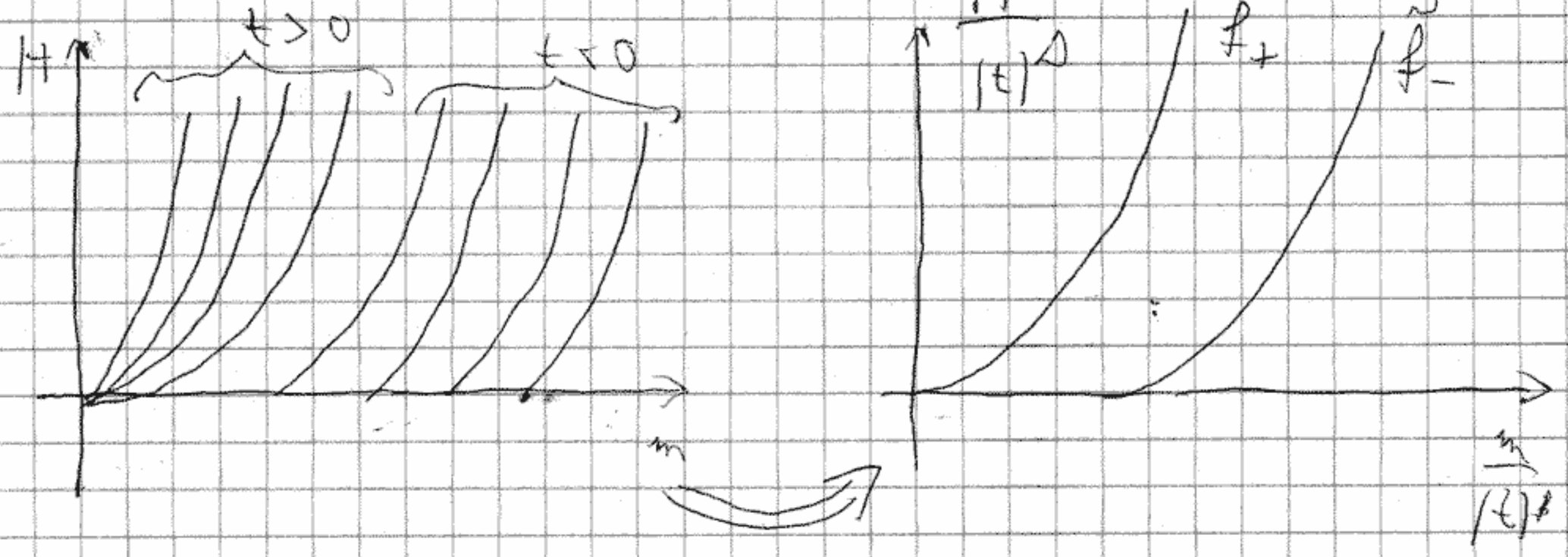
tolt összesés
(data collapse)

$$m(t, H) = b^{\gamma - \Delta} \cdot m(bt, b^{\Delta} \cdot H) =$$

$$= b^{-\beta} \cdot m(bt, b^{\Delta} \cdot H)$$

$$m(t, H) = \left|\frac{t}{t_0}\right|^{\beta} \cdot m\left(\pm t_0, \left|\frac{t_0}{t}\right|^{\Delta} \cdot H\right)$$

$$m(t, H) = |t|^{\beta} \cdot \tilde{f}_{\pm}\left(\frac{H}{|t|^{\Delta}}\right)$$



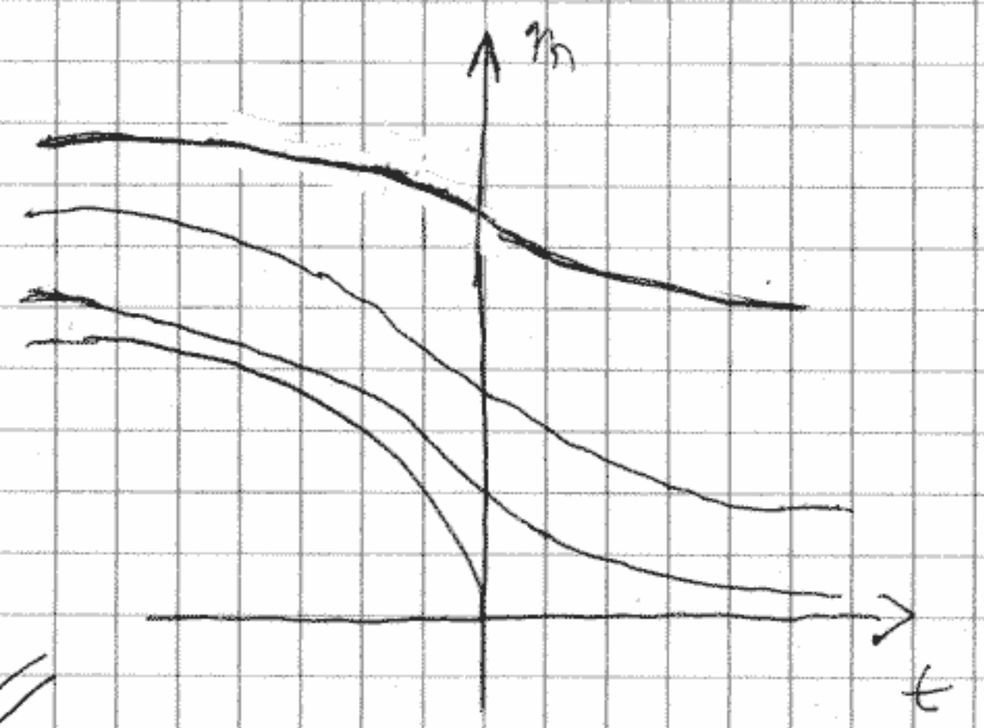
intervál 2 görbére
ezek ösze

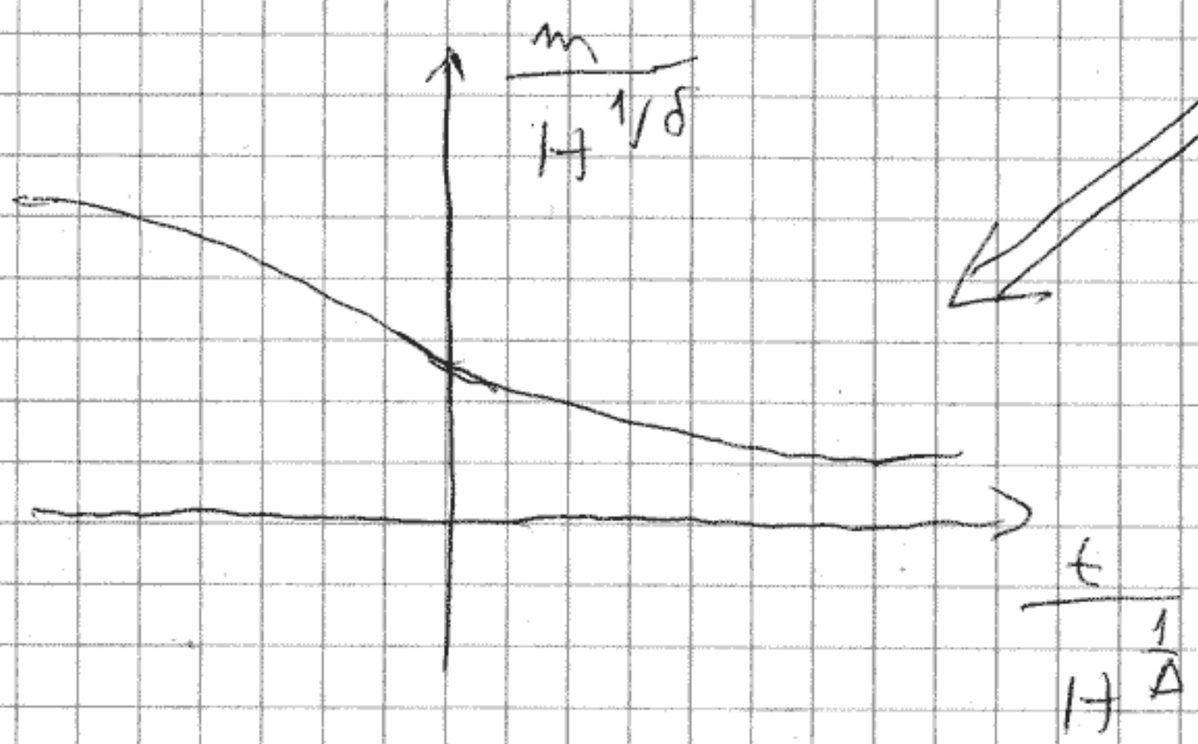
$$m(t,H) = b^{\gamma-\Delta} \cdot m(bt, b^{\Delta} H) \qquad b^{\Delta} \cdot H = H_0$$

$$m(t,H) = \left(\frac{H_0}{H}\right)^{\frac{\gamma-\Delta}{\Delta}} \cdot m\left(\left(\frac{H_0}{H}\right)^{\frac{1}{\Delta}} t, H_0\right)$$

