

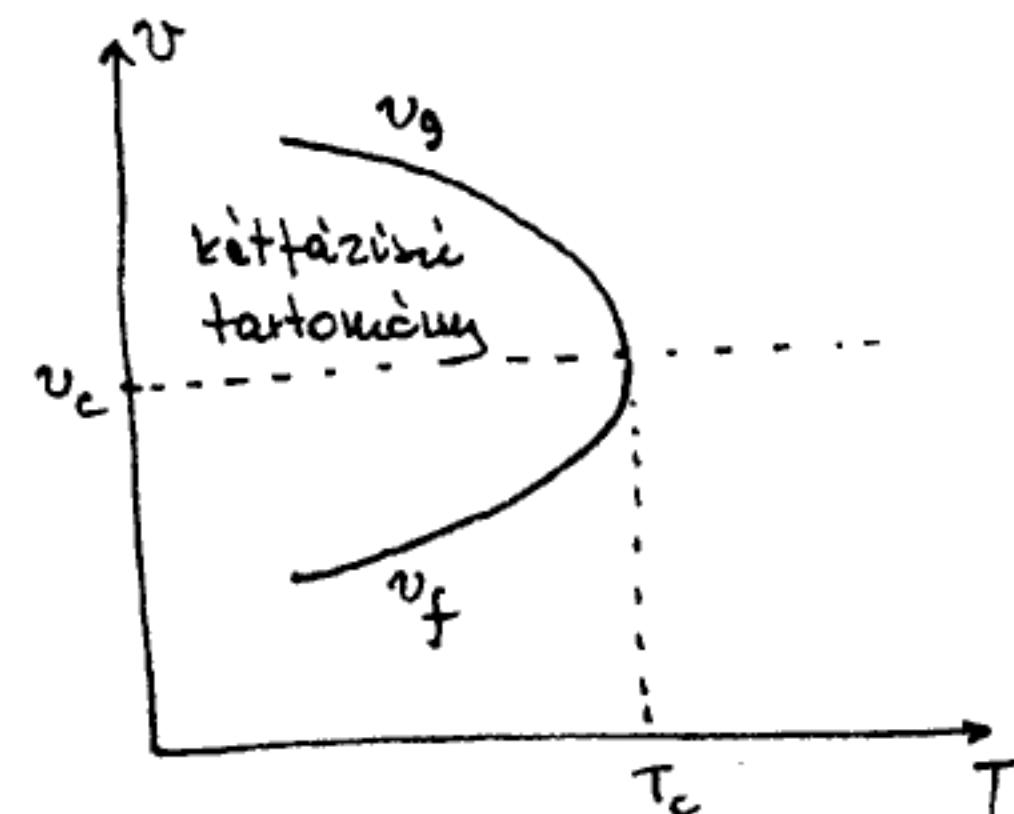
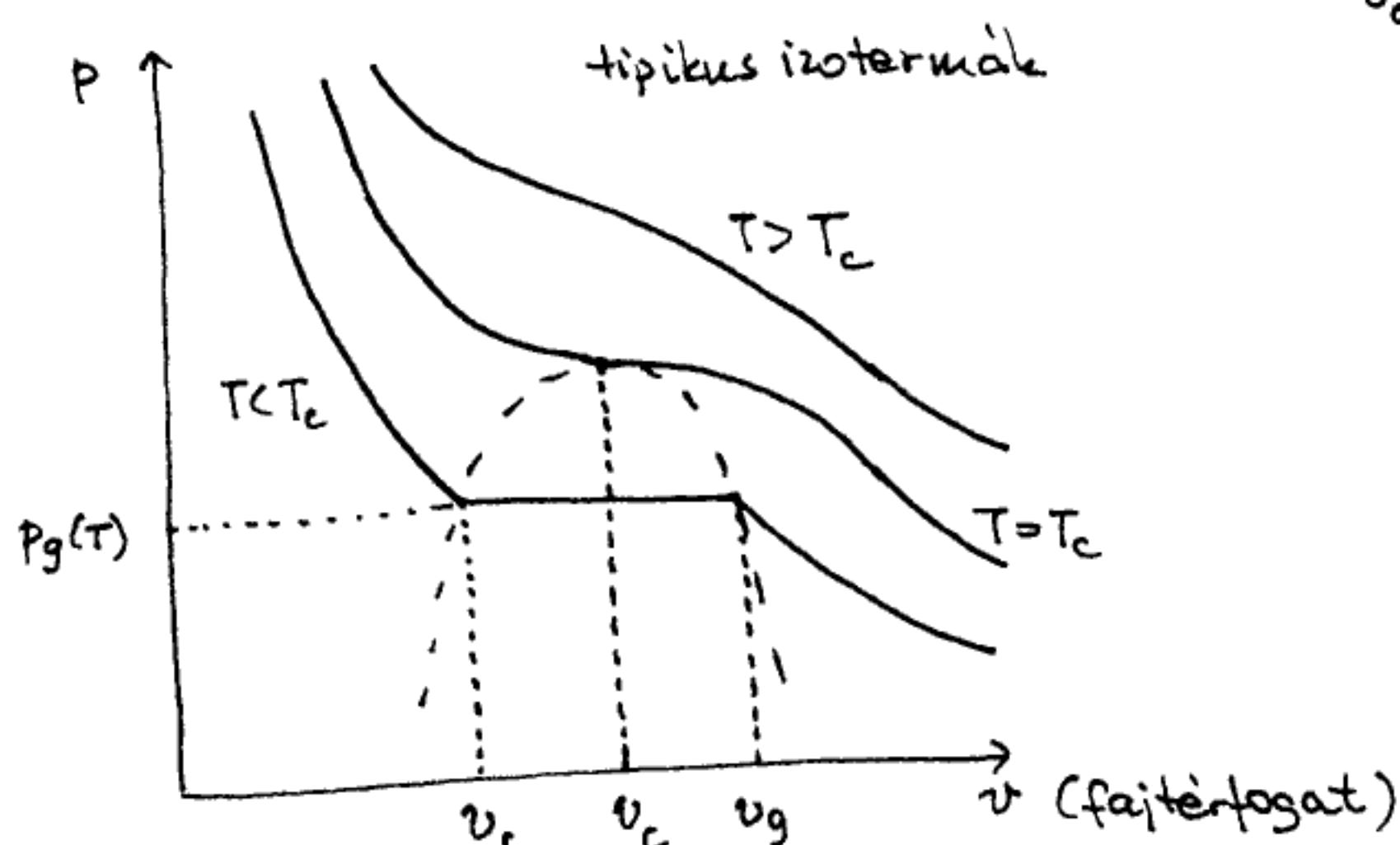
