Fázisátalakulások

előadó: Sasvári László

kezdés: $14^{\underline{00}}$

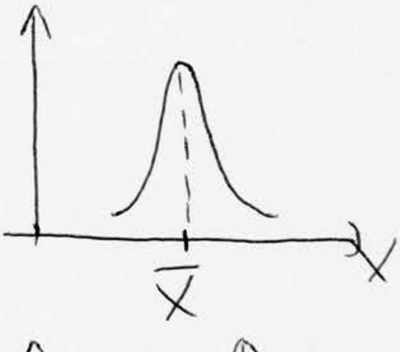
1. óra
Bevezetés

0) <u>fázisátal.</u>: ahogy hűtjük az anyagot, egyre több kh. nagyságrendje esik $k_B T$ nagyságrendjébe
termodin. instabilitással van kapcsolatban
folytonos fázisátt. → univerzális megállapítások
átlagtérközelítés először itt jelent meg

1) <u>Stabilitás</u>

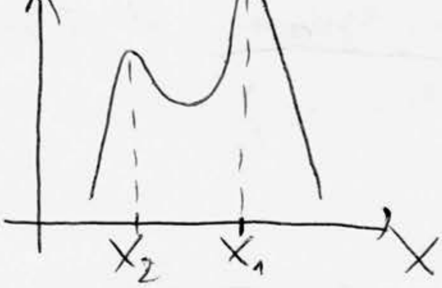
X: fiz. mennyiség (mágnesezettség, sűrűség, ...), ami a fázisát.-t jellemzi

$P(X) \leftarrow X$ eloszlásfv.-e



várható érték = legval. érték

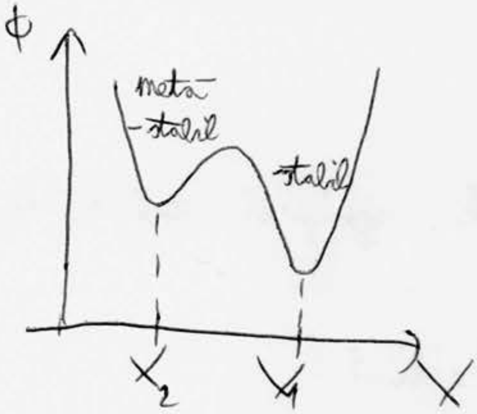
$P(X)$



ha X_2-ben van az anyag, egy idő után átkerül X_1-be, de ~~X_2-ben~~ sokáig tart
$\Rightarrow X_2$ <u>metastabil</u>

potenciállal leírva:

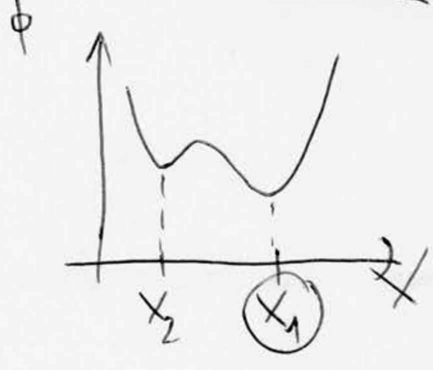
$$p(x) \sim e^{-\phi(x)/k_B T}$$



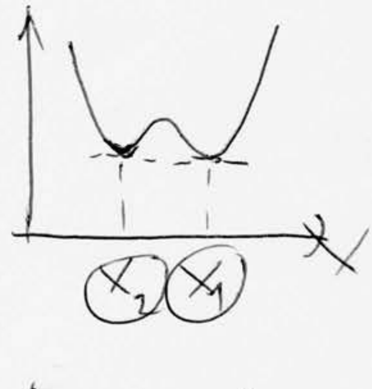
metastabilból átkerülhet stabilba, de kis vsz.-el, ha nagy a pot. hegy

(1)

1. rendű átalakulás

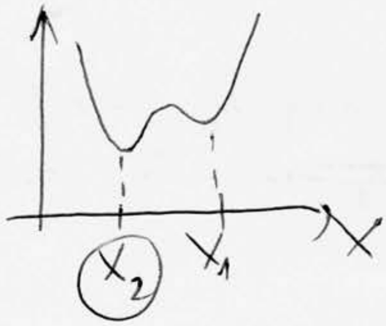


$T > T_0$



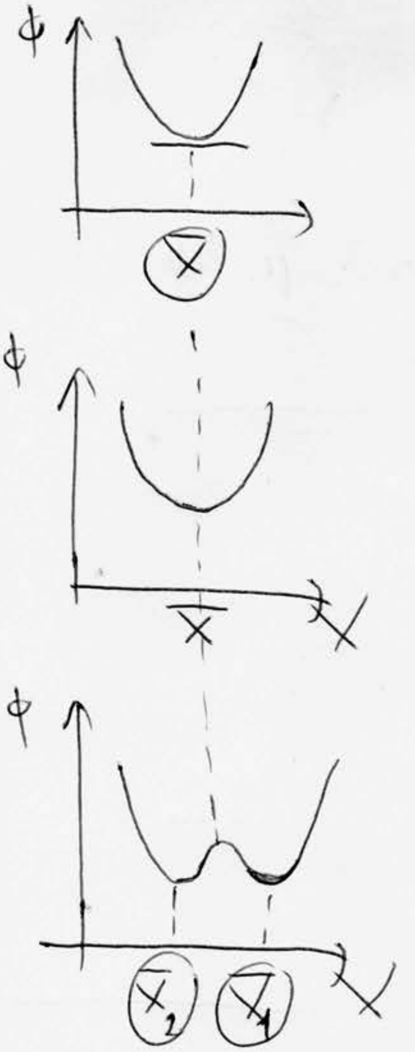
$T = T_0$

← koegzisztencia



$T < T_0$. (véges ugrással átkerülhet x_2-be a vsz.)

① Átmenet a stabilitás határán : instabillá válik a stabil egy. helyzet



$T>T_c$

$T=T_c$

$T<T_c$

stab. feltétele:

$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}>0$

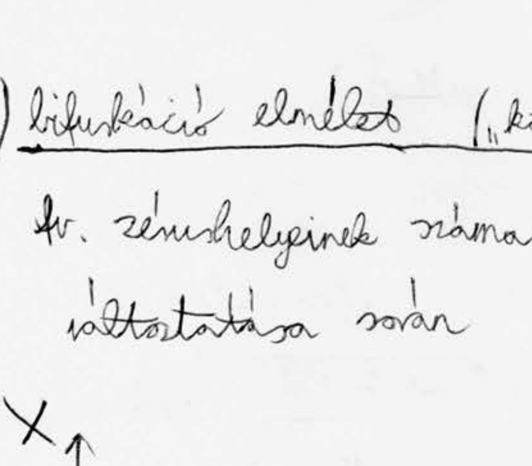
$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=0$

$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}<0$

folytonos átalakulások : $T=T_c$-n kis instabilitások határozzák meg, hogy melyik új állapotba kerül a rsz.

2) bifurkáció elmélet („katasztrófa elmélet")

fv. zérushelyeinek száma és helye hogyan tolódik el egy paraméter változtatása során



3) szimmetriaváltozások

– (pl. S (kén) → monoklin / → rombos } megváltozik a szimm.)

– szimmetriasértés : bizonyos szimm. műveletek eltűnnek (ez érdekesebb)

$T < T_c$ $T > T_c$

$G_1 \subset G_0$

szimm. csoport szimm. csop.

pl. ferromágnes paramágnes

a spontán mágn. kialakul, lesz egy kitüntetett irány

(DE a tükrözés ~~össz~~ olyan értelemben jelen van, hogy a kül. fázis~~okat~~ összeköti)

– rendparaméter (~~konjugált tér~~) (pl. mágnesezettség)

a jelenléte mutatja a szimm. sértést

de pl. ferromágnes átal. -nál a rácsáll. (rg. paraméter) is változik → melyiket vegyük rendp.-nek? → Szabály: azt, amiben az instabilitás megjelenik (most a mágnesezettség)

– konjugált tér (pl. mágn. térerősség)

az a külső tér, ami magas hőm.-en is meg tudja sérteni a szimmetriát (mesterségesen, fázisátal. nélkül)

• rendparaméter ált. ban egy vektor: $X=(X_1, \dots X_n)$

(de lehet tenzor, stb. is)

• rendpar.: a szimm. csoport egyik irred. ábr. szerint transzformálódik

↓ csoportelmélet

(instab. → irred. ábr. ban a 2. deriváltt mátrix egyik sajátért.-e előjelet vált)

4) Osztályozás:

a) Ehrenfest-féle osztályozás (elavult)

→ 1. rendű átalakulás: termodin. potenciál 1. deriváltja "ugrik"

pl. foly.-gáz átalakulás: $\mu(T, p)$

$$d\mu = -s\,dT + v\,dp$$

$$v = \left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_T \qquad v_f \neq v_g$$

→ 2. rendű átal.: termodin. pot. 2. deriváltja "ugrik"

n. rendű ⋮

– de kiderül, hogy van olyan 2. derivált ami divergál (nem ugrik) → nincs értelme magasabb rendű átalakulásokról beszélni

b) ma: – 1. rendű

– folytonos (2. rendű) → 2. derivált divergál

5) Történelem:

- 1869: Andrews CO_2 fázisdiagramja
- 1873: van der Waals
- 1895: P. Curie para-ferromágn. átalakulás
- 1907: P. Weiss átlagtér-közelítés

} makroszkopikus jelenségek / mérések

RTG diffr., n° szórás, alacsony hőm. } új jelenségeket is tudták vizsgálni

- 1937: Landau-elmélet
- 1944: Onsager 2d Ising-modell (egzakt megoldás!)

Landau-elmélet nem működik

- 1949–60: "magashőmérsékleti sorok" módszer: ~~tsz.~~ modellt bizonyos pontosságig meg lehetett oldani

↳ mérések

- 1965–66: skálahipotézis
- 1970: univerzalitás
- 1975: renormálási csoport elmélet (Wilson, Kadanoff, Fisher)

kritikus pont körül rendparaméter mozgása lelassul

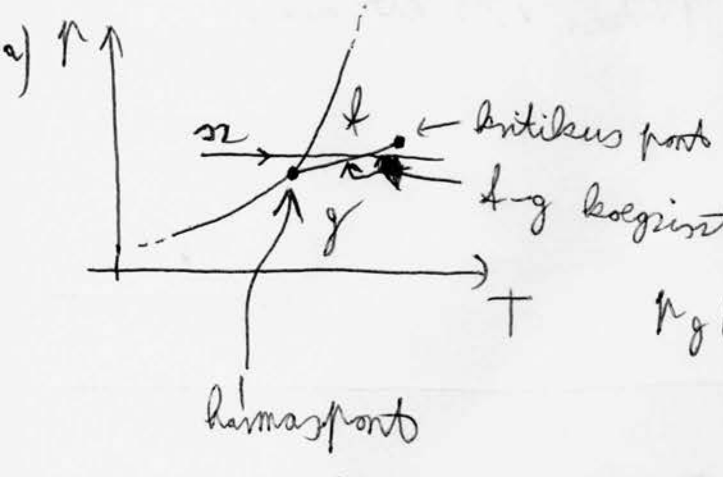
(divergál a karakt. idő

expon. lecsengés → hatványfgv.)

Folyadék-gáz átalakulás

1) egykomponensű anyag:

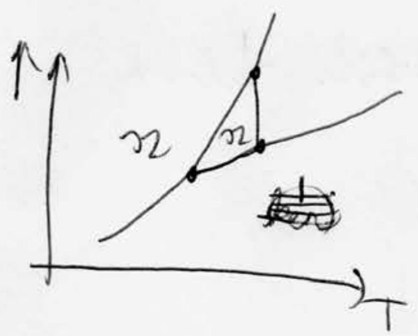
a)



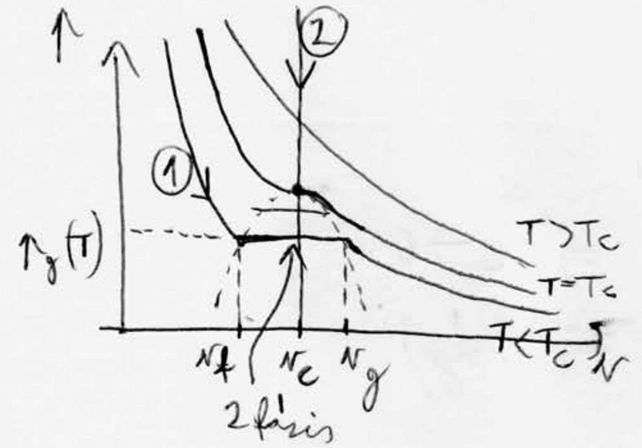
f-g koegzisztencia görbe ← ezzel fogunk foglalkozni

$p_g(T)$: gőznyomás

(több hármaspont is lehet, pl. S (kén):

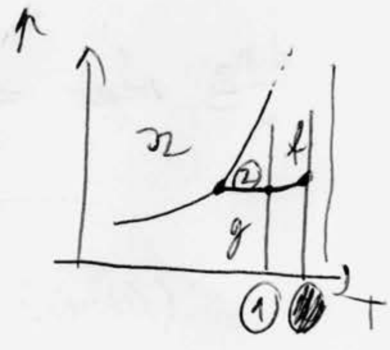


)



(fajtérfogat)

2 fázis van egyensúlyban

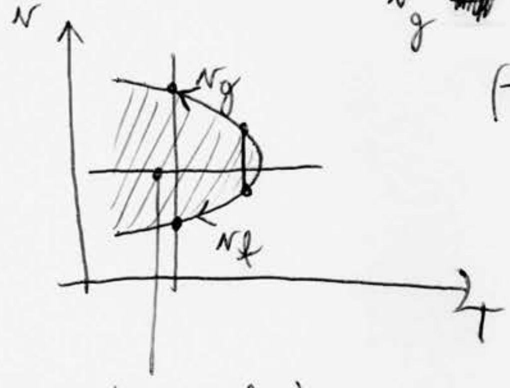


T_c felé haladva v_f és v_g közti kül. csökken

① út : 1. rendű átalakulás

② út : koegzisztencia görbén haladunk (pl. ha biztosítjuk v_c-t)

adott számú rész.-re adott térfogat jut



$v_g - v_f \to 0$ (felületi fesz. is $\to 0$)

$(T \to T_c)$

(látens hő is eltűnik)

átlagos fajtérfogat van ezen a ponton

- Clausius-Clapeyron-egyenlet:

$$\frac{dp_g}{dT} = \frac{s_g - s_f}{v_g - v_f}$$ ← fajlagos entrópia, ← fajl. térfogat

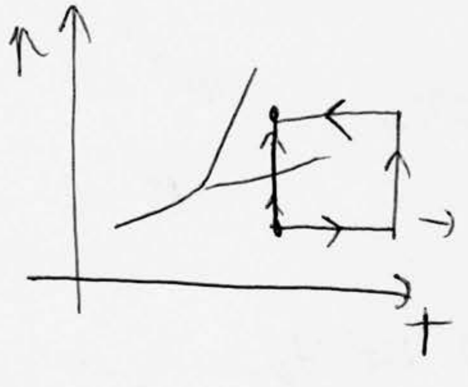
$$L = T \cdot (s_g - s_f)$$

↑ latens hő

$\frac{dp_g}{dT}$ véges $\Rightarrow$ ha $v_g - v_f \to 0$,

akkor $s_g - s_f \to 0 \Rightarrow L \to 0$

(eltűnik a 2 fázis közti különbség)



→ az átmenet folytonos

Mi a különbség akkor a f és g fázis között?

↳ valami van, mert pl. fémolvadék vezet, fém gőz nem vezet

- stab. feltétele:

$$K_T = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T$$

$$K_T^{-1} > 0$$

krit. pontban: $\boxed{K_T^{-1} = 0}$ $\Rightarrow K_T$ divergál (kísérletben tendenciát látunk → 4-5 nagyságrendet nőhet)

ha V változhat

$$\overline{\Delta V^2} = k_B T \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \sim K_T$$ V anyagmenny. adott

⇓

ha K_T divergál, a sűrűség ingadozások is megnőnek! [szórás² - ~~elt~~ Gauss eloszlás írja le ⇒ másfajta eloszlás lesz az anyag a krit. pont körül (kitevőben nem négyzetes, hanem magasabb rendű hatványok)]

⇒ megnő a fényszórás is → a krit. pont körül tejfehér lesz az anyag

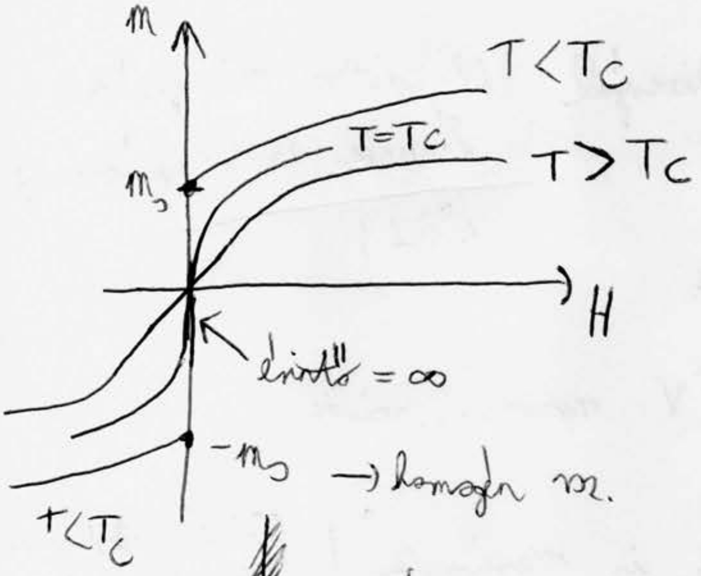
b) példák:

	T_c	p_c
^4He	5,2 K	2,26 atm
Xe	16,6 °C	58 atm
CO_2	31,1 °C	73 atm
H_2O	374 °C	218 atm
Hg	1460 °C	1040 atm

Ferromágnes – paramágnes

1) m H T

mágn. áll. egyenlet



T_c : Curie-hőmérséklet
(kritikus – ″ –)

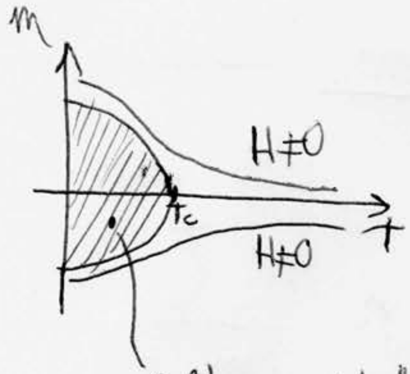
m_s: spontán mágn.

heterogén rsz:
doménekre hasad
fel a rsz.

↓

megjelenik a hiszterézis is

$-m_s \rightarrow +m_s$ ugrás: 1. rendű átalakulás



2 fázis egyidejűleg
létezhet → 2 fázisú tart.

⇓

ha m adott, akkor 2 domén lesz

$$\overline{\Delta m^2} = \frac{k_B T \, \chi}{V} \qquad \chi = \left(\frac{\partial m}{\partial H}\right)_T$$

$$\left.\begin{array}{ccc} T \to T_C & & T = T_C \\ (H=0) & \text{vagy} & H \to 0 \end{array}\right\} \quad \chi \to \infty$$

2) példák

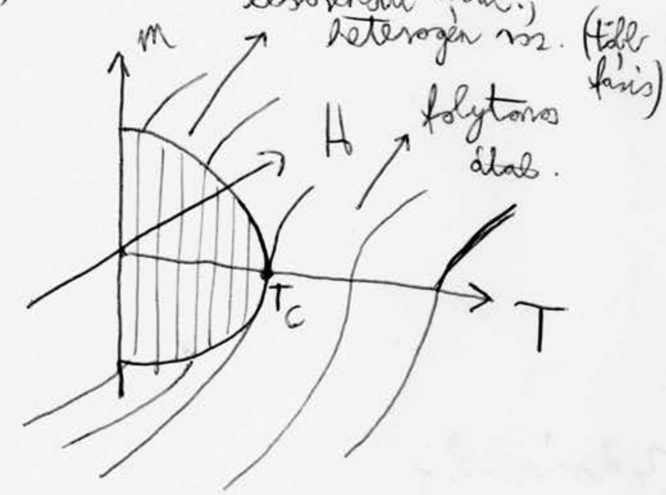
	Fe	Ni	Gd	$CrBr_3$	EuO	EuS	$LiTbF_4$
T_c [K]	1043	630	293	32,8	69	16,6	2,88

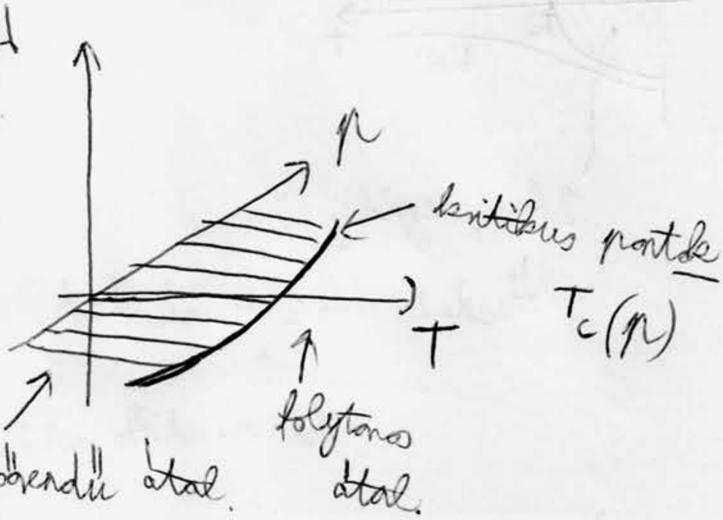
(EuO, EuS, $LiTbF_4$: jó közelítéssel izotrópok)

(magspinek is mutathatnak ferromágneses viselkedést μK hőm.-en)

2. óra

1) Ferromágnesek (folyt.)





háttér: elektronszerk.

mágneses szerk. — sávmágnesség (Fermi-folyadék, taszító kh.)

— lokalizált mágn. momentumok rendszere

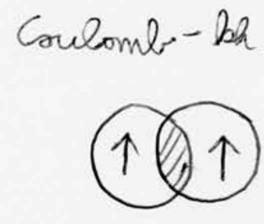
~~effektív~~ spin-modell: kicserélődési kh.

$-J(\underline{S}_1 \underline{S}_2)$

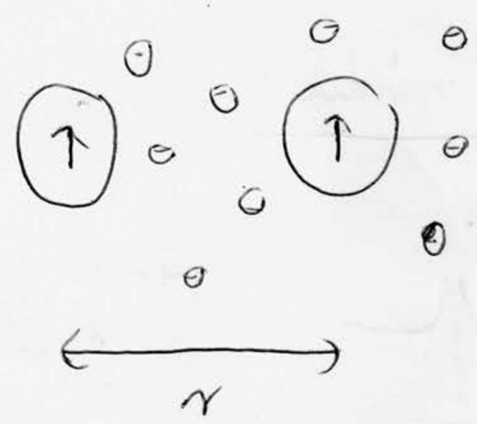
$J > 0$ ferromágn.

$J < 0$ antiferrom.

Coulomb-kh. → kicserélődési kh.



$\left.\begin{array}{l}\text{direkt kicserélődés}\\ \text{szuperkicserélődés}\end{array}\right\}$ rövid hatótáv.



követett
kicsr

$$J(r) \sim \frac{\cos(2k_F r)}{r^3}$$

RKKY-kölcsönhatás

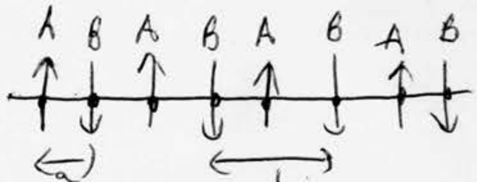
Rudemann Kittel

dipól kh.
$$\frac{\mu_0 \mu_B^2}{a_0^3} \cdot \frac{1}{k_B} \sim 1K$$
Bohr.-sugár

→ ennek a kh.-nak az energiája kicsi, $k_B T$-vel nem összemérhető a krit. pont környékén

2) ~~Antiferromágnesek~~

makroszk. mágnesezettséget nem adnak az antiferromágnesek

a) 

kémiai szerk.

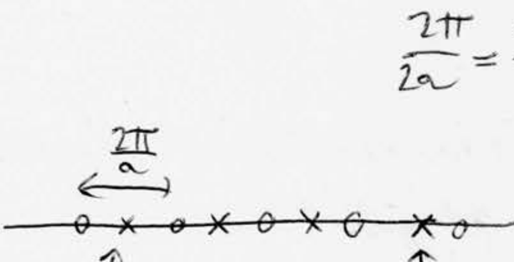
mágn. szerk. periodicitása

$2a$

→ mágn. átal.-kor megvált. a periodicitás

↳ reciprokrács áll.: $\frac{2\pi}{a}$ (kém. szerk.)

$$\frac{2\pi}{2a} = \frac{\pi}{a} \quad \text{(mágn. szerk.)}$$



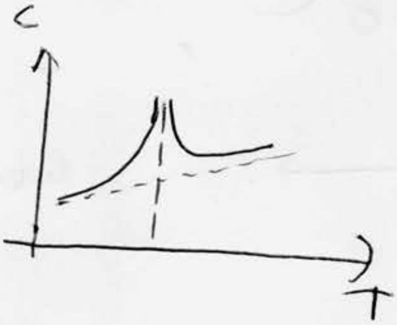
antif. ~~mágn~~ fázisban új rec. r. pontok jelennek meg

szuperreflexiók: Bragg-szórásnál új pontok jelennek meg

⇓

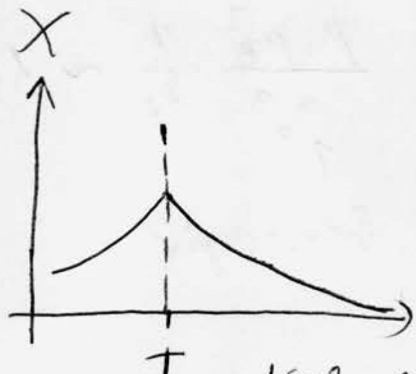
szerkezet feltárása: neutron szórással

b) makr. anomáliák: • fajhő



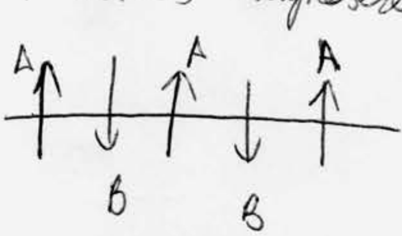
(→ fajhő: energia-flukt. nagyságát jelzi
⇓
ha megnő, a flukt.-k is megnőnek)

• mágn. szuszceptibilitás:



T_N : Néel-hőmérséklet

rendparaméter: alrács mágnesezettség ≡ (N)



konjugált tér: nem megvalósítható
(rácspar. ~~nagyságú~~ hosszon változó mágn. teret csak időben vált.-t tudunk előállítani (EM hullám), statikusat nem)

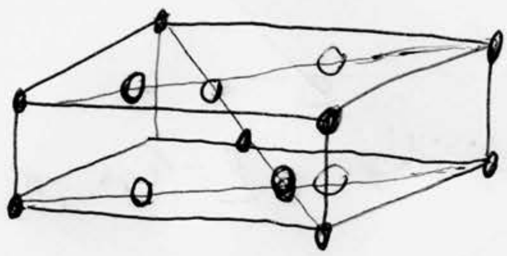
N mérése — szuperreflexiók intenzitása: ha gyengül az alrácsmágn., gyengül ez is

NMR: lokális mágn. tér → mágn. felhasadás a magok nívóiban
⇓
~N

példák:

	MnO	$RbMnF_3$	MnF_2	$GdAlO_3$	$LiErF_4$
T_N [K]	122	83	67	3,87	0,38

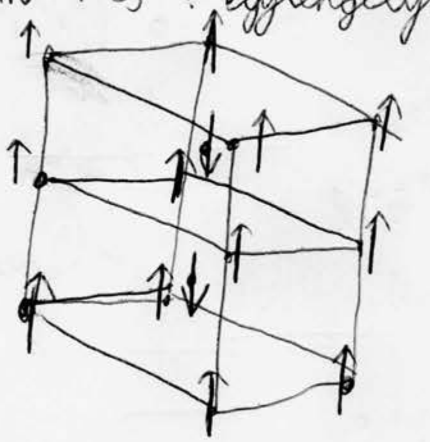
MnF_2



• Mn

○ F

Mn-rács: egytengelyű, gyengén anizotróp



$\boxed{\to \text{rendpar. 1 komp.-ű}}$

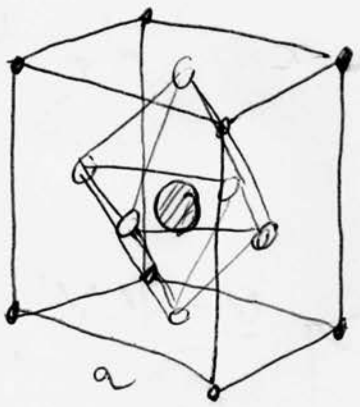
$RbMnF_3$ perovszkit szerkezet

(ABO_3)

↓

~~[illegible]~~ szerk.

perovszkit

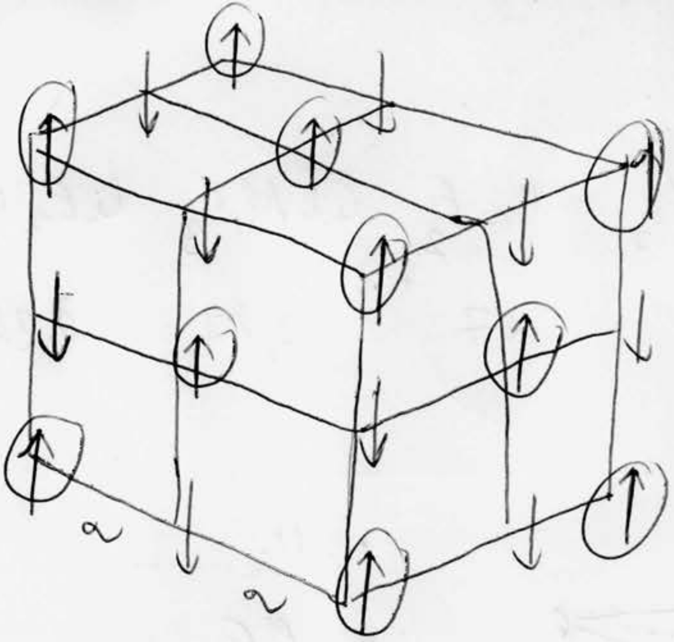


• Rb

Mn

○ F → oktaéder

Mn rács



kémiai szerk.:

köbös

mágn. szerk.: új periodicitás $\underline{R}=(n_1 a, n_2 a, n_3 a)$

$$e^{i\pi(n_1+n_2+n_3)} = e^{i\underline{Q}\,\underline{R}} \quad \text{ahol} \quad \underline{Q}=\frac{\pi}{a}(1,1,1)$$

ha szomszédos rácspontba megyünk n_1, n_2, n_3 közül az egyik 1-gyel változik

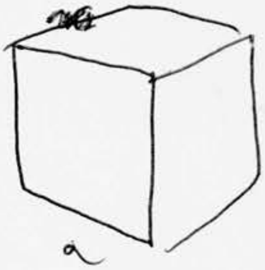
⇓

előjelet vált $e^{i\pi(n_1+n_2+n_3)}$ ✓

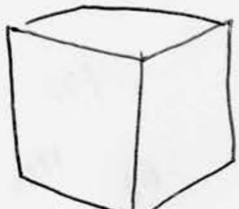
$\boxed{\text{rendpar. 3 komp.-ű}}$ ✓

ez lesz az új reciprok rácsvektor

⇒ sc



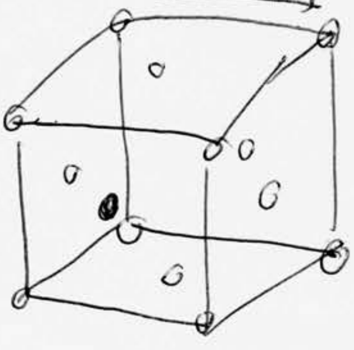
⇒ rec. rács



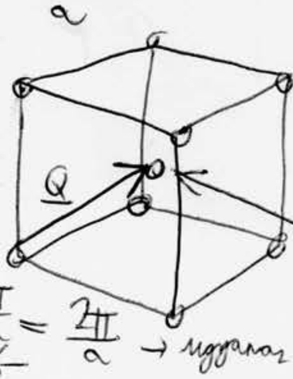
sc

$\frac{2\pi}{a}$

mágn. átal. előtt



⇒



$\underline{Q}=\frac{\pi}{a}(1,1,1)$

bcc

mágn. átal. után

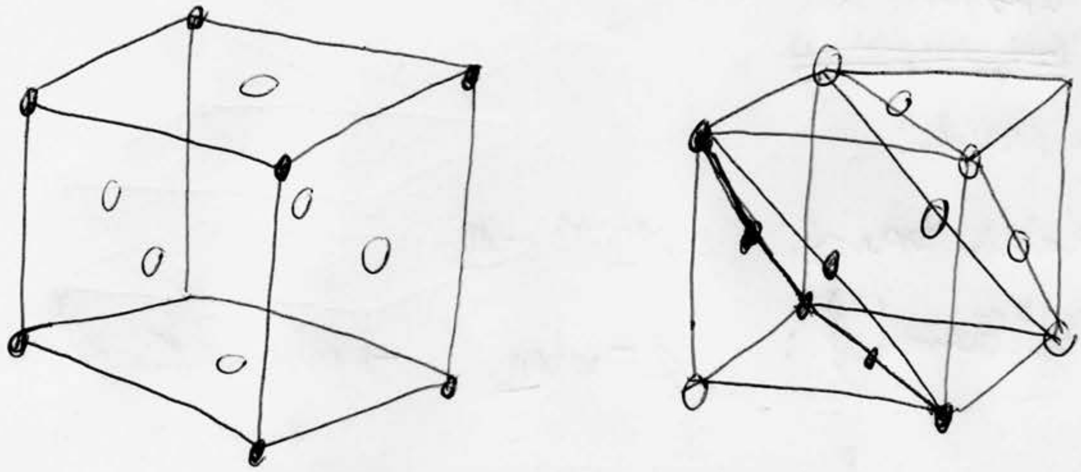
új rec. rácspont jel. meg (szuperreflexió)

$\frac{4\pi}{2a}=\frac{2\pi}{a}$ → ugyanaz a per. BZ

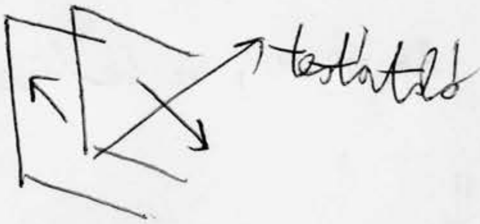
↳ új periodicitás és a szuperreflexió közti kapcsolat

(új szc. rendsz.-nél jelenik meg a szuperrefl.)

MnO kősó rács



Mn-rács : fcc



↓

a síkok egy irányú mágn. rendezettségűek,
de a kül. síkok antiferromágn.-ek

! $\boxed{n=8 \text{ komponensű rendparaméter}}$

(hiába tudjuk 1-1 ion mágn. 1 komp.-jellemezni, a teljes m. leírásához 8 komp. rendpar. kell)

3) Periodikus mágn. szerkezetek

i) – nem mágn. szerk.:

- pontcsoport : 32
- tércsoport : 230
  ~~(eltolás is lehet)~~

– mágn. szerk.:

további transzf. : $\underline{m} \to -\underline{m}$

(időtükrözés) : $\underline{j} = \mathrm{rot}\,\underline{m}$ → mivel $\underline{j}$ előjelet vált, ezért $\underline{m}$ is)

⇓

ha $\underline{m} \neq 0$, az időtükr. sérül

⇓

Sulnyikov-csoportok

- pontcsop.: 122
- tércsoport : 1651

ii) pl.