$$-\frac{1}{\delta}$$

$$m(t,H) = H^{\frac{1}{\delta}} \cdot G\left(\frac{t}{H^{1/\Delta}}\right)$$



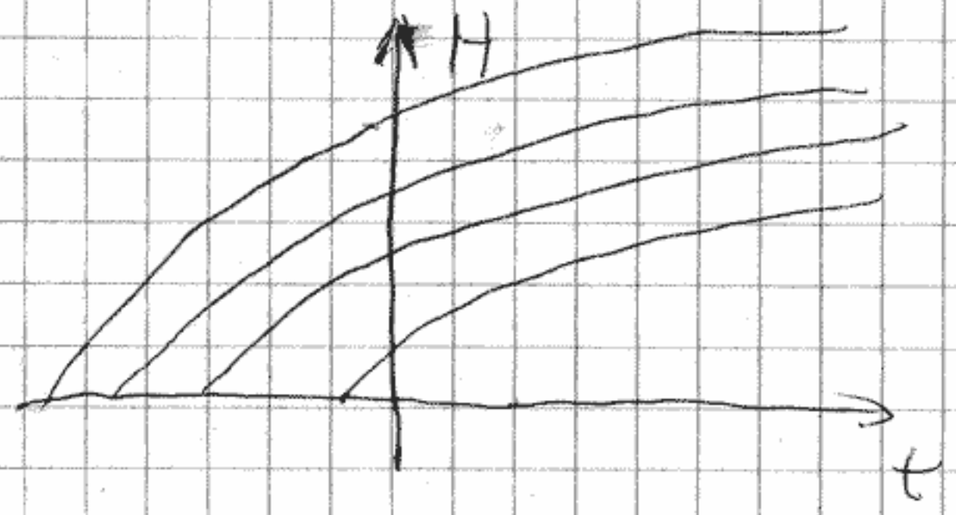


$$b^{\beta} \cdot m(t,H) = m(bt, b^{\Delta} \cdot H) \qquad b^{\beta} m = m_0$$

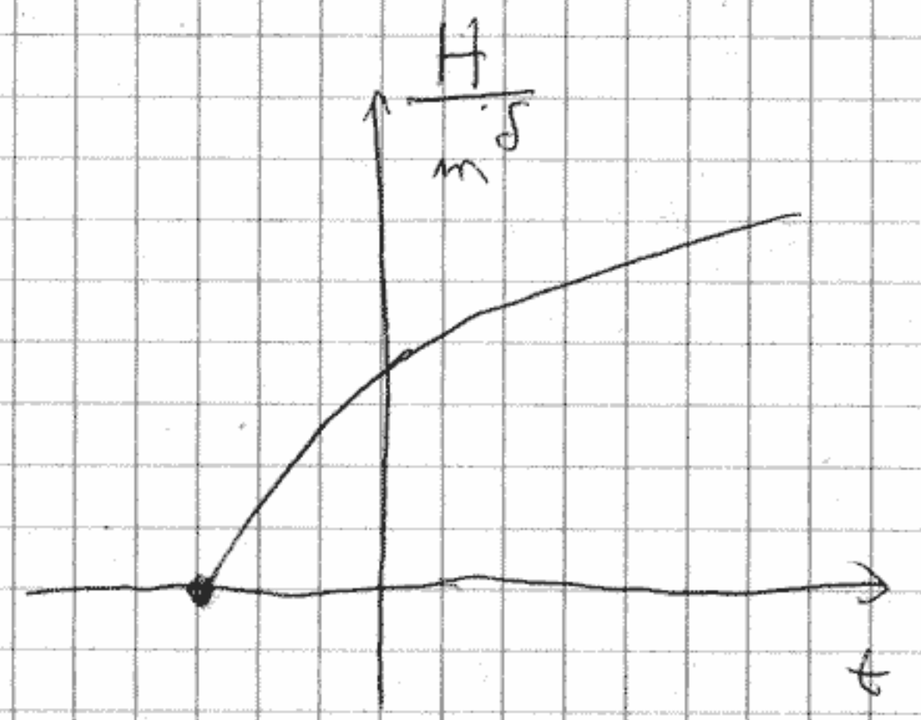
$$m_0 = m\left(\left(\frac{m_0}{m}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot t, \left(\frac{m_0}{m}\right)^{\frac{\Delta}{\beta}} \cdot H\right)$$

$$\Delta = \beta\delta$$

$$H = m^{\delta} \cdot R\left(\frac{t}{m^{\frac{1}{\beta}}}\right)$$



$\Rightarrow$



Különböző rendszerek görbéit a tengely átnyúlásával egyszerű lehet venni

Még egy összefüggés van a változók között

$$\frac{\overline{\Delta M^2}}{\overline{M}^2} = \frac{k_B T \chi}{m^2 V} \xrightarrow[V \to \infty]{} 0$$

$$V > \xi^d$$

$$\frac{k_B T \chi}{m^2 \xi^d} \ll 1 \Rightarrow \text{Landau-elmélet használható}$$

ellenkező esetben $\frac{k_B T \chi}{m^2 R^d} \sim \mathcal{O}(1)$

~~egy~~ jellemző hosszúság van $R \sim \xi$

$$\frac{\chi}{m^2 \xi^d} \sim \mathcal{O}(1)$$

$$|t|^{-\gamma - 2\beta + d\nu} \sim \mathcal{O}(1)$$

$t \to 0$ egyszerű nagyságrendi rendben

$$\boxed{d\nu - \gamma - 2\beta = 0}$$ hiperskálatörvény

Landau $\gamma = 1$ $\beta = \frac{1}{2}$ $\nu = \frac{1}{2}$

$$\frac{d}{2} - 1 - 1 = 0 \qquad d = 4$$

csak 4 dimenziókban elégíti ki a hiperskálatörvényt

$$\gamma + 2\beta = 2 - \alpha \qquad \boxed{d\nu = 2 - \alpha}$$

<u>Skálázás, univerzalitás</u>

<u>renormálási csoport elmélet</u> (Wilson-féle megfogalmazás)

minimális kosztváltozás, hogyan változik a rendszer leírása

minimális hossz: l_{min}

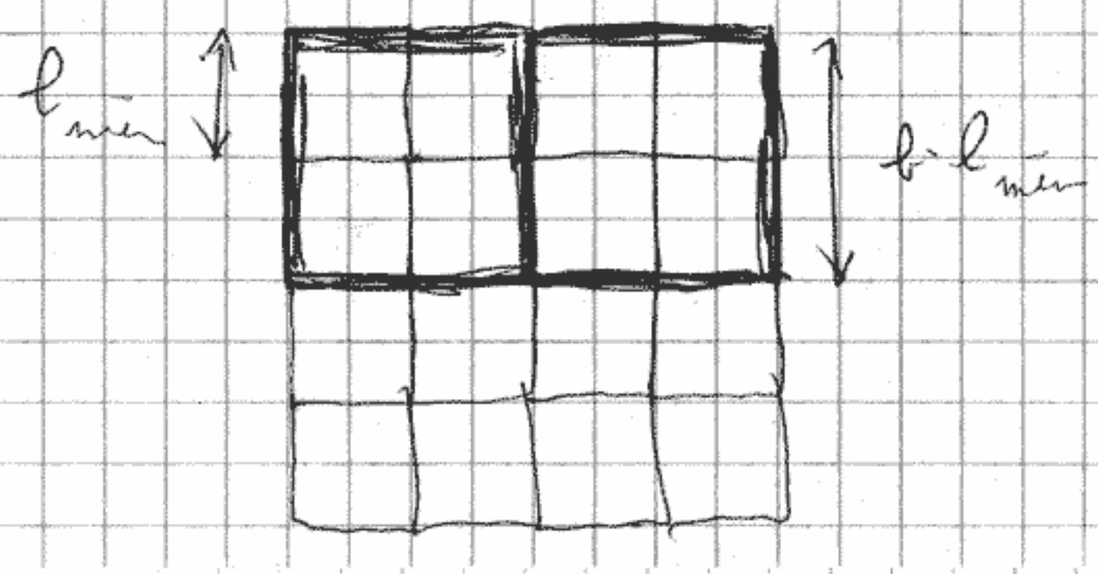
fizikai leírás a $\lambda > l_{min}$

($l_{min} > \lambda$: kistlogolt változók)

<u>RG</u> ① $l_{min} \to b\, l_{min}$

(kistlogolás $l_{min} < \lambda < b\, l_{min}$)

② átskálázás $\hat{x} = \frac{x}{b}$



Kadanoff-féle blokktranszformáció

szabadsági fokok száma $N = \frac{V}{l_{min}^d}$

$$N' = \frac{V}{(b\, l_{min})^d} = \frac{N}{b^d}$$

$$\frac{l'_{min}}{b} = \frac{b\, l_{min}}{b} = l_{min}$$

(1) S fázistér $\longrightarrow S'$

P eloszlásfv. $\longrightarrow P'$

S és S' azonos struktúrájú

$S \approx S'$

$$\left.\begin{array}{l} P \sim e^{-H} \\ P' \sim e^{-H'} \end{array}\right\} \quad H \to H'$$

feltételes szabadenergia

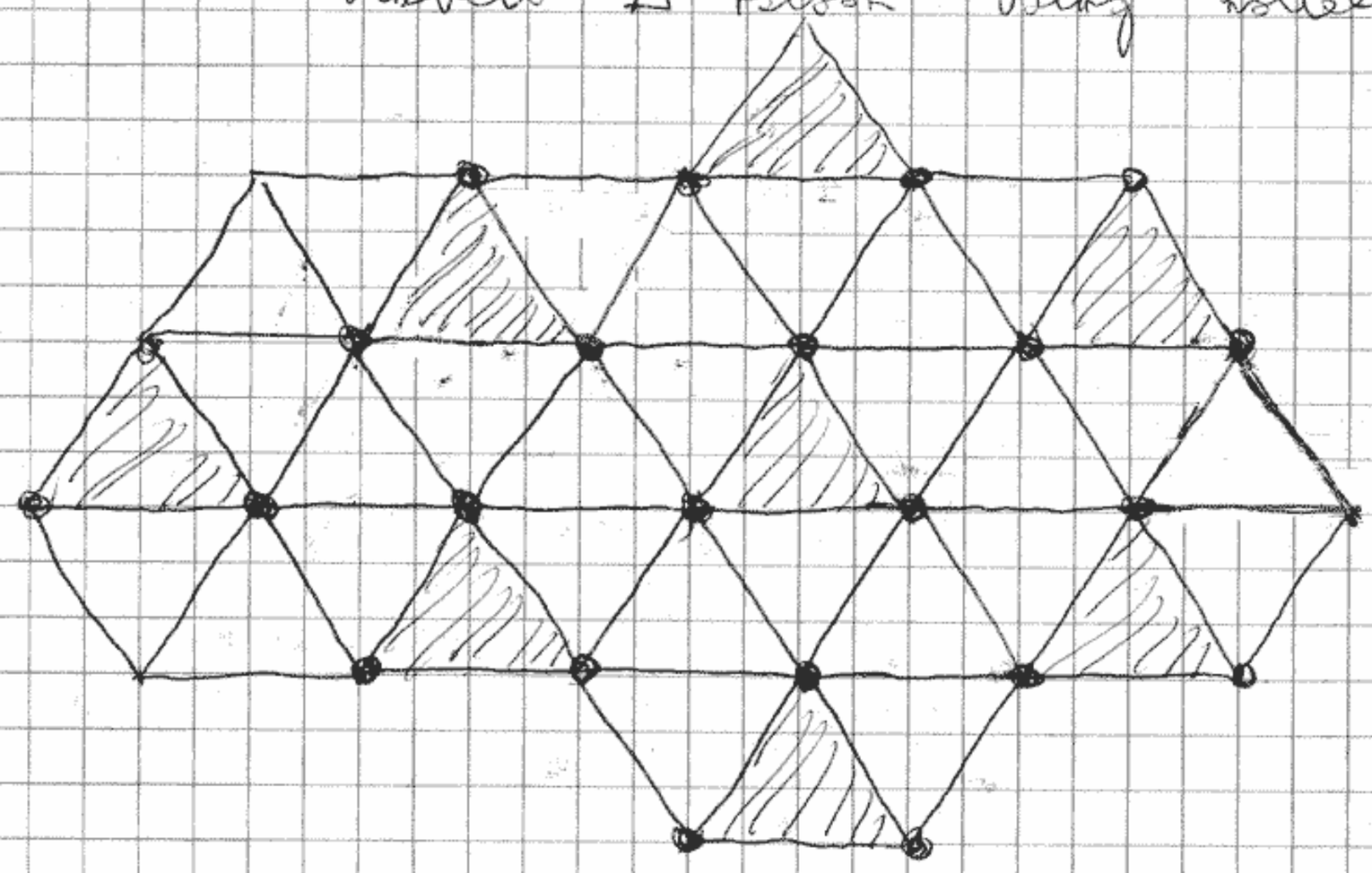
kT egységben

H paraméterekből

$$\left.\begin{array}{l} H(\underline{K}) \\ H' = H(\underline{K}') \end{array}\right\} \quad \underline{K} \to \underline{K}'$$

Valós térbeli transzformáció pl.:

síkbeli Δ rácson Ising-modell



minden spin valamelyik szomszédt blokkban van benne

I-ik blokk blokkspin

$$S_I = \begin{cases} 1, & \text{ha } \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3 > 0 \\ -1, & \text{ha } \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3 < 0 \end{cases}$$

blokkok is Δ-rácsot alkotnak

$$\left.\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \uparrow & \uparrow & \downarrow \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow \\ \downarrow & \uparrow & \uparrow \end{matrix}\right\} S_I = 1 \qquad \left.\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \downarrow & \downarrow & \uparrow \\ \downarrow & \uparrow & \downarrow \\ \uparrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix}\right\} S_I = -1$$