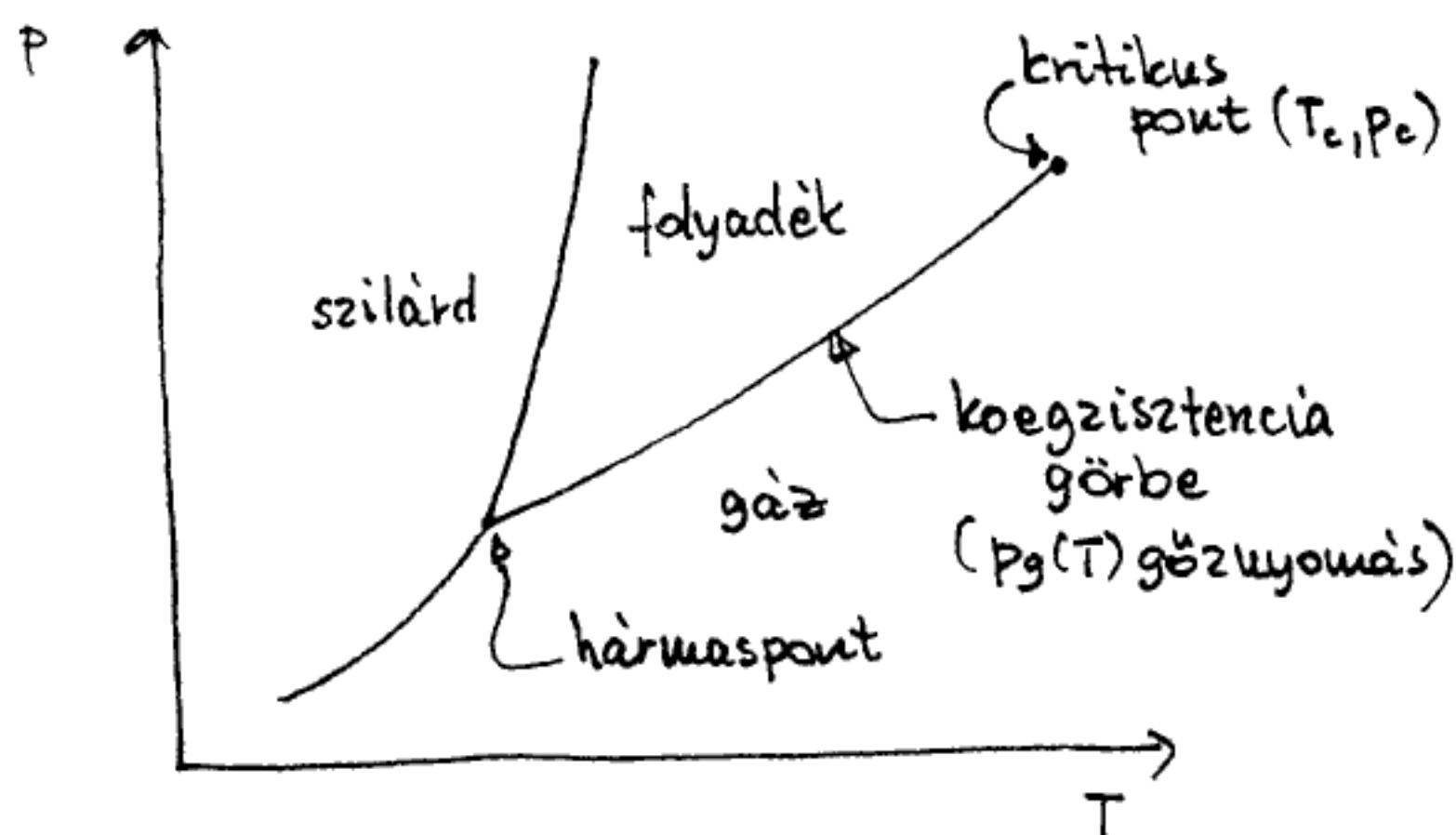
# Fejezetek a fázisátalakulások köréből