Egytengelyű antiferromágnes mágn. térben

↓

adott tengely mentén könnyen lehet mágn. az anyagot, a többiben nagyon nehezen

anizotrópia energia : ~~[illegible]~~ akkor lép fel, ha kifordítom a mágn.-t az adott teng.-ből

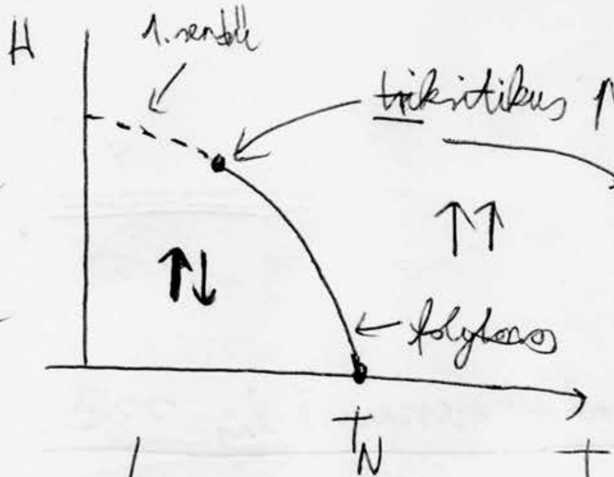
kicserélődési energia : legkedv., hogy ellentétesen állnak a szomszédok

Zeeman-energia : legkedv. $\underline{\Delta\ell}$, ha a mágn. mom. a mágn. tér irányába áll

↓

átl. esetben ezek versengenek

a) de ha erős anizotrópia van → csak a kics. és a Zeeman verseng



↙ könnyű mágn. irányába kapcs. be a mágn. teret

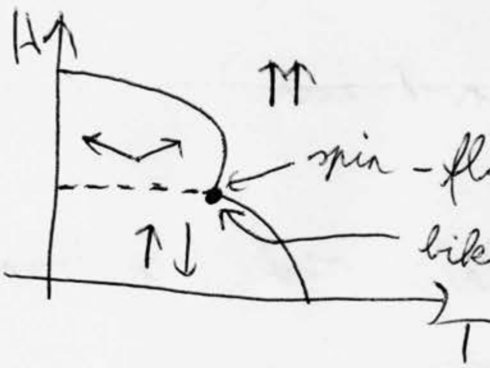
(3 elsőrendű görbe kit. pontja lenne, ha a konj. teret is felrajzolnánk ↗ tengelyként)

↓ győz a kics.

↓ győz a Zeeman

b) gyenge anizotrópia

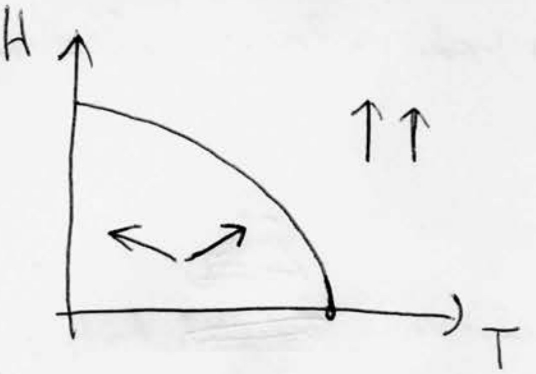
mindkét esetben a Zeeman en. javul, (véges mágn.) de ezt az esetet könnyebb létrehozni, ha az anizotrópia nem túl nagy



spin-flop átalakulás (1. rendű)

bikritikus pont (2 krit görbe tal. pontja)

c) izotróp antiferromágnes



4) Nemperiodikus szerkezetek: inkommenzurábilis szerk.

két periodikus szerk:

A : periódusa λ_A

B : — " — λ_B

(pl. kémiai és mágn. szerk.)

• $\frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \frac{m}{n}$ (racionális) kommenzurábilis (összemérhető)

$n \cdot \lambda_A = m \cdot \lambda_B = \Lambda$ (eredő szerk. periódusa)

$\Downarrow$

van közös periódusa

(pl. antiferromágn.-nél $m=2$, $n=1$ volt)

• $\frac{\lambda_A}{\lambda_B}$ = irracionális ⟶ inkommenzurábilis szerk. (nem összemérhető)

(mérésben hogyan kezeljük ezt fel? - csak véges rac. számokat mérhetünk -

• ha nagyon nagy szám $\frac{m}{n}$, akkor valószínű, hogy inkomm.

- ha $\frac{m}{n}$ T-ben változik → inkomm.

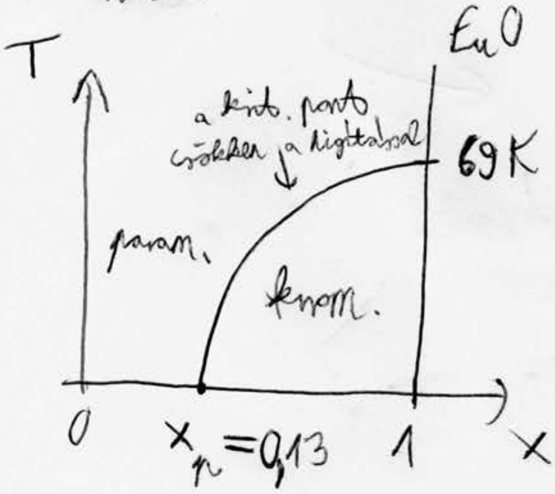
- az alapszerk.-en eltolható a másik szerk. ⇒ új szimm. jelenik meg)

5) Hígított mágnesek

			T_c
pl.	EuO	izotróp ferromágnes	69 K
	EuS		16,6 K

— de ha EuO-ban Eu-t Sr-ral cseréljük, a szerk. nem vált.

Sr ↑ nem mágn. ionok ↓ gyengítjük a mágn. kh.-t



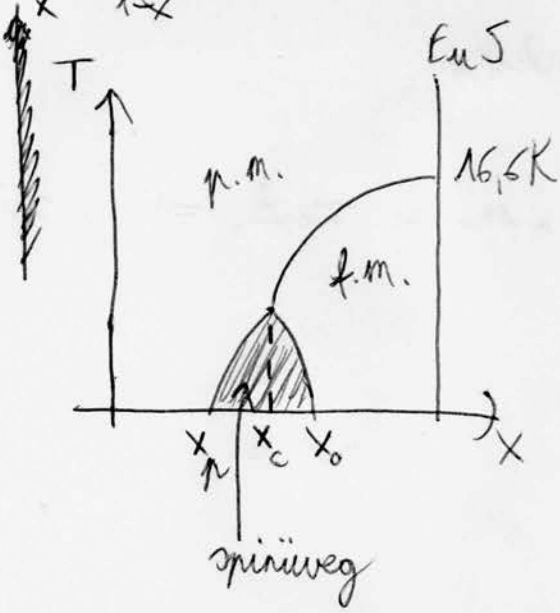
← $Eu_x Sr_{1-x} O$

↓

véges konc.-nál "fürtökre" szakadnak szét az EuO-k

↳ ezeknek független egymástól a mágnesezettsége

- $Eu_x Sr_{1-x} S$



$x_p = 0{,}13 \quad x_0 = 0{,}65 \quad x_c = 0{,}51$

⇓

6) spinüveg

$\langle S_i \rangle \neq 0$ (az egyes pontokban)

$\langle \sum_i S_i \rangle = 0$ (a teljes mágn.)

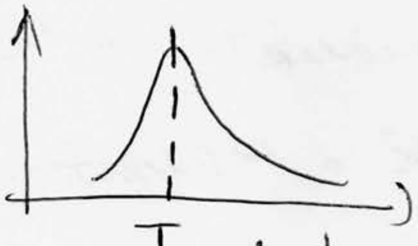
} ilyen volt az antif. is, DE

nincs hosszútávú ~~sz~~ mágn. rend.

(hiányoznak a mágn. Bragg-csúcsok)

rendezetlen rend.

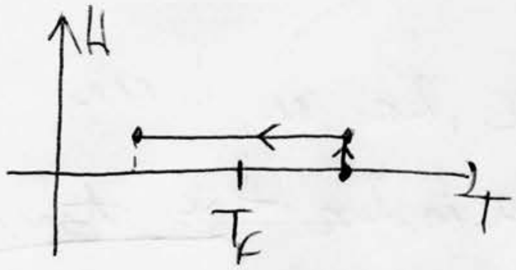
a) AC - szuszceptibilitás
váltóáram



T_F : fagyási hőmérséklet

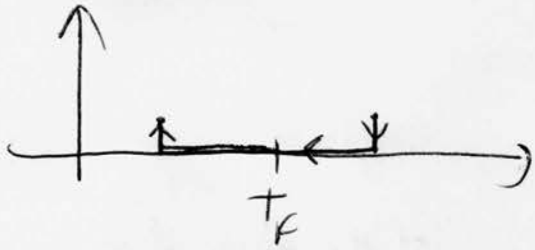
b) DC-szuszceptibilitás:

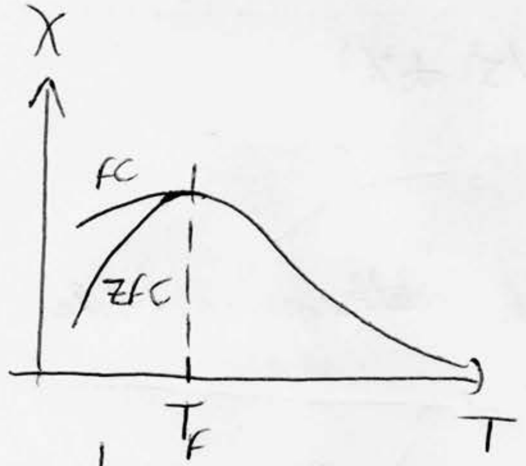
- FC field-cooling: $H \neq 0$-nál hűtjük



$\rightarrow \chi = \frac{M}{H}$-t mérjük a pontokban

- ZFC: zero-field-cooling





↓

T_F alatt függ az előélettől χ !

c) Miért más az Eu O és Eu S

Eu O	Eu S
$J_{nn} > 0$	$J_{nn} > 0$
$J_{nnn} > 0$	$J_{nnn} < 0$

nn: nearest-neighbour

nnn: next –"–

⇓

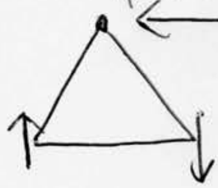
ha az EuO-t hígítjuk, nnn még mindig ferromágneses lesz

DE ha az EuS-t hígítjuk, lesz nn és nnn is

⇒ ferro és antiferrom. kh. is lesz → frusztrációt hoz

d) másféle spin-üveg rendszer

frusztrált lesz



antif. csatolás

e) fémekben: nem mágn. fémben oldott mágn. fém

pl. AuFe (Fe koncentráció < 15 at%)

AgMn

CuMn

⇓ Fe ionok véletlenszerűen helyezk. el

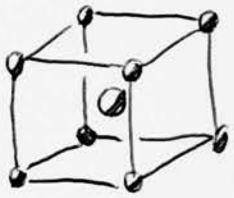
→ RKKY kh. esetén

$$J(r) \sim \frac{\cos(2k_F r)}{r^3}$$

emiatt a ~~osz~~ hullámzás miatt bizonyos Fe-ionok között ferrom., mások között antif. csat. lesz

1) Példák

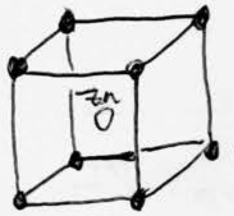
a) Cu - Zn fázisdiagram



bcc rács

$T > T_c$

nincs kitüntetett pont, minden ponton ugyanakkor vsz.-el van Cu és Zn is



sc rács

Cu $T < T_c$

p. sztöch. arány

p-ed vsz Cu

1-p -ed vsz Zn

$$p = \frac{N_{Cu}}{N_{Cu} + N_{Zn}}$$

$$N_{Cu} + N_{Zn} = N$$

Cu - alrácson:

$$N_{Cu} = \frac{N}{2} \cdot p \cdot (1+x)$$

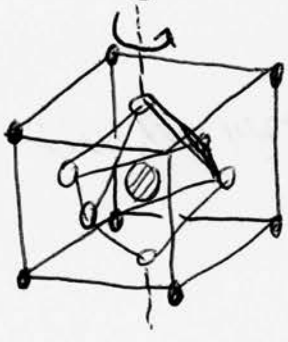
$$x > 0$$

$x = 1 \Rightarrow$ legtöbb Cu összegyűlik az alrácson

↓

rendeződés

b) $SrTiO_3$ (stroncium-titanát)



$T_c = 110$ K

perovszkit -szerk.

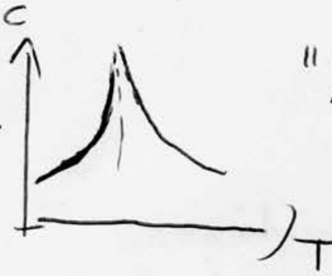
• Sr

⊘ Ti

∘ O

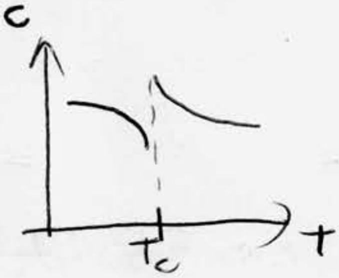
makroszkopikus anomáliák :

– fajhő



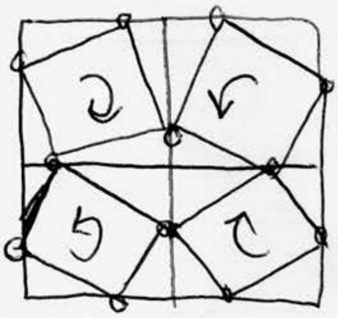
"λ-görbe"

– hangsebesség



átalakulás: a merev oktaéder a cellában elfordul

rendparaméter: φ elfordulás szög



felülnézet

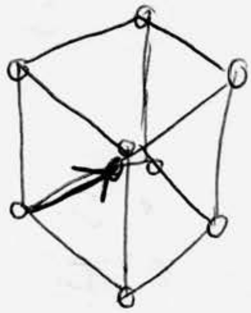
← oxigén elmozdulása miatt a merev oktaéder ellentétes irányba forog

⇒ elemi cella itt is 2x-re nő

(belátható, hogy a tetején lévő rétegben is ellentétes irányba forog az oktaéder)

$\underline{R}_l$ cella

$$\varphi_l = \varphi_0 \cdot e^{i\underline{Q}\underline{R}_l}$$



$$\underline{R}_l = a(n_{lx} + n_{ly} + n_{lz})$$

$$\underline{Q} = \frac{\pi}{a}(1,1,1)$$

⇓

n° számokon szuperreflexió jelenik meg

Mi az oka az elfordulásnak?

↳ rácsdinamikai instabilitás

forgás jelen van fononmódusként a magas hőm. fázisban is,

de T_c-n instabillá válik

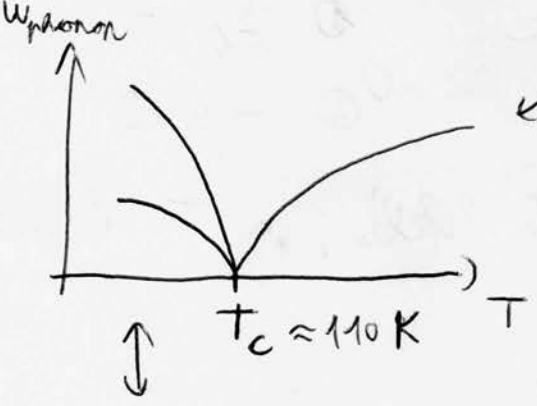
$\frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2$ $\to T=T_c$

$\omega_Q \to 0$

$(T \to T_c)$

$T=0$ $\varphi_0 \simeq 2^\circ$

pl. ESR-el kimérhető (Ti-t Fe-al helyettesítik → ha elfordul, a környezet másképp hat rá)



← T_c felett a 3 rezgési módus ekvivalens

T_c alatt elromlik a szimm., a forgási tengely irányban más lesz a frekv.

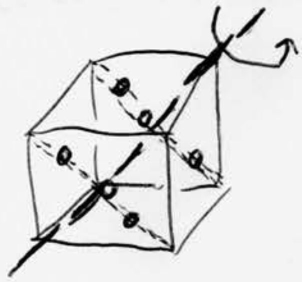
c) hasonló effektust mutat a $LaAlO_3$

elfordulás: átló $\underline{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$

↳ $SrTiO_3$: $(\varphi, 0, 0)$

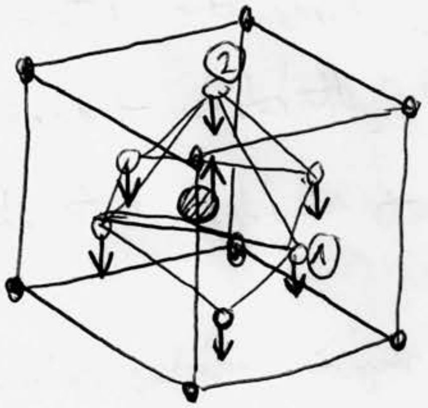
(megj.: ha $SrTiO_3$-at megnyomják az átló irányába, szintén mutatja ezt az átló menti elfordulást)

↳ $LaAlO_3$ $(\varphi, \varphi, \varphi) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$



2) Ferroelektromos átalakulás

pl. $BaTiO_3$ (perovszkit szerk.)



• Ba

○ O

⊘ Ti

Ti ↑	0,05
O ①	−0,05
O ②	−0,09

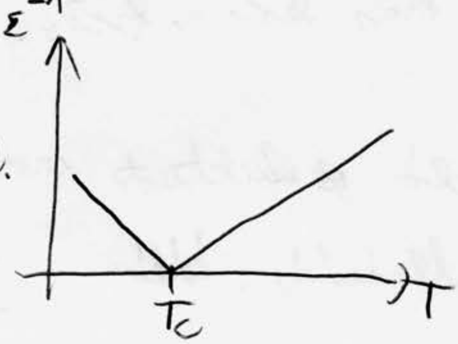
ha Ba-ot tartjuk fixen, az O lefelé, a Ti felfelé mozdul el

Lyddane–Sachs–Teller-reláció:

statikus diel. áll. ← $\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_\infty} = \dfrac{\omega_{LO}^2}{\omega_{TO}^2}$

ε diel. áll.

↓ ↙



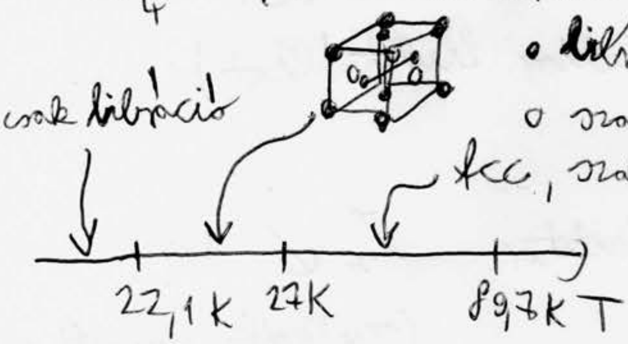
ha ε divergál T_c-n, akkor ω_{TO}^2 ~~[illegible]~~ $\to 0$ $\Rightarrow$ van egy lágy fononmódus

($SrTiO_3$-ban is van egy optikai módus aminek $T \approx 5\,K$ közelében 0-hoz ~~tart~~ a frekije $\exists$ divergálna a diel. áll., ez is ~~de annyira~~ lehetne ferroelektromos
DE olyan közel van $T = 0\,K$-hez az átal. pont, hogy a 0ponti rezgések megakadályozzák)

3) Orientációs átalakulás

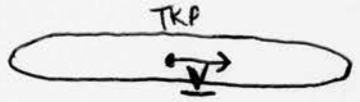
- metán CH_4 
  - lapcentrált köbös rácson van a molekula TKP-ja de maga a mol. szabadon forogható
  - egy adott átal. hőm. körül befagynak ezek a forgások, és a mol.-k adott oldalukat mutatják egymás felé

- CD_4 ($H \to$ deutérium)
  - libráció (egy. helyzet körüli forgási rezgés)
  - szabad rotáció

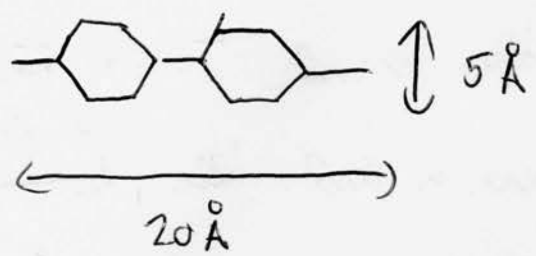


- C_{60}: fcc rácson hasonló effektus $\to$ először a TKP rendeződik majd befagy a szabad forgás

folyadékkristály

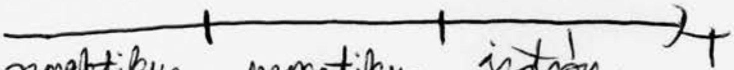


hosszúkás mol.

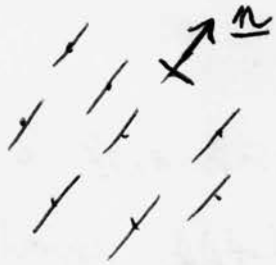


$\underline{v}^2 = 1$ $\quad$ $\underline{v}$ egységvektor adja meg a mol. irányát

hasonló orientációs átalakulást mutat



szmektikus fázis	nematikus folyadékkristály	izotróp folyadék
↓ TKP is többnyire rendezett	↳ orientáció rendezett	



TKP rendezetlen

$\underline{n}$: direktor → anizotróp a diel. áll.

↓

fényszórólan látszik

(kevésbé átlátszóak, mert a direktor fluktuálhat)

rendparaméter

$\langle v_\alpha \rangle = 0$ ← mindegy, hogy a direktor ↗ v. ↙ áll (mindkettő rendezett orientáció)

↳ nem jó rendparam.

$\Downarrow$

$\langle v_\alpha v_\beta \rangle$

$$\sum_\alpha \nu_\alpha^2 = 1 \quad (\text{spur}=0)$$

$$\langle \nu_\alpha \nu_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}\cdot\frac{1}{3} \quad \text{izotróp esetben}$$

$$\Downarrow$$

$$S_{\alpha\beta} = \langle \nu_\alpha \nu_\beta \rangle - \delta_{\alpha\beta}\cdot\frac{1}{3}$$

rendpar. ≑ 2 indexes szimm. tenzor, spurja 0 ⇒ 5 ~~független~~ elem

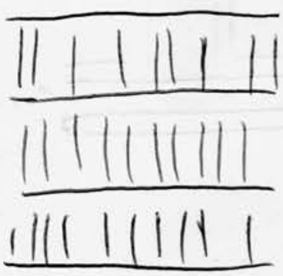
! rendpar. nem csak vektor lehet !

2 a saját ~~értékeket~~ adja meg

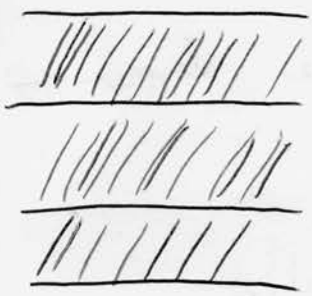
3 rögzíti a dir. tengelyt

(3. s.é. nem független Sp=0 miatt)

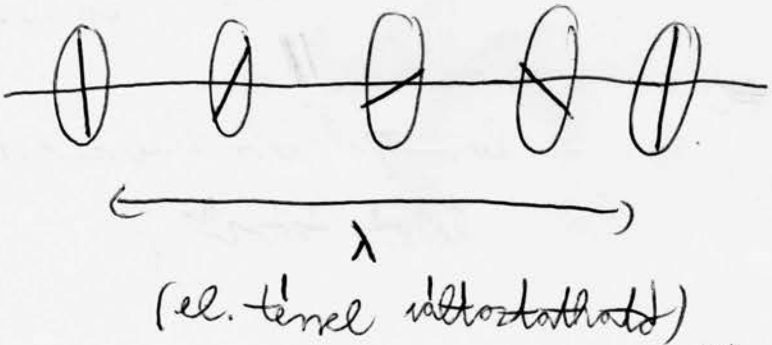
• szmektikus A



• szmektikus C



• koleszterikus fázis



(el. térrel változtatható)

→ azt a hullámhosszú fényt engedi át, amelynek a λ-ja a szerkezet λ-val egyezik meg → színesek

4) Szerk. fázisátalakulások (további példák)

a) KH_2PO_4 (KDP = kálium-dihidr.-foszfát)

K a foszfátgyökök közelében szeret lenni

magas hőm.-en egyenlő vsz.-el

alacsony —"— az egyik közelébe áll be → el. dipólmom. jelenik meg

b) rugalmas átalakulások

rugalmas áll. előjelet vált → frekv. 0-hoz tart

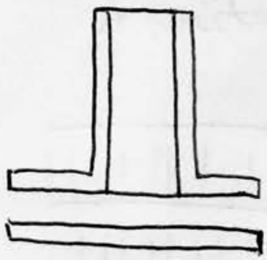
mozgás egyre lassabb lesz (BaTiO$_3$-nál is láttuk)

(~~relaxáció~~)

5) További fázisátalakulások

- szuperfolyékonyság ^{4}He bozon, ^{3}He fermion
- szupravezetés

→ párképződés



rendparaméter: $\langle \hat{\Psi}(r) \rangle \neq 0$ bozonoknál ⇒ sérti a rész. szám megmaradást

$\langle \cancel{\Psi(r)\,\Psi(r)} \rangle \neq 0$ ($b_k\, b_{-k}$) fermionoknál

hfv. globális fázisa nem lehet tetszőleges

4. óra

Spinrendszerek

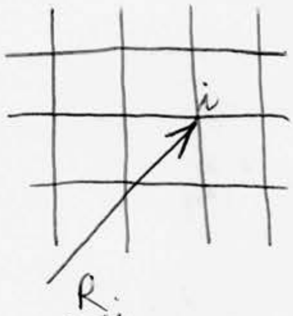
0) lokalizált spin modellek:

rács – spin – kölcsönhatás : ~~ezeket~~ paraméterként meg kell adni

↓

vannak olyan modellek, melyek függnek a rácstól (pl. 2D négyszögrács, Δ rács, ...)

1) Ising - modell



$i \quad j$ kh. legyen:

$S_i = \pm 1$ $\qquad -J \cdot S_i S_j = \begin{cases} -J & \uparrow\uparrow \text{ vagy } \downarrow\downarrow \\ J & \uparrow\downarrow \text{ vagy } \downarrow\uparrow \end{cases}$

↙ ↑ ↓ $\qquad J > 0$ ferromágneses csatolás

$(S_i^2 = 1 \Rightarrow \sum_i S_i^2 = N)$ $\qquad J < 0$ antiferromágn. – || –

nn (nearest neighb. kh.)

- $\underline{d=1}$ (1D) : nincs fázisátalakulás (ez rövid hatótáv. – pl. expon. – kh. esetén igaz, hosszú hatótáv.-ra – pl. hatványfv. – már lehet)
- $\underline{d=2}$: 1944 Onsager → egzakt megoldás
- $\underline{d \geq 3}$: egzisztencia tételek : van fázisátal.

2) szférikus modell:

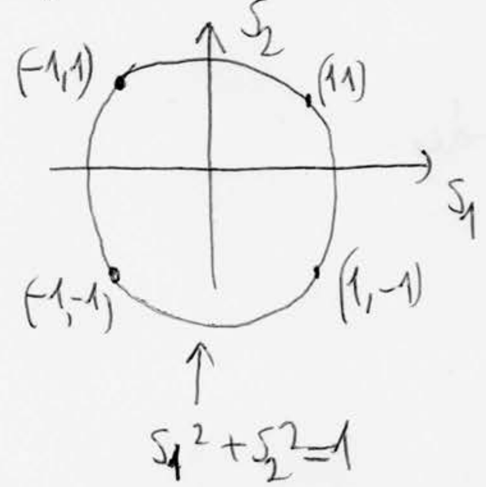
S_i = valós változó

$(-\infty < S_i < +\infty)$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} S_i^2 = N}$$

(Ising-modellre ez teljesül, de ott megkötés van nem csak az összegre, hanem az egyes spinekre is)

pl. 2 spin:



• → Ising modell

○ → szférikus modell

⇓

kiterjesztettük a fázisteret

$$-J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j$$

↑

NN-re

egzaktb mo.: $d = 1, 2, 3$

krit viselkedés: $d \geq 4$ is

$d = 1, 2$: nincs fázisátalakulás

3) n-vektor modell:

spin: $\underline{S}$ n-komp. egységvektor

$\underline{S} = (S_1\ S_2\ \dots\ S_n)$ $\quad \underline{S}^2 = 1$ → nagysága áll., de iránya változhat

$n = 1$: Ising modell

$\Leftrightarrow$

$n=2$: XY modell $\qquad -J(\underline{S}_i \underline{S}_j) = -J\cos\vartheta$

$n=3$: klasszikus Heisenberg-modell

$\vdots$

szabadenergia

$n \to \infty \quad$ pl. $\dfrac{F}{Nn} =$ véges

$n \to \infty$ (előtte $N \to \infty$) határesetben

egzakt megoldás: $n \to \infty$

ekvivalens a szférikus modell eredményével

4) Heisenberg-modell:

a) spin: $\underline{S}$ imp. momentum

$$[S_x, S_y] = i\, S_z$$

($\hbar$-t szorzót kiveszszük, mert szeretünk dim. talan spinekkel dolgozni)

$$\underline{S}^2 = s(s+1)$$

paraméterként megmondhatjuk, mekkora spinekkel dolgozunk (pl. $s=\frac{1}{2}$)

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \underline{S}_i \underline{S}_j$$

$$\underline{S}_1 \cdot \underline{S}_2 = \frac{1}{2}\left[\left(\underline{S}_1 + \underline{S}_2\right)^2 - \underline{S}_1^2 - \underline{S}_2^2\right]$$

$j(j+1) \qquad s(s+1) \qquad s(s+1)$

$j = 0, 1, 2, \ldots 2s$

$\underline{S}_1\underline{S}_2 = \frac{1}{2}\left[j(j+1) - 2s(s+1)\right]$

sajátértékei $\nearrow$

max. s.é.: $j = 2s \to$ ~~$\underline{S}_1\underline{S}_2 \dots$~~ s^2 (azonos beállás)

min. s.é.: $j = 0 \to -s(s+1)$ (ellentétes beállás)

$\Rightarrow$ itt is J előjelétől ~~fog~~ függni, hogy melyik lesz kedvezőbb

(persze rácsnál már bonyolultabb a helyzet)

b) egzisztt. tételek:

— Mermin–Wagner–tétel: Heisenberg-modellben $d = 1, 2$-ben nincs fázisátalakulás (ferro / antiferrom.-re is igaz)

(nem csak spinekre)
ált. ban: • folytonos szimm. sérülése esetén $d = 1, 2$-ben nincs fázisátalakulás

(pl. szferikus modell, n-vektor modell)

• diszkrét szimm. sérülése esetén $d = 1$-ben nincs fázisátal.

(pl. Ising-modell)

— Fröhlich–Simon–Spencer–tétel: klassz. Heisenberg-modellben $d \geq 3$-ban van fázisátal.