$b = \sqrt{3}$

összesen $\tilde{\sigma}$ konfigurációkra

mellékfeltétel $\tilde{S}$ konfiguráció rögzített

$$\sum_{\tilde{\sigma}} P(\tilde{\sigma}) = P'(\tilde{s})$$

($\tilde{s}$ rögzített)

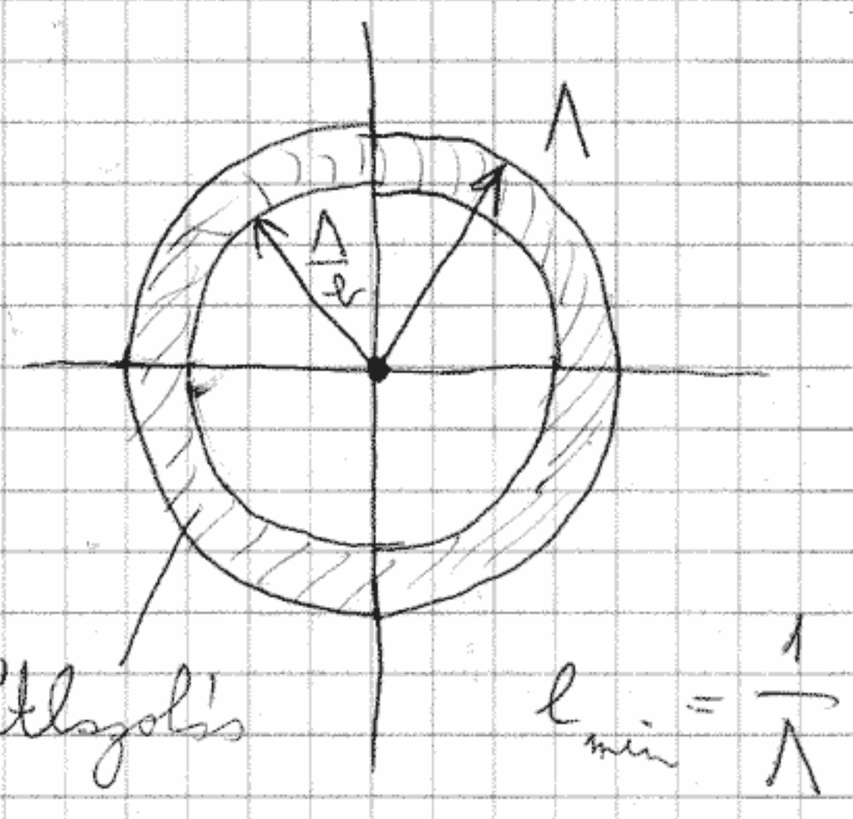
$$P(\tilde{\sigma}) = e^{-H(\tilde{\sigma})}$$

transzformáció H paraméterhálóteret transzformálja

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{q} e^{iqx} \cdot \phi_q$$

$|q| < \Lambda$

levágás



1) redukció: átlszolás ϕ_q $\quad q > \frac{\Lambda}{b}$

$\Lambda \to \frac{\Lambda}{b}$ $\qquad$ F-komponensekre

2) $x' = \frac{x}{b}$ $\qquad q' = bq$

$$\Lambda' = \frac{\Lambda}{b} \cdot b = \Lambda$$

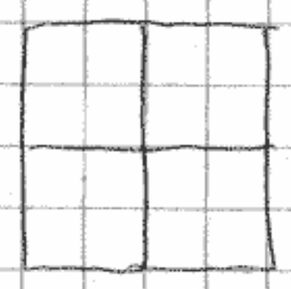
$$P(\phi(x)) \sim e^{-H(\phi(x))}$$

itt kellemes térbeli transzformáció

paraméter tér $\underline{K} = (K_1, K_2, \ldots)$

transzformáció $\underline{K} \to \underline{K}'$

$$f = \frac{F}{N}$$



$$f' = \frac{F}{N'} = \frac{F}{\frac{N}{b^d}} = f \cdot b^d$$

$$f' = f \cdot b^d$$

korrelációs hossz $\xi' = \frac{\xi}{b}$

$$\left.\begin{array}{l} f = f(\underline{K}) \\ f' = f(\underline{K}') \end{array}\right\} \quad f(\underline{K}') = b^d \cdot f(\underline{K})$$

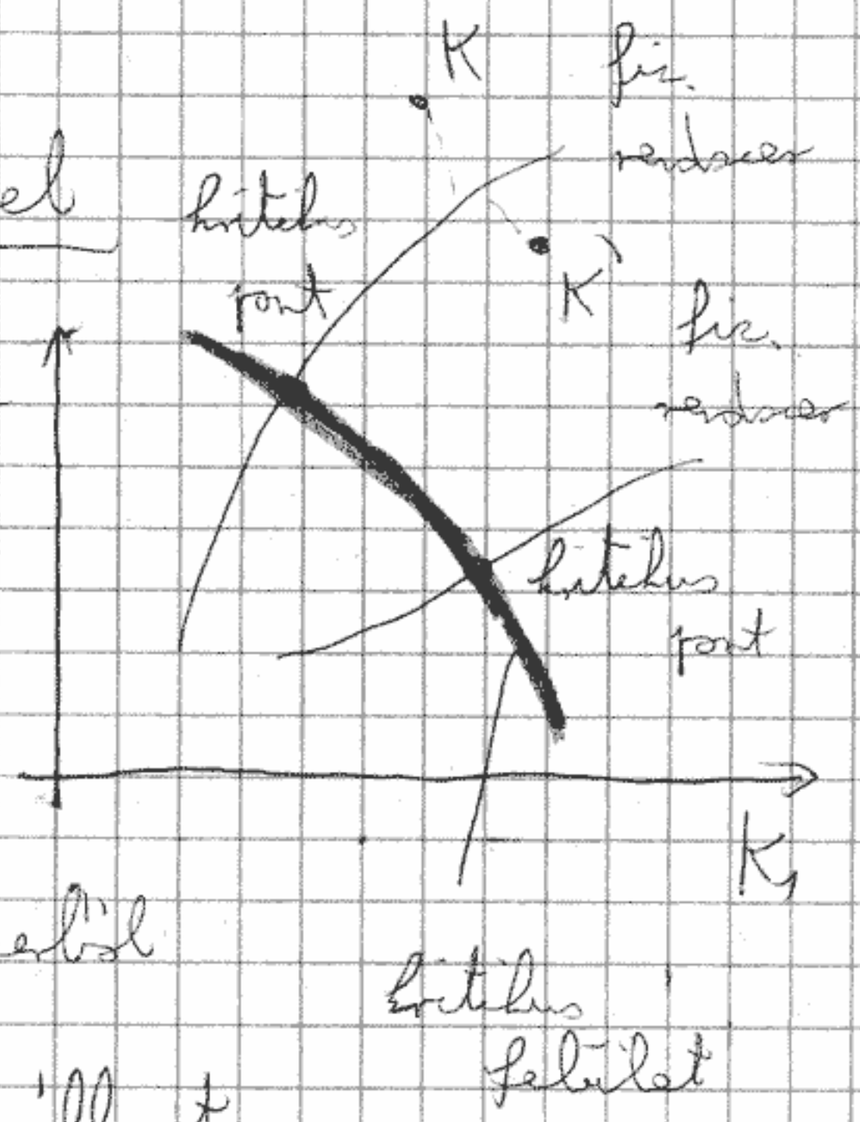
$$\left.\begin{array}{l} \xi' = \xi(\underline{K}') \\ \xi(\underline{K}) \end{array}\right\} \quad \xi(\underline{K}') = \frac{\xi(\underline{K})}{b}$$

<u>Kapcsolat a kritikus viselkedéssel</u>

$$\underline{K} = (K_1, K_2)$$

egy fázisi rendszerben

$K_1(T)$, $K_2(T)$



K, K' nem egy fázisi rendszerből

T megváltozásával elérhető két állapot

kritikus felületen

$\xi = \infty \rightarrow$ kritikus felület invariáns

iteráció a kritikus felületen : fixpont

$$\underline{K} \rightarrow \underline{K}_1 \rightarrow \underline{K}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \underline{K}_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \underline{K}_n = \underline{K}^*$$ rögzített fixpont

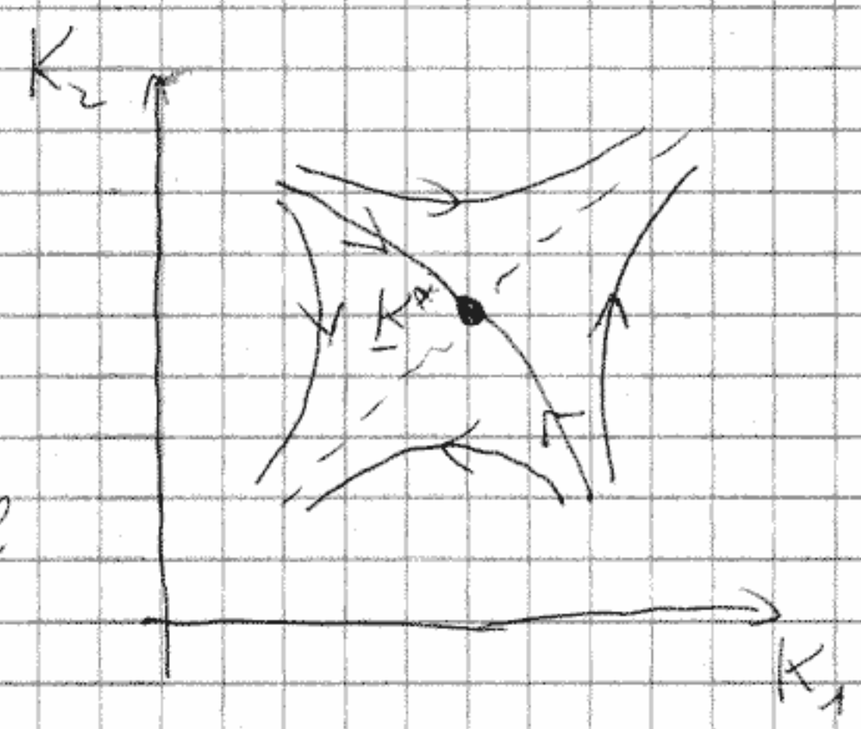
stabil fixpont

nem kritikus állapot

ξ véges

$$\xi' = \frac{\xi}{b}$$

távolodok a kritikus felülettől



K^* körüli lineárisan transzformált

$$\delta \underline{K} = \underline{K} - \underline{K}^* \qquad K_1' = F_1(K_1, K_2)$$

$$\delta \underline{K}' = \underline{\underline{L}}\, \delta \underline{K} \qquad K_2' = F_2(K_1, K_2)$$

$$K_1 = K_1^* + \delta K_1$$

$$K_2 = K_2^* + \delta K_2$$

$$K_1' = F_1(K_1^*, K_2^*) + \left.\frac{\partial F_1}{\partial K_1}\right|_* \delta K_1 + \left.\frac{\partial F_1}{\partial K_2}\right|_* \delta K_2$$

$$\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial K_1} & \frac{\partial F_1}{\partial K_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial K_1} & \frac{\partial F_2}{\partial K_2} \end{pmatrix}$$