Sasvári László jegyzete

Megjegyzés: a jegyzet tartalmaz olyan részleteket, melyek a Fázisátalakulások c. előadáson nem hangzottak el, így a vizsgán nem is kellenek, illetve az előadáson elhangzottak olyanok, melyet e jegyzet nem tartalmaz, de a vizsgán számonkérhetőek.

## Folyadék-gáz fazisátalakulás

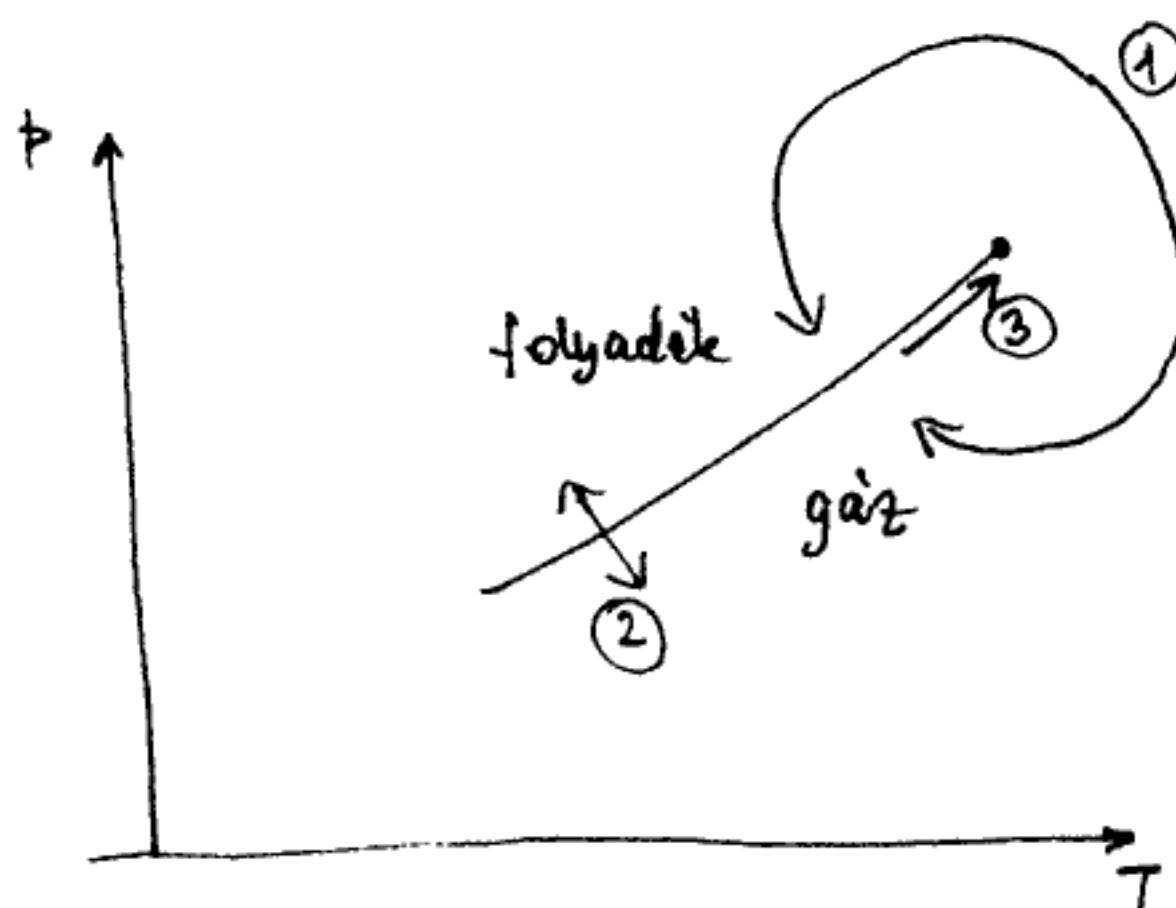
### egykomponensű anyag fazisdiagramjai



példák:

	$T_c$	$P_c$
$\text{He}^4$	5,2 K	2,26 atm
Xe	16,6 °C	58 atm
$\text{CO}_2$	31,1 °C	73 atm
$\text{H}_2\text{O}$	374 °C	218 atm
Hg	1460 °C	1040 atm

### átalakulások



① a gáz és folyadék folytonos állapotváltozások során egymásba áttelekülő

② elörendülő áttelekülés

( $v = \left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_T$  nyíl a koexistenciagyűrűn áthaladva)

③ folytonos áttelekülés

(a kétfázisú tartományból az enyhébbi tartományba átlépve  $v_g - v_f$  folytonosan növekvő változás)

## Clausius-Clapeyron-egyenlet

a koegzisztencia görbüre ( $p = p_g(T)$ ) a két fazis kémiai potenciálja megegyezik:

$$\mu_g(T, p_g(T)) = \mu_f(T, p_g(T))$$

a Gibbs-Duhem-reláció felhasználásával:  $-s_g + v_g \cdot \frac{dp_g}{dT} = -s_f + v_f \cdot \frac{dp_g}{dT}$

$$(d\mu = -s dT + v dp,$$

$s$ : fajlagos entrópia,

$v$ : fajterhelés)

$$\boxed{\frac{dp_g}{dT} = \frac{s_g - s_f}{v_g - v_f}}$$

$$\text{Iratás köz: } L = T(s_g - s_f)$$

## kritikus viselkedés

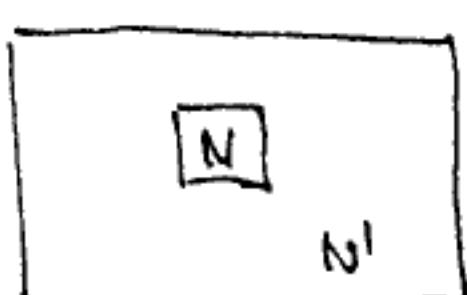
a koegzisztencia görbüre a kritikus pontba haladva:

$$v_g - v_f \rightarrow 0 ; \quad L = T(s_g - s_f) \rightarrow 0 \quad (\text{minél } \frac{dp_g}{dT} \text{ nehezebb})$$

bárhol ilyenkor a kritikus pontba haladva:  $\kappa_T \rightarrow \infty$  ( $\kappa_T$ : izoterm kompressibilitás)

(a kritikus pontban a stabilitás határának értéke nulla:  $\kappa_T^{-1} = 0$ )

a kritikus pont közelében a fluktuációk felerősödnek



a részrendszerek hőszabályozásának fluktuációi:

$$\overline{\Delta N^2} = k_B T \left( \frac{\partial N}{\partial \mu} \right)_T = k_B T \frac{N^2}{V} \kappa_T \quad (\text{nagykanonikus szabály})$$

(közel a kritikus ponthoz nem teljesül a nyílt rendszerek hozzájárulása feltétele ( $N \ll (N')$ ); a fluktuációk leginkább négyesek)

az erős rövidsegfluktuációk következménye:

critikus opaleszcencia

## a folyadék-gáz kritikus pont klasszikus elmélete

a termodynamikai stabilitás feltételle:

$\delta f + p\delta v > 0$ , ahol a  $f$  szabadeségfunkció konvex (az erintője fölött marad)

Általában ezt biztosítja a  $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)_T = -\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_T > 0$