— Dyson–Lieb–Simon–tétel: kl. Heisenberg antiferrom. $d \geq 3$-ban van fázisátal.

c) <u>anizotróp Heisenberg-modell</u>

$$-\left(J_x S_{1x} S_{2x} + J_y S_{1y} S_{2y} + J_z S_{1z} S_{2z}\right)$$

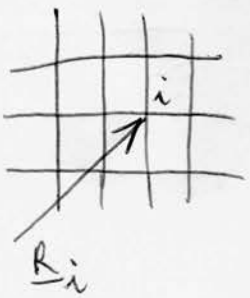
$\left(J_x = 0,\ J_y = 0,\ J_z \neq 0,\ s = \frac{1}{2}\right.$ energiaspektruma = Ising-modell$\left.\right)$

de az ~ a dinamikát is leírja

(megj.: a fázisátal. megértéséhez ált. ban több segítséget nyújtanak a közelítő módszerek)

Ising-modell

1)



$S_i = \pm 1$

- fázistér

  $\tilde{S}$ konfiguráció: $\tilde{S} = (S_1, S_2, \dots S_N)$

  ↳ 2^N db konfig. van, ekkora a fázistér

- eloszlásfv.: kanonikus $P(\tilde{S}) = \frac{1}{Z} e^{-\beta \mathcal{H}}$

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{ij \\ (i \neq j)}} J_{ij} S_i S_j - \sum_i h_i S_i$$

az energiát itt is $\mathcal{H}$-val jelöljük, pedig most nincs mögötte Hamiltoni dinamika ált.: $h_i = H$

↳ inhomogén tér : segédmennyiség

$$\Rightarrow Z = \sum_{\{S\}} e^{-\beta \mathcal{H}(S)}$$

• transzlációs szimm.: $J_{ij} = J(\underline{R}_i - \underline{R}_j)$

↑

csak a távolságtól függ

a kh. erősség

$$F = -k_B T \ln Z$$

$$m_i \equiv \langle S_i \rangle = \frac{\sum_{\{S\}} S_i \cdot e^{-\beta \mathcal{H}}}{\sum_{\{S\}} e^{-\beta \mathcal{H}}} = \frac{\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial h_i}\sum_{\{S\}} e^{-\beta \mathcal{H}}}{\sum_{\{S\}} e^{-\beta \mathcal{H}}} =$$

$e^{\beta h_i S_i}$ S_i-hez h_i szerint kell deriválni

$$= k_B T \frac{\partial}{\partial h_i} \ln Z = -\frac{\partial F}{\partial h_i}$$

2) Lin. válaszfv.:

~~2) lin. válaszfv.~~ $h_i = H + \delta h_i$

$$\delta m_i = \sum_j X_{ij}\, \delta h_j \qquad X_{ij} \text{ válaszfv. (szuszceptibilitás)}$$

• reciprocitás:

$$\delta m_i = \sum_j \frac{\partial m_i}{\partial h_j} \delta h_j \qquad m_i = -\frac{\partial F}{\partial h_i}$$

$$\underline{\chi_{ij} = \frac{\partial m_i}{\partial h_j} = -\frac{\partial^2 F}{\partial h_i \partial h_j} = \chi_{ji}}$$

↳ reciprocitás a szuszc.-ban

• makr. szuszceptibilitás: $\delta h_i = \delta h$

$$\delta m_i = \Big(\underbrace{\sum_j \chi_{ij}}_{i\text{-től }\cancel{\text{függ}}}\Big) \delta h = \chi \delta h$$

(ezt is szokták korr. fv.-nek hívni)

• korrelációs fv.: $C_{ij} = \langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle = \Big\langle \big(S_i - \langle S_i \rangle\big)\big(S_j - \langle S_j \rangle\big) \Big\rangle$

belátható, hogy: $C_{ij} = k_B T \cdot \chi_{ij}$

miért: $\underline{\chi_{ij}} = \frac{\partial}{\partial h_j}\left(k_B T \frac{\partial \ln Z}{\partial h_i}\right) = k_B T \frac{\partial}{\partial h_j} \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial h_i} = \cancel{k_B T}\Bigg(\underbrace{\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial h_i \partial h_j}}_{\beta^2 \cdot \langle S_i S_j \rangle} -$

$$- \frac{1}{Z^2} \underbrace{\frac{\partial Z}{\partial h_j}}_{Z\beta\langle S_j\rangle} \underbrace{\frac{\partial Z}{\partial h_i}}_{Z\beta \cdot \langle S_i \rangle}\Bigg) = \underline{\frac{1}{k_B T} C_{ij}}$$

$$\frac{1}{Z} \sum e^{-\beta \mathcal{H}} \beta S_i \beta S_j$$

fluktt.-válasz

~~tétel~~

$$\chi = \sum_j \chi_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{ij}\chi_{ij} = \frac{1}{N}\frac{1}{k_BT}\sum_{ij}\left(\langle S_i S_j\rangle - \langle S_i\rangle\langle S_j\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{Nk_BT}\left(\left\langle\left(\sum_i S_i\right)\left(\sum_j S_j\right)\right\rangle - \left\langle\sum_i S_i\right\rangle\left\langle\sum_j S_j\right\rangle\right) = \frac{\langle \Delta M^2\rangle}{Nk_BT}$$

$\sum_i S_i$ = összmágnesezettség

ez is flukt.-válasz ~~tétel~~

3) ~~m~~ kölcsh., fenomágn. kh.

$$\mathcal{H} = -J\sum_{\langle ij\rangle} S_i S_j - H\sum_i S_i$$

$H = 0$: $S_i \to -S_i$ $(\forall S_i)$ cserére

$\mathcal{H}$ invariáns

alapállapot: $S_i = 1$ minden i-re

vagy

$S_i = -1$ $\forall\, i$-re

az állapotok nem rendelkeznek a $\mathcal{H}$ szimm.-val

DE $P(\bar{S}) = \frac{1}{Z} e^{-\beta\mathcal{H}}$ invariáns

$\langle S_i\rangle = \sum_{\{\bar{S}\}} P(\bar{S})\, S_i = 0$ $\to$ a többség fel, többség le áll.-ot azonos súllyal veszi figy.-be

$\Downarrow$

szimm. sértés kell:

(i) kvázi átlagolás: $H \neq 0$ $\langle S_i \rangle = m \neq 0$

$$H \to 0 \begin{cases} \text{ha } \lim\limits_{H\to 0} m = 0 & \text{paramágn. fázis} \\ \text{ha } \lim\limits_{H\to 0} m = \text{véges} & \text{ferromágn. fázis} \end{cases}$$

ez csak akkor igaz, ha előbb elvégzem a termodin. határesetet

$\downarrow$

m_s spontán mágnesezettség

(megjelenik egy energiagát a két áll. között, ezért nem tudunk egyikből a másikba átugrani)

(ii) korrelációk vizsgálata

ez érzéketlen a $\uparrow \downarrow$ irányra

$$H = 0 \qquad \langle S_i S_j \rangle \underset{|R_i - R_j| \to \infty}{\simeq} m^2 \ (\text{véges})$$

: ha ez teljesül, akkor az ferromágn. fázis

($T = 0$-n paramágn.-nél is ez lesz)

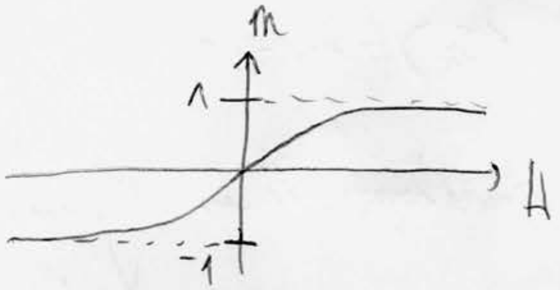
4) átlagtér közelítés

1 spin $\to$ mágn. térben:

$$\mathcal{H} = -H \cdot S$$

$$Z = e^{\beta H} + e^{-\beta H} = 2 \cdot \mathrm{ch}(\beta H)$$

$$m = \langle S \rangle = k_B T \frac{\partial \ln Z}{\partial H} = \cancel{k_B T} \frac{\mathrm{sh}(\beta H)}{\mathrm{ch}(\beta H)} \cdot \cancel{\beta} = \mathrm{th}(\beta H)$$



(A)

Weiss gondolatmenete:

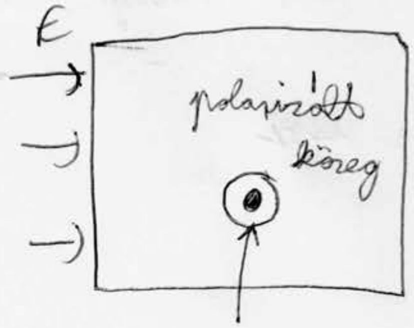
↳ belső tér (molekuláris tér)

$$H + \lambda m$$

a környező mágn. tér (kb.) arányos lesz az átlagos térrel

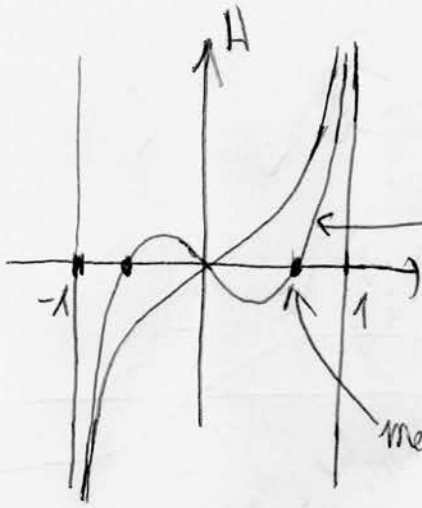
$$m = \mathrm{th}\left(\beta (H + \lambda m)\right)$$

[hasonló gondolatmenetet máshol is alkalmaztak korábban:



$$H = k_B T \cdot \mathrm{arth}\, m - \lambda m$$

$$\mathrm{arth}\, x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$



$k_BT > \lambda$

$k_BT - \lambda > 0$

$k_BT - \lambda < 0$

$k_BT < \lambda$

megjelenik a spontán mágn. $H=0$-ban

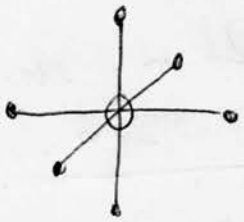
kritt. hőm.: $k_BT_c = \lambda$ → ilyenkor vízsz. az érintő az origóban

$$\chi^{-1} = \left.\frac{\partial H}{\partial m}\right|_{m=0} = k_BT - \lambda = k_B(T - T_c)$$

<u>Curie-Weiss-tv.</u>

baj: λ-t az elméletből nem kapjuk meg

(B)



$$-J \sum_{i\delta} S_i S_{i+\delta} = -J S_i \underbrace{\sum_\delta S_{i+\delta}}_{\text{statisztikus átlaggal helyettesítjük}} =$$

$$= -J \cdot S_i \cdot \underset{\text{koord. szám}}{z} \cdot m$$

a modell egzakttá válik, ha a kh. ∀ spinre kiterjed

– külső térben

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\sum_{ij} J_{ij} S_i S_j - \sum_i h_i S_i$$

i. spin: $\left(-\sum_j J_{ij}\, m_j - h_i\right) S_i$

$m_j = \langle S_j \rangle$ ~~stat.~~ átlaggal hely. a spineket

$$\mathcal{H}_i = -h_{i,\mathrm{eff}} \cdot S_i \qquad h_{i,\mathrm{eff}} = h_i + \sum_j J_{ij}\, m_j$$

ha m_j ugyanakkora mindenhol $\Rightarrow$ visszakapjuk a Weiss-féle gondolatmenetet, és $\lambda = \sum_j J_{ij}$!

$$m_i = \mathrm{th}\left(\beta h_{i,\mathrm{eff}}\right) = \mathrm{th}\left(\beta\left(h_i + \sum_j J_{ij}\, m_j\right)\right) \quad N \text{ db egyenlet}$$

$$\underline{\underline{h_i = k_B T \,\mathrm{arth}\, m_i - \sum_j J_{ij}\, m_j}}$$ $\Rightarrow$ adott m_i eloszláshoz meg tudom mondani, milyen h_i-tér kell

↳ uaz, mint a Weiss-féle átlagtérelm. eredménye, de inhomogén rsz.-re igaz

Ⓒ variációs elv

$Q(\bar{S})$ tetsz. eloszlásfv.

$$\boxed{F = -k_B T \ln Z \leq E_Q - T S_Q}$$ → egyenlőség csak akkor van, ha a kanonikus eloszlást írjuk be Q helyébe

$$Z = \sum_{\{\bar{S}\}} e^{-\beta \mathcal{H}(\bar{S})}$$

$$E_Q = \sum_{\{\tilde{s}\}} Q\{\tilde{s}\} \mathcal{H}\{\tilde{s}\}$$

$$S_Q = -k_B \sum_{\{\tilde{s}\}} Q(\tilde{s}) \ln Q(\tilde{s})$$

$\Rightarrow$ a kan. eloszlás helyett egy fv. osztályon (paraméteres fv.-el) keressük a mo.-t

$$Q(\tilde{s}) = \prod_i f_i(s_i) \quad \leftarrow \text{független spineloszlások}$$

eff. spineloszlási fv.:

$$f(\uparrow) + f(\downarrow) = 1$$

$$1 \cdot f(\uparrow) - 1 \cdot f(\downarrow) = \langle s \rangle = m$$

$$f(\uparrow) = \frac{1+m}{2} \qquad f(\downarrow) = \frac{1-m}{2} \quad \Rightarrow f_i = \frac{1+s_i m_i}{2}$$

$$\Rightarrow Q(\tilde{s}) = \prod_i f_i(s_i) = \prod_i \left(\frac{1+s_i m_i}{2}\right)$$

$$\Downarrow \; \mathcal{H} = -\frac{1}{2}\sum_{ij} J_{ij} s_i s_j - \sum_i h_i s_i$$

$$E_Q = -\frac{1}{2}\sum_{ij} J_{ij} m_i m_j - \sum_i h_i m_i$$

$$S_Q = -k_B \sum_i \left(\frac{1+m_i}{2} \ln\left(\frac{1+m_i}{2}\right) + \frac{1-m_i}{2} \ln\left(\frac{1-m_i}{2}\right)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial m_i}\left(E_Q - T\cdot S_Q\right) = -\sum_j J_{ij} m_j - h_i + k_B T\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+m_i}{2}\right) + \cancel{\frac{1}{2}} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-m_i}{2}\right) - \cancel{\frac{1}{2}}\right) = -\sum_j J_{ij} m_j - h_i + \frac{k_B T}{2}\ln\left(\frac{1+m_i}{1-m_i}\right) = 0$$

szélsőértéket keresünk

$$\underline{\underline{h_i = -\sum_j J_{ij} m_j + \underbrace{\frac{k_B T}{2}\ln\left(\frac{1+m_i}{1-m_i}\right)}_{k_B T\cdot \operatorname{arth}(m_i)}}}$$

ugyanazt kaptuk, DE most a <u>min.</u> feltételét is vizsgálhatjuk (+ infó)

nem csak szélsőértéket

min. feltétele:

$$\frac{\partial^2}{\partial m_i \partial m_j}\left(E_Q - T\cdot S_Q\right) = -J_{ij} + \frac{k_B T}{2}\cdot\delta_{ij}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{1+m_i} + \frac{1}{1-m_i}\right)}_{\frac{2}{1-m_i^2}} =$$

$$= -J_{ij} + \delta_{ij}\cdot\frac{k_B T}{1-m_i^2}$$ ← pozitív definitnek kell lenni

m.o. → adott m_i-hez h_i-t megkapjuk, $\frac{\partial m_i}{\partial h_j} = \chi_{ij}$ miatt

$$\chi^{-1}_{ij} = -\frac{\partial h_i}{\partial m_j} = \delta_{ij}\frac{k_B T}{1-m_i^2} - J_{ij} \quad \Downarrow$$

↳ akkor fogadjuk el a megoldást, ha a szuszc. mátrix^{-1} pozitív definit! ~~tesz~~

köv. órán: ha $h_i = 0 \Rightarrow m_i = 0$ megoldás $\Rightarrow$ paramágn. fázis

mikor ~~stabil~~? $\Rightarrow$ szuszc.-t vizsgáljuk (poz. definit legyen)

5. óra

1) $m_i = \text{th}\left(\beta\left(h_i + \sum_j J_{ij}\, m_j\right)\right)$

$$h_i = \frac{k_B T}{2} \ln \frac{1+m_i}{1-m_i} - \sum_j J_{ij}\, m_j$$

+ feltt.

$$\chi_{ij}^{-1} = \delta_{ij} \cdot \frac{k_B T}{1-m_i^2} - J_{ij} \quad \text{poz. definit}$$

---

a) Paramágneses megoldás: $h_i = 0 \quad m_i = 0$

stabilitás: $\chi_{ij}^{-1} = \delta_{ij} \cdot k_B T - J_{ij}$

Fourier-tr.: $J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_q J(q)\, e^{+iq(R_i - R_j)}$

$$J(q) = \sum_i e^{-iq(R_i - R_j)} J_{ij}$$

(transzl. szimm. miatt csak $R_i - R_j$-től függ)

$$\chi(q)^{-1} = k_B T - \mathcal{J}(q) > 0$$

magas hőmérsékleten a stab. felt. teljesül

$$\max_q \mathcal{J}(q) = \mathcal{J}(q_c)$$

stab. határa: $\boxed{k_B T_c = \mathcal{J}(q_c)}$ (közelítés, mert az átlagtér is közelítés)

$T < T_c$: várakozás: az egy mo. az instabil hullámszámokból fog felépülni, vagyis:

$$\boxed{m_i \sim e^{i q_c \cdot R_i}}$$

→ belátható, hogy a többi módus gyorsabban cseng le ⇒ jó a várakozás

így tud megszaladni a q_c módusoktól

b) <u>Ferromágneses megoldás</u>: $\underline{q_c = 0}$, $\mathcal{J}(q=0) \geq \mathcal{J}(q)$, $m_i = m$

i-től független

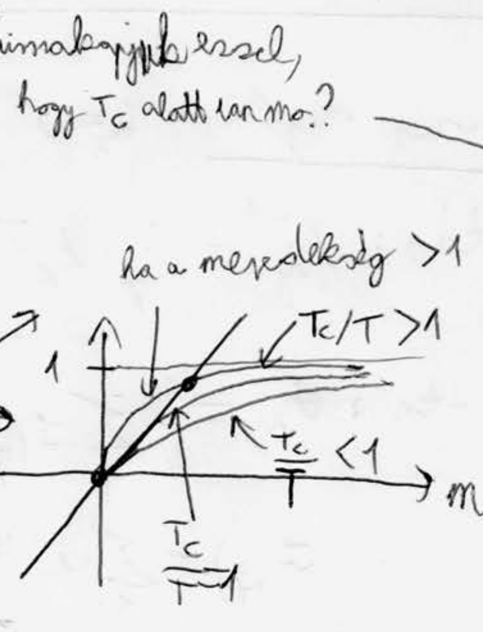
vizsgáljuk ezzel, hogy T_c alatt van mo.?

$$m = \text{th}\, \beta \Big(H + \underbrace{\sum_j \mathcal{J}_{ij}}\, m\Big)$$

$$\mathcal{J}(q) = \sum e^{-iq(\dots)} \mathcal{J}_{ij} \to \mathcal{J}(0) = k_B T_c$$

ha a meredekség >1, van $m \neq 0$ mo.

$\underline{H=0}$: $m = \text{th}\left(\frac{T_c}{T} m\right)$

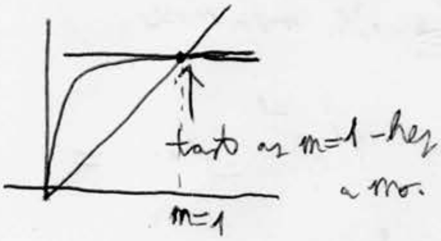


$\text{th}\, x \simeq x \quad (x \ll 1)$

$\boxed{T_c \text{ alatt van nem triv. mo.}}$

$T \to 0$: $\operatorname{th} x \simeq 1 - e^{-2x} + \dots \quad x \gg 1$

$$m = 1 - e^{-2\frac{T_c}{T} m} \simeq 1 - \underbrace{e^{-2\frac{T_c}{T}}}$$



a telítéstől ($m=1$) való eltérés exponenciálisan tűnik el

↕ (Ising-modellben határfv. szerint)

$T \to T_c$: $\operatorname{th} x \simeq x - \frac{x^3}{3} \quad x \ll 1$

$$m = \frac{T_c}{T} m - \frac{1}{3}\left(\frac{T_c m}{T}\right)^3$$

a megoldás "m" → 0

$$1 = \frac{T_c}{T} - \frac{1}{3}\left(\frac{T_c}{T}\right)^3 m^2$$

$$m^2 = 3\left(\frac{T}{T_c}\right)^3 \cancel{\left(\frac{T}{T_c}\right)} \left(\frac{T_c}{T} - 1\right) = 3\left(\frac{T}{T_c}\right)^2 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)$$

$$m \sim \sqrt{T_c - T}$$

c) $T > T_c$: paramágn. fázis: $\chi^{-1}(q) = k_B T - J(q) =$

$$= k_B T - \underbrace{J(0)}_{k_B T_c} + \underbrace{J(0) - J(q)}_{\geq 0}$$

$$\chi(q=0) = \sum_i \chi_{ij} = \chi \text{ makroszk. szuszc.}$$

$$\chi = \frac{1}{k_B(T - T_c)}$$ Curie-Weiss-törvény

$$\chi_{ij}^{-1} = \delta_{ij}\frac{k_B T}{1-m^2} - J_{ij} \quad \text{(l. múlt óra)}$$

$$\chi(q)^{-1} = \frac{k_B T}{1-m^2} - \underbrace{J(q)}$$

$q=0$ $\cancel{J(0)}$-nál van max

ha $J(q)$ max $\Rightarrow$ $\chi(q)^{-1}$ min.

d) <u>stabilitás ferrom. fázisban</u>

elég ezt vizsgálni

$$\chi(q)^{-1} \geq \chi^{-1}(q=0) = \frac{k_B T}{1-m^2} - \underbrace{J(0)}_{k_B T_c} > 0$$

$$\frac{T}{1-m^2} > T_c$$

$$\frac{1}{1-m^2} > \frac{T_c}{T}, \quad m = \operatorname{th}\left(\frac{T_c}{T} m\right)$$

$$\frac{m}{1-m^2} > \frac{T_c}{T} m$$ ← $m>0$-t vizsgáljuk most

$$\frac{\operatorname{th}\left(\frac{T_c}{T} m\right)}{1-\operatorname{th}^2\left(\frac{T_c}{T} m\right)} > \frac{T_c}{T} m = x$$

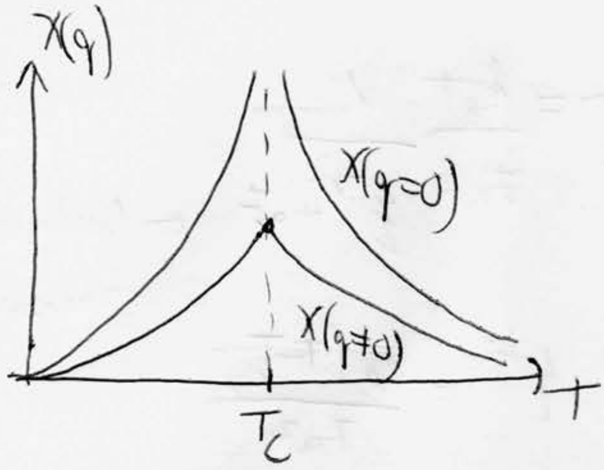
$$\frac{\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th}^2 x} > x$$

msz.: $1-\operatorname{th}^2 x = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

$$\underbrace{\operatorname{ch} x}_{>1} \operatorname{sh} x > x$$

$$\underbrace{\operatorname{sh} x > x}_{\text{ez teljesül } \checkmark} \Rightarrow \boxed{\chi(q)^{-1} > 0 \text{ az egész ferrom. tartományban}}$$

(ha $x \neq 0$ ← ferrom. fázis)



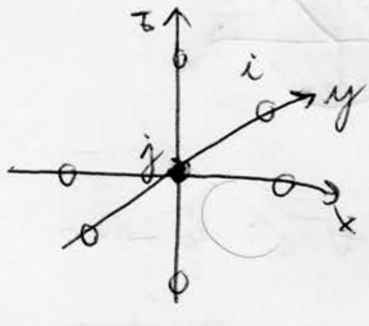
e) korrelációk:

flukt. - válasz - ~~tétel~~ : $C_{ij} = k_B T \, \chi_{ij}$

$$C(q) = k_B T \, \chi(q) = \frac{k_B T}{k_B T - J(q)}$$

paramágn. fázis

pl. $\longrightarrow$ sc rács, $\underbrace{nn}_{\text{nearest - neighbour}}$ kh.



$$J(q) = \sum_i J_{ij} \, e^{-iq(R_i - R_j)} =$$

$$= J\left(e^{-iq_x a} + e^{iq_x a} + e^{-iq_y a} + e^{iq_y a} + e^{-iq_z a} + e^{iq_z a}\right)$$

$$J(q) = 2J\left(\cos(q_x a) + \cos(q_y a) + \cos(q_z a)\right)$$

~~láttuk~~

$$k_B T_C = J(q=0) = 6J \; \cancel{= k_B T_C}$$

$$\underset{qa \ll 1}{J(q)} \simeq 6J - \frac{1}{2} \cdot 2J \cdot a^2 \underbrace{(q_x^2 + q_y^2 + q_z^2)}_{q^2} + \ldots = \underbrace{6J}_{k_B T_C} - J a^2 q^2 + \ldots$$

$$\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$C(q) = \frac{k_B T}{k_B T - k_B T_c + J a^2 q^2} = \frac{k_B T}{J a^2} \frac{1}{\xi^{-2} + q^2}$$ ← Yukawa-pot. transzformáltja

$(qa) \ll 1$
tart. ban
(origó környéke)

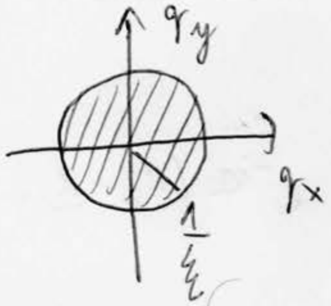
$$\xi^{-2} = \frac{k_B (T - T_c)}{J a^2}$$

ha $T \to T_c$ $\xi^{-2} \to 0$

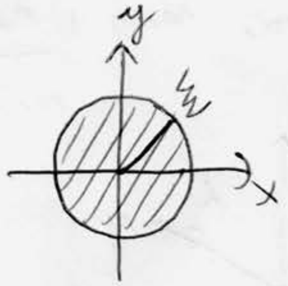
$C(q)$ gyorsan lecseng $T \to T_c$-n

⇒ a jelentős rész a $(qa) \ll 1$ tartományban lesz (T_c környékén)

↳ erős korreláció tartománya:



valós térben
→



~~Egy~~ $T \to T_c$: $\xi \to \infty$

egyre nagyobb tartományok
lesznek koherensek
(koreláltak)

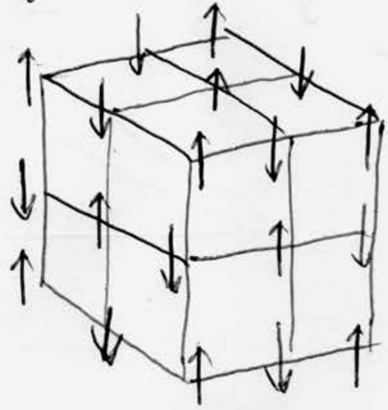
$$C(r) \simeq \frac{k_B T}{J a^2} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-r/\xi}}{r}$$ Yukawa-pot.

<u>$T = T_c$:</u> $C(q) \sim \frac{1}{q^2}$ $\quad C(r) \sim \frac{1}{r}$ → hatványfv. szerint cseng le

} $r \gg a$ tart. ban

2) antiferromágnes

x rács



a) $m_i = n\, e^{i\underline{Q}\underline{R}_i}$ $\underline{Q} = \frac{\pi}{a}(1,1,1)$ → láttuk korábban, hogy ilyen rendezettségű str.-hoz ez a hullámszám ~~tartozik~~

$\uparrow$

alrácsmágnesezettség

(a BZ szélén van $\underline{Q}$)

$$\mathcal{J}(\underline{Q}) \geq \mathcal{J}(q)$$

$$q_c = \underline{Q}$$

$$\Rightarrow k_B T_c = \mathcal{J}(\underline{Q})$$

$\uparrow$ Néel-hőm.

$\mathcal{J}(q)$-nak a BZ szélén van max.-a

külső tér nélkül: $m_i = \operatorname{th}\left[\beta \sum_j \mathcal{J}_{ij} m_j\right]$

$$\underbrace{n \cdot e^{i\underline{Q}\underline{R}_i}}_{\pm 1 \text{ lehet}} = \operatorname{th}\left[\beta n \sum_j \mathcal{J}_{ij} e^{i\underline{Q}\underline{R}_j}\right] \qquad \operatorname{th}(\pm x) = \pm \operatorname{th} x$$

$\Downarrow$

ha átviszem th elé, akkor belülre is írhatom

$$n = \mathrm{th}\left[\beta n \underbrace{\sum_j J_{ij}\, e^{-i(\underline{R}_i - \underline{R}_j)\underline{Q}}}_{J(\underline{Q}) = k_B T_C}\right]$$

$$n = \mathrm{th}\left(\frac{T_C}{T} n\right)$$

$$\Downarrow$$

alrács mágnesezettségre uazt kaptuk, mint a ferromágneses esetben

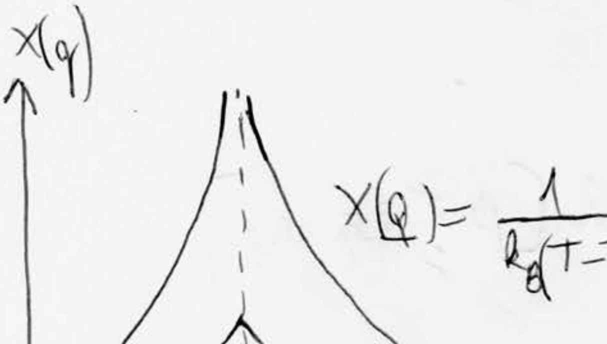
b) <u>szuszceptibilitás</u>

• $T > T_C$: $\chi^{-1}(q) = k_B T - J(q) = k_B T - \underbrace{J(\underline{Q})}_{k_B T_C} + \underbrace{J(\underline{Q}) - J(q)}_{\geq 0}$

(paramágn. fázis)

$$\chi^{-1}(q) = k_B(T - T_C) + \underbrace{J(\underline{Q}) - J(q)}$$

ha $q = \underline{Q}$, χ^{-1}-re pont a Curie-Weiss-tv.



$$\chi(\underline{Q}) = \frac{1}{k_B(T - T_C)}$$

$T < T_C$: $\chi^{-1}_{ij} = \delta_{ij}\frac{k_B T}{1-n^2} - J_{ij}$

$$\chi(q)^{-1} = \frac{k_B T}{1-n^2} - J(q)$$

$\chi = \chi(q=0)$ → a krit. pontban a makroszkopikus szusz. $\chi(0)$ véges marad

kísérletileg ez a görbe mérhető, a div. nem

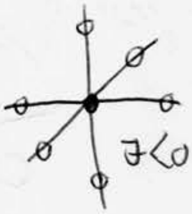
c) stabilitás antif. fázisban

$$\chi^{-1}(q) > \chi^{-1}(\underline{Q}) = \frac{k_B T}{1-n^2} - k_B T_C$$ ← ugyanaz, mint ferrom.-re

↳ megint stabil marad az antiferrom. fázis $T < T_C$-re végig

d) nn kh.

$$J(q) = 2J\left(\cos(q_x a) + \cos(q_y a) + \cos(q_z a)\right) \qquad J<0$$



max: $q_x = q_y = q_z = \frac{\pi}{a}$

$$C(q) = k_B T\, \chi(q) = \frac{k_B T}{k_B T - J(q)}$$

$T \to T_C \quad J(\underline{Q}) = k_B T_C$-re divergál $C(\underline{Q})$

⇒ sorfejtés $q = \underline{Q} + \tilde{q}$ $\quad \cancel{\cos x = 1 - \frac{(x-\pi)^2}{2}}$

$\tilde{q}\, a \ll 1 \qquad \cos x = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2}$

$$J(q) = -2|J|\left(-3 + \frac{a^2 \tilde{q}^2}{2}\right) = 6|J| - |J|\, a^2 \tilde{q}^2$$

$$\boxed{C(q) = \frac{k_B T}{k_B T - \underbrace{6|J|}_{k_B T_C} + |J| a^2 \tilde{q}^2} = \frac{k_B T}{|J| a^2} \frac{1}{\xi^{-2} + \tilde{q}^2}} \qquad \xi^{-2} = \frac{k_B (T - T_C)}{|J| a^2}$$

$q - \underline{Q} = \tilde{q}$

$\tilde{q}\, a \ll 1$

ugyanaz, mint ferromágnesre, de most a BZ határán van centrálva

$\cancel{\delta_i = \frac{1}{\sqrt{N}}}$ $\downarrow$

- ugyanazt kaptuk, mint ferromágnesre, de most a BZ szélére van centrálva a fv.

- pl. n° szórással vizsgálható, mis:

Minek a korrelációját néztük?

$$S_i = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q e^{i q R_i} \cdot S_q$$

$$\underbrace{\langle S_i S_j \rangle}_{C_{ij}} = \frac{1}{N} \sum_{qq'} e^{i q R_i} \, e^{i q' R_j} \underbrace{\langle S_q S_{q'} \rangle}_{\sim \delta_{q,-q'}} = \frac{1}{N} \sum_q e^{i q (R_i - R_j)} \underbrace{\langle S_q S_{-q} \rangle}_{C(q)}$$

$\Rightarrow$ a BZ szélén (Q-ban) $\langle S_i S_j \rangle$ korrelációja nagy lesz

$$m_i = A e^{i q R_i} = A e^{i Q R_i} \underbrace{e^{i \tilde{q} R_i}}_{\text{lassan változó síkhullám } (\tilde{q} \text{ kicsi})}$$

m_i: paramágn. szerkezet

$A e^{iQR_i}$: most ez a az alrácsmágn. (rendpar.)

$\Rightarrow A e^{i \tilde{q} R_i}$ az alrácsmágnesezettség a $\tilde{q}$ hullámszámú modulációja

$\Rightarrow T \to T_c$-re $q \to Q$ marad $\Rightarrow$ a modulációk eltűnnek

$\Rightarrow$ az alrácsmágn. modulációit tudom vizsgálni $C(q)$-val

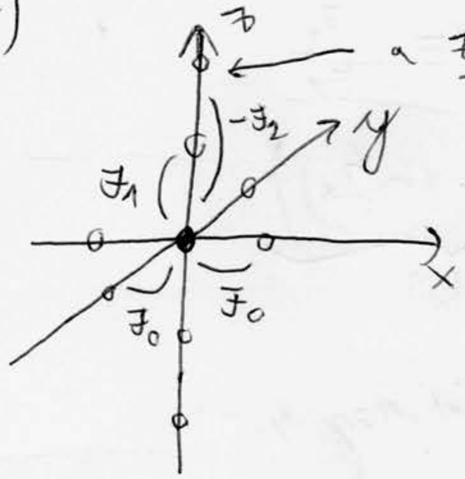
3) ANNNI modell

(axial next nearest neighbour Ising)

↑ 1 kitüntetett tengely

↑ 2. szomszéd kh.

a)

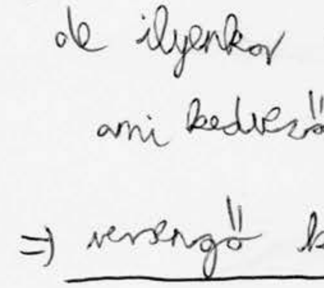


a ~~z tengely mentén~~ figyelembe vesszük a 2. szomszédot is

- ~~xy~~ xy-sík: ferromágn. $J_0 > 0$
- z ~~x~~-tengely: nn ferromágneses $J_1 > 0$

nnn antiferromágn. $-J_2 < 0$

xy síkban ferromágn. rendeződést várunk



← ezek a síkok ellentétesen állnának be $-J_2 < 0$ miatt

← ezek is ellentétesen állnának be

de ilyenkor 2 szomszédos sík között lesz antiferrom. csatolás is, ami kedvezőtlen

⇒ <u>versengő kölcsönhatások</u>

b) <u>paramágn. áll. stabilitása</u>

$k_B T - J(q) > 0$

$$J(q) = \sum_i J_{ij}\, e^{-iq(R_i - R_j)} = 2J_0\left(\cos(q_x a) + \cos(q_y a)\right) + 2J_1 \cos(q_z a)$$
$$- 2J_2 \cos(2 q_z a)$$

max.: $q_x = 0$ $q_y = 0$ q_z lehet más

$q_c = (0, 0, q_c)$ $x \equiv q_z a$, $K \equiv \frac{J_2}{J_1}$

$$2J_1 \underbrace{\left(\cos x - K \cdot \cos(2x)\right)}_{f(x)}$$

ennek a ~~...~~ max.-a hat. meg q_c-t

$$f(x) = \cos x - K\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = \cos x - K\left(2\cos^2 x - 1\right)$$

$$f' = \left(1 - K\, 4\cos x\right)\left(-\sin x\right) = 0$$

~~cos x szerint deriválva~~

$\cos x = \frac{1}{4K}$ $\sin x = 0$

$(K > \frac{1}{4})$ $x = 0$ $x = \pi$

$$f'' = -\cos x + 4K\left(2\cos^2 x - 1\right)$$

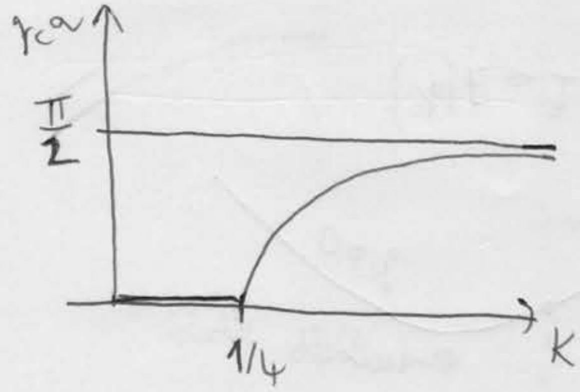
$x = 0$ $f'' = -1 + 4K < 0$ ha $K < 1/4$

$x = \pi$ $f'' = 1 + 4K > 0$ ← nem jó, mert $J(q)$ maximumát keressük

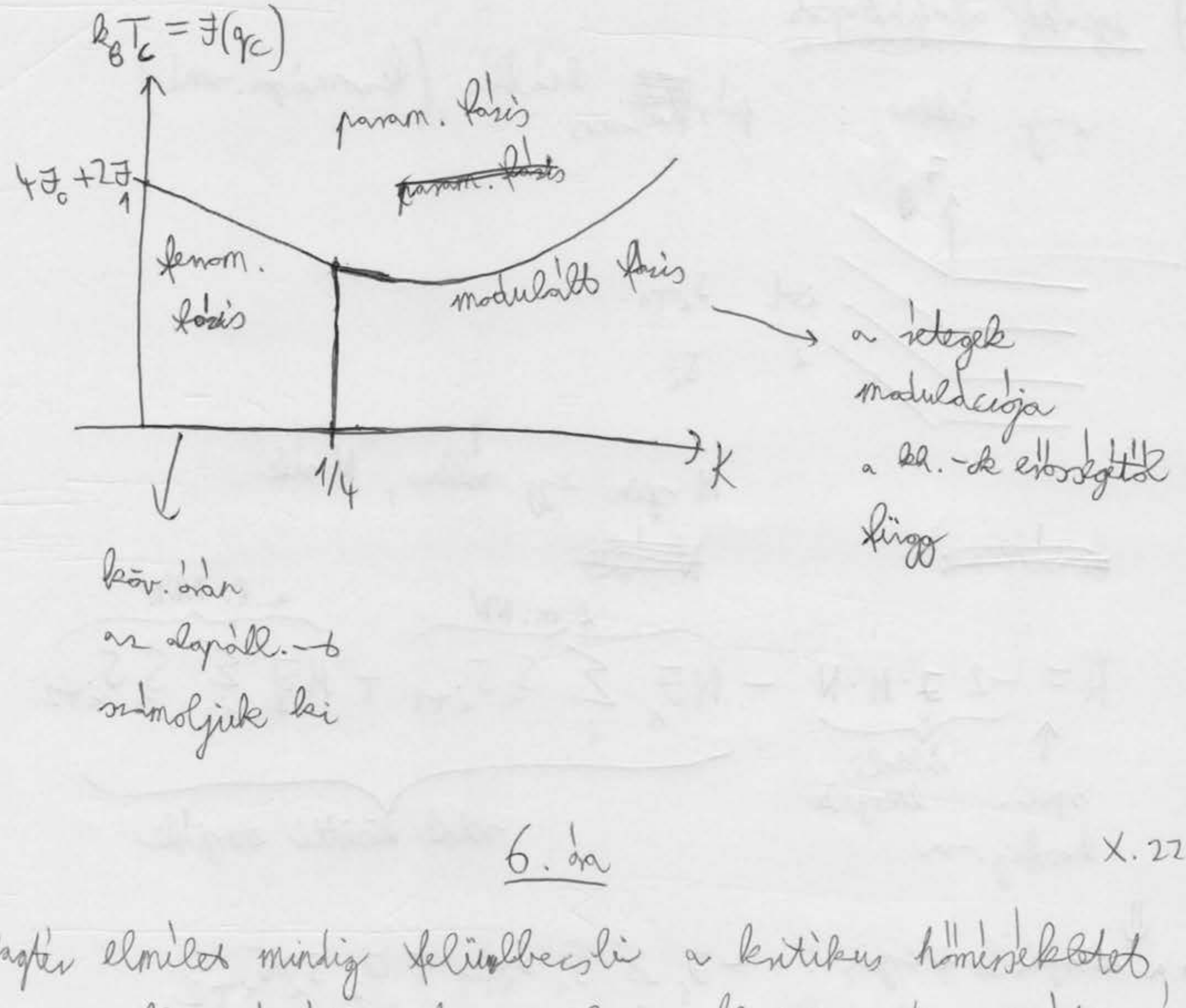
$K > 0$ miatt ez mindig > 0

$\cos x = \frac{1}{4K}$ $f'' = \frac{1 - 16K^2}{4K} < 0$ ha $K > \frac{1}{4}$ — JÓ