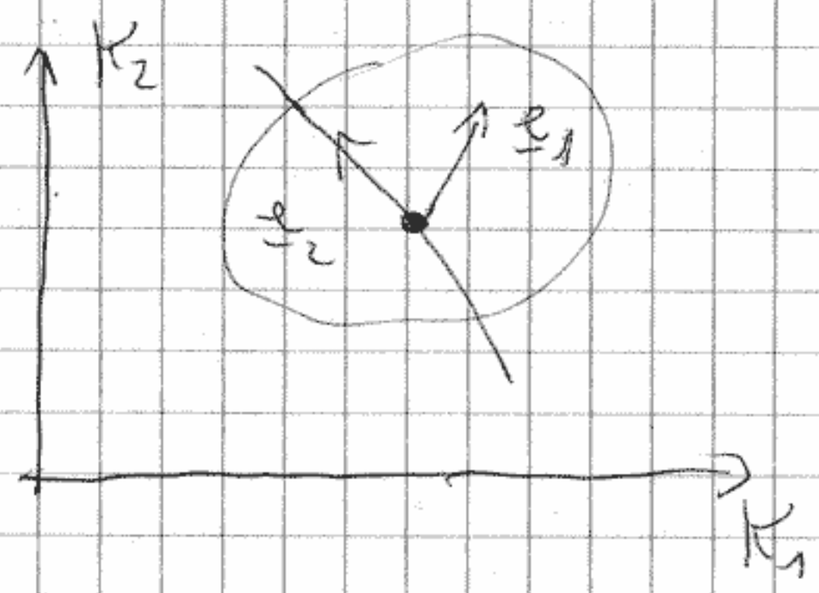
$$\underline{\underline{L}}\, \underline{e}_1 = \lambda_1 \cdot \underline{e}_1$$

$$\underline{\underline{L}} \cdot \underline{e}_2 = \lambda_2 \cdot \underline{e}_2$$

egyik ($\underline{e}_2$) a kritikus felületen

$\lambda_2 < 1$ erős irányú bevisz a fixpontba

$\underline{e}_1$: tartó irány $\lambda_1 > 1$



$$\underline{K} \xrightarrow{b_1} \underline{K}' \xrightarrow{b_2} \underline{K}''$$

$$\underline{K} \xrightarrow{b_1 b_2} \underline{K}''$$

$$\lambda_1(b_1)\, \lambda_1(b_2) = \lambda_1(b_1 b_2)$$

szinu regularitás

$$\lambda_1(b) = b^{y_1} \qquad b > 1 \qquad y_1 > 0$$

$$\lambda_2(b) = b^{y_2} \qquad y_2 < 0$$

új bázis: $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$

$$\delta \underline{K} = t_1 \cdot \underline{e}_1 + t_2 \cdot \underline{e}_2$$

$$\delta \underline{K}' = t_1 \cdot b^{y_1} \cdot \underline{e}_1 + t_2 \cdot b^{y_2} \cdot \underline{e}_2 = t_1' \cdot \underline{e}_1 + t_2' \cdot \underline{e}_2$$

$$t_1' = t_1 \cdot b^{y_1}$$

$$t_2' = t_2 \cdot b^{y_2}$$

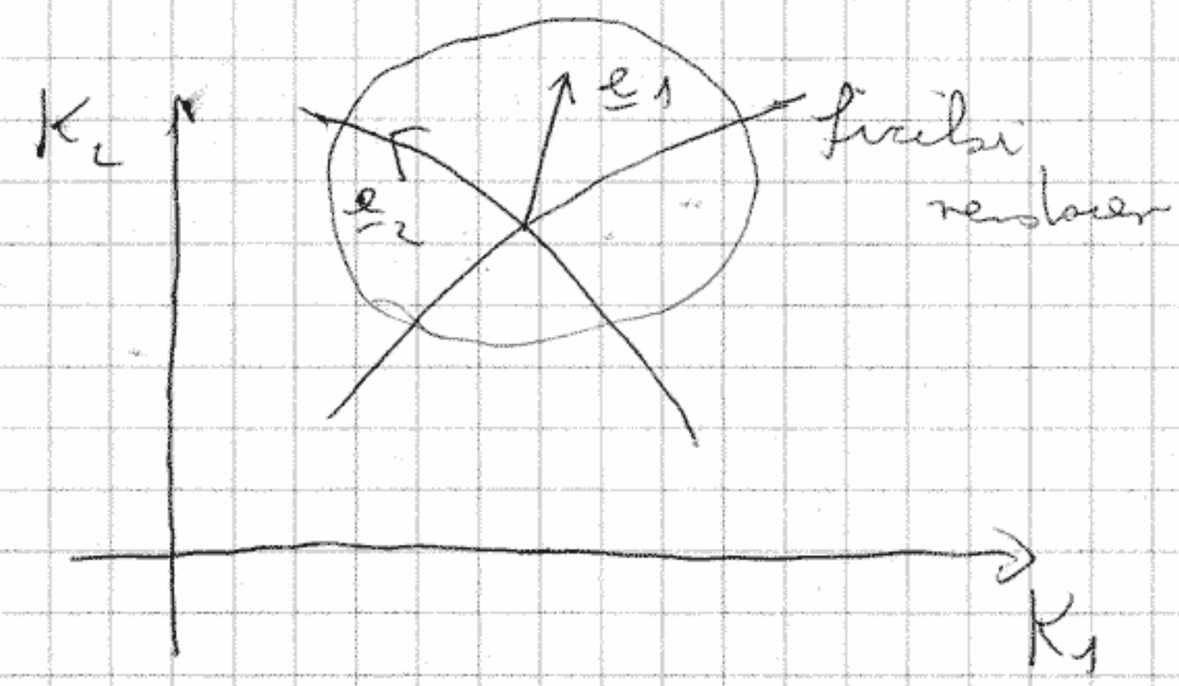
kritikus felület $t_1 = 0$

$$\xi(\underline{K}) = \xi(\underline{K}^* + t_1 \underline{e}_1 + t_2 \underline{e}_2)$$

$$\underline{\xi(t_1, t_2)} = b\, \xi(t_1', t_2') = \underline{b\, \xi(b^{y_1} t_1, b^{y_2} t_2)}$$

általánosított homogén fv.

$$f(t_1, t_2) = b^{-d} \cdot f(t_1', t_2') = b^{-d} f(b^{y_1} \cdot t_1, b^{y_2} \cdot t_2)$$



fizikai rendszer $t_1(T)$, $t_2(T)$

kritikus felületen előjelet vált

$$t_1(T) \sim \frac{T - T_c}{T_c} = t$$

redukált hőmérséklet

$$t_2(T) \simeq t_2(T_c)$$

$$\xi(t_1(T), t_2(T)) = b\, \xi(b^{y_1} \cdot t_1(T), b^{y_2} \cdot t_2(T))$$

$$b^{y_1} \cdot t_1(T) = \pm t_{10}$$

$$b = \left| \frac{t_{10}}{t_1(T)} \right|^{\frac{1}{y_1}}$$

$$\xi(t_1(T), t_2(T)) = \left| \frac{t_{10}}{t_1(T)} \right|^{\frac{1}{y_1}} \cdot \xi\left(\pm t_{10}, \underbrace{\left| \frac{t_{10}}{t_1(T)} \right|^{\frac{y_2}{y_1}}}_{\substack{\to 0 \\ \text{vagy} \\ \text{határérték}}} \cdot t_2(T)\right)$$

$$\frac{y_2}{y_1} < 0$$

$$t_1(T) \to 0$$

$$\xi(t_1(T), t_2(T)) \simeq \left| \frac{t_{10}}{t_1(T)} \right|^{\frac{1}{y_1}} \cdot \xi(\pm t_{10}, 0) \sim |t_1(T)|^{-\frac{1}{y_1}}$$

ξ hatványfv.-e a redukált hőmérséklettel

def. $\xi \sim |t|^{-\nu}$ $\qquad \boxed{\nu = \frac{1}{y_1}}$

univerzalitás!

minden fizikai mennyiség egyszerűsödik a kritikus exponenssel

$$f(t_1(T), t_2(T)) = \left|\frac{t_{10}}{t_1(T)}\right|^{-\frac{d}{y_1}} \cdot f\left(\pm t_{10}, \left|\frac{t_{10}}{t_1(T)}\right|^{\frac{y_2}{y_1}} \cdot t_2(T)\right)$$

$$f(t_1(T), t_2(T)) = \left|\frac{t_{10}}{t_1(T)}\right|^{-\frac{d}{y_1}} \cdot f(\pm t_{10}, 0) \sim |t_1(T)|^{\frac{d}{y_1}}$$

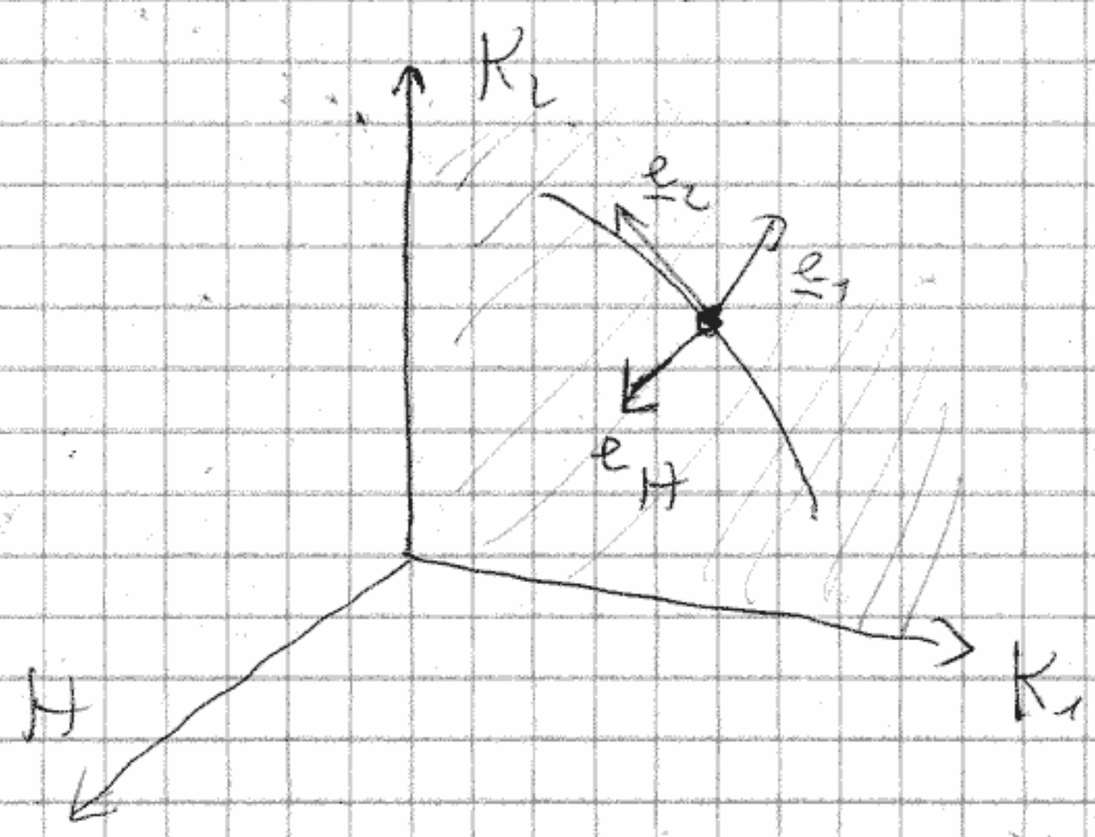
$$f \sim |t|^{2-\alpha}$$

$$\boxed{2-\alpha = \frac{d}{y_1} = d\nu}$$ hiperskála tv.