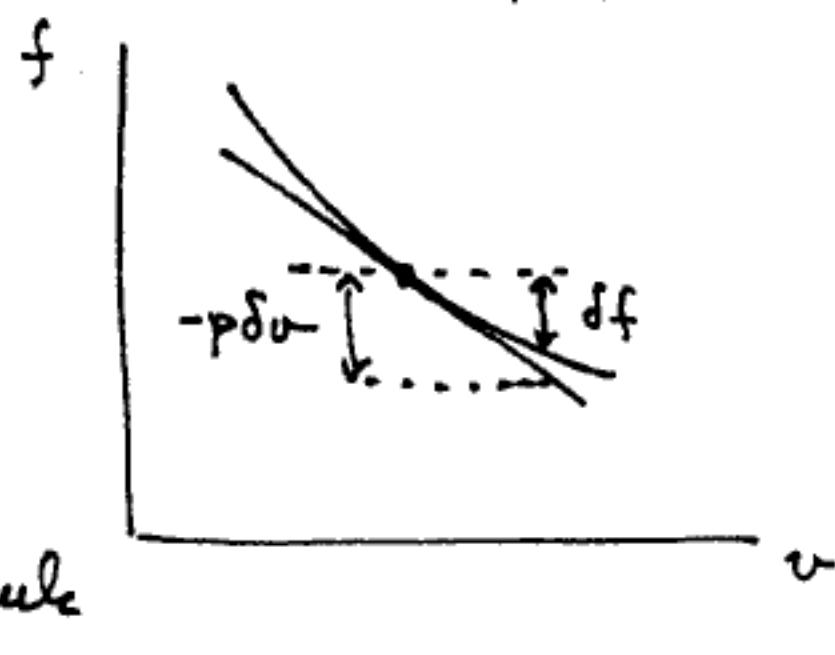
feltétel. A kritikus pontban

$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = 0$ , így itt a két szabadeségfunkció deriváltak döntőenek

$$\delta f + p\delta v = \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial v^3} \delta v^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial v^4} \delta v^4 + \dots$$

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial v^3}\right)_T = -\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_T = 0$$

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial v^4}\right)_T = -\left(\frac{\partial^3 p}{\partial v^3}\right)_T > 0$$



Feltessük, hogy  $p(v, T)$  nem singuláris a kritikus pontban (sorbafejtetés)

$$p(T, v) = p_c + b(T - T_c) + \underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T}_{-\alpha(T - T_c) + \dots} (v - v_c) + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_T}_{0 + \dots} (v - v_c)^2 + \underbrace{\frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 p}{\partial v^3}\right)_T}_{-B + \dots} (v - v_c)^3 + \dots$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ p_c + b(T - T_c) + \dots \\ (b > 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ -\alpha(T - T_c) + \dots \\ 0 + \dots \\ (B > 0) \end{array}$$

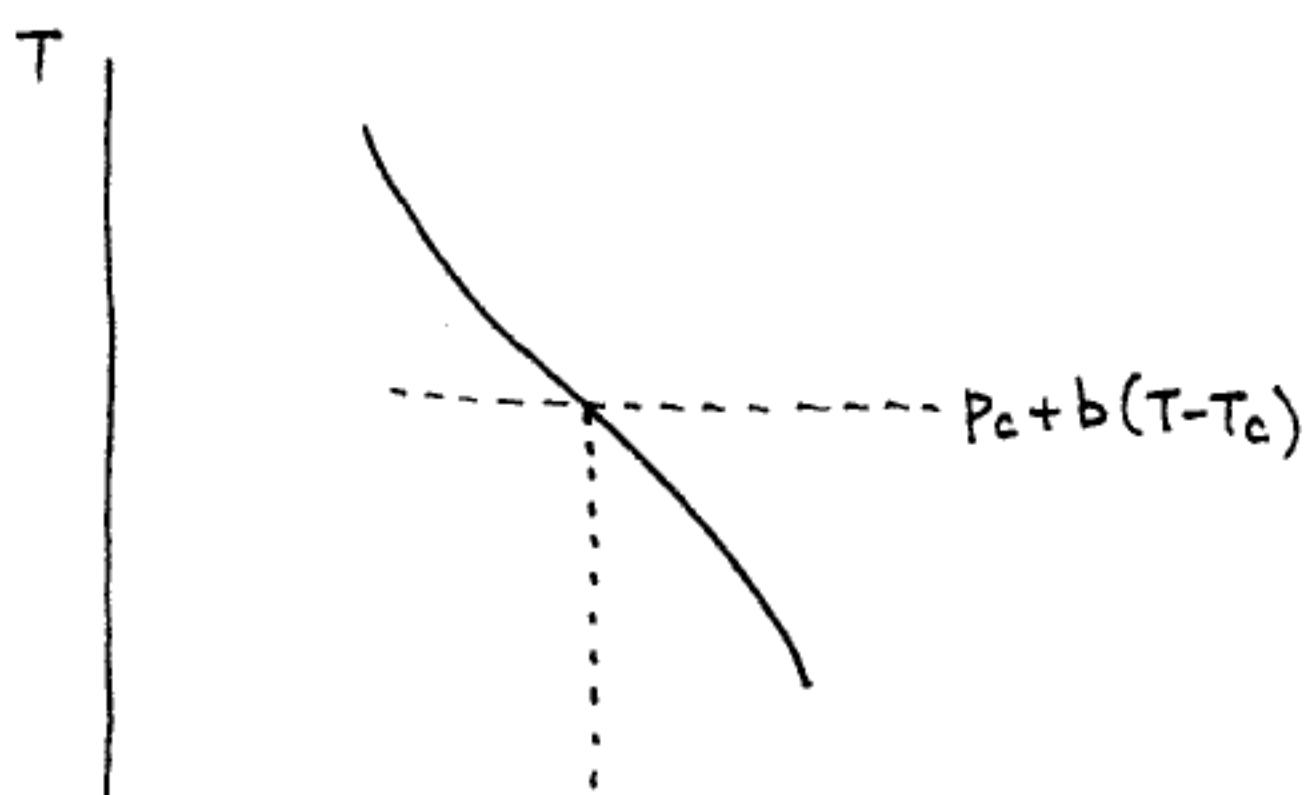
(Miért állnak ít meg? A fizikaileg érdekes tartományban

$$T - T_c \sim (v - v_c)^2, \text{ így } (T - T_c)(v - v_c)^2 \sim (v - v_c)^4.$$