$x = \arccos \frac{1}{4K}$



$$k_B T_c = \mathcal{J}(q_c) = \begin{cases} 4\mathcal{J}_0 + 2\mathcal{J}_1\,(1-K) & K < 1/4 \\ 4\mathcal{J}_0 + 2\mathcal{J}_1\left(\frac{1}{8K} + K\right) & K > 1/4 \end{cases}$$



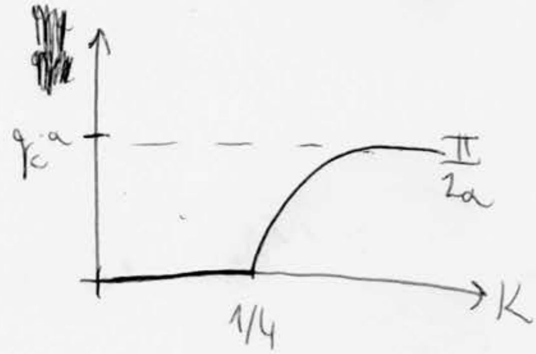
6. óra

X. 22.

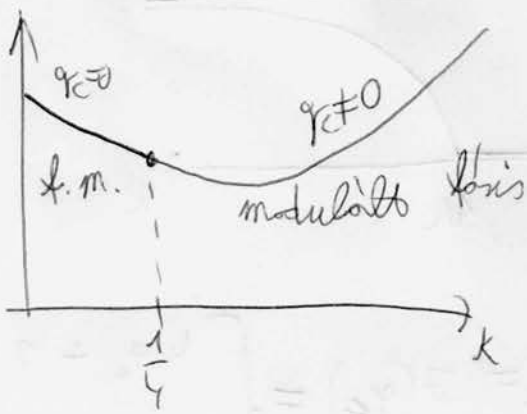
Átlagtér elmélet mindig felülbecsüli a kritikus hőmérsékletet, mert a fluktuációkat hagyja el, a flukt. pedig ~~segítik~~ segítik az átalakulást (előbb szedik szét a rendezett áll.-ot)

1) (folyt.) ANNNI modell

$J(q)$ $\quad K = \frac{J_2}{J_1}$

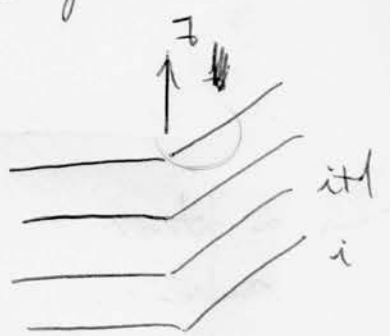


$k_B T_c = J(q_c)$



c) egzakt alapállapot

x–y síkban : párhuzamos beállás (ferromágn. rend)



M spin egy síkban, N sík

~~i síkban:~~ ~~N sík~~

$$H = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{spec.} \\ \text{konfig.-ra}}}{} \underbrace{-2 J \cdot M \cdot N}_{\text{síkbeli energiák}} \underbrace{- \overbrace{M J_1 \sum_i S_i S_{i+1}}^{\text{f.m. NN}} + \overbrace{M J_2 \sum_i S_i S_{i+2}}^{\text{a.f. NNN}}}_{\text{síkok közötti energiák}}$$

↓ a vizsgálandó energia : $-J_1 \sum_i S_i S_{i+1} + J_2 S_i S_{i+2}$

- kiindulás : fm. állapot

$$\underset{\text{kül. síkok}}{\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow} \dots \uparrow\uparrow$$

• 1 doménfal → (doménfalakkal az összes konfiguráció előállítható)

↑ ↑ ↑ ¦ ↓ ↓ ↓

$$\Delta E_1 = 2J_1 - 2\cdot 2J_2 = 2J_1(1-2K) \begin{cases} >0 & K<1/2 \\ <0 & K>1/2 \end{cases}$$

↑
1 doménfal behelyezésekor

⇓

ha $K<1/2$, a ferromágneses alapállapot továbbra is jó

ha $K>1/2$, alacsonyabb energiát kaptunk ⇒ f.m. nem jó alapáll.

• 2 doménfal:

↑ ↑ ↑ ¦ ↓ ¦ ↑ ↑ ↑

$$2\cdot 2J_1 - 2\cdot 2J_2 = \Delta E_1 + \underbrace{2J_1}_{\text{ez mindenképpen növeli az energiát}}$$

↑ ↑ ↑ ¦ ↓ ↓ ¦ ↑ ↑ ↑

$$2\cdot 2J_1 - 4\cdot 2J_2 = 2\,\Delta E_1$$ ⇒ ha $\Delta E_1<0$, ez tovább csökkenti az energiát

belátható, hogy ha 2 ≤ spin van a doménfalak között $\Delta E = 2\Delta E_1$ lesz

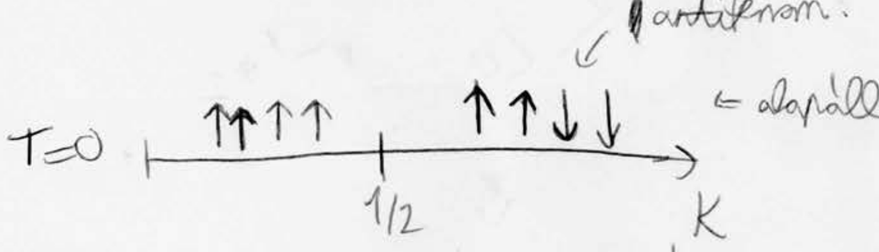
⇒ a doménfalak nem hatnak kölcsön ≥2 spin táv.-ra

$\Downarrow$

az újabb doménfalak behelyezésével (ha legalább 2 spin van a falak között), csökkentjük az energiát (ha $\Delta E_1 < 0$)

$\Updownarrow$

$\Rightarrow$ legkisebb energia $\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow$ $(K > 1/2)$



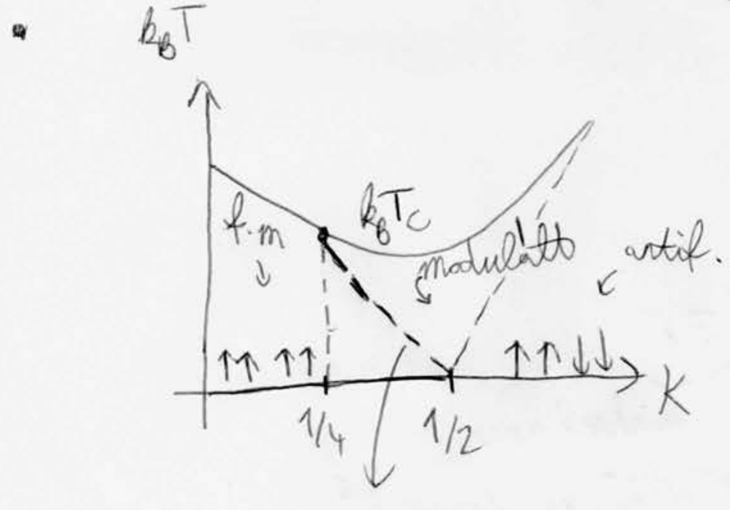
degeneráció: 2 (spinflip) $\quad$ 4 (3 féle eltolással $(a, 2a, 3a)$ más állapotot, de azonos energiájút hozhatunk létre)

$\Downarrow$

mod. hullámszáma: $4a$

$$q = \frac{2\pi}{\Lambda} = \frac{2\pi}{4a} = \frac{\pi}{2a}$$

d) <u>fázisdiagram</u>



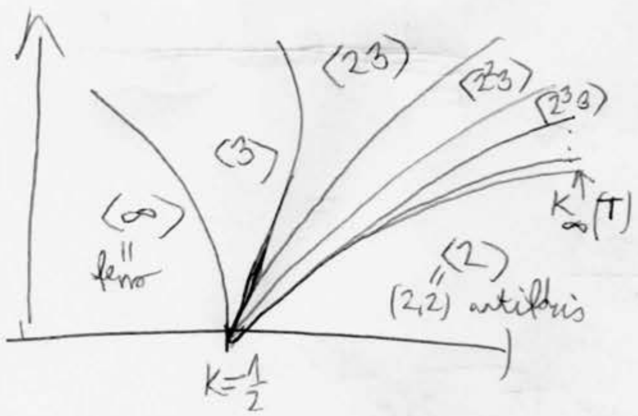
kell lennie valahol egy fázishatárnak, ~~mert ak~~

és ez összeköti a $k_B T_C$-t

meghat. $K = 1/4$ és $T = 0$-ra meghat.

a $K = 1/2$ ~~[illegible]~~ pontokat (a pontos alakját nem az átlagtérelméletből hat. meg)

↓ fázisdiagr.:
alacsony hőmérsékleti sajátos



· $K=\frac{1}{2}$-ben $\Delta E_1 = 0 \Rightarrow$ a doménfalak behelyezése nem változtat meg az energiát (ha van legalább 2 spin közben)

⇓

· belátható, hogy N-nel expon.-an nő az így kapott állapotok száma
(N ← rétegek száma)

↑↑↑↓↓↓↑↑↑ ⟨3⟩

↑↑↓↓↓ ⟨23⟩

↑↑↓↓ ↑↑↑ ⟨2²3⟩

⋮

$\underbrace{\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow \dots}_{n \text{ db}} \uparrow\uparrow\uparrow$ ⟨2^n3⟩

↓

ahogy a K-t növeljük, ezek a 3-as domének, amik megsértik az antif. fázist, egyre ritkábbak lesznek hullámhossz

$$\left\{ \begin{matrix} \text{előjelváltások} \\ \text{száma} \end{matrix} \right\} \cdot \frac{\bar\Lambda}{2} = \text{periódus}$$

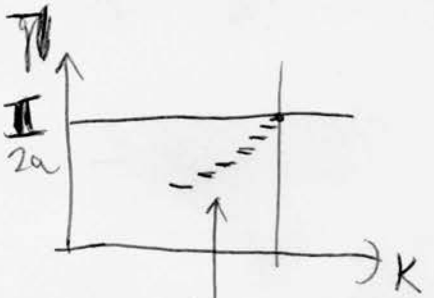
~~n domén esetén~~

$$(n+1)\,\frac{\bar\Lambda}{2} = 2a\cdot n + 3a$$

$$\bar\Lambda = \frac{2a\,(2n+3)}{n+1}$$

$$\bar q = \frac{2\pi}{\bar\Lambda} = \frac{\cancel{2}\pi}{4\cancel{2}a}\cdot\frac{n+1}{2n+3} = \frac{\pi}{2a}\,\frac{2(n+1)}{2(n+1)+1}$$

$$\frac{\bar q}{\left(\frac{\pi}{2a}\right)} = \frac{4}{5},\ \frac{6}{7},\ \frac{8}{9},\ \dots \to 1$$



végtelen sok lépcsőből

elérjük az 1-et

↓

MF fázisdiagram

lock-in fázisátalakulás

inkommensz. fázis: $\frac{q}{\left(\frac{\pi}{2a}\right)}$ nem rac.

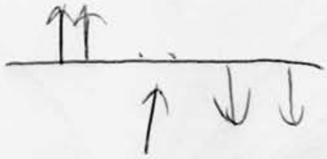
↓

kommensz. fázis: $\frac{q}{\left(\frac{\pi}{2a}\right)}$ racion.

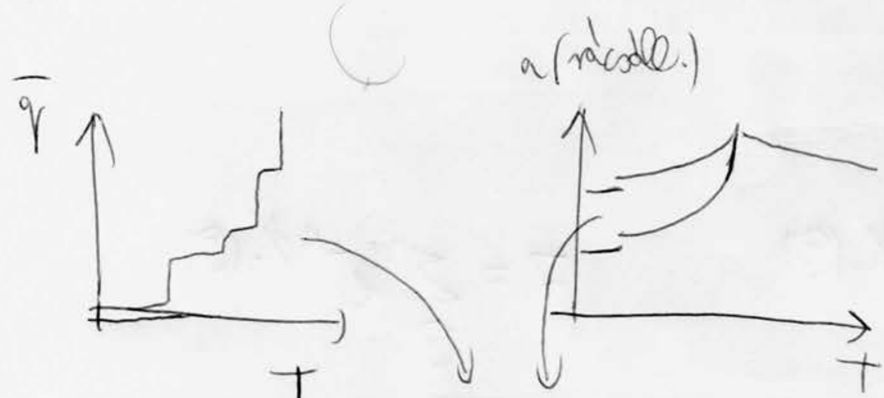
e)

dia: hasonló szerkezet (Ce Sb)

↓



megjelennek paramágneses rétegek is

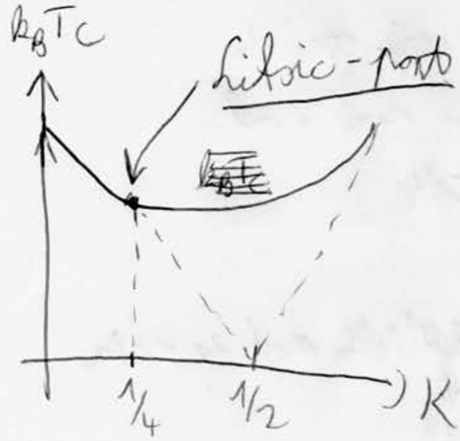


ugrásszerű változások

⇓

hasonló kh.-okat kell figyelembe venni az elm. leírásban

f) Lifsic-pont



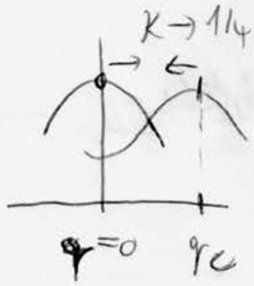
$F(q_c)$ maximumát kerestük

$K < 1/4$ (T_c-n) → kvadr. max.

$K > 1/4$ (T_c-n) → –||–

$K = 1/4$ (–||–) negyedrendű

maximum → q^4-es tag jelenik meg



spec. tul.: korrelációs fv.-ben másfajta viselkedés jelenik meg

Landau-elmélet

I) Statisztikus alapozás

1) Ising-modell: nn kh.

$$\mathcal{H} = -J\sum_{\langle ij\rangle} S_i S_j - H\sum_i S_i$$

$$\tilde{S} = (S_1 \dots S_N)$$

$$P(\tilde{S}) = \frac{1}{Z} e^{-\beta\mathcal{H}(\tilde{S})} \qquad Z = \sum_{\tilde{S}} e^{-\beta\mathcal{H}(\tilde{S})}$$

$$M = \sum_i S_i$$

$$P(M) = \frac{1}{Z} \sum_{\tilde{S}} e^{-\beta\mathcal{H}(\tilde{S})} = \frac{Z_M}{Z}$$

feltételes (constrained) állapotösszeg

mekkora vsz.-e van egy adott mágnesezettségnek

$\sum_{\tilde{S}}$ melyre $\left(\sum_i S_i = M\right)$ → feltétel, mely szerint válogatunk a konfig.-k között

$$F = -k_B T \cdot \ln Z$$

$$Z = e^{-\beta F} \qquad Z_M = e^{-\beta F_c(T, H, M)}$$

feltételt most ez adja

(constrained) feltételes szabadenergia

2) általánosabban

sűrűségop.: $\frac{1}{Z} e^{-\beta \mathcal{H}}$

$$Z = \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta \mathcal{H}}\right)$$

$$\hat{M} \, |M_n\rangle = M_n \, |M_n\rangle$$

$$P(M_n) = \langle M_n | \frac{1}{Z} e^{-\beta \mathcal{H}} | M_n \rangle$$

$$P(M) = \sum_{\substack{n \\ (M_n = M)}} \langle M_n | e^{-\beta \mathcal{H}} | M_n \rangle = \frac{Z_M}{Z}$$

állapot mágn.-e   előírt érték

$$Z = \sum_{n} \langle M_n | e^{-\beta \mathcal{H}} | M_n \rangle$$

(összes áll.-ra)

$$\Rightarrow \; P(M) \sim e^{-\beta F_C (T, H, M)}$$

3) Landau-elmélet $\rightarrow$ $\boxed{P(M) \text{ éles eloszlás}}$

legvalószínűbb $M \approx \langle M \rangle$

$P(M) = \max$ keressük, itt lesz $\langle M \rangle$

$\Rightarrow \mathcal{P}(M) \sim e^{-\beta F_C(T,H,M)}$

$\downarrow$

$F_C(T,H,M) = \min$ ~~ezt keressük~~

eloszlás közelítése: F_C-t sorbafejtjük a min. körül

$$F_C = F_{C,min} + \frac{1}{2} a \left(M - \overline{M}\right)^2$$

$$\mathcal{P}(M) \sim e^{-\frac{a}{2k_B T}\left(M-\overline{M}\right)^2}$$

$\Downarrow$

Gauss-közelítés a max. körül

Landau-elmélet: Hogyan hat. meg F_C-t?

Nem mikroszkopikus modellből, hanem sorfejtésből (és a kíp.-hez való illesztés)

és a sorfejtési együtthatókat a sz. szimmetriái fogják megmondani.

pl. inhomogén tér: $h(\underline{r})$

inhomogén mágn.: $s(\underline{r})$

$$\mathcal{P}(s(\underline{r})) \sim e^{-\beta F_C}$$

$$F_C(T, h(\underline{r}), s(\underline{r}))$$

$$F_C[T, h(r), s(r)] = \min$$

<u>variációs feladat</u>

F_c fenomenológikus előállítása:

- sorfejtés
- szimmetriának megfelelően
- együtthatók: illesztendő paraméterek

II) Egytengelyű, ferromágnes, homogén mágn. térben

$F_c = V \cdot f$

$$f(T,H,m) = W(T) + \frac{a(T)}{2} m^2 + \frac{u(T)}{4} m^4 - H \cdot m$$

$m = \frac{M}{V}$

időtükrözés így nem sérül

$\Downarrow$

a mágn. térrel való kh.-t ilyen Zeeman-taggal vesszük figyelembe

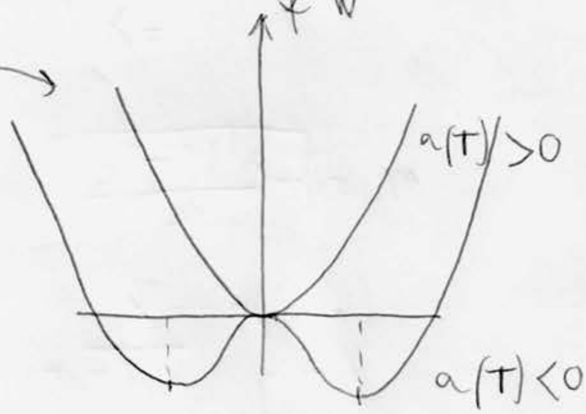
absz. min. létezik

$\Downarrow$

$u(T) > 0$

- együtthatók

ha $\underline{H=0}$ $\rightarrow$



$\exists$ param.: $a(T) > 0$, ferrom.: $a(T) < 0$

$a(T_c) = 0$

pl. $a(T) = a' \cdot (T - T_c)$

(ez a legegyszerűbb alak, de lehetne más is)

továbbiakban:

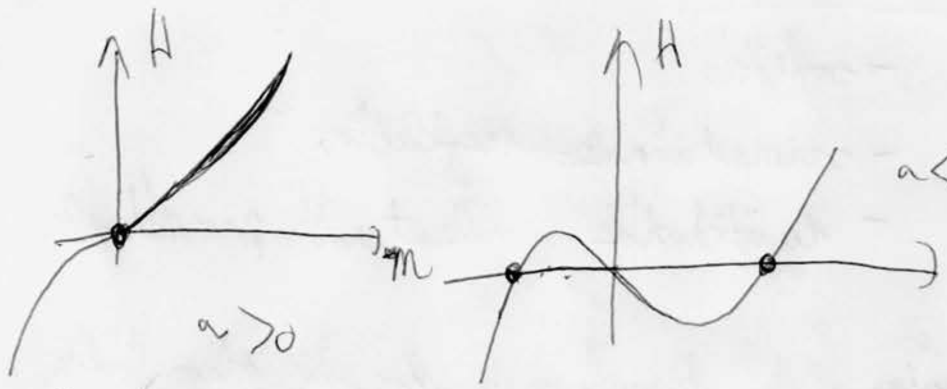
$u(T) \simeq u(T_c) \equiv u$

hőm. független

$\Downarrow$

- min. keresés: $\frac{\partial f}{\partial m} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial m^2} > 0$

$$f' = a\cdot m + u m^3 - H = 0$$



$a m + u m^3 = H$ a minimumban

$$f'' = \underbrace{a + 3 u m^2}_{\chi^{-1}} > 0$$

χ^{-1} a megvalósuló minimumban

- $H = 0$: $m = 0$ $\quad a > 0$

  $a + u m^2 = 0 \qquad m^2 = -\frac{a}{u} \Rightarrow \underbrace{-2a}_{=\chi^{-1}} > 0$ ($f'' > 0$-ból)

- $a = 0 \quad H \neq 0$:

  $u m^3 = H$

$$m = \sqrt{-\frac{a'(T - T_c)}{u}}$$

$$\chi^{-1} = \begin{cases} a & (a > 0) \\ -2a & (a < 0) \end{cases} \qquad \chi = \begin{cases} \frac{1}{a'(T-T_c)}, & \text{ha } a > 0 \ (T > T_c) \\ \frac{1}{2a'(T_c - T)}, & \text{ha } a < 0 \ (T < T_c) \end{cases}$$

Curie-Weiss-tv., arányok is jók ✓

- <u>fajhő</u>: $\frac{1}{V}F(T,H) \simeq f(T,H,\bar{m})$ $\bar{m}$: áll. egyenlet megoldása

$$H=0:\quad f(T,0,\bar{m}(T)) = w(T) + \frac{a(T)}{2}\bar{m}(T)^2 + \frac{u}{4}\bar{m}(T)^4$$

$$T>T_c \quad \bar{m}=0 \quad f = w(T) \qquad s = -\frac{\partial f}{\partial T} = -\frac{\partial w}{\partial T}$$

w(T) ami sima fv., pontosan előre nem ismerjük

$$C = T\cdot\frac{\partial s}{\partial T} = -T\frac{\partial^2 w}{\partial T^2}$$

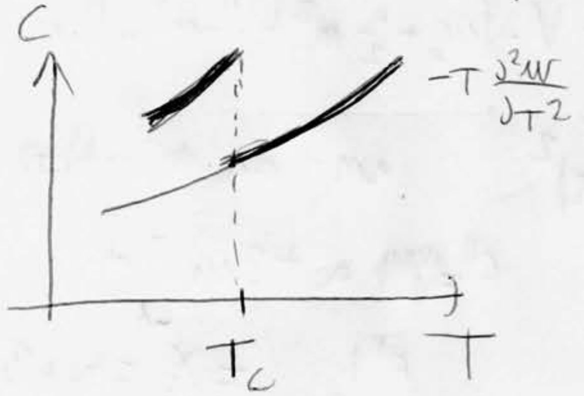
$$T<T_c \quad \bar{m}^2 = -\frac{a}{u} \quad f = w(T) + \frac{a}{2}\left(-\frac{a}{u}\right) + \frac{u}{4}\frac{a^2}{u^2} = w(T) - \frac{a^2}{4u}$$

$$\cancel{\left(= w(T) - \frac{a^2}{4u}\right)}$$

$$s = -\frac{\partial f}{\partial T} = -\frac{\partial w}{\partial T} + \frac{a}{2u}\cdot a' = -\frac{\partial w}{\partial T} + \frac{a'^2}{2u}(T-T_c)$$

$$a = a'\cdot(T-T_c)$$

$$C = T\cdot\frac{\partial s}{\partial T} = -T\frac{\partial^2 w}{\partial T^2} + \frac{a'^2}{2u}\cdot T$$



$$\Delta C = C_{T\to T_c^-} - C_{T\to T_c^+} = \frac{a'^2 T_c}{4u}$$ (egységnyi térfogat hőkapacitása)

$\Rightarrow \quad m \sim (T_c - T)^\beta \qquad \beta = 1/2$

$\chi \sim \frac{1}{|T-T_c|^\gamma} \qquad \gamma = 1$

$H \sim m^\delta \qquad \delta = 3$

$C \sim |T-T_c|^{-\alpha} \qquad \alpha = 0$ (ugrás)

kattahajfr. szeri viselkedésből (szokásos)

Köv. óra:

- Mi van ~~...~~ a fluktuációkkal?
- Mi van ha $u<0$? $\Rightarrow$ tovább sorfejtésig el kell menni

XI. 5.

7. óra

a) $P(m) \sim e^{-\beta(F_c - F_{c\,min})} \qquad F_c = V\cdot\left(w_0 + \frac{a}{2}m^2 + \frac{u}{4}m^4 - H\cdot m\right)$

$F_c - F_{c\,min} = \frac{1}{2} V\left(a + 3\bar{m}^2\cdot u\right)(m-\bar{m})^2 \qquad am + u\cdot m^3 - H = 0$

$e^{-\frac{V}{2k_BT}\left(a + 3\bar{m}^2 u\right)(m-\bar{m})^2} \qquad F'' = a + 3um^2$

$F''|_{m=min} = \chi^{-1} = a + 3u\bar{m}^2$

$\langle (m-\bar{m})^2 \rangle = \frac{k_BT}{V\left(a+3\bar{m}^2\cdot u\right)} = \frac{k_BT\cdot\chi}{V} \rightarrow$ flukt.-válasz tétel

1) inhomogén mágnesezettség : $\mathfrak{s}(\underline{r})$ $\quad M=\int d^d r\, \mathfrak{s}(\underline{r})$

a) $$F_c\left[T, h(\underline{r}), \mathfrak{s}(\underline{r})\right]=\int d^d r \Big\{ \overbrace{w(T)+\frac{a}{2}\mathfrak{s}^2+\frac{u}{4}\mathfrak{s}^4+\underbrace{\frac{c}{2}(\nabla\mathfrak{s})^2}-\underbrace{h\mathfrak{s}}_{\text{Zeeman-tag}}}^{f(\mathfrak{s}(r),\nabla\mathfrak{s}(r))}\Big\}$$

gradiens sorfejtés $(\nabla\mathfrak{s})^2$-ig megyünk csak el ($\to k^2$-ig) = hosszú hullámú közelítés

ez köti össze hosszú távon a spineket (mágn. momentumokat)

$F_c = \min$

- $$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{s}}-\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial x_\alpha}\right)}=0 \quad \Leftarrow \text{ Euler-Lagrange-egyenlet}$$

$$\Rightarrow \boxed{a\cdot\mathfrak{s}+u\mathfrak{s}^3-h-c\,\Delta\mathfrak{s}=0}$$

Laplace

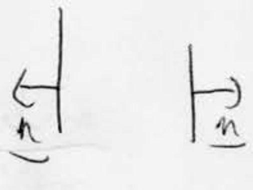
- vagy: $\mathfrak{s}\to\mathfrak{s}+\delta\mathfrak{s}$

$$\delta F_c=\int d^d r\left(a\,\mathfrak{s}\,\delta\mathfrak{s}+u\,\mathfrak{s}^3\delta\mathfrak{s}+c\,\nabla\mathfrak{s}\nabla\delta\mathfrak{s}-h\,\delta\mathfrak{s}\right)$$

msz. $$\int d^d r\, \nabla\mathfrak{s}\nabla\delta\mathfrak{s} \overset{\text{parc. int}}{=} \int d^d r\left(\nabla(\delta\mathfrak{s}\nabla\mathfrak{s})-\delta\mathfrak{s}\Delta\mathfrak{s}\right)$$

$\int d^d r \; \nabla(\delta s \nabla s)$ — 0, ha olyan perturb.-t nézünk, ami a ∞-ben lecseng

— 0, ha periód. a határfelt.



$\Updownarrow$

$\delta s \nabla s$ ugyanaz, de $\underline{n}$ előjelet vált a két határon

$\Downarrow$

— $\neq 0$, ha pl. van szennyező, vagy egyéb határfeltételeket akarunk vizsgálni

$\downarrow$

ugyanazt kapjuk

<u>homogén térben:</u>

$$F_c = \int d^d r \left(w_0 + \frac{a}{2} s(r)^2 + \frac{u}{4} s(r)^4 + \frac{c}{2} \left(\nabla s(r)\right)^2 - H s(r) \right)$$

$\left.\begin{matrix} u > 0 \\ c > 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow$ absz. min. létezésének feltétele

$$F_c \geq \int d^d r \left(w_0 + \frac{a}{2} s(r)^2 + \frac{u}{4} s(r)^4 - H s(r) \right)$$

$$\geq V \min \left(w_0 + \frac{a}{2} m^2 + \frac{u}{4} m^4 - H \cdot m \right)$$

pontonként keresem a minimumot, megoldása: $\overline{m}$

$\downarrow$

legjobb megoldás (glob. min.) $\rightarrow \boxed{am + um^3 - H = 0}$

inhomogén tér: linearizálás

$$h(r) = H + \delta h(r)$$

$$s(r) = \overline{m} + \delta \hat{s}(r)$$

$$\underline{a\,\overline{m}} + a\,\delta\hat{s} + \underline{u\,\overline{m}^3} + 3u\,\overline{m}^2\,\delta\hat{s} \; \underline{-\,H} - \delta h - c\,\Delta\delta s = 0$$

$$\underline{\quad} \rightarrow = 0 \quad (\overline{m} \text{ def.-ből})$$

$$\left(a + 3u\,\overline{m}^2\right)\delta s - c\cdot\Delta\delta s = \delta h$$

Fourier-trafó $\downarrow$

$$\underbrace{\left(a + 3u\overline{m}^2 + cq^2\right)}_{\chi(q)^{-1}}\delta s_q = \delta h_q$$

$$\chi(q) = \frac{1}{k_B T}\,C(q) = \frac{1}{a + 3u\overline{m}^2 + cq^2} = \frac{1}{c}\,\frac{1}{\xi^{-2} + q^2}$$

Ornstein - Zernike-formula

$$a\overline{m} + u\overline{m}^3 = H$$

$q = 0$:

$$\chi(0) = \chi_{\text{homogén}} \quad \checkmark$$

$$\xi^{-2} = a + 3u\overline{m}^2 = \begin{cases} 3u\left(\frac{H}{u}\right)^{2/3}, & a=0,\ H\neq 0 \\ a, & H=0,\ a>0 \\ a - 3u\cdot\frac{a}{u} = -2a, & H=0,\ a<0 \end{cases}$$

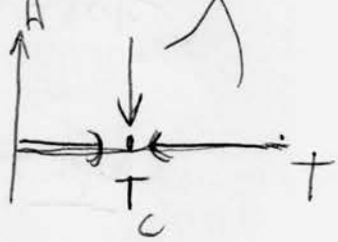
$\uparrow$ korrelációs hossz

$$a = a'(T - T_c)$$

$$\xi^{-2} \sim \begin{cases} H^{2/3} & (T=T_c,\ H\neq 0) \\ |T-T_c| & (T\neq T_c,\ H=0) \end{cases}$$

korr. ~~[illegible]~~ felnő, ← ha T_c felé haladunk

$$\xi \sim \begin{cases} H^{-1/3} & (T=T_c)\ (H\neq 0) \\ |T-T_c|^{-1/2} & (H=0,\ T\neq T_c) \end{cases}$$



$$\chi(q) \sim \frac{1}{q^2} \quad (a=0,\ T=T_c,\ H=0)$$

visszatranszformálva:

$$C(r) = \frac{k_B T}{c}\,\frac{e^{-r/\xi}}{r} \quad (d=3) \qquad \text{Yukawa-pot}$$

$$C(r) = \frac{k_B T}{c}\cdot\frac{1}{r} \quad (T=T_c,\ H=0) \qquad \text{hosszú távú lecsengés}$$

↳ fluktuációként megjelenik kisebb tartományban a rendezettség, aztán el is tűnik (de T_c-felé haladva felnő)

másik eljárás:

b) Sorfejtés: F_c-ben ~~[illegible]~~ négyzetes rendig $\quad s = \bar{m} + \delta s$

$$\frac{a}{2}s^2 + \frac{u}{4}s^4 - c(\nabla s)^2 - Hs = \frac{a}{2}\left(\underline{\bar{m}} + 2\bar{m}\delta s + \delta s^2\right) +$$

$$+ \frac{u}{4}\left(\underline{\bar{m}^4} + 4\bar{m}^3\delta s + 6\bar{m}^2\delta s^2\right) - c(\nabla\delta s)^2 - H(\underline{\bar{m}} + \delta s)$$

$$\underbrace{\left(a\bar{m} + u\bar{m}^3 - H\right)}_{0}\delta s \quad \text{[illegible]} \quad \underline{\ \ } = F_c\ \text{min}$$

$\sim \to$ ezek maradnak

$\to$ ebből lett F_c' min

$$F_c - F_{c\,min} = \int d^d r \left[\frac{1}{2}(a+3\bar{m}^2)\,\delta s^2 - c(\nabla s)^2\right]$$

$$\delta s = \frac{1}{\sqrt{V}}\int d^d q \; e^{iqr}\,\delta s_q$$

F.T.

$$\int d^d r \; \delta s(r)^2 = \frac{1}{V}\sum_{q q'} \delta s_q \delta s_{q'} \underbrace{\int d^d r \; e^{i(q+q')r}}_{V\cdot \delta_{q,-q'}} = \sum_q \delta s_q \delta s_{-q} = \sum_q |\delta s_q|^2$$

$$(\delta s_{-q} = \delta s_q^*)$$

$$F_c - F_{c\,min} = \sum_q \frac{a+3u\bar{m}^2+q^2}{2}\,|\delta s_q|^2$$

$$P[\delta s_q] \sim \prod_q e^{-\frac{a+3u\bar{m}^2+q^2}{2k_BT}|\delta s_q|^2}$$

→ ∀ F.-elő.-ra Gauss-eloszlás jön ki

$$\underline{\underline{C(q)}} = \langle \delta s_q \delta s_{-q} \rangle = \frac{k_BT}{a+3u\bar{m}^2+q^2}$$

korrekt eljárás: δs_q-t való és képz. részekre bontjuk szét

← ha q-t figy. vettük, $-q$-t már nem kell

$$e^{-\frac{a+3u\bar{m}^2}{2k_BT}\delta s_0^2}\cdot \tilde{\prod_q} \underbrace{e^{-\frac{a+3u\bar{m}^2+q^2}{k_BT}(\delta s_q \delta s_{-q})}}_{q,-q \text{ pár összevonva}}$$

↑ ezt kiemeltük

$$s_q = s_q' + i s_q''$$

$$s_{-q} = s_q^* = s_q' - i s_q''$$

$$s_q s_{-q} = s_q'^2 + s_q''^2 \qquad \langle \delta s_q''^2 \rangle = \langle \delta s_q'^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{k_B T}{a + 3u\bar{m}^2 + q^2}$$

$$C(q) = \langle \delta s_q \delta s_{-q} \rangle = \langle \delta s_q'^2 \rangle + \langle \delta s_q''^2 \rangle = \frac{k_B T}{a + 3u\bar{m}^2 + q^2}$$

$\Rightarrow$ ELE és sokfélés F_c-ben 2-es rendig uazt adja — így is uazt kaptuk

2) 1. rendű átal.-hoz 6. rendű tagok is kellenek

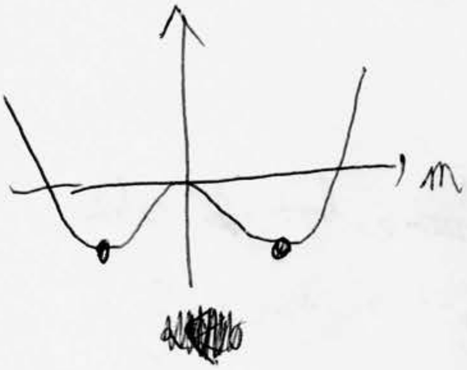
$$\frac{F_c}{V} = f = w + \frac{a}{2} m^2 + \frac{u}{4} m^4 + \frac{v}{6} m^6 \qquad \text{absz. min: } v > 0$$

a) m izotróp

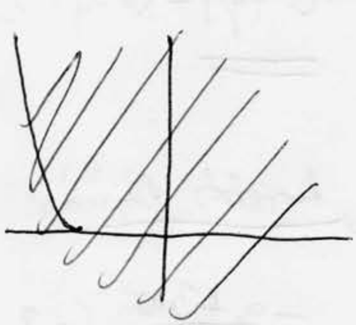
• <u>ha $u > 0$</u> : $v = 0$ helyettesíthető

• <u>ha $u < 0$:</u>  $v \neq 0$ (v lényeges!)