t_1 releváns változók

t_2 irreleváns változók

<u>mágneses tér bevonása</u> K_1, K_2, H



$H \leftrightarrow -H$ szimmetria

karakterisztikus vektor $K_1 K_2$ síkra merőleges lesz

$e_H \perp K_1, K_2$ sík

tisztán irány, sajátértéke $\lambda_H > 1$

$$\lambda_H = b^{y_H} \qquad y_H > 0$$

$$\xi(t_1, t_2, t_H) = b\,\xi(b^{y_1} \cdot t_1, b^{y_2} \cdot t_2, b^{y_H} t_H)$$

früher verwendeten

$$\xi(t_1(T), t_2(T), H) = b\,\xi(b^{y_1} \cdot t_1(T), b^{y_2} \cdot t_2(T), y^{y_H} \cdot H)$$

$$t_1(T) = 0 \quad \text{(kritisches Löwenschlaten)}$$

$$b^{y_H} \cdot H = H_0 \qquad b = \left(\frac{H_0}{H}\right)^{\frac{1}{y_H}}$$

$$\xi(0, t_2(T_c), H) = \left(\frac{H_0}{H}\right)^{\frac{1}{y_H}} \xi\Big(0, \underbrace{\left(\frac{H_0}{H}\right)^{\frac{y_2}{y_H}} \cdot t_2(T_c)}_{\substack{H \to 0 \\ \Downarrow \\ 0}}, H_0\Big)$$

$$\xi(0, t_2(T_c), H) \simeq \left(\frac{H_0}{H}\right)^{\frac{1}{y_H}} \cdot \xi(0, 0, H_0) \sim H^{-\frac{1}{y_H}}$$

$$\xi \sim H^{-\mu} \qquad \mu = \frac{1}{y_H}$$

$$\xi(t_1(T), t_2(T), H)$$

$$b^{y_1} \cdot t_1(T) = \pm t_{10} \qquad b = \left|\frac{t_{10}}{t_1(T)}\right|^{\frac{1}{y_1}}$$

$$\xi(t_1(T), t_2(T), H) = \left|\frac{t_{10}}{t_1(T)}\right|^{\frac{1}{y_1}} \xi\Big(\pm t_0, \underbrace{\left|\frac{t_{10}}{t_1(T)}\right|^{\frac{y_2}{y_1}} t_2(T)}_{\to 0}, \left|\frac{t_{10}}{t_1(T)}\right|^{\frac{y_H}{y_1}} \cdot H\Big)$$

$$\frac{y_H}{y_1} = \frac{\nu}{\mu} = \Delta$$

$$f(t_1(T), t_2(T), H) = \left|\frac{t_1(T)}{t_{10}}\right|^{-\frac{1}{y_1}} \cdot \underbrace{f\left(\pm t_0, 0, \left|\frac{t_{10}}{t_1(T)}\right|^{\Delta} H\right)}_{\Xi\left(\frac{H}{\left|\frac{t_1(T)}{t_{10}}\right|^{\Delta}}\right)}$$

$$f(t_1(T), t_2(T), H) =$$

$$= \left|\frac{t_1(T)}{t_{10}}\right|^{\frac{d}{y_1}} \cdot \mathcal{F}_{\pm}\left(\frac{H}{\left|\frac{t_1(T)}{t_{10}}\right|^{\frac{y_H}{y_1}}}\right)$$

skálahipotézis

$$f(t, H) = b^{-(2-\alpha)\nu} \cdot f\left(b^{\frac{1}{\nu}} \cdot t,\ b^{\frac{1}{\mu}} \cdot H\right) =$$

skálázás $$= \left|\frac{t}{t_0}\right|^{2-\alpha} \cdot f\left(\pm t_0, \frac{H}{\left|\frac{t}{t_0}\right|^{\Delta}}\right)$$

<u>Nemtriviális skálatérek</u>

$$b^{y_1} \cdot g_1(K) = g_1(K')$$

$$b^{y_2} \cdot g_2(K) = g_2(K')$$

y_1, y_2 típusú heterogén elméletből

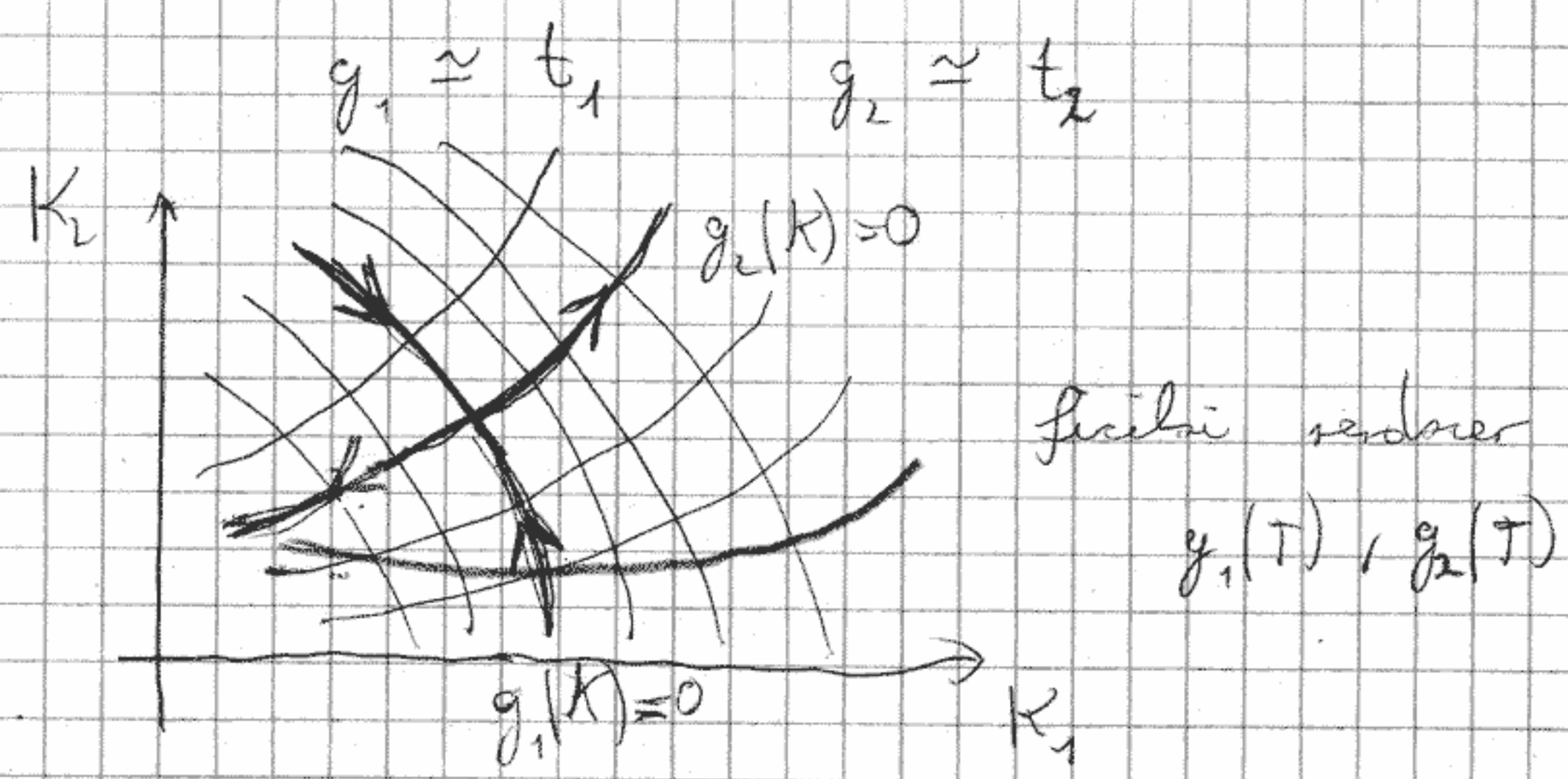
fixpont $b^{y_1} \cdot g_1(K^*) = g_1(K^*)$

$$\Rightarrow \quad g_1(K^*) = 0$$

$$g_2(K^*) = 0$$

kritikus felület $g_1(K) = 0$ határoz meg

linearizált transzformáció tartományban



fraktál rendszer

$g_1(T)$, $g_2(T)$

$$f(g_1, g_2) = b\, f(b^{y_1} \cdot g_1, b^{y_2} \cdot g_2)$$

$$f(g_1, g_2) = b^{-d} \cdot f(b^{y_1} \cdot g_1, b^{y_2} \cdot g_2)$$

$g_1(K)$ eltűnést vált a kritikus felületen

fraktál rendszer

$g_1(T)$, $g_2(T)$

$$g_1(T) \sim \frac{T - T_c}{T_c} = t$$ redukált hőmérséklet

hasonlóan, mint előző órán

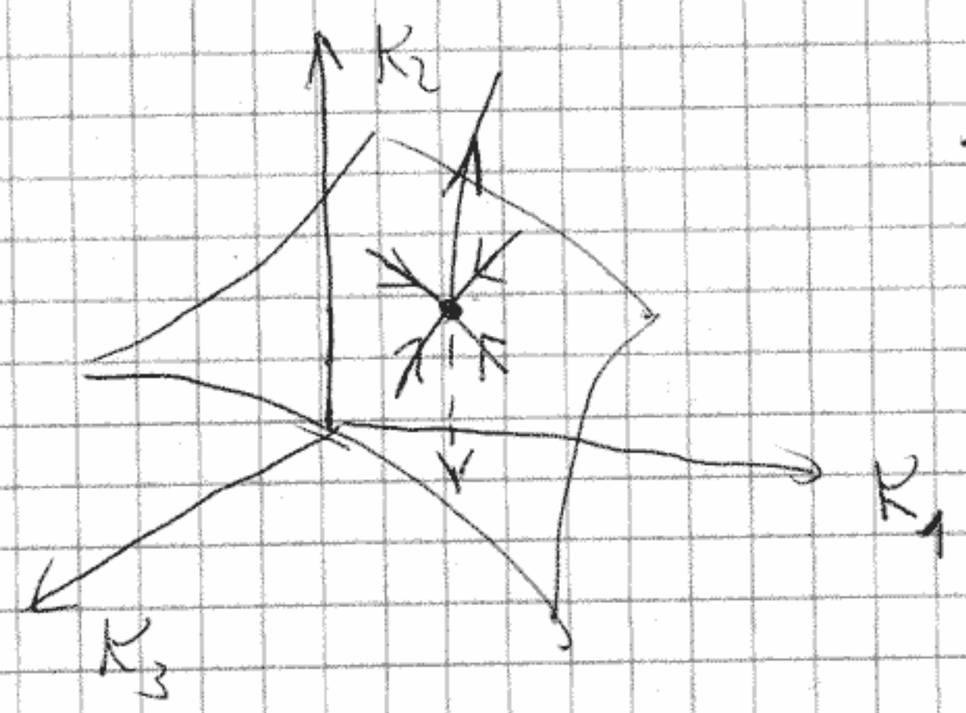
$$f(g_1, g_2) = \left|\frac{g_{10}}{g_1(T)}\right|^{\frac{1}{y_1}} \cdot f\left(g_{10}, \left|\frac{g_{10}}{g_1(T)}\right|^{\frac{y_2}{y_1}} \cdot g_2(T)\right)$$

$$\sim |g_1(T)|^{-\frac{1}{y_1}}$$

Kérdés? Létezik-e ilyen skálázás? Szemléltetni kell a rendszert, akkor lehet más normálási változót

Fleischer Bence.