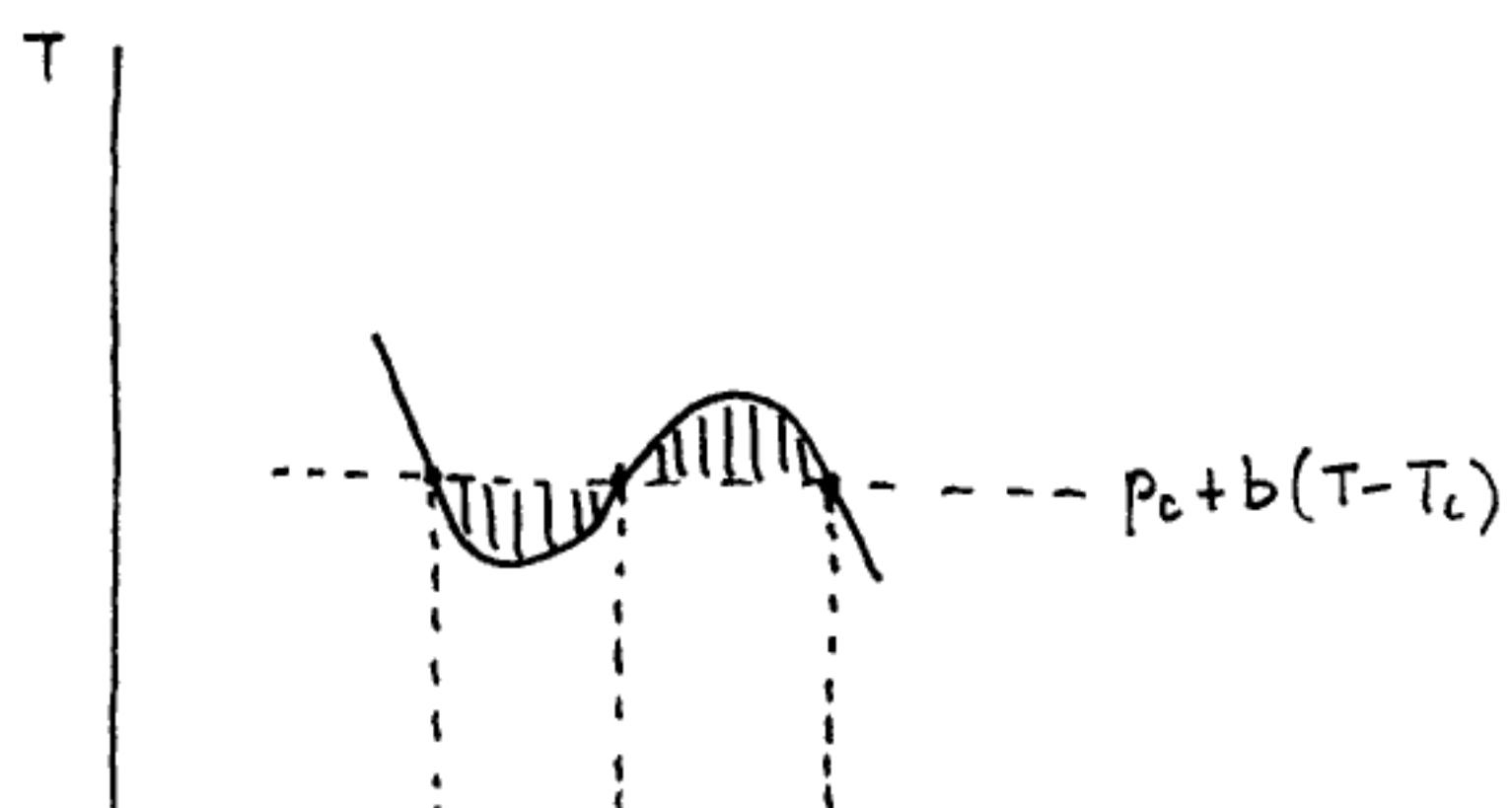
$$p(T, v) = p_c + b(T - T_c) - \alpha(T - T_c)(v - v_c) - B(v - v_c)^3$$

## izotermák

$$T > T_c$$



$$T < T_c$$



Maxwell-konstrukció:  $-a(T-T_c)(v-v_c) - B(v-v_c)^3$  páratlan higiénia, mely az enyomás területeket körülöleli vizsgálva a  $v=v_c=0$  által meghatározott ponton megnézett, amit  $x = v_g - v_c = v_c - v_f$  megelőzve az  $-a(T-T_c)x - Bx^3 = 0$  egyenletnek

$$v_g - v_c = v_c - v_f = \sqrt{\frac{a}{B}(T_c - T)}$$

$$\text{a függvénye: } p_g(T) = p_c + b(T - T_c) \quad (T < T_c)$$

$$\text{Latens hő: } L = T(s_g - s_f) = \frac{dp_g}{dT} \cdot (v_g - v_f) \cdot T \approx 2bT_c \sqrt{\frac{a}{B}(T_c - T)}$$

$$T = T_c : p - p_c = -B(v - v_c)^3$$

$$\text{kompaktsíbilis: } \kappa_T^{-1} = -v \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T$$

$$-\left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T = a(T - T_c) + 3B(v - v_c)^2 = \begin{cases} a(T - T_c) & (v = v_c, T > T_c) \\ 2a(T_c - T) & (v = v_f \text{ vagy } v = v_g, T < T_c) \\ 3B(v - v_c)^2 & T = T_c \end{cases}$$

fajló: az állapotengedet integrálásával:

$$f(T, v) = f_0(T) - [p_c + b(T - T_c)](v - v_c) + \frac{a}{2}(T - T_c)(v - v_c)^2 + \frac{B}{4}(v - v_c)^4$$

$$s(T, v) = -\left( \frac{\partial f}{\partial T} \right)_v = -\frac{df_0}{dT} + b(v - v_c) - \frac{a}{2}(v - v_c)^2$$

$$T > T_c, v = v_c : s(T, v_c) = -\frac{df_0}{dT} ; C_v = T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_v = -T \frac{d^2 f_0}{dT^2}$$