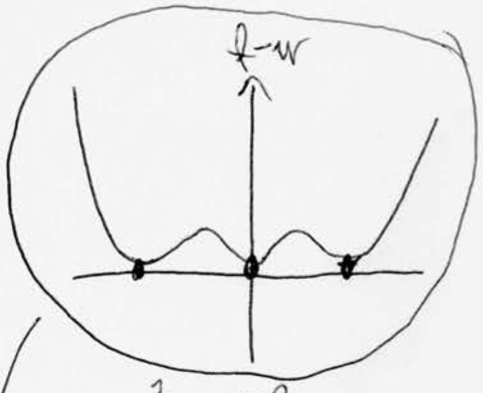
$a > 0$ $\quad$ $a < 0$

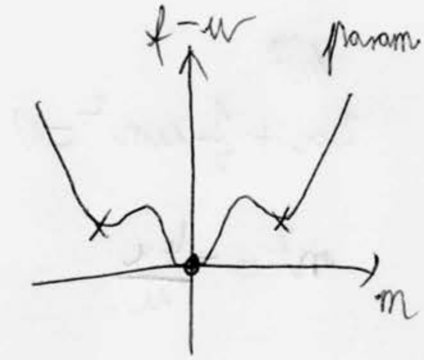


$a < 0$

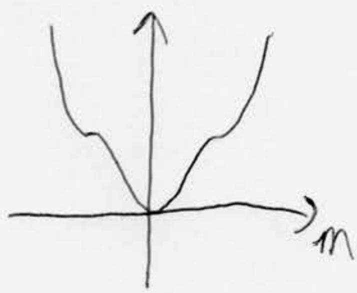


$\longrightarrow \quad 0 < a < \frac{u^2}{4v}$





param. fázis



$\to \frac{u^2}{4v} > a > 0$ $\longrightarrow$ $\frac{u^2}{4v} > a > 0$ $\qquad$ $a \gg 0$

$a > \frac{u^2}{4v}$

$\Rightarrow$ 1. rendű átalakulás $0 < a < \frac{u^2}{4v}$

ez érdekel minket

$$a m_{w} + u m^3 + v m^5 = 0$$

$$m(a + u m^2 + v m^4) = 0$$

$$a + 3u m^2 + 5 v m^4 > 0$$

$\underline{m=0}$: $a > 0$ → akkor nem instabil (stabil vagy metast.)

$\underline{m \neq 0}$: $a + u m^2 + v m^4 = 0$

$$m^2 = \frac{-u \pm \sqrt{u^2 - 4av}}{2v} = \begin{cases} \text{nincs valós mo.: } u^2 < 4av, \quad a > \frac{u^2}{4v} \\ a \leq 0: \oplus \text{ gyök egy } m^2 \text{ értéket} \\ 0 < a < \frac{u^2}{4v}: \text{ 2 gyök} \end{cases}$$

$$f - w = \frac{a}{2} m^2 + \frac{u}{4} m^4 + \frac{v}{6} m^6 = 0 \quad \xrightarrow[\text{'m' értékeket keresünk}]{\text{mivel végs}} \quad \frac{a}{2} + \frac{u}{4} m^2 + \frac{v}{6} m^4 = 0$$

$$\underbrace{a + u m^2 + v m^4 = 0} \qquad \underline{3a + \frac{3}{2} u m^2 + v m^4 = 0}$$

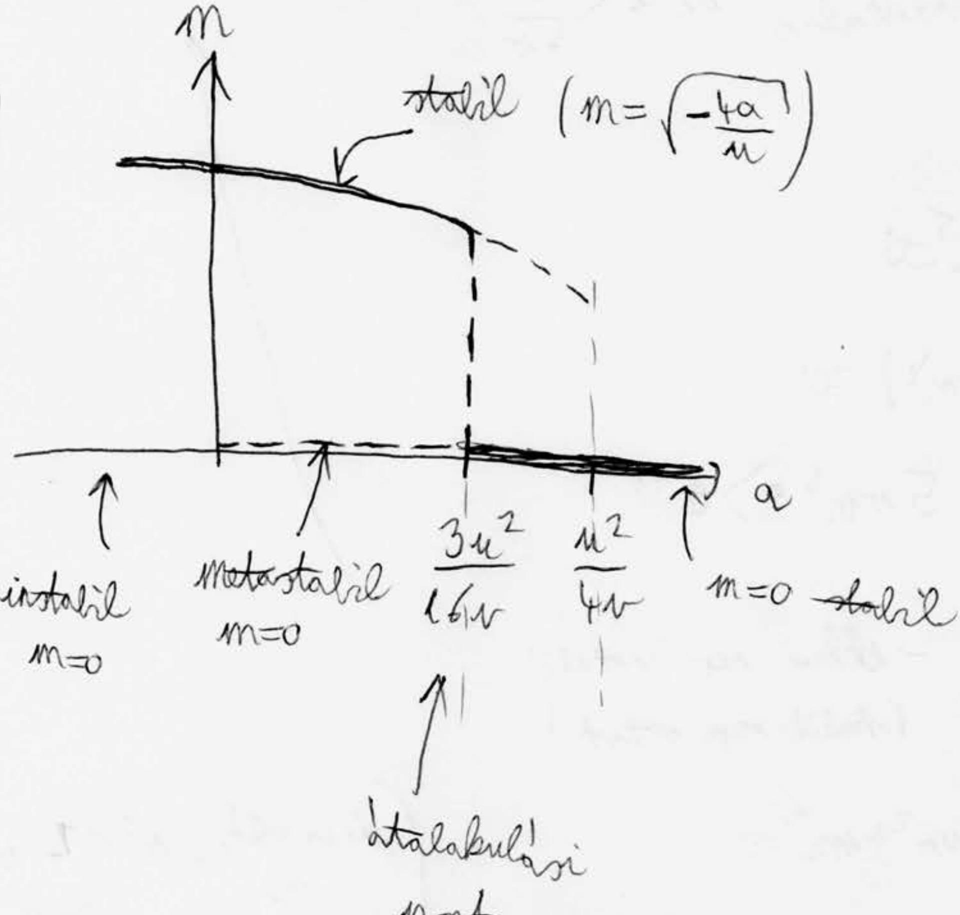
$-4\times$

$$2a + \frac{1}{2} u m^2 = 0$$

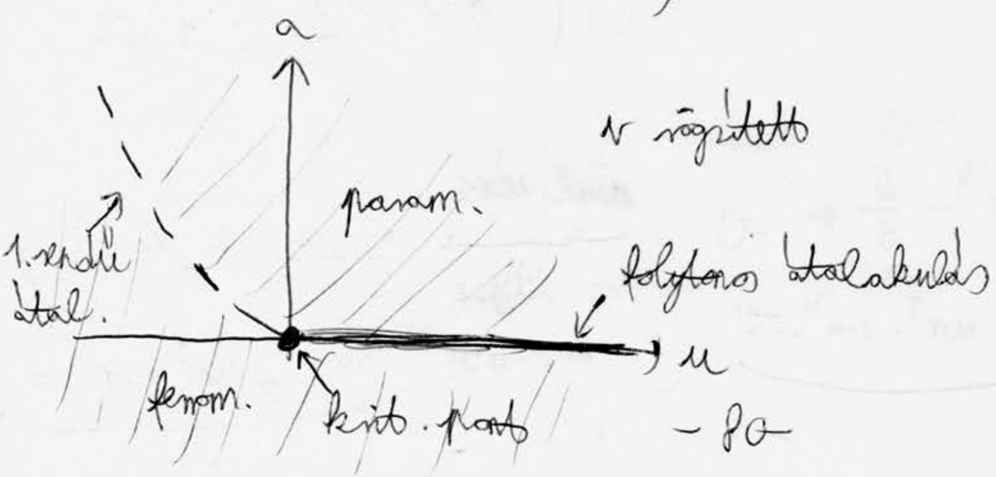
$$m^2 = -\frac{4a}{u}$$

$$a + u\left(-\frac{4a}{u}\right) + v\,\frac{16a^2}{u^2} = 0 \quad \to \quad a = \frac{3}{16}\,\frac{u^2}{v}$$

$\Rightarrow$



↳ termikus hiszterézis (ha bekerül a metastabil állapotokba is)



– 80 –

$\hookrightarrow \frac{F_c}{V} = f = w + \frac{a}{2} m^2 + \frac{u}{4} m^4 + \frac{v}{6} m^6$, $u = 0$ (krit. pont)

$H \neq 0$

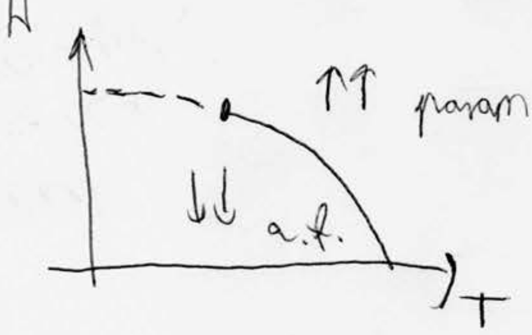
$f = w + \frac{a}{2} m^2 + \frac{v}{6} m^6$

$a m + v m^5 = 0$ $\quad a m + v m^5 = H \quad a = 0 \quad m = \left(\frac{H}{v}\right)^{1/5}$

$m = 0$ $\quad m^4 = -\frac{a}{v} \quad m = \left(-\frac{a}{v}\right)^{1/4}$

$(a > 0)$ $\quad (a < 0)$

stabil a param. $\quad$ stabil a ferrom.



→ lehet ilyen is

b) köbös szimmetria

$\underline{m} = (m_1, m_2, m_3)$

$f = w + \frac{a}{2} \underline{m}^2 + \frac{u}{4} (\underline{m}^2)^2 + \frac{v}{4} \sum_{\alpha=1}^{3} m_\alpha^4$

$\frac{\partial f}{\partial m_\alpha} = a m_\alpha + u (\underline{m}^2) m_\alpha + v m_\alpha^3 = 0$

~~Mert~~: ez nem kell, mert nem független

~~Mert~~ $\sum_{\substack{\alpha,\beta \\ (\alpha \neq \beta)}} m_\alpha^2 m_\beta^2 = m_1^2 m_2^2 + m_2^2 m_3^2 + m_3^2 m_1^2$

mert: $(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)^2$

4. hatv.-k $\quad$ 2× szorzatok

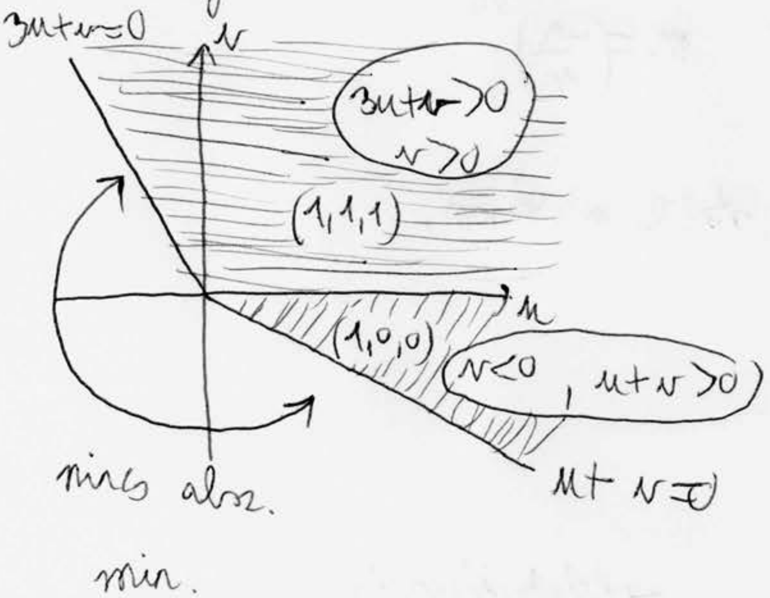
⇒ 2× szorzatok nem függetlenek a 2 előző tagtól

$$\frac{\partial^2 f}{\partial m_\alpha \partial m_\beta} = \delta_{\alpha\beta}\left(a + u\,\underline{m}^2 + 3v\,m_\alpha^2\right) + 2u\,m_\alpha m_\beta \qquad \underline{\text{poz. def.}}$$

- $\underline{m}=0$ stabil, ha $a>0$
- $a<0$

• belátható, hogy ha 2 komp. $\neq 0$, mindig nyeregpontot kapunk

• eredmény:



pl. La → v>0 (1,1,1) rend

SrTi → v<0 (1,0,0) rend

↓ deformáció

v>0 lesz

(1,1,1) rend

⇒ 1. rendű átalakulás

(i) izotróp mágnesezettség

$$f = w + \frac{a}{2}\underline{m}^2 + \frac{u}{4}\left(\underline{m}^2\right)^2$$

inhomogén rendszer

$$F = \int d^d r \left[w + \frac{a}{2}\underline{\sigma}(r)^2 + \frac{u}{4}\left(\left(\underline{\sigma}(r)\right)^2\right)^2 - \left(\nabla\underline{\sigma}(r)\right)^2 - \underline{h}(r)\underline{\sigma}(r)\right]$$

$$\left(\nabla \underline{s}(\underline{r})\right)^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\nabla s_\alpha(\underline{r})\right)^2$$ a térbeli és spin forgatási szimm.-ja (komp.-ek) más, ezeket külön kell összeejteni!

Mi van, ha $u<0$, $c<0$? → $(\nabla s)^4$ is megjelenik:

ii) modulált fázis

$$\alpha\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2 + \bar{\alpha}\left(\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2\right) + \beta\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^4$$

$$\alpha < 0 \qquad \bar{\alpha} > 0 \qquad \beta > 0$$

⇒ i) és ii) -t fogjuk vizsgálni

8. óra

XI. 12.

$$F_c = \int d^d r \left\{ w + \frac{a}{2} \underline{s}^2 + \frac{u}{4}(\underline{s}^2)^2 - \frac{1}{2} c (\nabla \underline{s})^2 - \underline{h}\, \underline{s} \right\}$$

$$(\nabla \underline{s})^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} (\nabla s_\alpha)^2$$

$u>0$, $c>0$ $\quad$ s legvalószínűbb értéke

$$\underline{h}(\underline{r}) = \underline{H} \qquad a\,\underline{m} + u(\underline{m}^2)\underline{m} = \underline{H}$$

$$\underline{m} \parallel \underline{H} \rightarrow a\,m + u m^3 = H$$

($\underline{H}$ adja az egyetlen kitüntetett irányt)

$\underline{s} = \underline{m} + \delta\underline{s}$ kvadratikus ~~(∇s)~~ rendig kell elmenni!

$$\underline{s}^2 \simeq \underline{m}^2 + 2\underline{m}\,\delta\underline{s} + \delta\underline{s}^2$$

$$(\underline{s}^2)^2 = (\underline{m}^2)^2 + 4(\underline{m}^2)(\delta\underline{s}\,\underline{m}) + 2\underline{m}^2\delta\underline{s}^2 + 4(\underline{m}\,\delta\underline{s})^2$$

$$(\nabla s)^2 = (\nabla\delta\underline{s})^2 \qquad \underline{h}\,\underline{s} = \underline{h}(\underline{m} + \delta\underline{s})$$

$$F_c = \int d^d r\left\{ w + \frac{a}{2}\underline{m}^2 + 2\underline{m}\,\delta\underline{s} + (\delta\underline{s})^2\right\} + \frac{u}{4}\Big[(\underline{m}^2)^2 + 4\underline{m}^2(\delta\underline{s}\,\underline{m}) +$$
$$+ 2\underline{m}^2\delta\underline{s}^2 + 4(\underline{m}\,\delta\underline{s})\Big] + \frac{1}{2}c(\nabla\delta\underline{s})^2 - \underline{H}\,\underline{m} - \underline{H}\,\delta\underline{s}$$

$$F_c(\delta\underline{s}) = F_c(\delta\underline{s}=0) + \int d^d r\Big\{\delta\underline{s}\,\underbrace{\left(a\,\underline{m} + u(\underline{m}^2)\,\underline{m} - \underline{H}\right)}_{=0\ (\underline{m}\text{ minimalizál})} +$$

$$+ \int d^d r\left\{\frac{a}{2}\delta\underline{s}^2 + \frac{u}{m}\underline{m}^2\delta\underline{s}^2 + u(\underline{m}\,\delta\underline{s})^2 + \frac{1}{2}c(\nabla\delta\underline{s})^2\right\} =$$

különböző lesz az $\underline{m}$-re $\perp$ és $\underline{m}$-el $\parallel$ fluktuációk között (ez a tag kitünteti ~~kit...~~ az $\underline{m}$ irányú $\delta\underline{s}$-t ~~t~~energiában)

$$\underline{H} := (0, 0, H)$$
$$\Downarrow$$
$$\underline{m} = (0, 0, m)$$

$\delta s_x \leftarrow \uparrow \delta s_z$, $\Uparrow \underline{m}$

$$= F_c(\delta s = 0) + \int d^d r\left\{\frac{1}{2}(a + u\,\underline{m}^2 + 2um^2)\,\delta s_z^2 + \frac{c}{2}(\nabla\delta s_z)^2 +\right.$$

longitudinális fl.

$$\left. + \frac{1}{2}(a + um^2)(\delta s_x^2 + \delta s_y^2) + \frac{c}{2}\left((\nabla s_x)^2 + (\nabla s_y)^2\right)\right\}$$

transzverzális flukt.

$\downarrow$ Fourier ~~trafó~~

$$f_c - f_{c,min} = \sum_q \frac{1}{2}\left(a + 3um^2 + cq^2\right)\delta s_{z,q}\,\delta s_{z,-q} +$$

$$+ \sum_q \frac{1}{2}\left(a + um^2 + cq^2\right)\left(\delta s_{x,q}\,\delta s_{x,-q} + \delta s_{y,q}\cdot\delta s_{y,-q}\right)$$

$$P \sim e^{-\frac{f_c - f_{c\,min}}{k_B T}}$$

$$C_L(q) = \langle \delta s_{z,q}\,\delta s_{z,-q}\rangle = \frac{k_B T}{a + 3um^2 + q^2}$$

$$C_T(q) = \langle \delta s_{x,q}\,\delta s_{x,-q}\rangle = \frac{k_B T}{a + um^2 + q^2}$$

$\Rightarrow$ más a korrelációs hossz és a szuszcept. longitudinális és transzverzális irányra

- $T > T_c$ $(a > 0)$ $H = 0$

  $\underline{m} = 0$ $\quad C = \dfrac{k_B T}{a + q^2}$ $\to$ nincs kül. a 2 irány között

- $T < T_c$ $(a < 0)$ $H \neq 0$

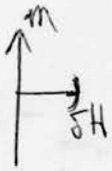
  $(a + um^2)\,m = H$ (állapotegyenletből)

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} C_T(q) &= \frac{k_B T}{\frac{H}{m} + q^2} \\ \chi_T(q) &= \frac{1}{k_B T}\, C_T(q) \end{aligned}\right\}$$

(i) $q = 0$ $\quad \chi_T(q=0) = \dfrac{m}{T}$ $\quad H \to 0$: $m \to$ véges

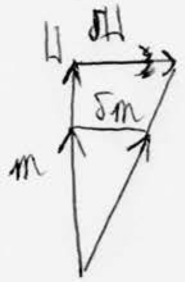
$\boxed{\chi_T(q=0) \to \infty}$

Miért van ez?



ha bekapcsolunk egy ilyen teret, $\underline{m}$ elfordul, de egy forgásszimm. esetben ehhez nem kell energia $\exists\ \chi \to \infty$

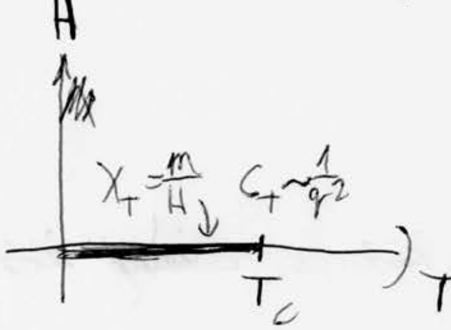
másképp:



$$\chi_T = \frac{\delta m}{\delta H} = \frac{m}{H}$$

DE

ii) $H=0$ $\quad G_T(q) = \frac{k_B T}{q^2}$ $\quad$ koegz. görbén χ_T végig divergál T_c alatt



Ez ~~tényleg~~ a forgási szimm. miatt van! (nincs kitüntetett irány)

De vajon ez csak a Landau elméletből jön, vagy általánosabb?

<u>Mermin – Wagner – tétel:</u>

Heisenberg-modell, d dim., rácson (<u>izotróp eset</u>)

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\sum_{ij} J(\underline{R}_i - \underline{R}_j)\cdot \underline{S}_i \underline{S}_j - H\sum_i \underline{S}_i$$ $\to$ ~~nagyított~~ nagyságú kv. spinek

$\underline{\langle S_{z\,i}\rangle = m \quad \underline{H} = (0,0,H)}$

$$C_T(q) = \langle S_{x,q}\, S_{x,-q}\rangle$$

$$\frac{1}{k_B T}\cdot C_T(q) \geq \chi_T(q) \geq \frac{1}{\frac{H}{m} + W q^2}$$

$\cancel{(\text{Mermin-W tétel})}$

W véges, ha $\sum_i \cancel{(\ldots)}\, J(\underline{R}_i - \underline{R}_j)\cdot(\underline{R}_i - \underline{R}_j)^2 < \infty$

$\downarrow$

ilyenkor nevezzük rövid hatótáv.-únak a kh.-t

$\Downarrow$

ilyenkor χ_T legalább $\frac{1}{q^2}$ szerint divergál

$\langle S_{ix}^2\rangle < S(S+1)$ véges!

$$\langle S_{ix}^2\rangle = \frac{1}{N}\sum_q \langle S_{iq}\, S_{i-q}\rangle = \frac{1}{N}\sum_q C_T(q) =$$

$$= \frac{N_0}{(2\pi)^3}\int d^d q\cdot C_T(q)$$

az $\int$ eredménye véges, DE $C_T(q)$ legalább $\frac{1}{q^2}$ szerint div.:

$$\int_{q\simeq 0} d^d q\cdot\frac{1}{q^2} = \int_{q\simeq 0} dq\; q^{d-3} = \begin{cases} \infty & \text{ha } d = 1 \text{ vagy } 2 \\ \text{véges} & \text{ha } d \geq 3 \end{cases}$$

$d=1$ v. 2-ben ellentmondást kaptunk $\Rightarrow$ $\boxed{\langle S_{iz}\rangle = m \text{ nem lehetséges}}$

$\Rightarrow$ nincs hosszútávú rend 1 és 2 dim.-ban

Ált. ban ha rövid hatótáv.ú a kh., és folytonos szimm. sérül $d = 1, 2$ -ben nem lehetséges hosszú távú rend

$\Updownarrow$

Goldstone - szingularitás

[Goldstone - tétel : ha folyt. szimm. sérül, megjelenik egy 0 tömegű 0 spinű gerjesztés (bozon)]

din. következmény:

Goldstone - módus jelenik meg: $\omega(q)$ gap nélküli, azaz $\omega(q) \to 0$ ha $q \to 0$

propagáló módus $\dfrac{\mathrm{Im}\, \omega(q)}{\mathrm{Re}\, \omega(q)} \to 0 \quad (q \to 0)$

$e^{iqx}\, e^{-i(\mathrm{Re}\, \omega(q))t}\, \underbrace{e^{-\mathrm{Im}\, \omega(q) t}}_{\text{csillapítás}}$ ↗ csillapítás elhanyagolhatóvá válik

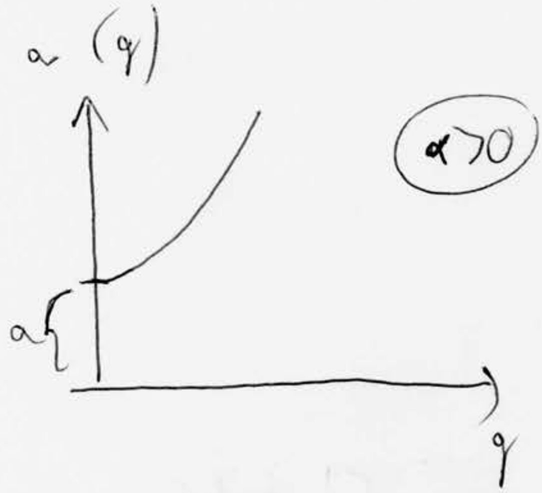
(ferromágneses rsz.-nél ez a spinhullám, folyékony He-nál ez a második hang)

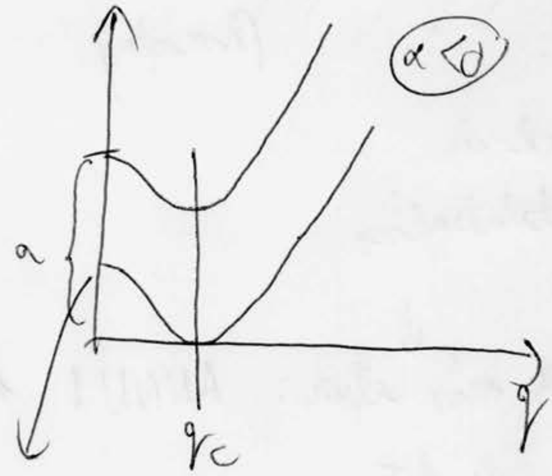
1D -ben

$$F_C = \int dx \left(w + \frac{a}{2}\eta^2 + \frac{u}{4}\eta^4 + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 + \frac{\beta}{4}\left(\frac{d^2\eta}{dx^2}\right)^2 \right) , \quad u, \beta > 0$$

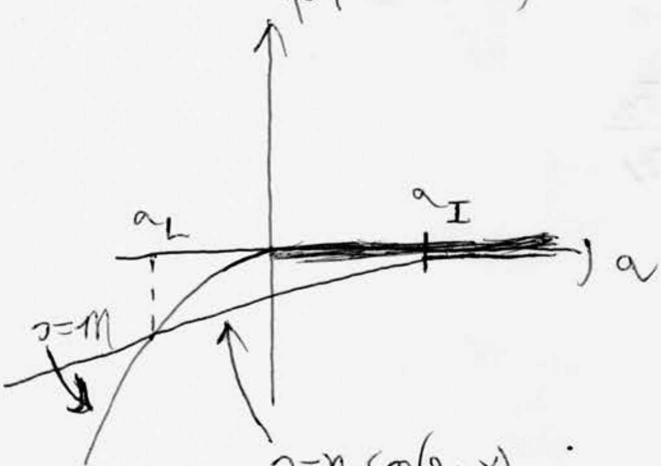
stabilitás → kvadratikus rész:

$$\sum_q \frac{1}{2} \underbrace{\left(a + \alpha q^2 + \frac{1}{2}\beta q^4\right)}_{a(q)} \eta_q \eta_{-q}$$





ha a-t csökkentem, a q_c min.-nál lesz először $a(q) \leq 0$



↓

$\eta = \eta \cdot \cos(q_c x)$ → modulált fázis

↓

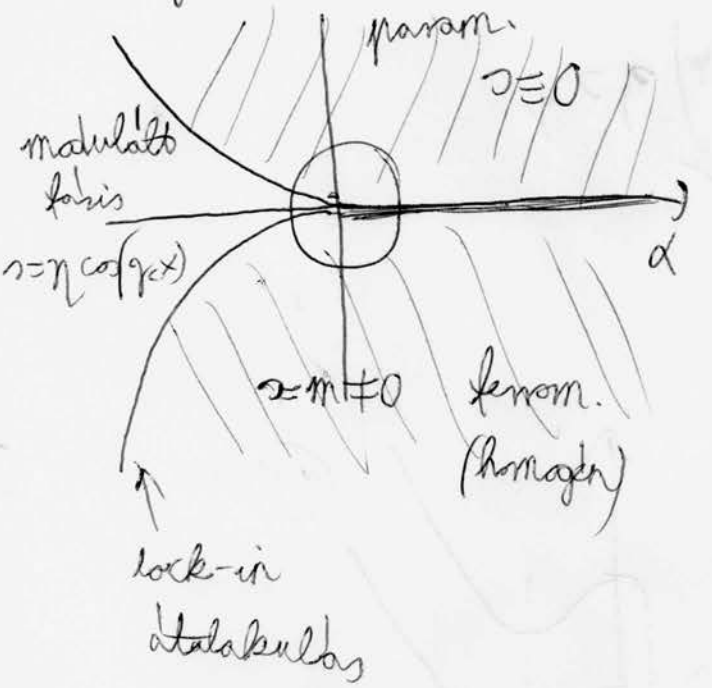
mikor lesz instabil

a 4. rendű tag miatt a_2-nél is lesz átalakulás

(megint homogén lesz)

$\Downarrow$

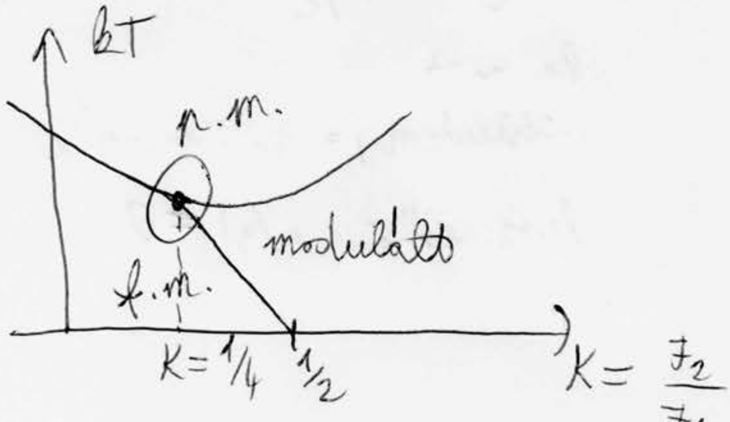
fázisdiagr.



(modulált = inkommenzur.)

$\Downarrow$

Volt már ilyen: ANNNI modell



○ pontok megfeleltethetők egymásnak (megfelelő változókkal)

~~⇒ Landau elmélet kritikája:~~

~~(i) egzakt eredmények~~

~~(ii) módok~~

~~(iii) belső konzisztencia~~

Landau-elmélet kritikája

(i) egzakt eredmények
(ii) mérések

(iii) belső konzisztencia

i) ehhez: kritikus exponensek: $t \equiv \dfrac{T-T_c}{T_c}$ redukált hőmérséklet

$\Downarrow$

($t=0 \leftrightarrow$ krit pont)

$m \sim |t|^{\beta}$ $\quad t<0,\ H=0$

divergálnak, ha $t \to 0$:

$\chi \sim |t|^{-\gamma}$ $\quad t \gtrless 0,\ H=0$

$C_{H=0}^{(\text{fajhő})} \sim |t|^{-\alpha}$ $\quad$ —||—

$\alpha = -1 \Rightarrow$

fajhő nem divergál

$H \sim m^{\delta}$ $\quad H \neq 0,\ t=0$
(nemlin. kapcsolat)

$\xi \sim |t|^{-\nu}$ $\quad t \gtrless 0,\ H=0$

$\xi \sim H^{-\mu}$ $\quad t=0,\ H \neq 0$

$C(r) \sim \dfrac{1}{r^{2-\eta}}$ $\quad H=0,\ t=0$

	Landau-elm (átlagtérelm.)	Ising-modell ($d=2$)	szférikus modell ($d=3$)	kísérletek (többféle rsz-re)
β	$1/2$	$1/8$	$1/2$	$\approx 1/3$
γ	1	$7/4$	2	$\approx 4/3$
δ	3	15	5	
α	0 (ugrás)	0 (logaritm.)	-1	$\approx \pm 0{,}1$
ν	$1/2$	1	1	$\approx 2/3$
η	0	$1/4$	0	≈ 0
μ	$1/3$	?	$2/5$	

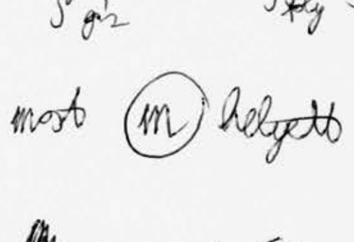
Ising-modell ($d=2$), szférikus modell ($d=3$) ↓

~~2D-ban nem jó a hatás~~

$\Rightarrow$ egzakt modellekkel igazán nem fér össze a Landau-elmélet

kísérletek $\Rightarrow$ Landau-elmélet nem igaz, de bizonyos univerzalitás megmarad

ii) folyadék-gáz átal. $\to$ m helyett ρ, Landau ugyanazt adja



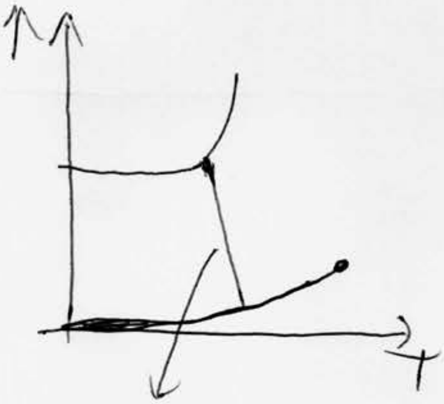
$\to$ koegz. görbén 2 féle sűrűség van gáz és foly.

most m helyett ρ

$\eta = 0{,}57$

$\gamma = 1{,}21$ (X most kompressz.)

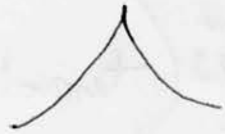
CO_2, Ar $\to$ kül. gázokban az exponensekben eltérés van!