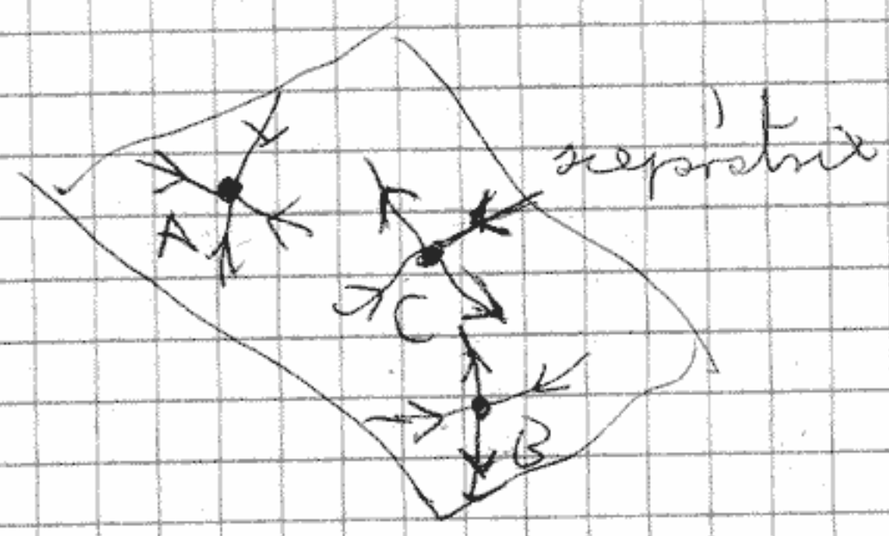
3 változós eset K_1, K_2, K_3



$e^{y_1}, e^{y_2}, e^{y_3}$

$y_1 > 0 \quad y_2, y_3 < 0$

kritikus felület



C tartós irányba releváns változó

C-ben tartós viselkedés multikritikus

pl.: anizotróp Heisenberg-modell

egytengelyű plánis

szeparatrix izotróp

anizotrópia változtatással befolyásolható

Nincs fixpont – lehet elsőrendű fázisátalakulás

Összefoglalás

- flexibilis módszer
- skálázás, univerzalitás
- konstruktív
- tiszta?

fázisátalakulás

végtelen korrelációs kosz, renormálás egy lépésben véges

sok szabadsági fokra kiterjeszthető, folytonos függvénytől kell szinguláris viselkedést kitalálni

1 dimenziós Ising-modell

$$H = -J \sum_{i=1}^{N-1} S_i S_{i+1}$$

$$Z = (\operatorname{ch} K)^P \cdot 2^N \cdot \sum_{\ell=0}^{P} v^\ell \cdot g(\ell)$$

$$P = N-1$$

$$g(\ell) = 0 \qquad \ell \geq 1$$

$$g(\ell) = 1 \qquad \ell = 0 \qquad\qquad Z = 2^N (\operatorname{ch} K)^{N-1}$$

$$C_{ij} = \langle S_i S_j \rangle = \frac{\sum_{\ell=0}^{P} \eta_{ij}(\ell) v^\ell}{\sum_{\ell=0}^{P} g(\ell) \cdot v^\ell} = v^{|i-j|} =$$

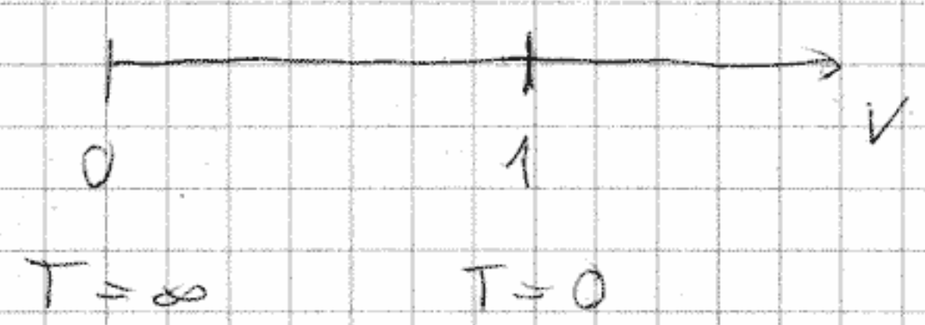
$$= e^{\ln v |i-j|} = e^{-\frac{|i-j| a}{\xi}}$$

$$-\frac{a}{\xi} = \ln v$$

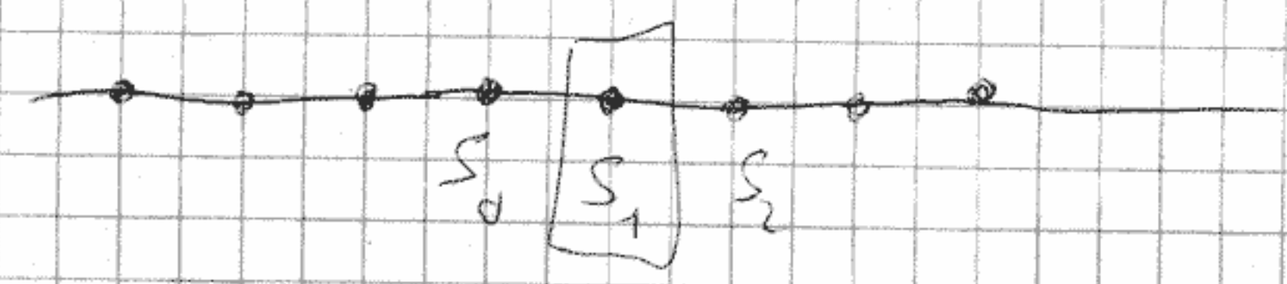
$$\eta_{ij}(\ell) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \ell = |i-j| \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$v = \operatorname{th} K$$

$$\xi = \frac{a}{|\ln v|} \approx \frac{a}{1-v}$$



Renormalizace, decimace



$$e^{-H} = e^{K\sum_{i=1}^{N} S_i S_{i+1}} = \prod_{i=1}^{N} e^{K S_i S_{i+1}}$$

$$\sum_{S_1=\pm 1} e^{K(S_0 S_1 + S_1 S_2)} = e^{K(S_0+S_2)} + e^{-K(S_0+S_2)} =$$

$$= \begin{cases} 2\,\mathrm{ch}(2K) & \uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow \\ 2 & \uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow \end{cases}$$

$$= e^{\ln 2 + \ln \mathrm{ch}\, 2K\left(\frac{1+S_0 S_2}{2}\right)} =$$

$$= e^{\ln 2 + \frac{1}{2}\ln \mathrm{ch}(2K) + \frac{1}{2}\ln \mathrm{ch}(2K)\, S_0 S_2}$$

$$\sum_{\substack{\text{decimace} \\ \text{každého}}} e^{-H} = e^{\frac{N}{2}\left[\ln 2 + \frac{1}{2}\ln \mathrm{ch}(2K)\right]} \cdot$$

$$\cdot \prod_{\substack{i \\ \text{páros}}} \underbrace{e^{\frac{1}{2}\ln \mathrm{ch}(2K)\cdot S_i S_{i+2}}}_{e^{K' \cdot S_i S_{i+2}}}$$

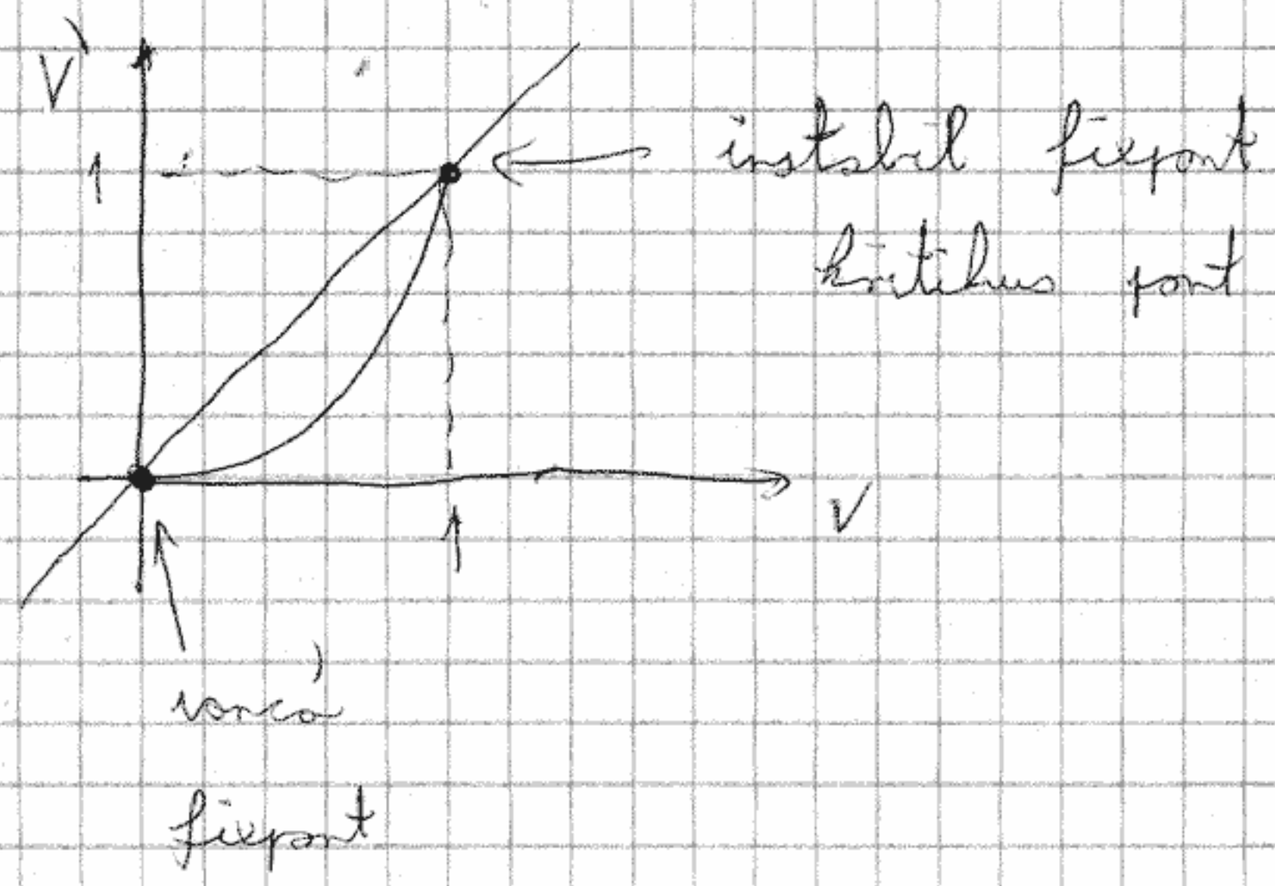
$$\boxed{K' = \frac{1}{2}\ln \mathrm{ch}\, 2K}$$