$T < T_c$ : a merlegszabály miatt az anyag teljes folyamatát felé széz

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}s_f + \frac{1}{2}s_g = -\frac{df_0}{dT} + \frac{1}{2}b(v_f - v_c) - \frac{a}{4}(v_f - v_c)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}b(v_g - v_c) - \frac{a}{4}(v_g - v_c)^2 = -\frac{df_0}{dT} - \frac{a}{2}x^2 \end{aligned}$$

$$s = -\frac{df_0}{dT} - \frac{a^2}{2B}(T_c - T)$$

$$C_v = -T \frac{d^2 f_0}{dT^2} + \frac{a^2}{2B}$$

$$\text{fajló nyomás: } \Delta C_v = \frac{a^2}{2B}$$

magassági viselkedés

$$v_g - v_f \sim (T_c - T)^{0.354}$$

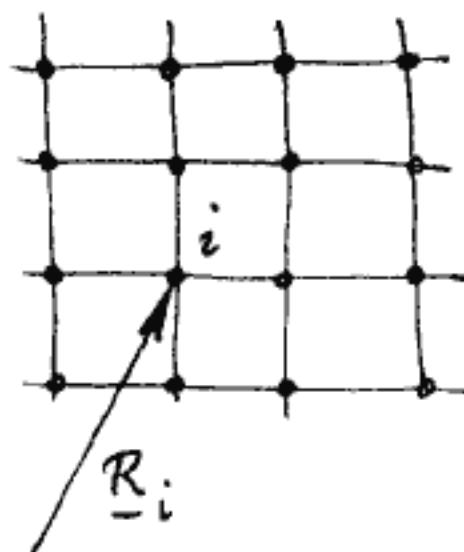
$$\kappa_T \sim (T - T_c)^{-1.21}$$

$C_v$  divergens

baj van a sorfejtéssel!

## Ising-modell

rácsos Ising-spinek



$$S_i = \begin{cases} +1 & \uparrow \\ -1 & \downarrow \end{cases}$$

erősen anizotróp mágnesek  
egy modellje

klasszikus, diskrit modell

az  $\{S_i\}$  konfiguráció energiaja:  $E(\{S_i\}) = -\frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} S_i S_j - \sum_i h_i S_i$

$J_{ij} = J_{ji}$  kicserelelődési kölcsönhatás energia

$h_i$  inhomogén mágneses tér

## átlagterközelítés

a kiszemelt spint egzaktul kezeli, a vele kölcsönhatásban állókat átlagértékükön rögzíti

az i-k résportban a spin energiaja:  $E(S_i) = -(h_i + \sum_j J_{ij} m_j) S_i = -H_{eff,i} S_i$ ,

ahol  $m_j = \overline{S_j}$

$$m_i = \overline{S_i} = \frac{e^{\beta H_{eff,i}} - e^{-\beta H_{eff,i}}}{e^{\beta H_{eff,i}} + e^{-\beta H_{eff,i}}} = \tanh(\beta H_{eff,i}), \quad (\beta = \frac{1}{kT})$$

$$m_i = \tanh(\beta(h_i + \sum_j J_{ij} m_j))$$

$$\text{Arth } x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$h_i = \frac{kT}{2} \ln \frac{1+m_i}{1-m_i} - \sum_j J_{ij} m_j$$

$$(x^{-1})_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial m_j} = \frac{kT}{1-m_i^2} \delta_{ij} - J_{ij}$$

## megjegyzések az átlagter közelítésről

(i) variációs elv alapján a legjobb független spin közelítés

$$(Z = \text{Tr } e^{-\beta H})$$

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z \leq \text{Tr}(fH) + kT \text{Tr}(f \ln f),$$

ahol f térfüggő szisztema

$$\text{gyakran aktív és való aktív, ha } f = \frac{e^{\beta H}}{Z}$$

} a statisztikai fizika  
variációs elve

$$\text{a független spin eloszlás általános alkja } f(\{S_i\}) = \prod_i \frac{e^{\beta \lambda_i S_i}}{2 \cosh(\beta \lambda_i)},$$

a legjobb parameter választás:  $\lambda_i = h_i + \sum_j J_{ij} m_j$ ,  $m_j = \tanh(\beta \lambda_j)$

a minimum feltétele:  $(X^{-1})_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial m_j}$  poz. def. )

(ii) az átlagter közelítés egzakt, ha a koordinációs rács végzettséget törteni

(pl. Ising-modell végtelen hatótávolságú kölcsönhatással:

$$E(\{S_i\}) = -\frac{J}{2N} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} S_i S_j - H \sum_i S_i, \quad (N \text{ a spinek száma})$$

Ising-modell d dimenziós köbös rácsban, lejközelibbi módon idő kölcsönhatással  
 $\Xi = 2d \rightarrow \infty$  határcutson )

### a paramágneses fazis határa

elegendően magas hőmérsékleteken paramágneses viselkedés ( $\{h_i \rightarrow 0\}$  esetén  $\{m_i \rightarrow 0\}$ )

az inverz susceptibilitás:  $(X^{-1})_{ij} = kT \delta_{ij} - J_{ij}$

transzició invariánsát feltételezve ( $J_{ij}$  csak  $R_i - R_j$  függvénye)