T_{crit} p-től függ

↓

vékony edényeknél az edény alja és teteje között nyomáskül. van → más T_c → grav. nélkül kell mérni

λ átmenet nem divergál, hanem véges 

EuO $\eta \simeq 0,08$

Fe $\gamma \simeq 1,33$ (n° szórással)

MnF_2 magmágn. rezonancia $\beta \simeq 1/3$

$\gamma \simeq 1,27$

$SrTiO_3$ szerkezeti átal. → oktaéder elfordul (l. korábban)

$\varphi^2 \sim t = \frac{T_c}{T}$ DE kritikus pont körül elromlik

itt $\beta = \frac{1}{3}$

9. óra

Landau elmélet kritikája (folyt.)

(konzisztencia vizsgálata)

iii) Ginzburg-kritérium

$T < T_C$ $\qquad \dfrac{\overline{\Delta M^2}}{\overline{M}^2} = \dfrac{k_B T V \chi}{V^2 m^2} = \dfrac{k_B T \cdot \chi}{m^2 V}$

ξ korr. hossz → ekkora tömbök egymástól függetlenek, de belül koherensek

⇓

belül kicsik a fluk.-k

termodin. limesz használható, ha $V \gg \xi^d$

Landau elm. konzisztens, ha ξ^d térfogatban $\dfrac{\overline{\Delta M^2}}{M^2} \ll 1$

$$\frac{k_B T \cdot \chi}{m^2 \xi^d} \sim \frac{|t|^{-1}}{|t|^{1} \cancel{} |t|^{-\frac{d}{2}}} = |t|^{\frac{d}{2}-2} \to 0 \quad \frac{d}{2}-2>0$$

$$d > 4$$

krit. pont körül érdekel a cis.

$\chi \sim |t|^{-1}$ $\qquad t$: red. hőm.

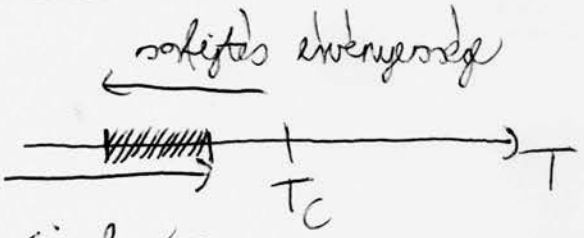
$m \sim |t|^{\frac{1}{2}}$

$\xi \sim |t|^{-\frac{1}{2}}$

- ha $|t| \to 0$-ra divergál $\dfrac{k_B T \chi}{m^2 \xi^d}$, akkor nem lesz jó a Landau elmélet a krit. pont körül (akkor sem, ha vhol konziszt. volt) milyen $\lambda |t|$ tart.-ban
- ha $|t| \to 0$-ra $\because \to 0$, akkor lehet konzisztens (de lehetnek más korr.-k is)

(beláttuk, hogy $d>4$-ben már jól írja le a Landau-elmélet a kitev. vis.-t)

$d=3$



Ginzburg-
-krit.

itt működik a Landau elmélet

Landau elm. paraméterei

$$\frac{k_B T \chi}{\xi^3 m^2} = \frac{k_B T_C \cdot \frac{1}{2a'(T_C-T)}}{\frac{a'(T_C-T)}{u}\,\xi_0^3\left(\frac{T_C-T}{T_C}\right)^{-\frac{3}{2}}} = \frac{k_B\, u}{2a'^2 T_C\left(\frac{T_C-T}{T_C}\right)^{1/2}\xi_0^3} =$$

$$\underbrace{\Delta C_{H=0}}_{\text{fajhő ugrása}} = V\cdot\frac{a'^2 T_C}{2u} \quad \text{(láttuk)}$$

$$= \frac{V k_B}{4\Delta C_{H=0}\,\xi_0^3\left(\frac{T_C-T}{T_C}\right)^{1/2}}$$ ← attól függően romlik el, hogy mekkora ΔC és ξ_0 (és T_C)

[itt jól leírja a fázisátal.-t a Landau-elmélet ← pl. szupravezetőkben ξ_0 nagyon nagy]

Magas hőmérsékleti sorfejtés

(először a többi elmélet ellenőrzésére használták, de később rájöttek, hogy a krit. viselkedést is le lehet vele írni)

1) $e^{-\beta \mathcal{H}} \approx 1 - \beta\mathcal{H} + \frac{1}{2}\beta^2 \mathcal{H}^2 + \dots$

$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$

$$Z = \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta\mathcal{H}}\right) = \underbrace{\mathrm{Tr}\, 1}_{\uparrow} - \beta\, \mathrm{Tr}\mathcal{H} + \frac{1}{2}\beta^2\, \mathrm{Tr}\,\mathcal{H}^2 + \dots =$$

akkor alkalmazható az egész, ha $\mathrm{Tr}\, 1$ véges, azaz az állapotok száma véges

$$= \mathrm{Tr}\, 1 \left(1 - \beta \frac{\mathrm{Tr}\,\mathcal{H}}{\mathrm{Tr}\, 1} + \dots \right)$$

2) pl. nn kölcsönhatás, Ising-modell

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j$$

$$e^{-\beta\mathcal{H}} = e^{K \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j} = \prod_{\langle ij \rangle} e^{K S_i S_j} = (*)$$

$K = \beta J \to k_B T$-hez visz. kh.-i energia

$e^{\pm x} = \mathrm{ch}\, x \pm \mathrm{sh}\, x$

$S_i S_j = \pm 1$ lehet

$$\circledast = \prod_{\langle ij \rangle} \left(\mathrm{ch}\, K + S_i S_j\, \mathrm{sh}\, K \right) = \left(\mathrm{ch}\, K \right)^{P} \prod_{\langle ij \rangle} \left(1 + v S_i S_j \right)$$

P: nn párok száma

$$\left(P \simeq \frac{N \cdot z}{2} \right) \quad z \text{: koord. szám}$$

$$\boxed{v = \mathrm{th}\, K = \mathrm{th}\, \frac{J}{k_B T}}$$

ha T magas, v kicsi lesz

→ sorfejtés v hatványai szerint fog menni

(Ising-modellre ez ~~most~~ kényelmesebb)

$\prod_{\langle ij \rangle} (1 + v S_i S_j)$ → ez máris egy hatványsor ~~[illegible]~~ v-ben

$$Z = \sum_{\hat{S}} \left(\mathrm{ch}\, K \right)^{P} \underbrace{\prod_{\langle ij \rangle} \left(1 + v S_i S_j \right)}_{1 + v \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j + v^2 \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j \left(\sum_{\substack{\langle lk \rangle \\ \langle lk \rangle \neq \langle ij \rangle}} S_l S_k \right) + \dots}$$

$$\sum_{\hat{S}} S_1^{p_1} S_2^{p_2} \dots S_N^{p_N} = \left(\sum_{S_1} S_1^{p_1} \right) \left(\sum_{S_2} S_2^{p_2} \right) \dots$$

legtöbbször

p_i: ahányszor S_i szerepel a szorzatban, $S_i^0 = 1$

pl. első tag

$\underset{s_i\ \ s_{i+1}}{\uparrow\downarrow}$, többi 0

2. tag

$\underset{s_i s_{i+1}}{\uparrow\downarrow}$ $\underset{s_i s_{i+1}}{\uparrow\uparrow}$ többi 0

$\overset{1}{s_i}$ $\overset{2}{s_{i+1}}$ $\overset{1}{s_{i+2}}$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\downarrow$

$\vdots$

$$\sum_{s=1,-1} s^{p} = \begin{cases} 2 & p \text{ páros} \\ 0 & p \text{ ptl} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\sum_{s_1} s_1^{p_1}\right)\left(\sum_{s_2} s_2^{p_2}\right)\dots = \begin{cases} 2^N, \text{ ha } \forall p_i \text{ páros} \\ 0, \text{ ha van ptl } p_i \end{cases}$$

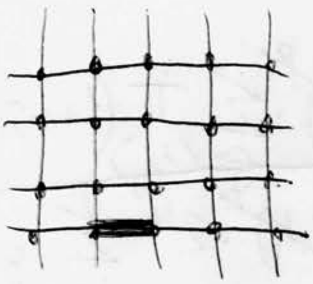
~~g(l)~~: l nn szomszéd pár kiválasztása, úgy, hogy $\forall$ spin páros számszor fordul elő benne

$g(l)$: az ilyen kiválasztások száma

$$\Downarrow$$

$$\boxed{Z = (\mathrm{ch} K)^P \cdot 2^N \cdot \sum_{l=0}^{P} g(l) \cdot v^l}$$

$\Rightarrow$ már csak $g(l)$-t kell meghat. $\rightarrow$ kombinatorikai feladat gráfok:



nn párok kiválasztása = rács élek kiválasztása =

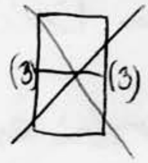
= gráf

$g(l)$: azon l élből álló gráfok száma, amelyek csúcsainak fokszáma páros

(páros számú él találkozik a csúcsokban)

pl. legkisebb $l=4$ vagy 

de pl. 

lehetnek nem összefüggő gráfok is

síkbeli □ rács:

$$Z = (\mathrm{ch}\, K)^{P} \cdot 2^{N} \left(1 + N v^{4} + \dots\right)$$

annyi □ van, ahány rácspont

$$g(0)=1 \quad \underbrace{g(1)=0 \quad g(2)=0}_{\text{ez más rácstípusra is igaz}} \quad g(3)=0 \quad g(4)=N$$

△ rácsban már nem 0 lenne

felületi és egyéb korrekciók elhanyagolhatóak korrelációs fv.

$$C_{mn} = \langle S_m S_n \rangle = \frac{\sum_{\{S\}} e^{-\beta \mathcal{H}} S_m S_n}{Z} = \frac{\cancel{(ch K)^P} \cdot \sum_{\{S\}} \prod_{(ij)} (1+v S_i S_j) S_m S_n}{\cancel{(ch K)^P} \cdot 2^N \sum_{l=0}^{P} g(l) v^l}$$

$m=n \to C_{mn} = \langle S_n^2 \rangle = 1$

$$C_{mn} = \frac{\sum_{l=0}^{P} \eta_{mn}(l) \cdot v^l}{\sum_{l=0}^{P} g(l) \cdot v^l}$$

ahol:

$\eta_{mn}(l)$ = olyan l élből álló gráfok száma, amelyben

ha $\boxed{m \neq n}$ az m, n csúcsok páratlan, a többi csúcs páros fokszámú (ilyenkor lehet kiemelni egy S_m, S_n-et)

$\boxed{m=n}$-re $\eta_{mn}(l) = g(l)$

(ha $l \cdot a$ -nál messzebb vannak, a korreláció lecseng)?

rácsáll.

$$\chi = \sum_m \chi_{mn} = \frac{1}{k_B T} \sum_m C_{mn}$$

$$k_B T \chi = \frac{\sum_{l=0}^{P} \eta(l) v^l}{\sum_{l=0}^{P} g(l) v^l}$$

nevező állapotösszeg → expon. N-ben

⇒ számlálónak is expon.-nak kell lennie N-ben

$$\eta(l) = \sum_m \eta_{mn}(l)$$

↓

!

egy rögz. n kezdőponttól ~~összes~~ felrajzolható, l élből álló

2 pontú gráfok száma

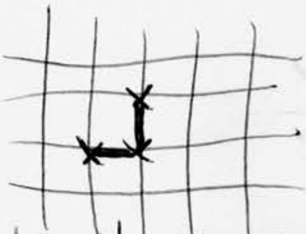
$\eta(l)$-ek

$\eta(0)=1$

$\eta(1) = z \overset{\square\text{ rács}}{=} 4$ z: nn párok száma (koord. szám)

$(\eta_{nn}^{(1)}=1)$

$\eta(2) = z\cdot(z-1) \overset{\square\text{ rács}}{=} 4\cdot 3 = 12$



itt → nem lehet

$\eta(3) = z\cdot(z-1)(z-1) = 4\cdot 3\cdot 3 = 36$

bárhol a gráf, mégis benne kell legyen

m=n pontú

$\eta(4) = \underbrace{4\cdot 3\cdot 3\cdot 3}_{108} - \underbrace{4\cdot 2}_{\text{duplán számolt}} + N = 100 + N$

bezárt gráfok → ezeket külön számoljuk

a páros fokszámú gráf bárhol lehet, az nem zavarja m=n-es gráfot

! ezek is kellenek, mert m=n esetet is figyelembe kell venni (ez lesz a nevezőben is) → g(4)

$\frac{1}{1+x} \approx 1-x$

$$X = \frac{1+4v+12v^2+36v^3+100v^4+Nv^4+\dots}{1+Nv^4+\dots} = (1+4v+12v^2+36v^3+100v^4+Nv^4)\cdot(1-Nv^4) = 1+4v+12v^2+36v^3+100v^4+\cancel{Nv^4}\cancel{-Nv^4}$$

↓

a gráfok leszámolása és az N függés kiejtése egyre bonyolultabb lesz

$$k_B T\, \chi(v) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v^n$$

kiterjeszthető komplex v-re

ρ konvergencia sugár

$|v| < \rho$ a sor konv.

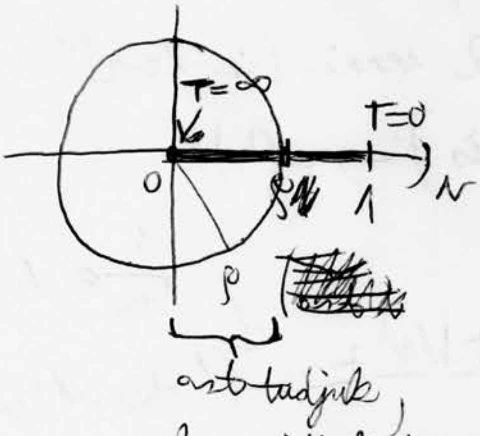
$|v| > \rho$ a sor divergens

d'Alambert kritérium: $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| = \frac{1}{\rho}$

fizikai $\chi(v)$

v valós, $v = \operatorname{th} \frac{J}{kT}$

$0 < v < 1$



azt tudjuk, hogy itt biztos konvergens

$$\boxed{v_c = \operatorname{th}\left(\frac{J}{k_B T_c}\right) \geq \rho}$$

tfh.

- $\gamma = v_c$ (ez nem mindig teljesül)

- $k_B T \cdot \chi(v) \sim A \cdot \cancel{\frac{v_c - v}{}} \left(1 - \frac{v}{v_c}\right)^{-\gamma}$ → (szing. a krit pontban)

vis: $\chi \sim (v_c - v)^{-\gamma}$

$v = \cancel{\text{th}} \frac{J}{k_B T}$ → véges T-re $(v_c \neq v)$ → $v_c - v \sim T_c - T$

$\Rightarrow \chi \sim \frac{1}{(T_c - T)^{\gamma}}$ ✓ (ilyen vis.-t vártunk)

$$A\left(1 - \frac{v}{v_c}\right)^{-\gamma} = A\left(1 + \gamma \frac{v}{v_c} + \frac{\gamma(\gamma+1)}{2}\left(\frac{v}{v_c}\right)^2 + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}{n!}\left(\frac{v}{v_c}\right)^2 + \ldots\right)$$

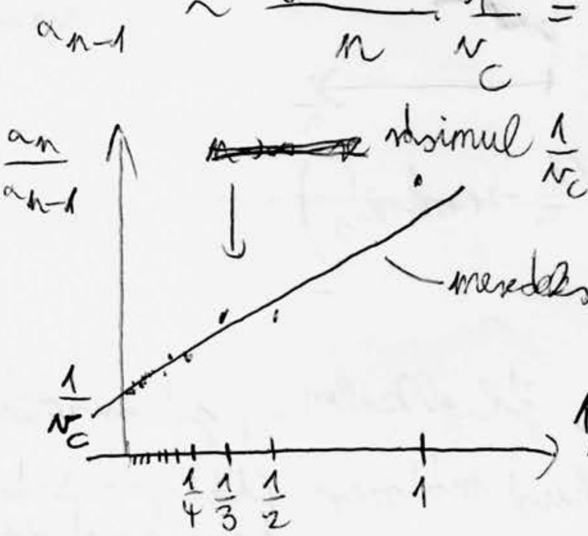
↳ ennek ~~a~~ lim.-ben div. kell, és az ..nak össze kell simulniuk ← ld. Lambert krit.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \approx \frac{\gamma + n - 1}{n} \frac{1}{v_c} = \frac{1}{v_c}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{n}\right)$$

a_n-ek $\chi(v)$ sorfejtéséből kaphatók meg

~~...~~ rásimul $\frac{1}{v_c} + \frac{\gamma-1}{v_c} \cdot \frac{1}{n}$-re

meredekség $\frac{\gamma - 1}{v_c}$ → γ krit. exponens számolása

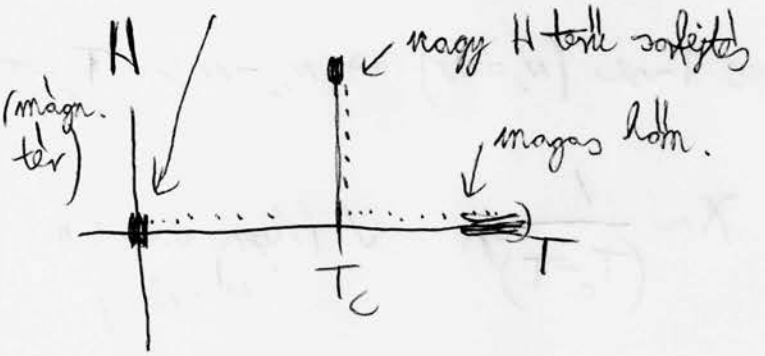


↓ (kaliforrott)

univerzalitás: bizonyos paraméterek nem játszanak szerepet a kit. vis.-ben

Egyéb sorfejtések

- alacsony hőm. sorfejtés: → ezzel lehet pl. a β krit. exponenst meghat.



Eredmények

$$\frac{\text{átlagtérelm.}}{} \quad \frac{k_B T_c}{q J}$$

↓

$q = \infty$

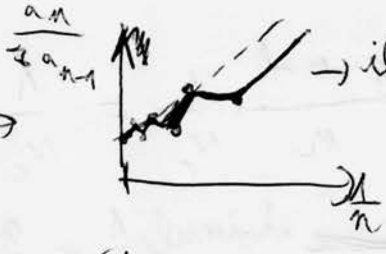
↑ koord. szám

$$\frac{k_B T_c}{q J} = 0$$ → ennek felel meg

$a_0 = 1$

$a_1 = 7$

$$\frac{a_n}{7 \cdot a_{n-1}} \quad \to \frac{a_1}{7 a_0} = 1 \quad \left(\frac{1}{7} \to \text{normálás}\right)$$



→ illesztésből krit expon.

⟹ magas hőm. sorfejtés: ∀ rendszerre jól alkalm., jó eredményeket ad (számok), szisztematikus (numerikus) módszer (hátrány: csak számokat kapunk, magyarázatot nem)

1) $$c_p - c_V = \frac{T v \alpha^2}{K_T} = \frac{T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p^2}{-\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T}$$ termóból

$m \to v$

$H \to p$ csere

$$\left. \begin{array}{l} c_H - c_M = \dfrac{T \cdot \left(\frac{\partial m}{\partial T}\right)_H^2}{\left(\frac{\partial m}{\partial H}\right)_T} \\ \\ c_M > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \quad c_H > \frac{T\left(\frac{\partial m}{\partial T}\right)_H^2}{\left(\frac{\partial m}{\partial H}\right)_T}$$

$T < T_c, \; H = 0$

b.o. $\sim |t|^{-\alpha}$ j.o. $\sim |t|^{2\beta - 2 + \gamma}$

$$\left(\frac{\partial m}{\partial H}\right)_T \sim |t|^{-\gamma}$$

$$\left(\frac{\partial m}{\partial T}\right)_H \sim |t|^{\beta - 1}$$

ahhoz, hogy $T \to 0$-ra is fennt álljon az egyenlőtlenség:

$$\boxed{-\alpha \leq 2\beta - 2 + \gamma}$$

$$2\beta + \gamma + \alpha \geq 2$$ Rushbrooke-egyenlőtlenség

Landau – elmélet : $2\cdot\frac{1}{2}+1+0=2$ ← krit. exponensekből

2D Ising modell : $2\cdot\frac{1}{8}+\frac{7}{4}+0=2$

$d=3$ szférikus : $2\cdot\frac{1}{2}+2-1=2$

az elméleti modellek és a mérések is azt mutatják, hogy <u>egyenlőségként</u> teljesülnek → mi van még a háttérben! → 2) pont

---

2) karakterisztikus hosszúság : ξ

$$\left.\begin{array}{l} T\to T_C \\ H\to 0 \end{array}\right\} \xi\to\infty \qquad \text{(Landau-elm.)}$$

<u>skálázás:</u>

(megfigyelés léptéke fontos a rsz. megfigyelése szempontjából: ha elérünk egy karakt. hosszt, más jelenségeket tudunk megfigyelni)

• termodinamika :

$$\lambda S(E,V,N)=S(\lambda E,\lambda V,\lambda N)$$

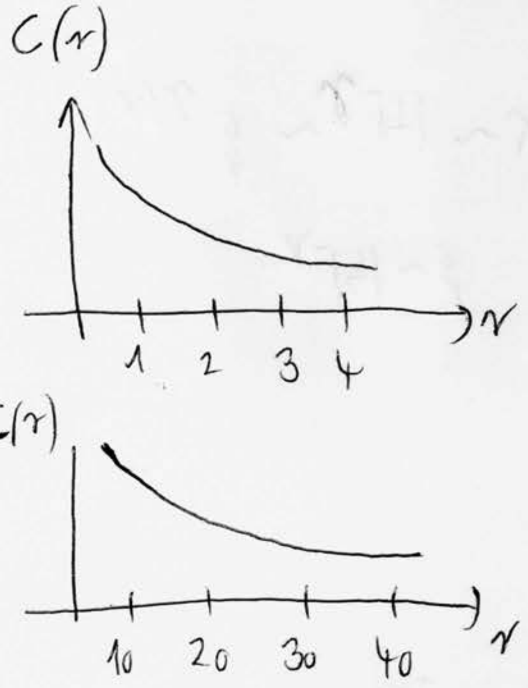
• hidrodinamika : nincs mikr. karakt. mennyiség, de makr. van, pl. Reynolds-szám → hasonló áramlások

• most (mágn. rsz.-ek) :

krit. pontban nincs karakt. távolság !

a) $C \sim \frac{1}{q^{2-\eta}}$ $\qquad qa \ll 1$

$C \sim \frac{1}{r^{d-2+\eta}}$ $\qquad r \gg a$

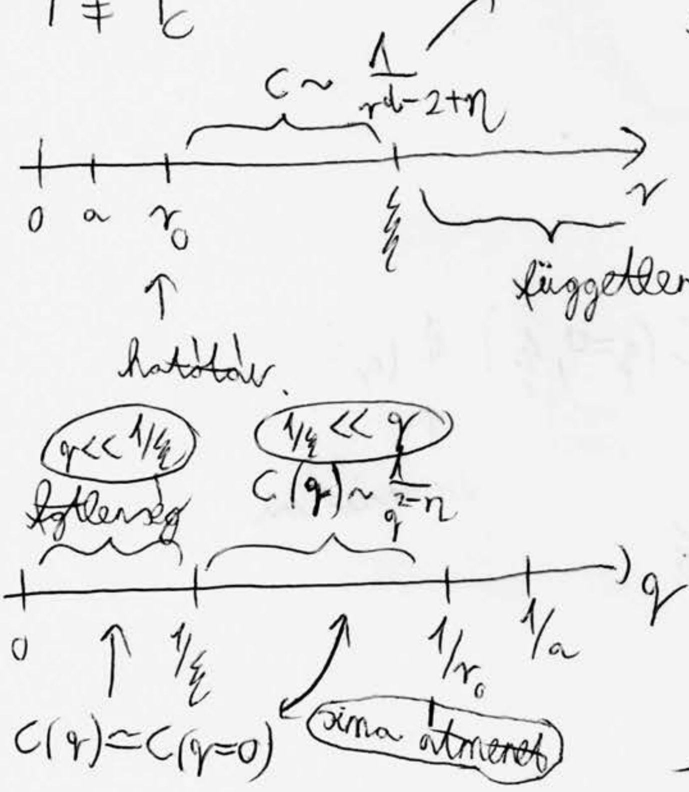


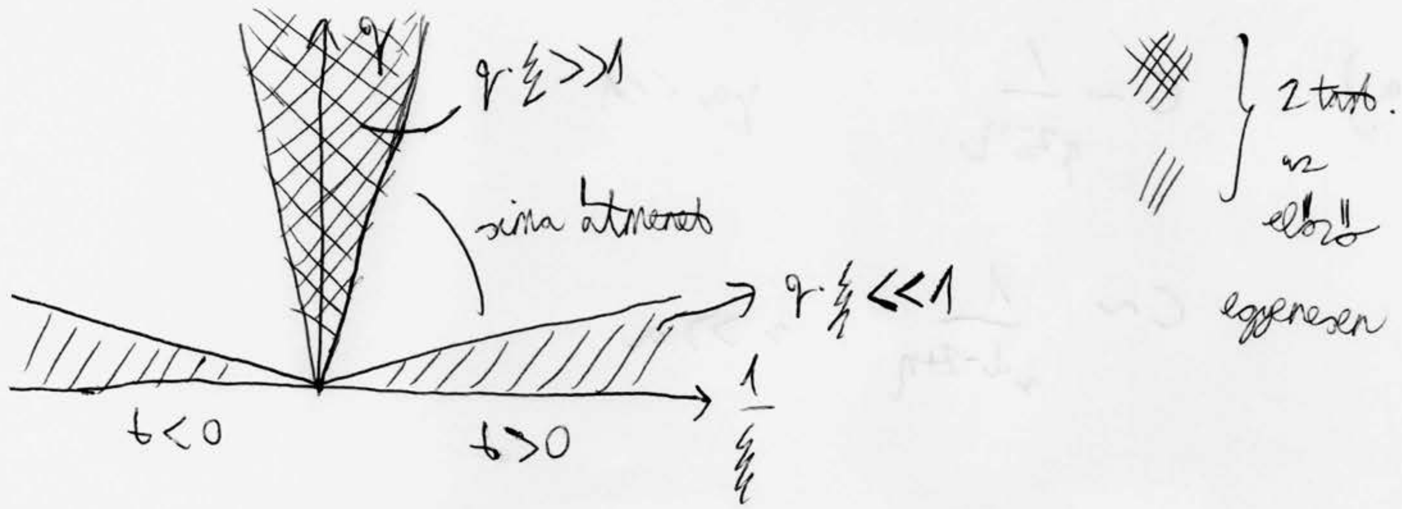
$\Downarrow$

ha nincs karakt. hosszúság, a korr. fv. lecsengés hatványfv. lesz, így lesz önhasonlóság $\longleftarrow$ (kül. skálákon)

$T \neq T_c$

ebben a tart. ban hasonlóan cseng le a korr. fv. a kül. skálákon





$q \cdot \xi \ll 1 \qquad C(q) = C(q=0) = k_B T \chi \sim |t|^{-\gamma} \sim \xi^{\gamma/\nu}$

$\xi \sim |t|^{-\nu}$

$q \cdot \xi \gg 1 \qquad C(q) \sim \frac{1}{q^{2-\eta}}$

illesztés (sima átmenet):

$q \cdot \xi \approx 1 \qquad \xi^{\gamma/\nu} \sim \frac{1}{\left(\frac{1}{\xi}\right)^{2-\eta}} = \xi^{2-\eta}$

$$\boxed{\frac{\gamma}{\nu} = 2-\eta}$$

másik levezetés:

b) <u>dim. analízis</u>: $C(q, \xi) = C(q=0, \xi) \cdot \phi(q\xi)$

dimenziótlan

egyetlen kar. hosszúság: ξ

$C(q=0, \xi) = A \cdot \xi^{\gamma/\nu}$

$\downarrow$

$$\boxed{C(q,\xi) = \xi^{\gamma/\nu} \cdot f(q\cdot\xi)}$$

$q\cdot\xi \ll 1$ $\quad f(q\cdot\xi) \simeq f(0) = A$

$q\cdot\xi \gg 1$ $\quad f(q\cdot\xi) \sim (q\cdot\xi)^{-\gamma/\nu}$

$$C(q,\xi) \sim \xi^{\gamma/\nu} (q\xi)^{-\gamma/\nu} \sim q^{-\gamma/\nu}$$

$\to$ ez ~~tart.~~ $\boxed{\frac{\gamma}{\nu} = 2-\eta}$ -t (l. 112-113. old)

\+ info : <u>hosszúság átskálázása:</u>

$\xi \to \xi/b$ $\quad C(bq, \xi/b) = (\xi/b)^{\gamma/\nu} f\left(bq \cdot \frac{\xi}{b}\right) = b^{-\gamma/\nu} \cdot \underbrace{\xi^{\gamma/\nu} f(q\xi)}_{C(q,\xi)}$

$q \to b\cdot q$ $\quad \boxed{C(q,\xi) = b^{\gamma/\nu} \cdot C(bq, \xi/b)}$

<u>általánosított homogén fv.</u>

hasonlít a homogén fv.-ekre, de ~~általánosított~~

nem b-vel, hanem b hatványaival ~~///~~

$\Downarrow$ kell szorozni

- hőmérséklet skálázása:

$\xi = \xi_0 \cdot |t|^{-\nu}$

$$(\xi/b) = \frac{\xi_0 |t|^{-\nu}}{b} = \xi_0 \cdot \left|\frac{t}{b^{-1/\nu}}\right|^{-\nu} = \xi_0 \cdot \left|b^{1/\nu} \cdot t\right|^{-\nu}$$

$$\boxed{C(q,t) = b^{\gamma/\nu} \cdot C(b\, q, b^{1/\nu} t)}$$

- mágn. tér:

$t = 0, \; H \neq 0$

$\xi \sim H^{-\mu}$

$\Downarrow \dots$

$$\boxed{C(q,t,H) = b^{\gamma/\nu} \cdot C(b q, b^{1/\nu} \cdot t, b^{1/\mu} H)}$$

(ált. hom. fv.)

- szuszc.-ra:

$$\chi(q,t,H) = \underbrace{\frac{1}{k_B T}}_{\text{sima fv.} \to k_B T_C \text{ ha } T \to T_C} C(q,t,H)$$

$$\boxed{\chi(t,H) = b^{\gamma/\nu} \cdot \chi(b^{1/\nu} \cdot t, b^{1/\mu} \cdot H)}$$

kitérő:

$f(x,y)$ ált. hom. fv.: $f(x,y) = \lambda^{r} \cdot f(\lambda^{a} \cdot x, \lambda^{b} \cdot y) \qquad \lambda^{a} = \tilde{\lambda}$

$$f(x,y) = \tilde{\lambda}^{\frac{r}{a}} \cdot f(\tilde{\lambda} x, \tilde{\lambda}^{b/a} \cdot y)$$

$\Downarrow$

az egyik kitevő mindig 1-nek választható

$\exists$ valójában 2 ~~ vált.~~ esetben 2 ~~független~~

exponens van

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$f_x(x,y) = \lambda^p \cdot f_x(\lambda^a x, \lambda^b y)\cdot \lambda^a = \lambda^{p+a} \cdot f_x(\lambda^a x, \lambda^b y)$$

↳ egy ált. homogén fv. deriváltjai is ált. hom. fv.-ek (de más exponenssel)

DE visszafelé ez nem igaz az integrálási konst. miatt

$$f(x,0) = \lambda^p \cdot f(\lambda^a x, 0) = \left(\frac{x_0}{x}\right)^{p/a} \cdot f(x_0, 0)$$

$\lambda^a \cdot x \equiv x_0$ (rögzített)

$$\lambda = \left(\frac{x_0}{x}\right)^{1/a}$$

↓

krit. pont környékén <u>hatványfv.</u> lesz

⇓

szuszc.-ra:

(szabaden.)

$f(t, H)$

$$m(t,H) = -\left(\frac{\partial f}{\partial H}\right)_t$$

$$\chi(t,H) = \left(\frac{\partial m}{\partial H}\right)_t$$

ha tudjuk, hogy f ált. homogén fv., akkor χ tul.-ból visszakövetk. f-re

$$X(t,H) = b^{\gamma} \cdot X(b t, b^{\Delta} \cdot H) \qquad \Delta = \gamma/\mu$$

$$m(t,H) = b^{\gamma-\Delta} \cdot m(bt, b^{\Delta} H)$$

$$\boxed{f(t,H) = b^{\gamma-2\Delta} \cdot f(bt, b^{\Delta} H)}$$

$\Rightarrow$ Skálahipotézis:

Két feltevés volt — f ált. homogén fv.

(ν, μ, γ)

$\boxed{\text{3 fgtlen exponens}}$ (változó)

$$C(q,t,H) = b^{\gamma/\nu} \cdot C(bq, b^{1/\nu} \cdot t, b^{1/\mu} \cdot H)$$

elsőből ez nem következik, mert q-ra is ki kellene terjeszteni

$\Downarrow$

ezekből már össze lehet kötni a kül. mennyiségeket (f, m, X, C)

Következmények — skálatörvények

adatösszeesés (skálázott áll. egyenlet)

– skálatv.-ek:

• $t=0$, $H=0$

$$C(q,0,0) = b^{\gamma/\nu} \cdot C(bq, 0, 0)$$

$$bq = q_0 \qquad b = \frac{q_0}{q}$$

$$C(q,0,0) = \left(\frac{q_0}{q}\right)^{\gamma/\nu} \cdot C(q_0, 0, 0)$$

mivel $C(q) \sim \frac{1}{q^{2-\eta}} \Rightarrow \boxed{2-\eta = \frac{\gamma}{\nu}}$ $\rightarrow \eta$-t def.

- $H=0,\ t\neq 0$

$$m(t,0) = b^{\gamma-\Delta} \cdot m(b\,t, 0)$$

$t<0$

$b\,t = t_0 < 0$

$b = \frac{t_0}{t}$ $\qquad m(t,0) = \left(\frac{t_0}{t}\right)^{\gamma-\Delta} \cdot m(t_0, 0) \sim |t|^{\Delta-\gamma}$

$m \sim |t|^{\beta} \Rightarrow \boxed{\beta = \Delta-\gamma}$ $\rightarrow \beta$-t definiálja

- $H\neq 0,\ t=0$

$$m(0,H) = b^{\gamma-\Delta} \cdot m(0, b^{\Delta}H)$$

$$b^{\Delta}\cdot H = H_0$$

$$m(0,H) = \left(\frac{H_0}{H}\right)^{\frac{\gamma-\Delta}{\Delta}} \cdot m(0,H_0) \sim H^{\frac{\Delta-\gamma}{\Delta}}$$

$m^{\delta} \sim H \qquad m \sim H^{1/\delta}$

$\Rightarrow \frac{1}{\delta} = \frac{\Delta-\gamma}{\Delta} = \frac{\beta}{\Delta} \qquad \boxed{\Delta = \beta\cdot\delta}$ $\rightarrow \delta$-t def.