$b = 2$

$$e^{2K'} = ch(2K) = \frac{ch^2K + sh^2K}{ch^2K - sh^2K} = \frac{1 + th^2K}{1 - th^2K}$$

$$th^2K = \frac{e^{2K'} - 1}{e^{2K'} + 1} = th\,K' \qquad v = th\,K$$

$$\boxed{v' = v^2}$$



linearizált transzformáció

$$v = 1 - x$$

$$v' = 1 - x' = (1-x)^2 = 1 - 2x + x^2 \qquad x' = 2x$$

$$\left.\begin{aligned} b^{y_1} &= 2 \\ b &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_1 = 1$$

$$v = \frac{1}{y_1} = 1 \qquad \Big\} \sim x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{1}{1-v}$$

nem véges hőmérsékleten van a kritikus hőmérséklet, ráadás redukált hőmérséklet

$$V = \operatorname{th} K = \frac{1-e^{-2K}}{1+e^{-2K}} \simeq 1 - 2e^{-2K}$$

<u>Gauss-modell</u>

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_q e^{iqx} \cdot \phi_q$$

$$|q| < 1$$

$$H = \sum_q \frac{r_0 + cq^2}{2} \phi_q \phi_{-q} = \int d^d r \left(\frac{r_0}{2} \phi(r)^2 + \frac{c}{2} (\nabla \phi)^2 \right)$$

$$e^{-H} = \prod_q e^{-\frac{r_0 + cq^2}{2} \phi_q \phi_{-q}}$$

$r_0 > 0$

Landau elmélet fluktuáció nagyságrendjével

(1) lépés:

$$H' = \sum_{q < \frac{1}{b}} \frac{r_0 + cq^2}{2} \phi_q \phi_{-q}$$

③ átskálázás $q' = q b$ $\qquad \frac{\Lambda}{b} \cdot b$

$$\phi_q = b^{1-\frac{\eta}{2}} \cdot \phi'_{q'}$$

$$H' = \sum_{q' < \Lambda} \frac{r_0 + c\left(\frac{q'}{b}\right)^2}{2} \cdot b^{2-\eta} \cdot \phi'_{q'} \phi'_{-q'} =$$

$$= \sum_{q' < \Lambda} \frac{r'_0 + c' q'^2}{2} \phi'_{q'} \phi'_{-q'}$$

$$r'_0 = b^{2-\eta} \cdot r_0$$

$$c' = b^{-\eta} \cdot c$$

fizikailag reális lép $\eta = 0$ véges fixpont

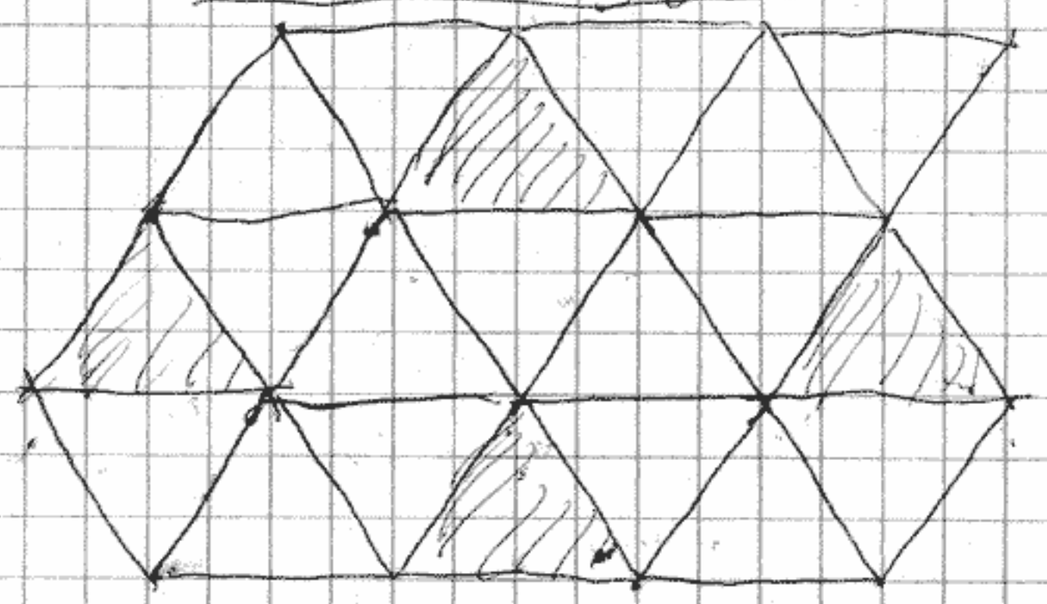
$$r'_0 = b^2 r_0$$

$$r_0^* = 0$$

$$b^2 = b^{y_1} \qquad y_1 = 2 = \frac{1}{\nu} \qquad \nu = \frac{1}{2} \text{ Landau-elmélet}$$

Ezzel η arra η, de nem mutattuk meg!

Δ-rács Ising-modell



$$\sigma_I = \begin{cases} 1 & \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3 > 0 \\ -1 & \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3 < 0 \end{cases}$$

többségi szabály

blokk-spin elosztfv.-e

$$e^{-H'[\sigma_I]}$$

$K = \beta J$

$h = \beta H$

$$H[\sigma_i] = -K \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i =$$

$$= \underbrace{-K \sum_I \Big(\sum_{\substack{\langle i,j \rangle \\ i,j \in I}} \sigma_i \sigma_j \Big)}_{H_0} \underbrace{- K \sum_{\langle I,J \rangle} \sum_{\substack{\langle i,j \rangle \\ i \in I \\ j \in J}} \sigma_i \sigma_j - h \sum_I \Big(\sum_{\substack{i \\ i \in I}} \sigma_i \Big)}_{V} =$$

$$H[\sigma_i] = H_0 + V$$

$$e^{-H'[\sigma_I]} = \sum_{\tilde{\sigma}} e^{-H_0} e^{-V}$$

$\tilde{\sigma}_I$ rögzített

$$Z_0 = \sum_{\tilde{\sigma}/\tilde{\sigma}_I} e^{-H_0} \rightarrow e^{-H'[\sigma_I]} = Z_0 \frac{\sum_{\tilde{\sigma}/\tilde{\sigma}_I} e^{-H_0} e^{-V}}{Z_0}$$

rögzített

$$= Z_0 \langle e^{-V} \rangle_0 \approx Z_0 e^{-\langle V \rangle_0}$$

kvalitás

kumulás sor

$$\langle e^{-V} \rangle_0 =$$

$$= e^{-\langle V \rangle_0 + \frac{1}{2}\left(\langle V^2 \rangle_0 - \langle V \rangle_0^2\right) \cdots}$$

$$Z_0' \quad e^{-H_0} = \prod_I \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3} e^{K(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}$$

$\sigma_I = 1$

	$e^{K(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}$
$\uparrow\uparrow\uparrow$	e^{3K}
$\uparrow\uparrow\downarrow$	e^{-K}
$\uparrow\downarrow\uparrow$	e^{-K}
$\downarrow\uparrow\uparrow$	e^{-K}

$+$

$$e^{3K} + 3e^{-K}$$

$\sigma_I = -1$ -re

ugyanannyi az összeg

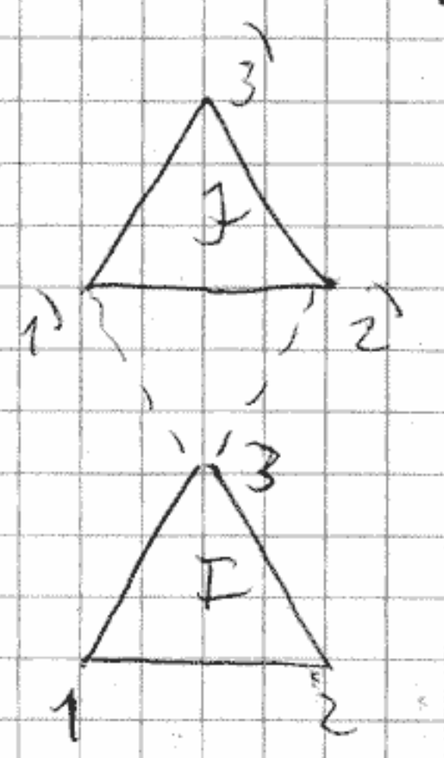
$$Z_0 = e^{-H_0} = \prod_I \left(e^{3K} + 3e^{-K}\right) = \left(e^{3K} + 3e^{-K}\right)^{\frac{N}{3}}$$

$$\langle \sigma_1 \rangle_0 = \frac{\sum_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3} \sigma_1 e^{K(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}}{\sum_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3} e^{K(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}} =$$

$$= \frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}} (\pm 1) = \sigma_I \frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}} = \sigma_I\, g(K)$$

$\sigma_1 = \pm 1$

$$\langle \sigma_1 \rangle_0 = \langle \sigma_2 \rangle_0 = \langle \sigma_3 \rangle_0$$



$$\langle \sigma_1 \sigma_3 \rangle_0 = \langle \sigma_1 \rangle_0 \langle \sigma_3 \rangle_0 =$$

független

$$= \sigma_I \sigma_J\, g^2(K)$$

$$\langle V \rangle_0 = -K \sum_{\langle I,J \rangle} 2\, g^2(K)\, \sigma_I \sigma_J - h \sum_I 3\, g(K)\, \sigma_I$$

$$e^{-H'[\sigma_I]} = e^{\ln Z_0 - \langle V \rangle_0}$$

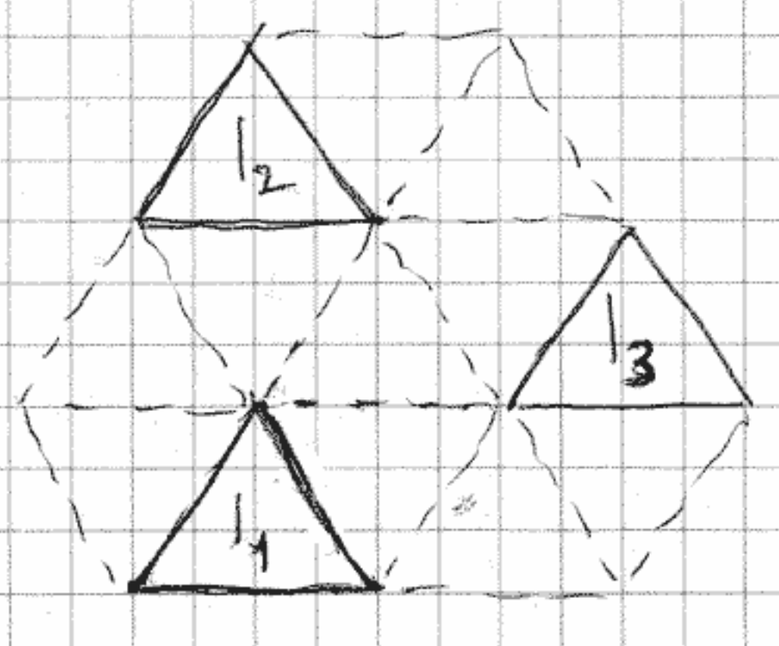
$$H' = -\ln Z_0 + \langle V \rangle_0 = \underbrace{-\frac{N}{3}\ln\left(e^{3K} + 3e^{-K}\right)}_{\text{normálás olvasztjuk}} -$$

$$-K' \sum_{\langle I,J \rangle} \sigma_I \sigma_J - h' \sum_I \sigma_I$$

$$\boxed{\begin{aligned} K' &= 2K \cdot g^2(K) \\ h' &= 3h \cdot g(K) \end{aligned}}$$