Fourier-transzformációval diagonalizálható:

$$J(\underline{q}) = \sum_i J_{ij} e^{-i\underline{q}(R_i - R_j)} \quad (\underline{q} \text{ a Brillouin-zónában})$$

$$X^{-1}(\underline{q}) = kT - J(\underline{q})$$

a paramágneses fazis stabil, amikor  $X^{-1}(\underline{q}) > 0$

a paramágneses fazis instabilitájávalik, ha valamely  $\underline{q}$ -nél  $X^{-1}(\underline{q}) = 0$  lesz, és annál a hullámintenzitás kölcsönösebb, ahol  $J(\underline{q})$  maximális:

$$J(q_c) = \max_{\underline{q}} J(\underline{q})$$

$$kT_c = J(q_c)$$

$T_c$ -nél alacsonyabb hőmérsékleteken  $q_c$  hullámintenzitás rendszerűleg nő

### korelációs függvény

$$C_{ij} = \overline{S_i S_j} - \overline{S_i} \overline{S_j}$$

$$C(\underline{q}) = \sum_i C_{ij} e^{-i\underline{q}(R_i - R_j)}$$

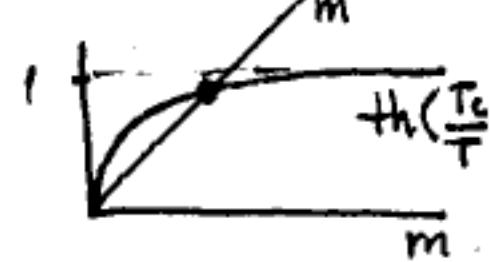
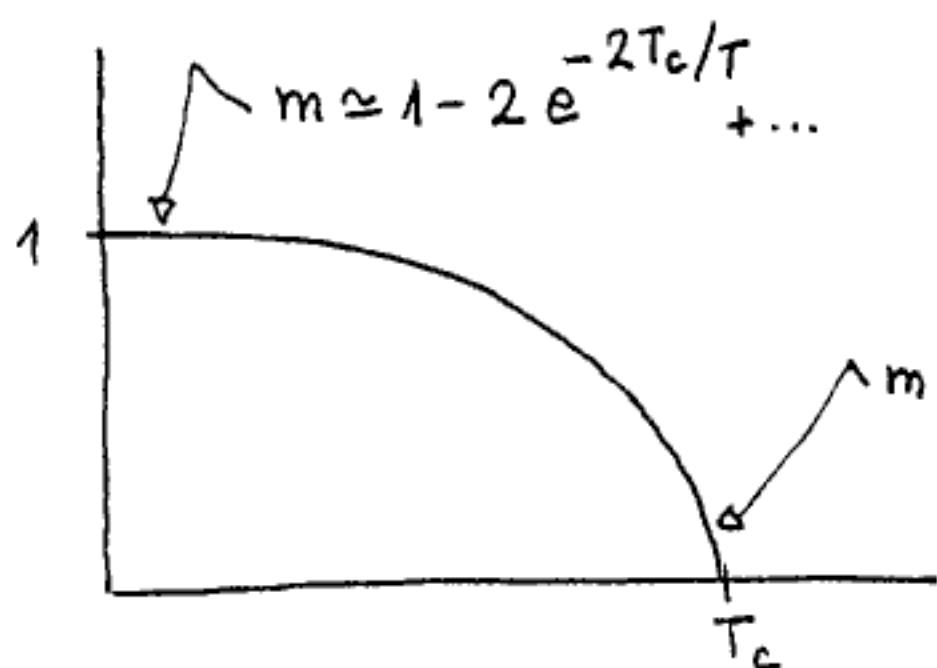
a fluktuációs-választott tétele szerint:  $C_{ij} = kT \chi_{ij}$

$$(C(\underline{q}) = kT \chi(\underline{q}))$$

## A) ferromágnes

homogén rendszöről:  $q_c = 0$      $J(0) \geq J(q)$      $kT_c = J(0) = \sum_i J_{ij}$

mágneserettzeg:  $T < T_c$      $m_i = m$      $m = \tanh(\beta J(0)m) = \tanh\left(\frac{T_c}{T}m\right)$



$$T \ll T_c: \tanh x \approx 1 - 2e^{-2x} + \dots \quad (x \gg 1)$$

$$m \approx 1 - 2e^{-2T_c m / T} \approx 1 - 2e^{-2T_c / T}$$

$$T \rightarrow T_c: \tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \dots \quad (x \ll 1)$$