- $C_{H=0} \sim |t|^{-\alpha}$

$$C_H = T \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_H = -T\left(\frac{\partial^2 f}{\partial T^2}\right)_H$$

$$f(t,0) = b^{\gamma - 2\Delta} \cdot f(bt, 0)$$

$bt = t_0$: $\quad f(t \neq 0) = \left(\frac{t_0}{t}\right)^{\gamma - 2\Delta} \cdot f(t_0, 0)$

$$f \sim |t|^{2\Delta - \gamma}$$

def. ~~...~~ -ből: $|t|^{2-\alpha}$

$$\boxed{2\Delta - \gamma = 2 - \alpha} \to \alpha\text{-t def.}$$

$\Rightarrow$ 3 exponensből (γ, ν, μ) kifejeztük a többit $(\eta, \beta, \delta, \alpha)$

$$\underbrace{2\Delta - 2\gamma}_{} + \gamma = 2 - \alpha$$

$$\boxed{2\beta + \gamma + \alpha = 2} \to \text{Rushbrooke-egyenlet}$$

$\downarrow$

ezért kaptunk mindig 2-t!

hasonlóan:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta = \beta\delta \\ \beta = \Delta - \gamma \end{array}\right\} \beta = \beta \cdot \delta - \gamma \quad \boxed{\gamma = \beta(\delta - 1)}$$

a skálatörvény többet mond az egyszerű illesztésnél T_c körül

— skálázott áll. egyenlet:

- $$m(t,H) = b^{\gamma-\Delta} \cdot m(bt, b^{\Delta}H) = b^{-\beta} \cdot m(bt, b^{\Delta}H)$$

$$bt = \pm t_0 \quad (t_0 > 0) \qquad b = \left|\frac{t_0}{t}\right|$$

$$m(t,H) = \left|\frac{t}{t_0}\right|^{\beta} \cdot \underbrace{m\left(\pm t_0, \left|\frac{t_0}{t}\right|^{\Delta} \cdot H\right)}$$

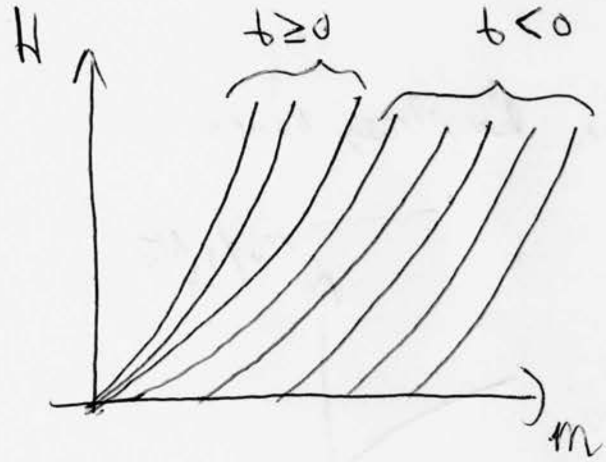
egyváltozós fv., mert $\pm t_0$ rögzített

$(\beta = \Delta - \gamma \Rightarrow \Delta = \beta + \gamma)$

$$\boxed{\frac{m}{|t|^{\beta}} = \mathcal{F}_{\pm}\left(\frac{H}{|t|^{\Delta}}\right)}$$

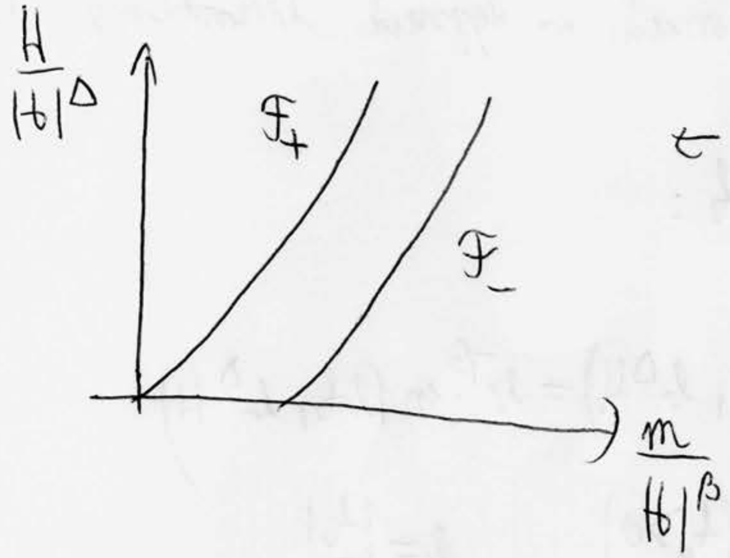
$\pm \rightarrow$ a krit. pont alatt és felett más $\mathcal{F}$ fv.-t kapok

áll. egyenlet 1 változós fv. segítségével leírható



2 féle izoterma sereg: az egyik az origóba megy, a másik véges m-nél ér véget

hőm. függő átskálázás



← összeesnek az izotermák, 2 "tipikus" izoterma marad

- másik fajta skálázás:

$$b^\Delta H = H_0 \qquad b = \left(\frac{H_0}{H}\right)^{1/\Delta}$$

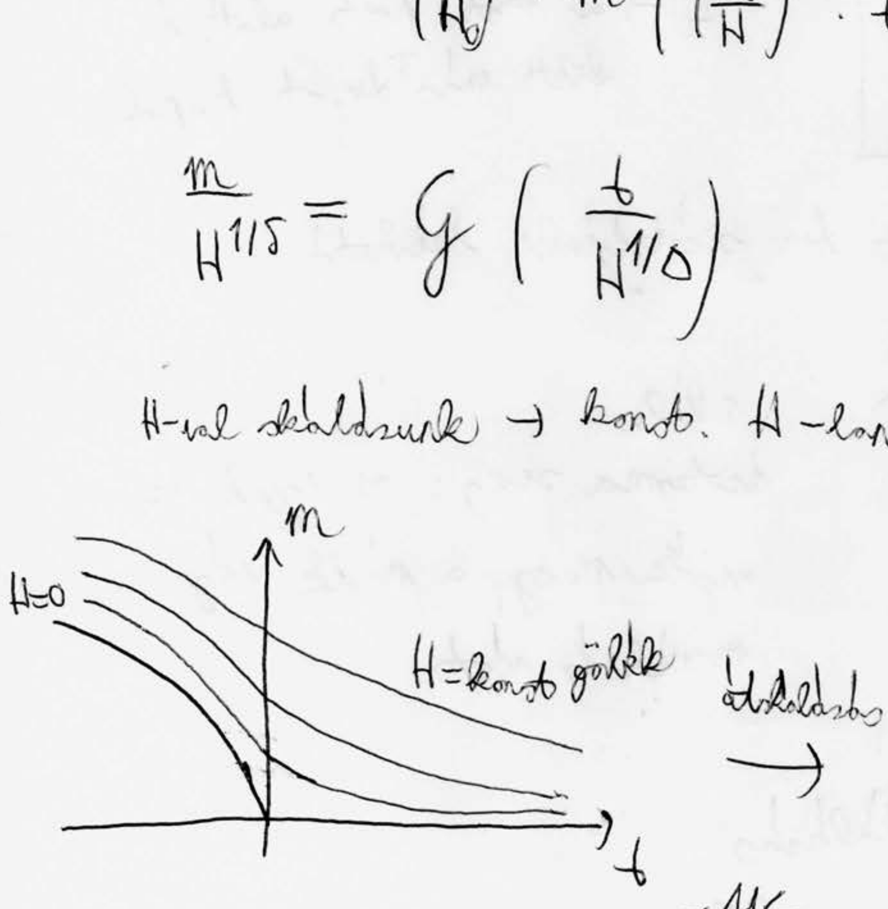
$$\beta \cdot \delta = \Delta$$

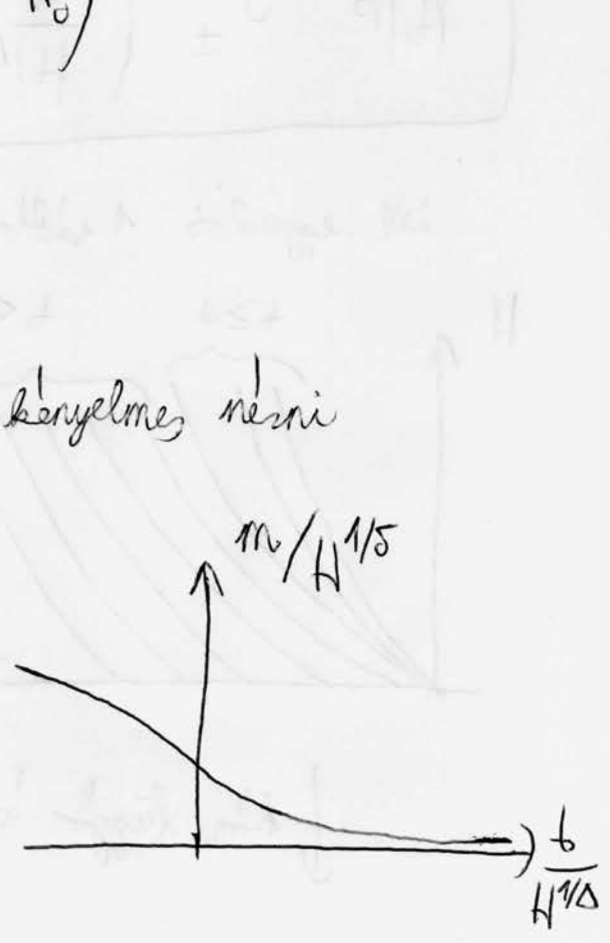
$$m(t,H) = \left(\frac{H_0}{H}\right)^{-\frac{\beta}{\Delta}} \cdot m\left(\left(\frac{H_0}{H}\right)^{1/\Delta} \cdot t,\ H_0\right) =$$

$$= \left(\frac{H}{H_0}\right)^{1/\delta} \cdot m\left(\left(\frac{H_0}{H}\right)^{1/\Delta} \cdot t,\ H_0\right)$$

$$\frac{m}{H^{1/\delta}} = \mathcal{G}\left(\frac{t}{H^{1/\Delta}}\right)$$

H-val skálázunk → konst. H-ban kényelmes nézni





- $b^{\beta} \cdot m(t, H) = m(bt, b^{\Delta} H)$

$$b^{\beta} \cdot m = m_0$$

$$b = \left(\frac{m_0}{m}\right)^{1/\beta}$$

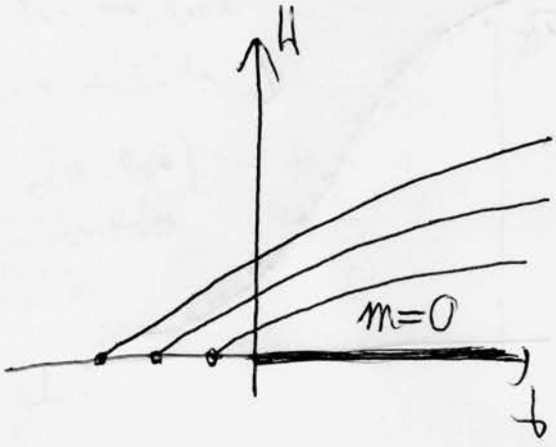
$$m_0 = m\left(\left(\frac{m_0}{m}\right)^{1/\beta} \cdot t,\ \left(\frac{m_0}{m}\right)^{\Delta/\beta} \cdot H\right)$$

$$\frac{\Delta}{\beta} = \delta$$

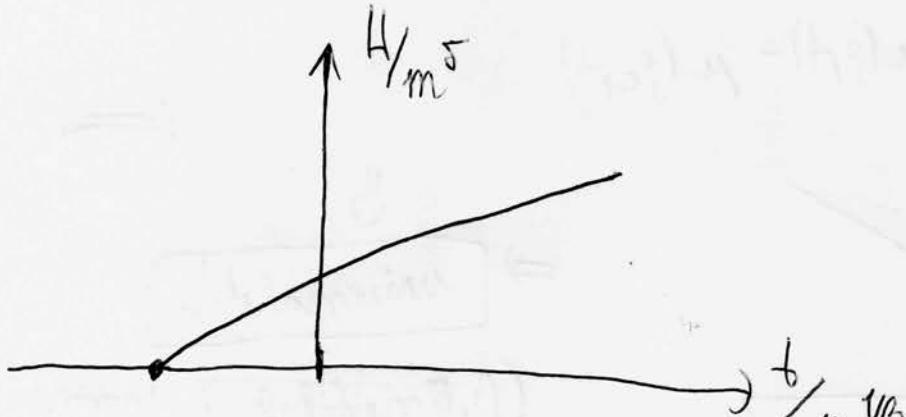
$\Leftarrow m_0 = \text{fix} \Rightarrow$ a 2 vált. m-ben egymás fv.-e

$$\frac{H}{m^{\delta}} = h\left(\frac{t}{m^{1/\beta}}\right)$$

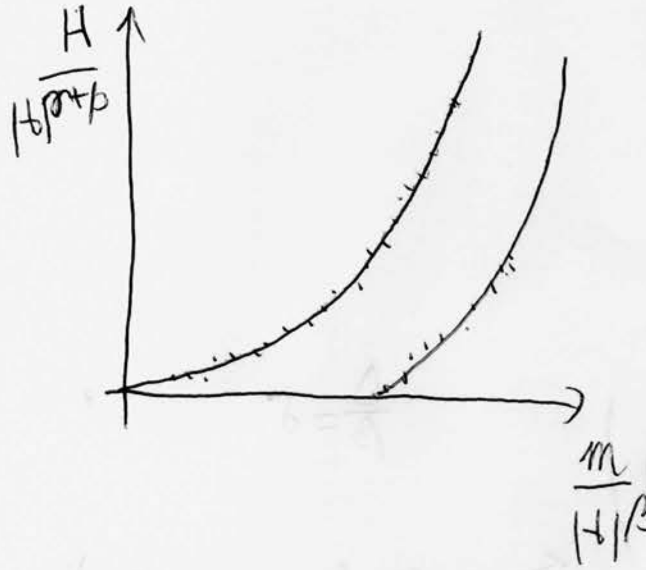
fv.



skálázás



pl.: • $CrBr_3$



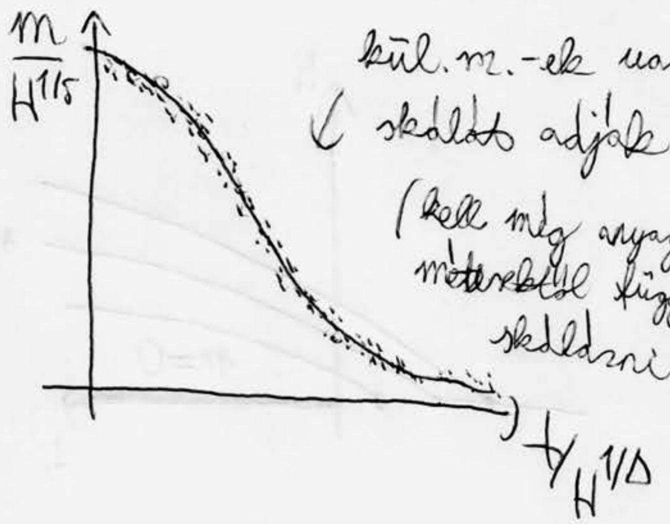
szépen össze lehet skálázni az izotermákat

$\Downarrow$

illesztési paraméter: γ, β

• $CrBr_3$, EuO, Ni, Pd_3Fe, ~~YIG~~ YIG ($Y_3Fe_5O_{12}$)

$$\frac{m}{H^{1/\delta}} = G\left(\frac{t}{H^{1/\Delta}}\right)$$

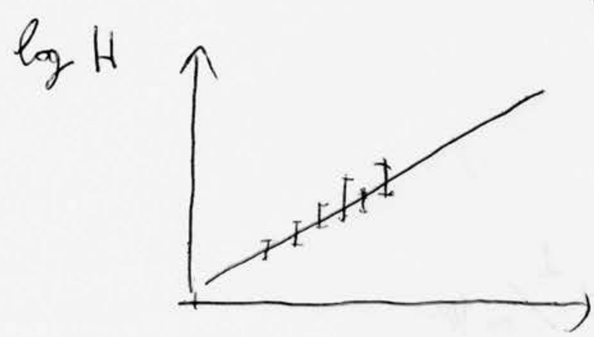


kül. m.-ek uazt. a skálát adják!

(kell még anyagi paraméterektől függően is skálázni, de ez már nem függ a ~~tértől~~)

• CO_2: $m \leftrightarrow \rho - \rho_c$

$$H \leftrightarrow \mu(\rho, t) - \mu(\rho_c, t)$$



$\Downarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{univerzalitás}}$

(β, ~~γ~~ értékek is nagyon hasonlóak) skálázás, univerzalitás

$\downarrow$

jól illeszkedik a mérésekhez és a

magas hőm. sorfejtéshez

$\downarrow$

miből ~~(mi az oka?)~~ következik a skálázás és az univer.? → l. köv. óra

3) extra skálatv.:

$$\frac{\overline{\Delta M^2}}{\overline{M}^2} = \frac{k_B T \chi}{m^2 V}$$

Landau-elm.: $\frac{\overline{\Delta M^2}}{\overline{M}^2} \ll 1 \qquad \xi^d < V$

Ginzburg-krit.: Landau-elm. nem konzekvens, ha $d<4$

(kis: $d<3$

$V = \xi^d \quad \frac{\overline{\Delta M^2}}{\overline{M}^2}$ nagy, de ha $V \to \infty$, akkor 0-hoz tart

$\Downarrow$

van egy R méret, ahol $\frac{k_B T \cdot \chi}{m^2 R^d} \sim O(1)$

emiatt nem jó a Landau-elm.)

R: új karakt. ~~mara~~ hosszúság

$\rightarrow$ feltétel: csak 1 kar. –"– van! $\Rightarrow$ $\boxed{R \sim \xi}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{k_B T \cdot \chi}{m^2 \cdot \xi^d} \sim O(1) \\ \dfrac{k_B T \chi}{m^2 \xi^2} \underset{0}{\overset{T}{\downarrow}} |t|^{-\gamma - 2\beta + d \cdot \nu} \end{array}\right\} \rightarrow \text{csak akkor lehet véges, ha } \cancel{\text{csak akk}} \ \boxed{d\nu = \gamma + 2\beta}$$

hiperskála-törvény

$\Rightarrow$ vagy nincs baj a Landau-elm.-el,

vagy ha a Landau-elm. csöböt mond, ez

lesz igaz

$\downarrow$

hiperskála tv.

- Landau-elméletre nem igaz $d < 4 - \varepsilon$, mert

$$d \cdot \frac{1}{2} = 1 + 1$$

- nem következik az ált. homogén fv.-ekből

$\gamma + 2\beta = 2\alpha \Rightarrow \boxed{d \cdot \nu = 2 - \alpha}$

XII. 3.

11. óra
Renormálás

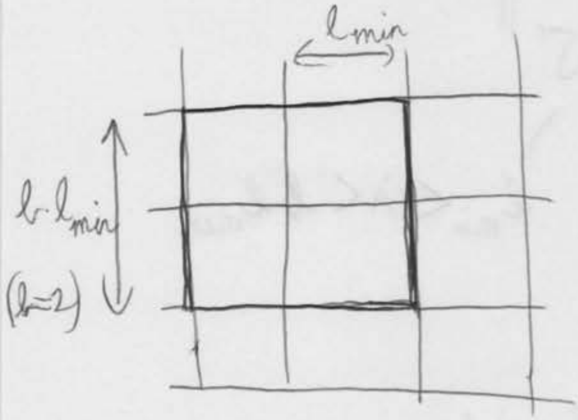
(léptékváltás: pl. ~~a~~ atommag (töltés, spin, tömeg, ...) → atom (tömeg, ...) → ...

a kisebb rsz.-nek csak néhány paramétere éli túl a léptékváltást)

"coarse graining":
minimális ~~(l_{min})~~ hossz : l_{min}

$\lambda < l_{min}$ – kiátlagoljuk

$\lambda > l_{min}$ – figyelembe vesszük



szab. fokok száma $\sim N$ (blokkok száma)

1) renormálási csoport transzf. : l_{min} növelése

- 1. lépés: $l_{min} \to b \cdot l_{min}$
  $(b > 1)$

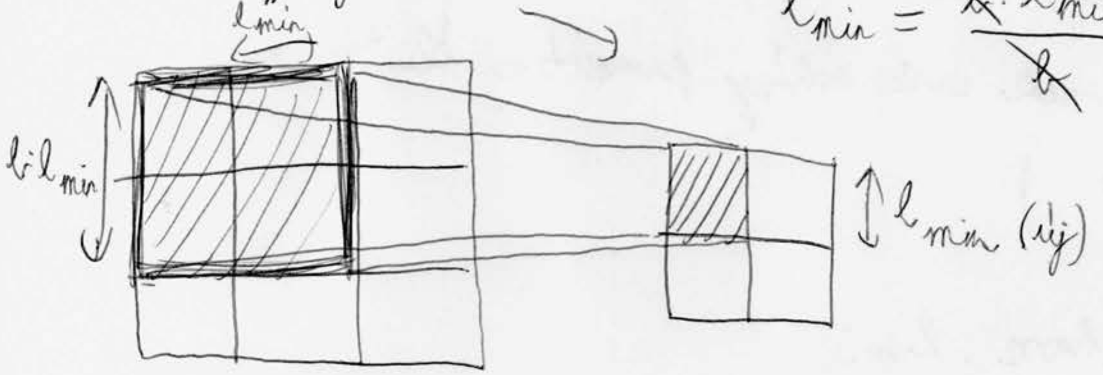
átlagoljuk az ~~...~~ $l_{min} < \lambda < b\, l_{min}$ szab. fokokra

szab. fokok száma $N' = \frac{N}{b^d}$

• 2. lépés : hosszúság átskálázása

$$x' = \frac{x}{b}$$ (rendszert "összezsugorítom")

⇓ új rsz.



$$l'_{min} = \frac{\cancel{b} \cdot l_{min}}{\cancel{b}}$$

1. lépés (ez az, ami nem triviális)

S fázis tér → $S = S' + S''$

P eloszlás fv.

$\lambda > b l_{min}$ $l_{min} < \lambda < b l_{min}$

⇓ átlagolás

↑ szab. fokok

S' új fázis tér

P' új eloszlás fv.

(analógia:

$$P'(x) = \int P(x,y)\,dy$$

↑ y-ra kiint.
)

$$\Rightarrow P' = \sum_{S''} P$$

"ügyes" transzformáció:

! $\boxed{S' \approx S}$ (pl. Ising-spinekből → Ising-spinek, de közben a szab. fokok száma csökkenhet)

$P \sim e^{-\mathcal{H}}$

$\boxed{\mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{H}'}$ → ha ügyes a trafó, akkor a $\mathcal{H}$-t transzformálja ha még ügyesebbek vagyunk

$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\underline{K})$ $\qquad$ $\underline{K}$: paraméterek

$\mathcal{H}' = \mathcal{H}(\underline{K}')$

RG transzformáció: $\boxed{\underline{K} \Rightarrow \underline{K}'}$

↑

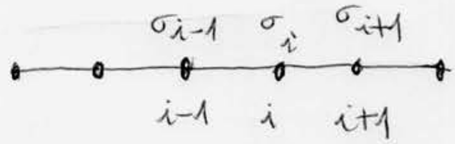
renormálási csoport

ha nagyon ügyesek vagyunk, a trafó csak a paramétereket változtatja úgy, hogy a fázistér megfelelően változzon (kiátlagolódjon)

2) Példák:

a) 1. lépés: valós térben

1d Ising-modell



$$P = \frac{1}{Z} e^{K \sum_i \sigma_i \sigma_{i+1}} \qquad K = \frac{J}{k_B T}$$

összegzés ∀ 2. spinre

$$\sum_{\sigma_i = \pm 1} e^{K(\sigma_{i-1}\sigma_i + \sigma_i \sigma_{i+1})} = e^{K(\sigma_{i-1} + \sigma_{i+1})} + e^{-K(\sigma_{i-1} + \sigma_{i+1})} =$$

$$= \begin{cases} 2\,\mathrm{ch}K, & \sigma_{i-1}\sigma_{i+1} = 1 \\ 2, & \sigma_{i-1}\cdot\sigma_{i+1} = -1 \end{cases} = \begin{cases} e^{\ln 2 + \ln \mathrm{ch} K} \\ e^{\ln 2} \end{cases} = e^{\ln 2 + \ln \mathrm{ch}K \left(\frac{1 + \sigma_{i-1}\sigma_{i+1}}{2}\right)} = ⊛$$

az új eloszlásfv. csak attól függ, hogy ellentétesen vagy ||-an állnak a spinek

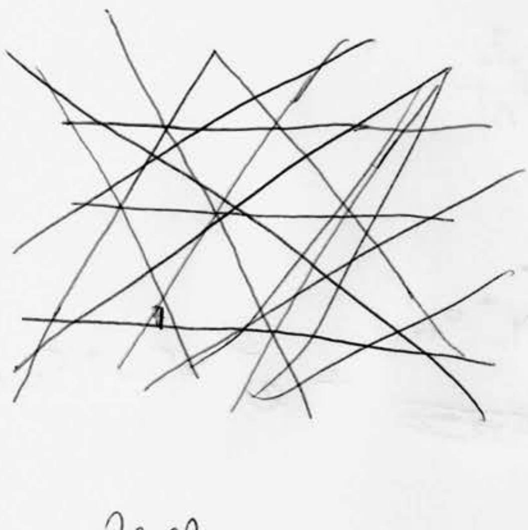
DE ilyen volt a régi is!

$$\textcircled{*} = e^{\ln 2 + \frac{1}{2}\ln \mathrm{ch} K} \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}\ln \mathrm{ch} K \cdot \sigma_{i-1}\sigma_{i+1}}}_{e^{K'\sigma_{i-1}\sigma_{i+1}}}$$

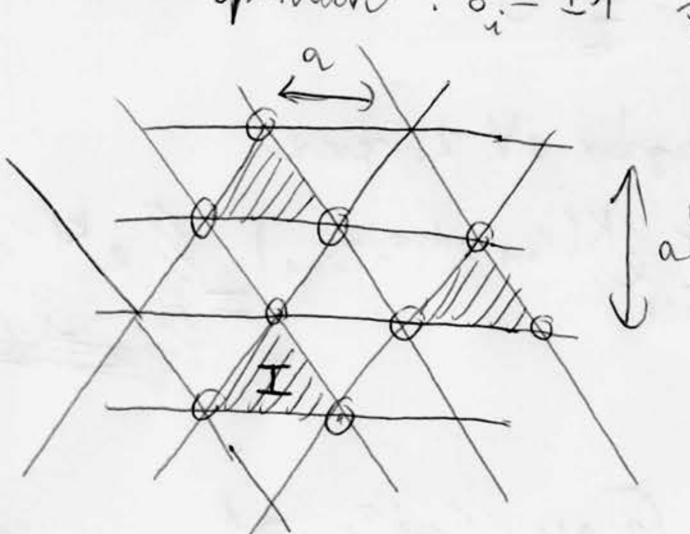
↙

sikerült olyan formára átírni, hogy csak a paraméter ~~változzon~~ változzon (ami most a szomszédos spinek kh.-t írja le)

2d Ising-modell, △ rács



i. rácspontban: $\sigma_i = \pm 1$ spin



I : blokk

$a' = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \sqrt{3} a$

$\Rightarrow b = \sqrt{3}$

blokk spin: $S_I = \mathrm{sign}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$

= többségi szabály ↗

↓ mis

8 állapotból csinálom 2 blokkállapotot $\Leftarrow$ $S=1 \left\{ \begin{matrix} \uparrow\uparrow\uparrow & \downarrow\downarrow\downarrow \\ \uparrow\uparrow\downarrow & \downarrow\downarrow\uparrow \\ \uparrow\downarrow\uparrow & \downarrow\uparrow\downarrow \\ \downarrow\uparrow\uparrow & \uparrow\downarrow\downarrow \end{matrix} \right\} S=-1$

→ úgy átlagolok ki, hogy az új fázistér a blokkállapotokból épüljön fel.

...

b) <u>transzformáció hullámszámtérben</u>

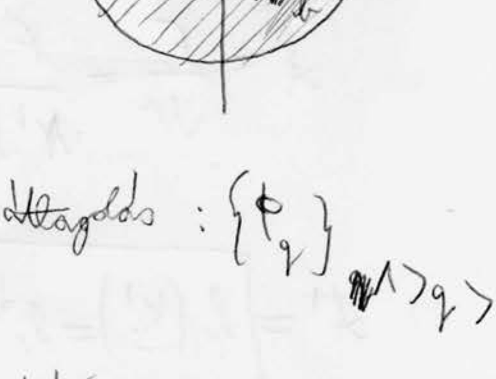
folytonos mező: $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_q e^{-iqx} \phi_q$

fázistér $\{\phi_q\}$

min. hossz. levágás: $|q| < \Lambda$

$l_{min} \sim \frac{1}{\Lambda}$

$b \cdot l_{min} \sim \frac{b}{\Lambda}$

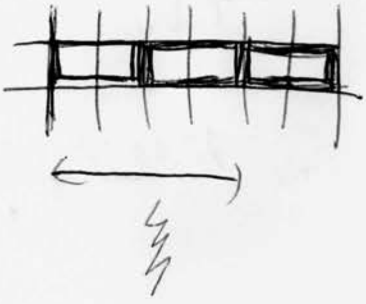


átlagolás: $\{\phi_q\}_{\Lambda > q > \Lambda/b}$

meghat. levágásnál kisebb Fourier komponensek alkotják az új fázisteret, ami hasonló szerk., mint a régi $\leftarrow$ $\phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\substack{q \\ (q<\Lambda/b)}} e^{iqx} \phi_q$

3) <u>Mi történik a transzf. után?</u> (a transzf. laza definíciójaként is kezelhető)

a) <u>ξ korrelációs hossz:</u>



1. lépés: a korr. hossz nem változik (azok a blokkok, melyek távolsága ξ-nél nagyobb, ~~távolabbra is fognak~~)

2. lépés: $\xi' = \frac{\xi}{b}$

$$\xi = \xi(\underline{k})$$

$$\xi' = \frac{1}{b}\xi(\underline{K}) \qquad \xi' = \xi(\underline{K}')$$

$$\boxed{\xi(\underline{K}') = \frac{1}{b}\xi(\underline{K})}$$

b) <u>egy blokk szabadenergiája</u> → ezt nem 1 blokkra átlagolásból kapjuk, hanem a teljes sz. szabadenergiájából

$$f = \frac{F}{N} = \frac{F}{N' b^d} = \frac{f'}{b^d}$$

(f': tr. után 1 blokkra jutó szabaden.)

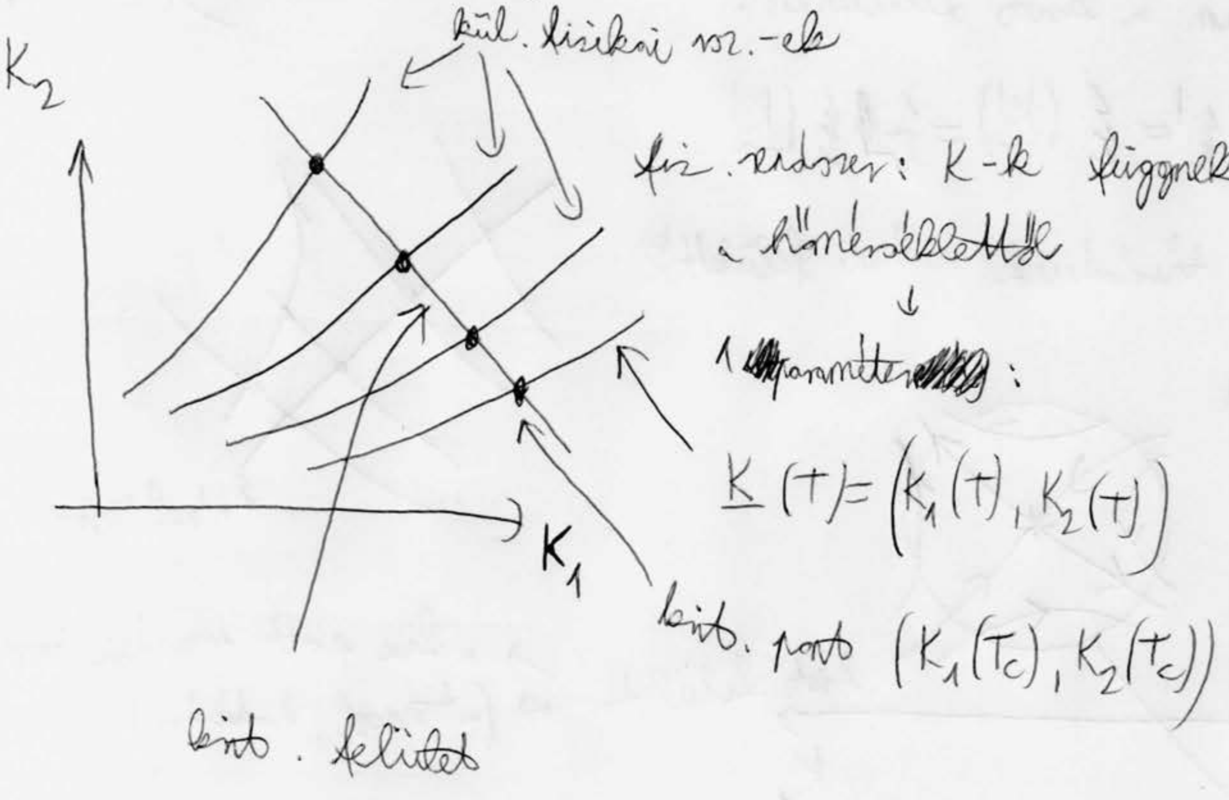
↑ változik a blokkok száma

$$f' = \boxed{f(\underline{K}') = b^d \cdot f(\underline{K})}$$

→ Mire lehet ezt használni? Ha kritikus rs.-t rendszert írunk le vele, értékes információkat nyerhetünk a módszerrel.