elkonyszgolás hibája

$$\langle V^2 \rangle_0 - \langle V \rangle_0^2$$

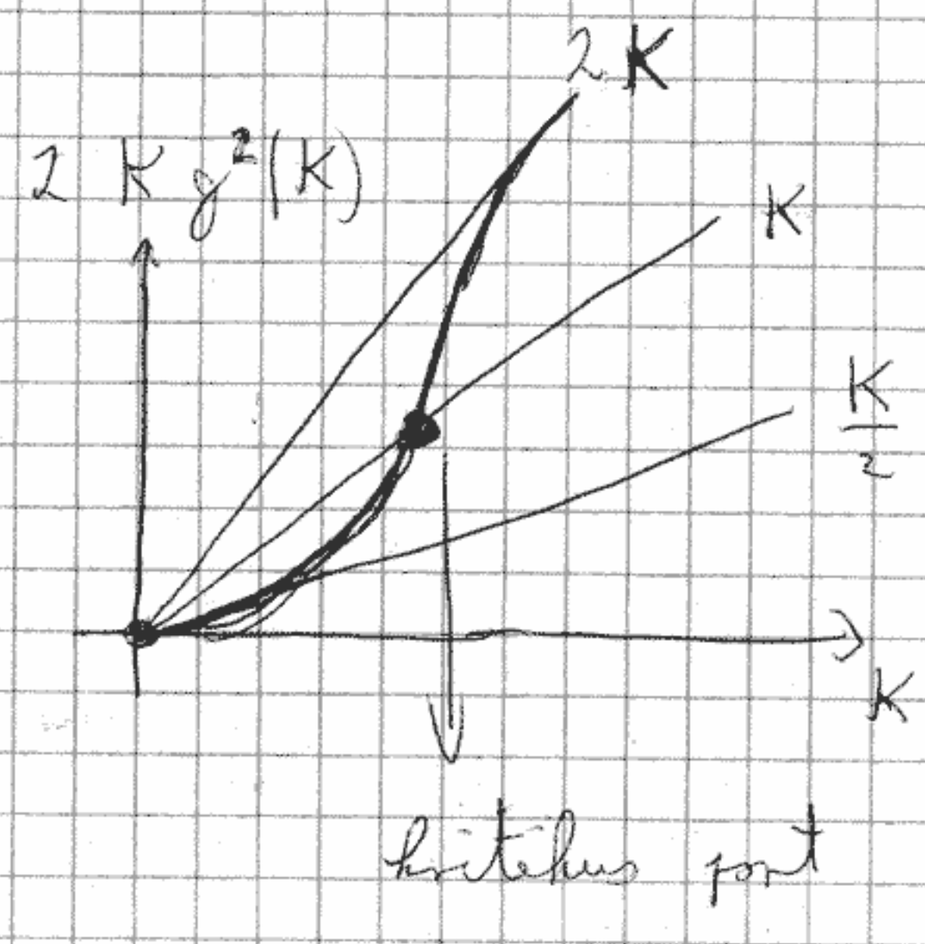


3 spin kocka

renormálási csoport általában új nem nulla paramétereket hoz be

$$g(K) = \frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}} = \frac{1 + e^{-4K}}{1 + 3e^{-4K}}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} K \ll 1 & \frac{1}{2} \\ K \gg 1 & 1 \end{cases}$$



$$K^* = 2K^* \cdot g^2(K^*)$$

$$g(K^*) = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow K^* = 0{,}336$$

$$\delta K = K - K^*$$

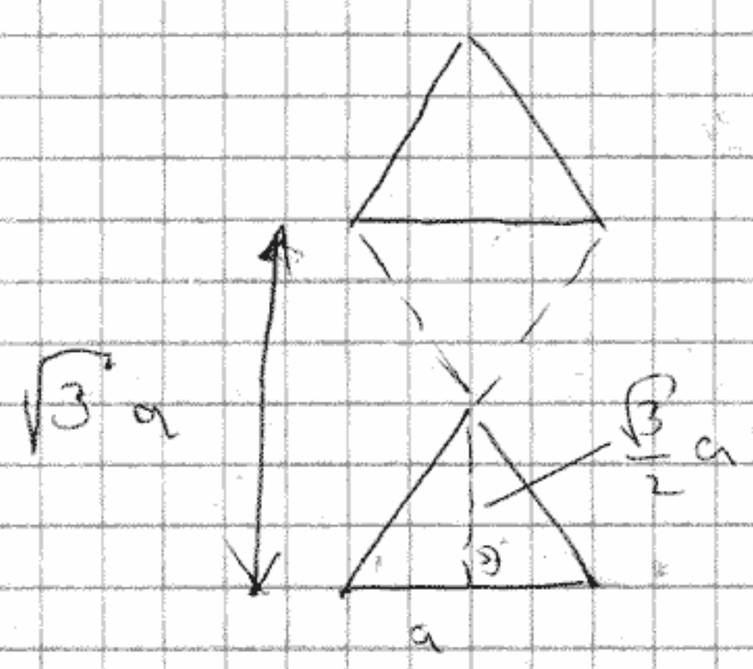
$$\delta K' = \frac{d}{dK}\left(2K\, g^2(K)\right)\Big|_{K=K^*} \delta K$$

$$2g^2(K) + 4K\, g(K) \frac{dg}{dK}$$

$$\frac{dg}{dK} = \frac{8e^{4K}}{\left(e^{4K} + 3\right)^2}$$

$$\delta K' = 1{,}624 \cdot \delta K = b^{y_1} \cdot \delta K$$

$$R' = \frac{3}{\sqrt{2}} R = b^{y_H} \cdot R$$



$$b = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}^{\,y_1} = 1{,}624$$

$$y_1 = \frac{1}{\nu} = \frac{\ln 1{,}624}{\ln \sqrt{3}} = 0{,}883$$

$$y_H = \frac{1}{\mu} = \frac{\ln\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)}{\ln \sqrt{3}} = 1{,}369$$

	RG	egzakt	átlagtérelmélet
K_c	0,336	0,274	$\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
$\frac{1}{\nu}$	0,883	1	2
$\Delta = \frac{\nu}{\mu}$	$\frac{1{,}369}{0{,}883} = 1{,}55$	1,875	$\frac{3}{2} = 1{,}5$

Variáció RG

ráhangoltuk, hogy kosszú legyen a húrster

		egzakt
$d=2$ Ising	$\nu = 1{,}988$	$\nu = 2$
	$\delta = 15{,}04$	$\delta = 15$
$d=3$ Ising	$\nu = 0{,}63$	$\nu = \frac{2}{3}$
	$\delta = 4{,}82$	$\delta = 5$
$d=4$ Ising	$\nu = 0{,}45$	$\nu = \frac{1}{2}$
	$\delta = 2{,}9$	$\delta = 3$

ϕ^4-es modell

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{q} e^{iqr} \cdot \phi_q$$

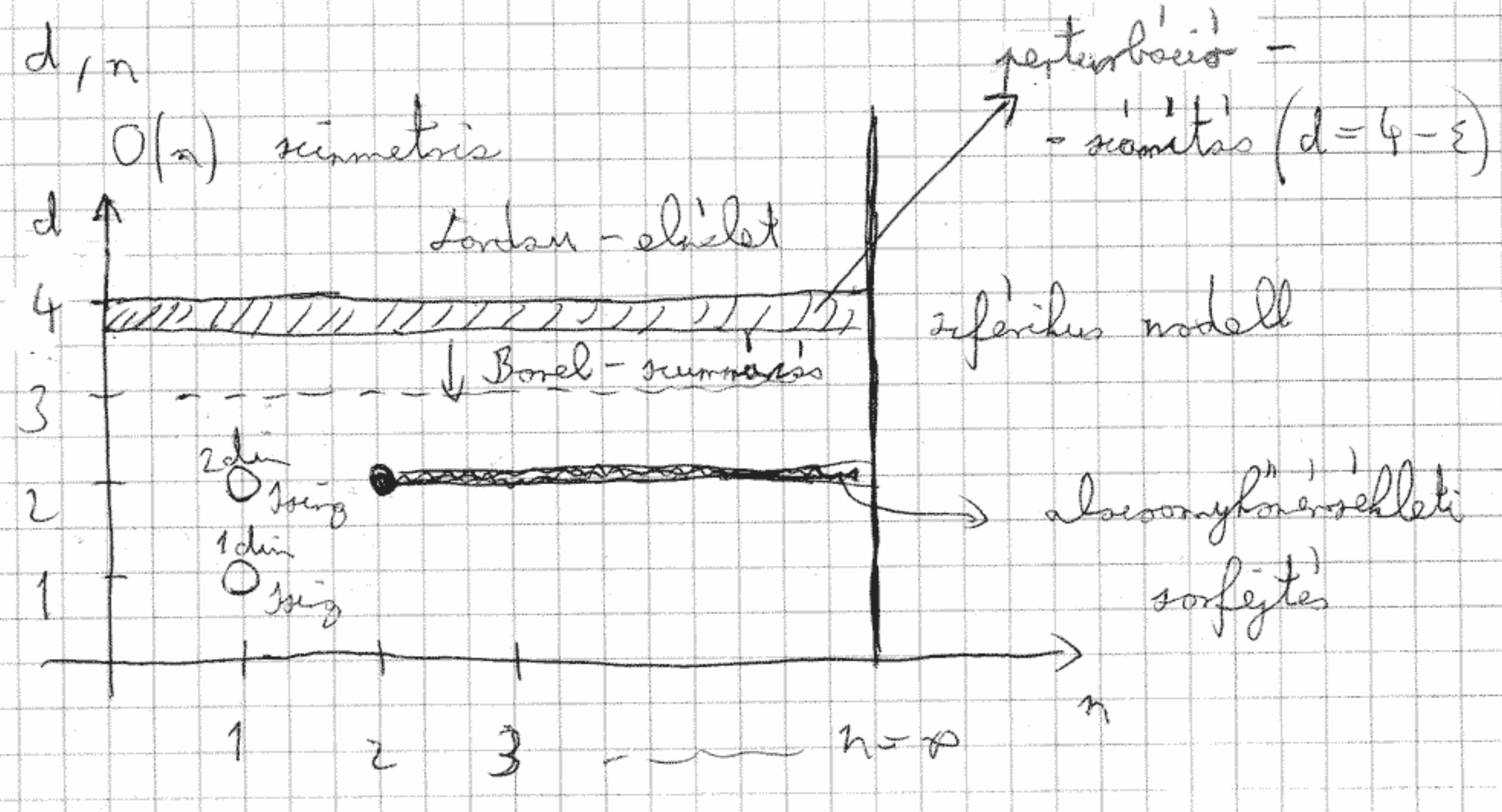
$$q < \Lambda$$

$$H = \int d^d r \left\{ \frac{r_0}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{u}{4} \phi^4 \right\}$$

$$\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \quad \text{vektor}$$

$$\phi^2 = \sum_{\alpha} \phi_\alpha^2$$

$$(\nabla\phi)^2 = \sum_\alpha (\nabla\phi_\alpha)^2 \qquad \phi^4 = (\phi^2)^2$$



d=4 Landau-elmélet kritikus dimenzió
+ ln korrekciók

$u \sim \varepsilon = 4-d$ perturbációszámítás jó

d=3 -ig Borel-szummálással lehet lenni

• d=2 n=2 Kosterlitz Thouless-átalakulás

universálisan viselkednek adott d és n-hez tartozó ételek

4 komponens alatt az izotróp rendszer fixpontjai szabályozzák a viselkedést

Disszipatív tulajdonságok

$$\phi_q \sim e^{-\Gamma_q t}$$ lecsengés

$$\omega_c(q,\xi) = q^2 \cdot \Omega(q,\xi)$$

$T = T_c$ $\quad \omega \sim q^2$ ← disszipatív krit. exponens

idő is at hell skálázni