4) <u>kritikus viselkedés:</u>

paraméter tér: $\underline{K} = (K_1, K_2)$



a) krit. állapotban (krit. felületen): $\xi = \infty$

- $\underline{K}$ a krit. felületen:

$$\infty = \xi(\underline{K}) = b \cdot \xi'(\underline{K}') \quad \Rightarrow K' \text{ is a krit felületen van}$$

⇒ krit. felület <u>invariáns halmaz</u>

- sok transzform. → iterálás

legegyszerűbb ~~kimenetel~~ viselkedés: fix pontba futunk be

(más lehetőségnél bajba vagyunk)

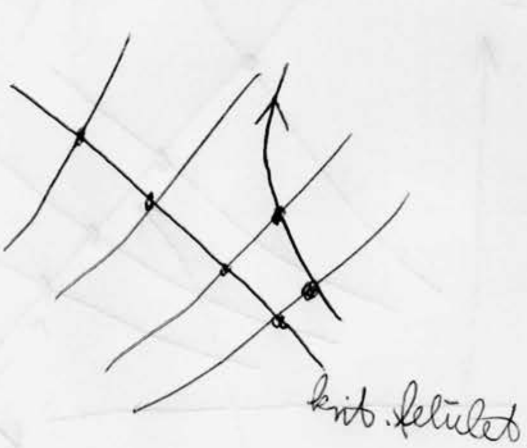
iterálás: $\underline{K} \to \underline{K}_1 \to \underline{K}_2 \to \ldots \to \underline{K}_n$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} K_n = K^*} \quad \text{(fix pont)}$$

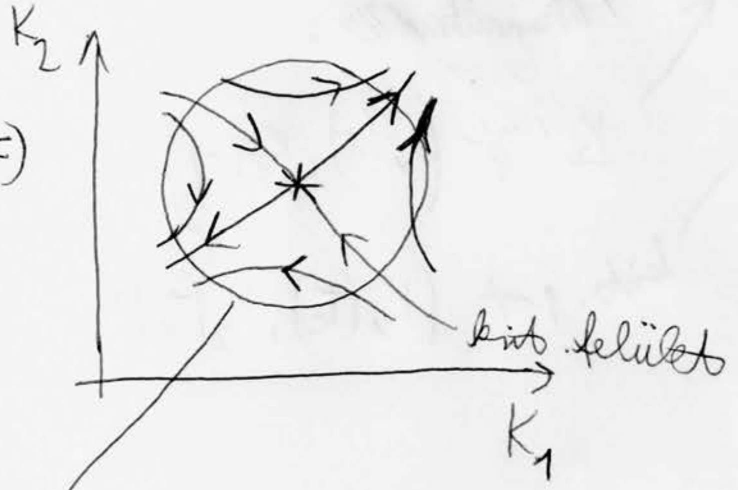
b) nem a krit felületen:

$$\xi' = \xi(\underline{K}') = \frac{1}{b}\,\xi(\underline{K})$$

távolodunk a krit felülettől



$\Rightarrow$



→ a fix pont vonzási tart.-a (a transzf. hatására)

(a fix pont létezéséből következik ez az ábra)

c) $\underline{\text{linearizált transzf.}}$: tfh. a fix pont közelében a nemlin. trafónkat (RG trafó) linearizálhatjuk

RG: $\underline{K} \to \underline{K}'$

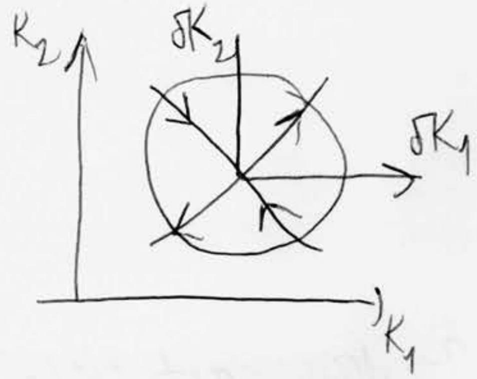
$K_1' = F_1(K_1, K_2)$

$K_2' = F_2(K_1, K_2)$

fix pont: RG: $\underline{K}^* \to \underline{K}^*$ (láttuk)

$\delta K_1 = K_1 - K_1^*$

$\delta K_2 = K_2 - K_2^*$



$$K_1' = K^* + \delta K_1' \overset{\text{akkor}}{=} F_1\left(K^* + \delta K_1\,,\; K^* + \delta K_2\right) =$$

$$= \underbrace{F_1\left(K^*, K^*\right)}_{K^*} + \left.\frac{\partial F_1}{\partial K_1}\right|_* \delta K_1 + \left.\frac{\partial F_1}{\partial K_2}\right|_* \cdot \delta K_2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \delta K_1' \\ \delta K_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial F_1}{\partial K_1}\right|_* & \left.\frac{\partial F_1}{\partial K_2}\right|_* \\ \left.\frac{\partial F_2}{\partial K_1}\right|_* & \left.\frac{\partial F_2}{\partial K_2}\right|_* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta K_1 \\ \delta K_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\delta \underline{K}' = \underline{\underline{L}} \cdot \delta \underline{K}}$$ linearizált ✓

• jobb oldali sajátvektorok : $\underline{e}_1, \underline{e}_2$

$\underline{\underline{L}}\,\underline{e}_1 = \lambda_1 \underline{e}_1$ $\qquad$ $\underline{\underline{L}}\,\underline{e}_2 = \lambda_2 \underline{e}_2$

• a krit. felület érintője K^*-ban : sajátirány

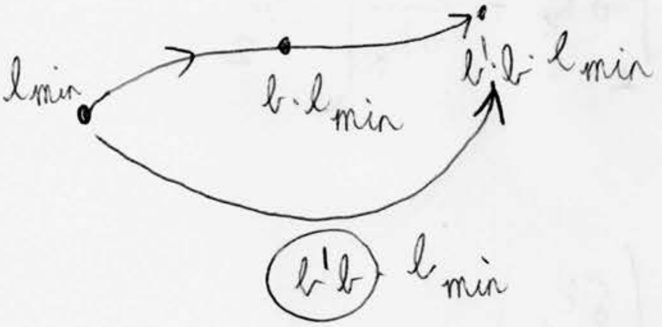
$\Rightarrow$ $\underline{e}_2$ a krit. felületben, vonzó irány : $\lambda_2 < 1$

• $\underline{e}_1$ kilóg a krit. felülettől

taszító irány $\Rightarrow \lambda_1 > 1$

renormálási csoport → van csoporttal.? Nincs, mert nincs inverze (megszabadulunk szab. fokoktól)

! DE félcsoport tul. van: szorzás



$\Rightarrow$ b értékével nem változik a sajátvektor, ~~...~~ csak λ s. érték

$$\lambda_2(b')\,\lambda_2(b) = \lambda_2(b'b)$$

$\Rightarrow \lambda_2 = b^{y_2} < 1$ $\boxed{y_2 < 0}$ irreleváns ~~...~~ irányok / változók

hasonlóan: $\lambda_1 = b^{y_1} > 1$ $\boxed{y_1 > 0}$ releváns irány / változó

(3d → 3 paraméter → 3 kitevő: $y_2, y_3 < 0$ → benne vannak ~~...~~ krit. felületben
$y_1 > 0$ → kimutat a krit. felülettől)

$\underline{e}_1, \underline{e}_2$ bázisán:

$$\delta \underline{K} = \begin{pmatrix} \delta K_1 \\ \delta K_2 \end{pmatrix} = t_1 \underline{e}_1 + t_2 \underline{e}_2$$

$$\delta K' = \underline{\underline{L}} \left(t_1 \underline{e}_1 + t_2 \underline{e}_2 \right) = t_1 b^{y_1} \underline{e}_1 + t_2 b^{y_2} \underline{e}_2$$

$$\begin{pmatrix} t_1' \\ t_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^{y_1} t_1 \\ b^{y_2} t_2 \end{pmatrix}$$

mivel:

- $b \cdot \xi(\underline{K}') = \xi(\underline{K})$

$$b\, \xi(t_1', t_2') = \xi(t_1, t_2)$$

$$\boxed{b \cdot \xi\left(b^{y_1} t_1, b^{y_2} t_2\right) = \xi(t_1, t_2)}$$

$\Rightarrow$ a linearizált tart. ban ξ korr. hossz a t_1, t_2 változók

$\boxed{\text{általánosított homogén fv.-e}}$!!!

- $f(\underline{K}') = b^{d} f(\underline{K})$

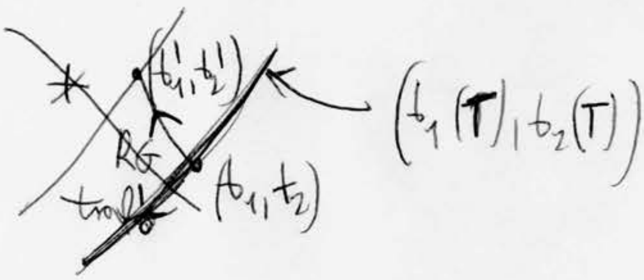
$$b^{-d} f(t_1', t_2') = f(t_1, t_2)$$

$$\boxed{b^{-d} f\left(b^{y_1} t_1, b^{y_2} t_2\right) = f(t_1, t_2)}$$

$\rightarrow$ f is ált. homogén fv. !

megjegyzés:

ez nem az a ~~trafó~~, amit mi korábban definiáltunk, mert a skálázást 1 fizikai vz.-re értelmeztük, ez pedig ~~kint~~ átvisz más fiz. vz.-re, ún.



$\rightarrow t_1', t_2'$ más vz. paramétere

DE ha tudjuk, hogyan vált. t_1 és t_2'', akkor ez nem baj $\leftarrow$ át tudjuk írni t_1', t_2'-t t_1, t_2-re

~~kint. pontban~~

— fiz. vz.:

$$\xi\left(t_1(T), t_2(T)\right)$$

kint. pontban: $t_1(T)$ előjelet vált. paraméter ~~(...)~~

$$t_1(T_c) = 0$$

$$t_1(T) = a(T - T_c) \sim t$$

$$\Rightarrow t_1(T) = \text{redukált. hőm.}$$

$$t_2(T) \rightarrow \underline{t_2(T_c)}$$ (ált. véges érték)

(a fiz. vz.-t $t_1(T_c), t_2(T_c)$ definiálja)

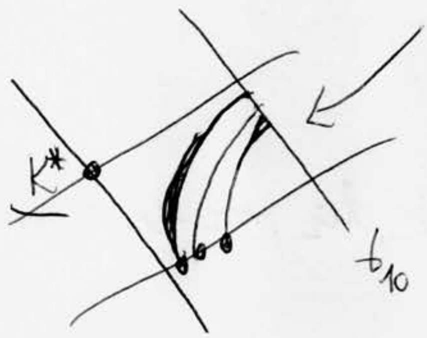
$$\xi\left(t_1(\tau), t_2(\tau)\right) = b\,\xi\left(b^{y_1} t_1(\tau), b^{y_2} t_2(\tau)\right)$$

b megválasztása: $b^{y_1} t_1(\tau) = \pm t_{10}$ $(t_{10} > 0)$

($\forall$ b-re igaz lesz az integrálás mértéke → csak a szakasztól függ)

mindig úgy választom meg b-t,

hogy t_1 paraméter t_{10}-la menjen → egyre nagyobb b kell



$$\Rightarrow b := \left(\frac{\pm t_{10}}{t_1(\tau)}\right)^{1/y_1} = \left|\frac{t_{10}}{t_1(\tau)}\right|^{1/y_1}$$

$$\Downarrow$$

$$\xi\left(t_1(\tau), t_2(\tau)\right) = \left|\frac{t_{10}}{t_1(\tau)}\right|^{1/y_1} \cdot \xi\left(\pm t_{10}, \underbrace{\left|\frac{t_{10}}{t_1(\tau)}\right|^{y_2/y_2}}_{} \cdot t_2(\tau)\right)$$

$y_2 < 0$, $y_1 > 0$ $\quad \left|\frac{t_1(\tau)}{t_{10}}\right|^{-y_2/y_1}$ $\quad t_1(\tau) \to 0$, $\downarrow$ 0

asszimptotikus viselkedésben:

$t_1(\tau) \to 0$

$$\xi\left(t_1(\tau), t_2(\tau)\right) \simeq \left|\frac{t_{10}}{t_1(\tau)}\right|^{1/y_1} \cdot \xi(\pm t_0, 0)$$

$\xi \sim |t_1(T)|^{-1/y_1}$

def. szerint: $\xi \sim |t|^{-\nu}$ $\Bigg\}$ $\boxed{\nu = \frac{1}{y_1}}$

- RG ~~trafó~~ $\Big\}$ $\rightarrow$ ξ hatványfv. lesz, és a kitevőt ~~az exponens~~
- van krit. pont
 is meg lehet hat. a transzf. sajátértékeiből

- univerzalitás: t_2 hat. meg, melyik fiz. rsz.-en vagyunk

DE ν ettől nem függ

fontos feltétel:

$\xi(\dots, 0)$ <u>véges</u>, egyébként a krit. vis. -vel nem lesz hatványvis.

12. óra
Renormalizációs csop. (folyt.)

1) a) korr. hossz:

$$\xi(t_1, t_2) = b\,\xi(b^{y_1} t_1, b^{y_2} t_2) \qquad t_1(T), t_2(T)$$

és $\xi \sim |t|^{-\nu} \rightarrow \boxed{\nu = \frac{1}{y_1}}$

b) szabadenergia:

$$f(t_1, t_2) = b^{-d} f(b^{y_1} t_1, b^{y_2} t_2)$$

$$b^{y_1} t_1(T) := \pm t_0$$

$$b = \left|\frac{t_0}{t_1(T)}\right|^{1/y_1}$$

$\Downarrow$

$$f(t_1, t_2) = \left|\frac{t_1(T)}{t_0}\right|^{d/y_1} \cdot f\Big(\pm t_0, \underbrace{\left|\frac{t_0}{t_1(T)}\right|^{y_2/y_1} \cdot t_2(T)}_{\rightarrow 0}\Big) \sim \left|\frac{t_1(T)}{t_0}\right|^{\frac{d}{y_1}}$$

a krit. hőm. hez közelítve $(t_1(T) \rightarrow 0)$, $y_2/y_1 < 0$

és $f \sim |t|^{2-\alpha}$

$$\Rightarrow \frac{d}{y_1} = 2 - \alpha \Rightarrow \boxed{d \cdot \nu = 2 - \alpha}$$

hiperskálatv.

c) mágneses teret is figy. véve:

az új sajátvektor $\perp$ a felületre, $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ síkjára

$\underline{e}_H$ → mágneses térerősséggel kapcsolatos sajátvektor

→ tasztott irány

sajátérték : $\lambda_H = b^{y_H}$

$y_H > 0$

$$f(t_1, t_2, H) = b^{-d} \cdot f\left(b^{y_1} t_1, b^{y_2} t_2, b^{y_H} H\right)$$

$t_1(T), t_2(T)$

$$f(t_1(T), t_2(T), H) = \left|\frac{t_1(T)}{t_0}\right|^{d/y_1} \cdot f\left(\pm t_0, \underbrace{\left|\frac{t_0}{t_1(T)}\right|^{\overset{<0}{y_2/y_1}} \cdot t_2(T)}_{\to 0}, \underbrace{\left|\frac{t_0}{t_1(T)}\right|^{\overset{>0}{y_H/y_1}} \cdot H}_{\to \infty}\right)$$

$T \to T_c$

$b^{y_1} t_1(T) = \pm t_0$

$$\frac{y_H}{y_1} \equiv \Delta \qquad \frac{d}{y_1} = d\nu = 2-\alpha \quad \text{(láttuk)}$$

$$f(t_1(T), t_2(T), H) = \left|\frac{t_1(T)}{t_0}\right|^{2-\alpha} \cdot F_{\pm}\left(\frac{H}{\left|\frac{t_1(T)}{t_0}\right|^{\Delta}}\right)$$

↳ ugyanezt kaptuk a skálatv.-ből: ✓

$$f(t, H) = |t|^{2-\alpha} \cdot F\left(\frac{H}{|t|^{\Delta}}\right)$$

$$\Delta = \frac{\nu}{\mu} = \frac{y_H}{y_1} \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{1}{y_H}}$$

$\Rightarrow$ a renormalizációs csoport sajátirányainak

~~...~~ kitevőiből megkaptuk a μ, ν krit. exponenst

(krit. exponens értelmes, mert igaz a hiperskála tv.

és is kijön a renorm.-ből)

d) $$\xi(t_1, t_2, H) = b \cdot \xi(b^{y_1} t_1, b^{y_2} t_2, b^{y_H} H)$$

$t_1(T) = 0 \quad (T = T_c)$

$t_2(T_c)$

$$\left.\begin{array}{l} b^{y_H} \cdot H = H_0 \\ b = \left(\frac{H_0}{H}\right)^{y_H} \end{array}\right\} \Rightarrow \xi(t_1(T_c), t_2(T_c), H) = \left(\frac{H_0}{H}\right)^{1/y_H} \cdot \xi\Big(0, \underbrace{\left(\frac{H_0}{H}\right)^{\overbrace{y_2}^{<0}/y_H}}_{\to 0\ (H \to 0)} \cdot t_2(T_c), H_0\Big)$$

$$\Downarrow$$

$$\xi \sim H^{-1/y_H}$$

és $\xi \sim H^{-\mu}$

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{y_H}$$

$\Longrightarrow$ fix pont $\exists$-ből következik a skálázás (T, H-ra most láttuk) és az univerzalitás (t_2 értéke kiesik $\to$ nem függ a fix. pz.-tól a skálatv.)

2] ~~///~~ <u>Nemlineáris skálatérek</u>

(Meddig érvényes a skálázás és az univerzalitás?)

↳ ha léteznek ~, ki tudom terj. az érvényességi kört

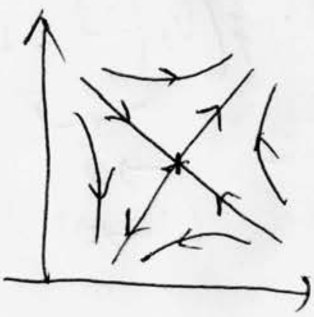
tfh. ∃ ~~[illegible]~~

$$g_1(\underline{K}') = b^{y_1} \cdot g_1(\underline{K})$$
$$g_2(\underline{K}') = b^{y_2} \cdot g_2(\underline{K})$$

} nemlin. skálatérek

<u>fixpont</u>: $g_1(\underline{K}^*) = b^{y_1} g_1(\underline{K}^*) \Rightarrow g_1(\underline{K}^*) = 0$

$g_2(\underline{K}^*) = b^{y_2} g_2(\underline{K}^*) \Rightarrow g_2(\underline{K}^*) = 0$



ha $y_2 < 0$ $y_1 > 0$

↙

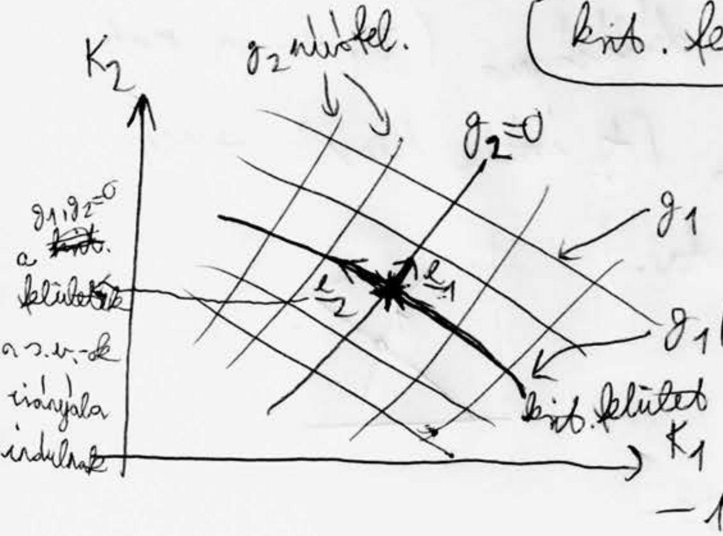
g_1 elviszi a krit. ponttól

⇒ csak úgy viheti a fix pontba a transzf.,

ha $g_1(K) = 0$

⇓

$\boxed{\text{krit. felületen } g_1(\underline{K}) = 0}$



⇒ g_1, g_2-vel is tudom jellemezni a paraméterteret (K_1, K_2 helyett) ilyenkor:

$$\xi(g_1, g_2) = b\,\xi(g_1', g_2') = b\,\xi(b^{y_1} g_1, b^{y_2} g_2)$$

a teljes paramétertérben igaz

fiz. rendszer: $g_1(T), g_2(T)$

$g_1(T)$ előjelet vált T_c-nél

$g_1(T) \sim t$ (redukált hőm.)

$\boxed{\Rightarrow \text{ ilyenkor ugyanazt el tudjuk játszani, mint a } t_1, t_2 \text{ terekre, de az egész par. térre, nem csak a krit. pont körny.-ben}}$

(krit. pont környezetében $g_1(T) = t_1(T)$, $g_2(T) = t_2(T)$

↳ visszakapjuk uazt.)

(g_1, g_2-t csak az adott transzf. ~~...~~ ismeretében tudjuk megadni)

3) fixpont létezése ⟺ hiperskála tv.

$d > 4$ → nem fér össze a hiperskála tv.-el ← ~~...~~ a Landau elmélet itt egzakt

↳ veszélyes irreleváns változók

$$\underbrace{\left|\frac{t_0}{t_1(T)}\right|^{y_2/y_1}}_{\to 0} \cdot t_2(T)$$

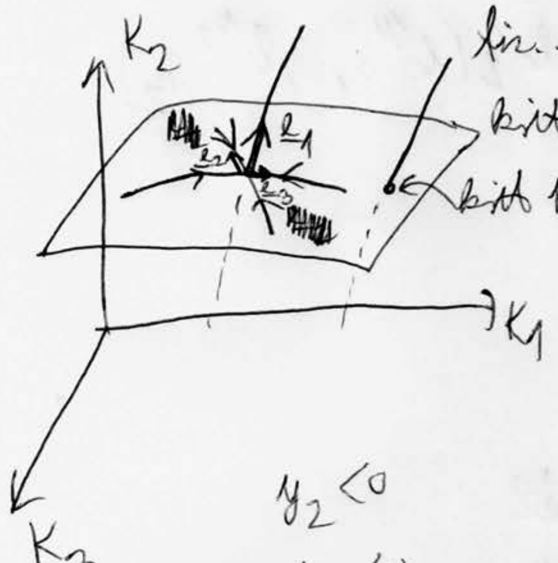
(ha véges, nincs vele baj)

ha divergál vagy → 0, módosíthatja a határviselkedést

↓

elronthatja a hiperskála tv.-t

4) crossover skálázás   legyen 3 paraméter : $\underline{K}_5(K_1, K_2, K_3)$

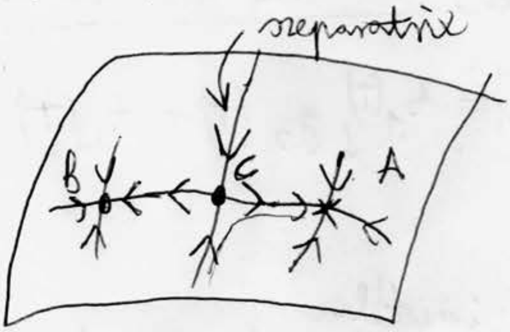


$y_2 < 0$

$y_3 < 0$

$y_1 > 0$

Mi van, ha több fix. pont van?



→ valami el kell válassza
a 2 tartományt
↓
$\boxed{\text{szeparatrix}}$

↙

ha rajta vagyunk, egyik pontba sem megyünk

⇒ ezen is van egy fix pont,

DE ennek az egyik sajátiránya taszító a krit. felületen

⇒ C egyik sajátiránya taszító : $y > 0$
releváns irány

↓

C közelében a szeparatrixtól kicsit távolabb haladva

egy ideig ~~...~~ C-hez hasonló ~~...~~ krit. viselkedést kapunk,

de végül mégis A-hoz tartunk

$\Downarrow$

nem tudunk különbséget tenni a kétfajta krit. vis.

között → "crossover" ~~...~~

↓

(csak a krit. ponthoz nagyon közel érne)

(pl. mágneses síkok → amíg a kor. hossz kicsi, a
egymástól távol spinek a síkban nem érzik a
másik síkot → 2D vis.

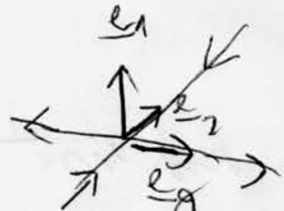
DE krit. pont közelében ξ megnő

↳ 3D viselk.)

↓

<u>különleges skálázás:</u>

legyen a rel. változó g, sajátértéke b^{y_g}, s.v.: $\underline{e}_g$



$$f(t_1, t_2, g, H) = b^{-d} \cdot f\left(b^{y_1} t_1, b^{y_2} t_2, b^{y_g} g, b^{y_H} H\right)$$

$$b^{y_1} t_1(T) := \pm t_0$$

↓

$$f(t_1, t_2, g, H) = \left|\frac{t_1(T)}{t_0}\right|^{d/y_1} \cdot f\left(\pm t_1 \underbrace{\cancel{\left|\frac{t_0}{t_1(T)}\right|^{y_2/y_1}}}_{\to 0} \cdot t_2(T),\ \left|\frac{t_0}{t_1(T)}\right|^{y_g/y_1} g(T),\ \left|\frac{t_0}{t_1(T)}\right|^{y_H/y_1} \cdot H\right)$$

$$f(t, g, H) = |t|^{2-\alpha} \cdot F\left(\frac{g}{|t|^{\phi}}, \frac{H}{|t|^{\Delta}}\right)$$

esek fel fognak nőni, ha $t_1(T) \to 0$ (mindkettő)

$\phi = y_g/y_1$ $\quad \Delta = \frac{y_H}{y_1}$ $\quad$ crossover scaling

megjelenik egy új releváns paraméter

ϕ : g paraméterhez tartozó crossover exponens

$\Rightarrow$ általában kül. univerzalitási tartományok vannak a kül. fixpontok környezetében, és ezekhez jönnek még a szeparatrixok

$\downarrow$

"multikritikus" pontok $\to$ többfajta krit. visz. találkozik

5) Hogy néznek ki a krit. viselkedést leíró fv.-ek?

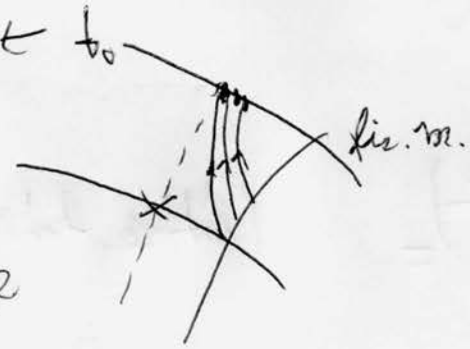
2 paraméteres eset

↓ ezután visszatranszformáljuk

ha a krit. ponttól távol vagyunk, egy alacsony rendű pert. számítás alkalmazható

⌈ igazából eddig is ennek egy formáját alkalmaztuk, amikor $\ell^{y_1} t_1(t) = \pm t_0$ -t írtuk fel

eddig megyünk el a trafóval a kül. pontokból



⌋

6) Mi a baj a renorm. csoporttal?

minél közelebb vagyunk a krit. ponthoz, annál több szabadsági fokot kéne kezelni

↳ ehelyett mi véges sok szab. fokot kezelünk, de sima trafóval a sima trafóval el tudjuk érni, hogy ↙

az egyik szab. fok $\to \infty$

DE a sima trafót legtöbbször nem ismerjük egzaktul $\to$

$\to$ közelítő módszerek kellenek

7) egzaktul megoldható probléma: (renorm. csoporttal)

1D Ising-modell

$$\sum_{S_1=\pm 1} e^{K(S_0 S_1 + S_1 S_2)} = \begin{cases} 2\,\mathrm{ch}(2K), & S_0 S_2 = 1 \quad \uparrow\uparrow \quad \downarrow\downarrow \\ 2, & S_0 S_2 = -1 \quad \uparrow\downarrow \quad \downarrow\uparrow \end{cases}$$

$$K = \frac{J}{k_B T}$$

$$= e^{\ln 2 + \ln \mathrm{ch}(2K)\cdot\left(\frac{1+S_0 S_2}{2}\right)} = \qquad \text{(láttuk korábban)}$$

$$= e^{A} \cdot e^{K' S_0 S_2}$$

$$A = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln \mathrm{ch}(2K) \to \text{(normálásba be is olvaszthatjuk)}$$

$$K' = \frac{1}{2}\ln \mathrm{ch}(2K)$$

$v \equiv \mathrm{th}\, K$ (legyen ez a transzf. paraméter)

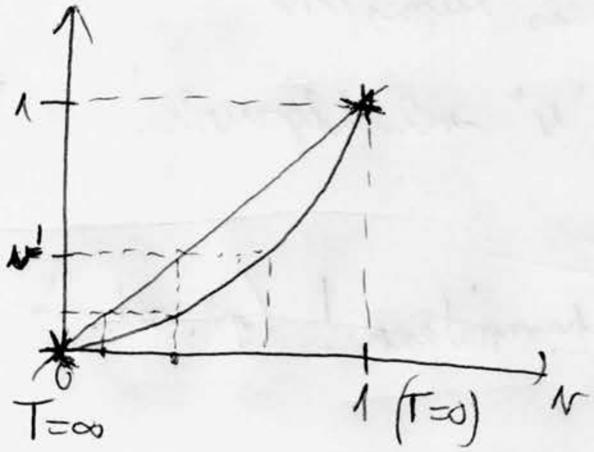
$$e^{2K'} = \mathrm{ch}(2K) = \frac{\mathrm{ch}^2 K + \mathrm{sh}^2 K}{\mathrm{ch}^2 K - \mathrm{sh}^2 K} = \frac{1+\mathrm{th}^2 K}{1-\mathrm{th}^2 K}$$

$$\text{th}^2 K = \frac{e^{2K'}-1}{e^{2K'}+1} = \text{th} K'$$

$$\Rightarrow \boxed{v^2 = v'}$$

v: transzf. előtti paraméter

v': -||- utáni -||-



fixpontok: $v^{*2} = v^*$ / $v^* = 0$ instabil fix pont

\ $v^* = 1$ $(T=0)$ stabil fix pont

⇓

lin. transzformáció $v^* = 1$ (stabil fix pont) körül:

$v = 1 - x$

$v' = 1 - x' = (1-x)^2 = 1 - 2x + \cancel{x^2}$

$x' = 2x = b^1 x$

$b = 2 \rightarrow y_1 = 1$

$$\boxed{\nu = 1}$$

ha $T \to 0$

$$\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \simeq 1-2e^{-2x}$$

$\downarrow$

nem analitikus, exponenciális függés van

$T \to 0$ körül, ha nem 'v'-vel dolgozunk!

$\Downarrow$

nem tudunk túllépni a v paraméteren! (pl. neg. hőm.-re)

$$\boxed{\xi \sim (1-v)^{-1}}$$

$\searrow$

1 olyan gráf van, amiben m,n-be páratlan számú él megy be, a többi pontba páros

$$C_{mn} = \langle \sigma_m \sigma_n \rangle = v^{|n-m|} = e^{|n-m| \ln v} \overset{\text{def. szerint}}{=} e^{-|m-n| a/\xi} \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{a}{|\ln v|}$$

~~(ha v~~

ha $v \to 1$, $\xi \to \infty$ (divergál) ✓

$\Rightarrow$ tényleg krit. pont

$\downarrow$ hogyan divergál?

$$\xi = \frac{a}{|\ln v|} \cong \frac{a}{x} = \frac{a}{1-v}$$

$$\ln v = \ln(1-x) \simeq -x$$

8) <u>Fázisátalakulások ϕ^4 modellje:</u>

$$\mathcal{H} = \int d^d x \left\{ \frac{r}{2}\phi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{u}{4}(\phi^2)^2 \right\} \qquad \phi^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} \phi_\alpha^2$$

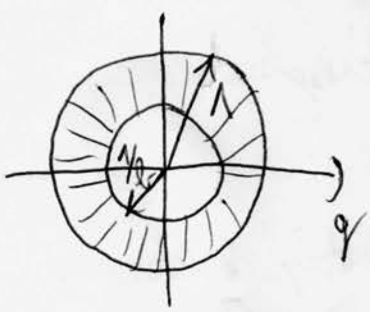
$$(\nabla\phi)^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} (\nabla\phi_\alpha)^2$$

$$P(\phi(x)) \sim e^{-\mathcal{H}} \Rightarrow \text{legval. állapot:}$$

$\swarrow$ $\mathcal{H}$ minimuma

ez lényegében a Landau elmélet,
csak $k_B T$-t beolvasztottuk, és
átskáláztuk (α helyett $\to 1$)

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{q} e^{iqx} \phi_q$$
$(q<\Lambda)$



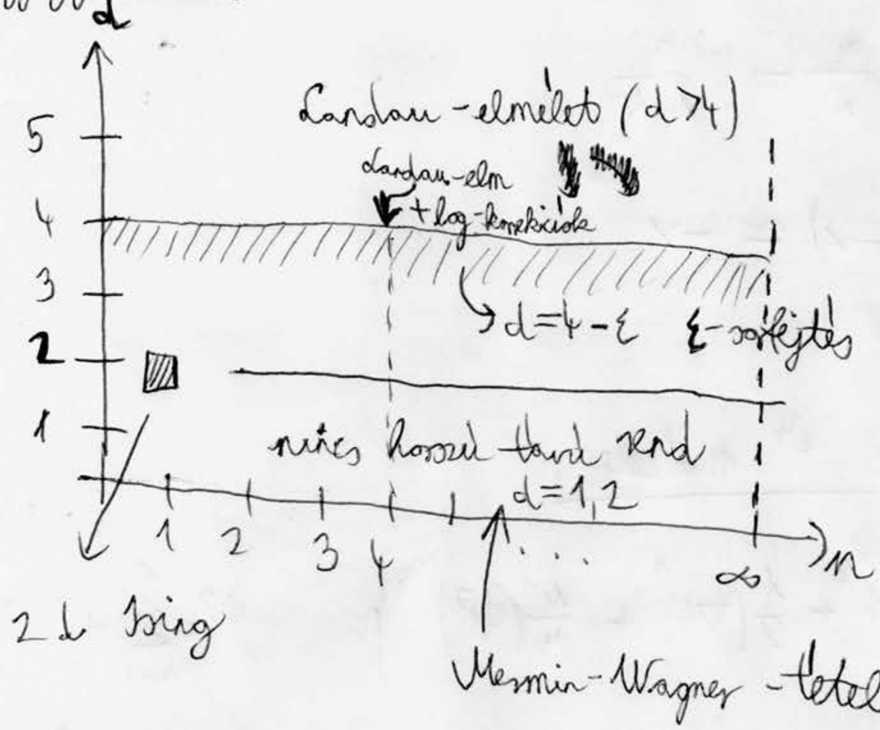
átskálázás: $q' = b\,q$

$$\frac{\Lambda}{b} \cdot b = \Lambda$$

$r \to r'$
$u \to u'$

+ paraméterek: milyen dim. (d) dolgozunk, hány komp.-e van ϕ-nek (n)

9| Megjegyzések:



(renormálást lehet ált.-ani nem egész dimenziókra is)

- ε-sorfejtés $\varepsilon = 4 - d$

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{n+2}{4(n+8)} \cdot \varepsilon + \frac{(n+2)(n^2+23n+60)}{8(n+8)^3} \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

$$\eta = \frac{n+2}{2(n+8)^2} \cdot \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

(a többi exponens skálatv.-ek alapján)

- n és d adja meg az univerzalitási osztályokat

• ($+ \sum_\alpha \varphi_\alpha^4$ hiperkockás tag → $n<4$-re izotróp kitt. vis.
$n>4$-re anizotrópia lesz)

• α előjelet vált, ha $n=4$

• r lehet a hely véletlen fv.-e

- $\underline{n=1}$, $\underline{\varepsilon=1}$ extrapoláció (mérés)

• $n=1$

$$\eta=0 \qquad \nu=\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{12}$$

$$\beta=\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{6}, \quad \gamma=1+\frac{\varepsilon}{6}, \quad \delta=3+\varepsilon, \quad \alpha=\frac{\varepsilon}{6}$$

• $\varepsilon=1$ $\downarrow$

$$\nu=0{,}58, \quad \gamma=1{,}17, \quad \alpha=0{,}17, \quad \beta=0{,}33, \quad \delta=4$$

mérésekkel összehasonlítva egész bíztató (Landau-elmélettel képest jó irányba visz még az extrapoláció is)

- ($d=3$) - ban hasonló fixpont szerkezetet várunk (esetleg a kitevők megváltozhatnak)

- ($d=4$) $n=1$

$$\chi \sim \frac{1}{|t|}\left|\ln|t|\right|^{1/3}$$

$$C_{H=0} \sim \left|\ln|t|\right|^{1/3}$$

pert. számítás magas rendjéig felösszegezhetők

$\underline{\text{Padé - Borel - összegzés}}$, $n=1$ $\qquad \nu=0{,}6300 \pm 0{,}0008$

vs. $\updownarrow$ magas hőm. sorfejtés: $\quad \nu=0{,}628 \pm 0{,}002$

$\Downarrow$

jó egyezés, megerősíti a renorm. csoportot

- egytengelyű lipol. mágnes $LiTbF_4$

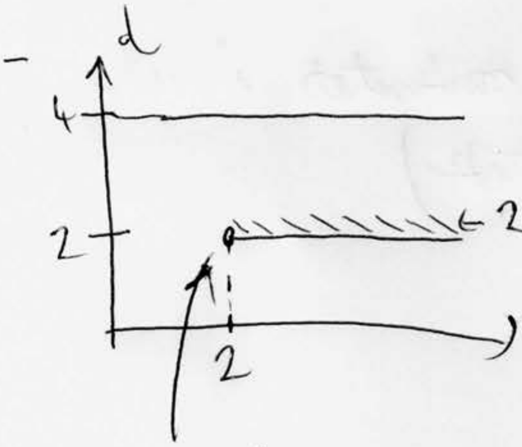
Landau-elmélet + log korrekciókat $d=3$-ra is el lehet végezni (legjobb illesztést adja általában)

↓

össze lehet hasonlítani a renorm. csoporttal kapott eredményekkel → jó egyezés

- valós térben ~~kapott~~ elvégzett renorm. (l. 1D Ising-modell)
  ↳ ált. ban alacsony dimenziókra jó

-



Kosterlitz - Thouless - átalakulás:
speciális fázisátalakulás: véges krit. T_c,
de T_c alatt nem alakul ki hosszú távú rend!
(korrelációk hatványfv. szerint csengenek le)