$$m = \frac{T_c}{T}m - \frac{1}{3}\left(\frac{T_c}{T}m\right)^3 + \dots$$

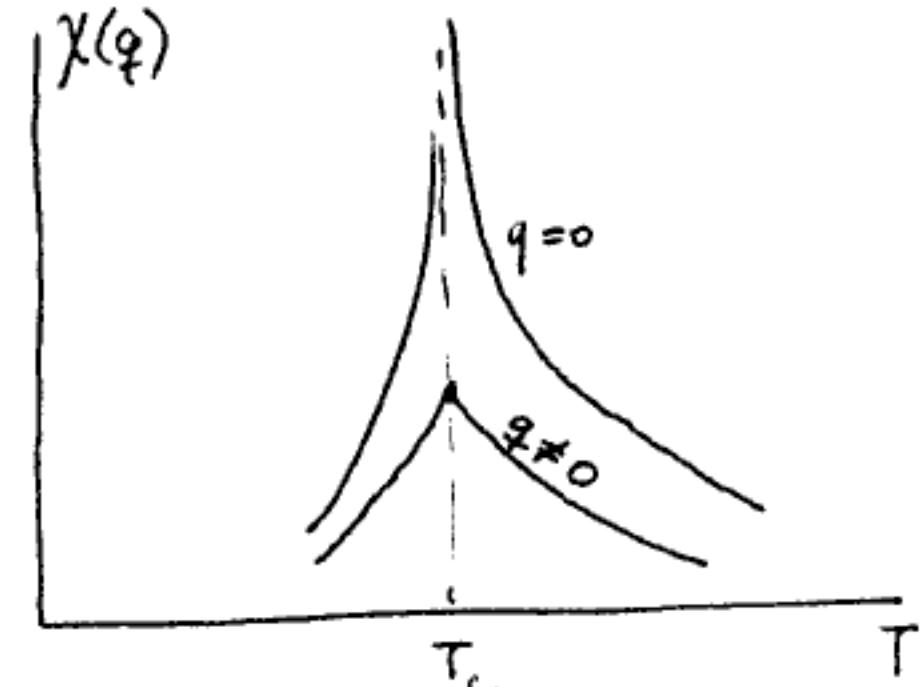
## susceptibilitás

$$\chi^{-1}(q) = kT - J(q) = k(T - T_c) + J(0) - J(q) \quad (T \geq T_c)$$

$$\chi^{-1}(0) = k(T - T_c) \quad \text{Curie-Weiss-törzsfelvétel}$$

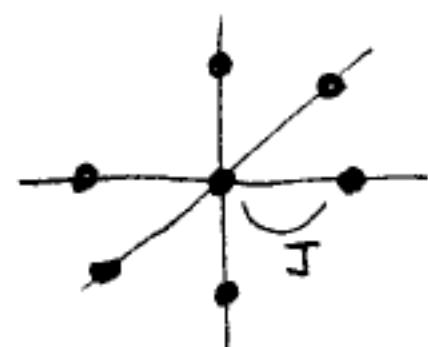
$$\chi^{-1}(q) = \frac{kT}{1-m^2} - J(q) \quad (T < T_c)$$

(beléthető, hogy  $\chi^{-1}(q) > 0$  feltétel teljesül)



## Korrelációs függvény ( $T > T_c$ )

egymű köbös ráson, lykörülési ránccal körülönhatás szerint



$$J(q) = 2J(\cos(q_x a) + \cos(q_y a) + \cos(q_z a)), \quad J(0) = 6J = kT_c$$

$qa \ll 1$  használható határcsíkon

$$J(q) = 2J\left(3 - \frac{1}{2}q^2 a^2 + \dots\right) = 6J - Jq^2 a^2 + \dots$$

a fluktuációs-válasz tétel szerint  $C(q) = kT\chi(q)$

$$C(q) = \frac{kT}{k(T-T_c) + Ja^2 q^2} = \frac{kT}{Ja^2} \cdot \frac{1}{\xi^{-2} + q^2}, \quad \xi^{-2} = \frac{k(T-T_c)}{Ja^2}$$

Korrelációs hossz  $\xi \sim (T - T_c)^{-1/2}$

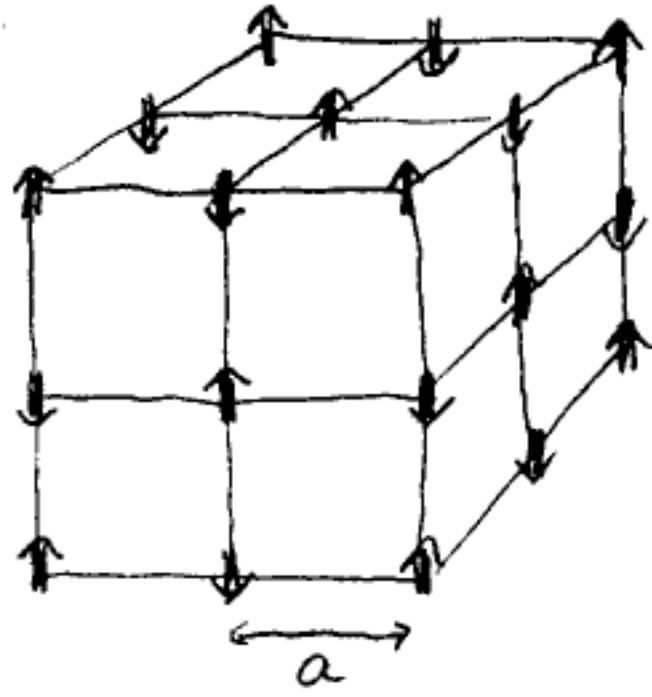
erős korrelációk a  $q < \xi^{-1}$  ill. az  $r = |\underline{R}_i - \underline{R}_j| < \xi$  tartományban

az  $r \gg a$  határcsíkon:

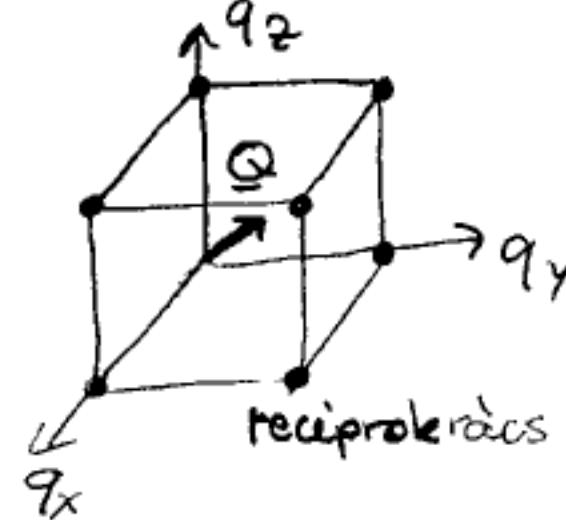
$$C(r) = \frac{kT}{Ja^2} \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-r/\xi}}{r}$$

## B) antiferromágnes

egyszerű köbös rácsban alternáló spinbeállás — legegyszerűbb antiferromágneses rendszerek



a rendszeres hullámrairány  $\underline{Q} = \frac{\pi}{a}(1,1,1)$



$$\underline{q}_c = \underline{Q} \quad J(\underline{Q}) \geq J(\underline{q}) \quad kT_c = J(\underline{Q})$$

alrai smágneses erettség:  $T < T_c \quad m_i = n e^{i \underline{Q} \cdot \underline{R}_i}$  ( $e^{i \underline{Q} \cdot \underline{R}_i} = \pm 1$ )

$$m_i = n e^{i \underline{Q} \cdot \underline{R}_i} = \text{th}\left(\beta \sum_j J_{ij} e^{i \underline{Q} \cdot \underline{R}_j} n\right) \quad | \cdot e^{i \underline{Q} \cdot \underline{R}_i} |$$

$$n = \text{th}\left(\beta \sum_j J_{ij} e^{-i \underline{Q} \cdot (\underline{R}_i - \underline{R}_j)} n\right)$$

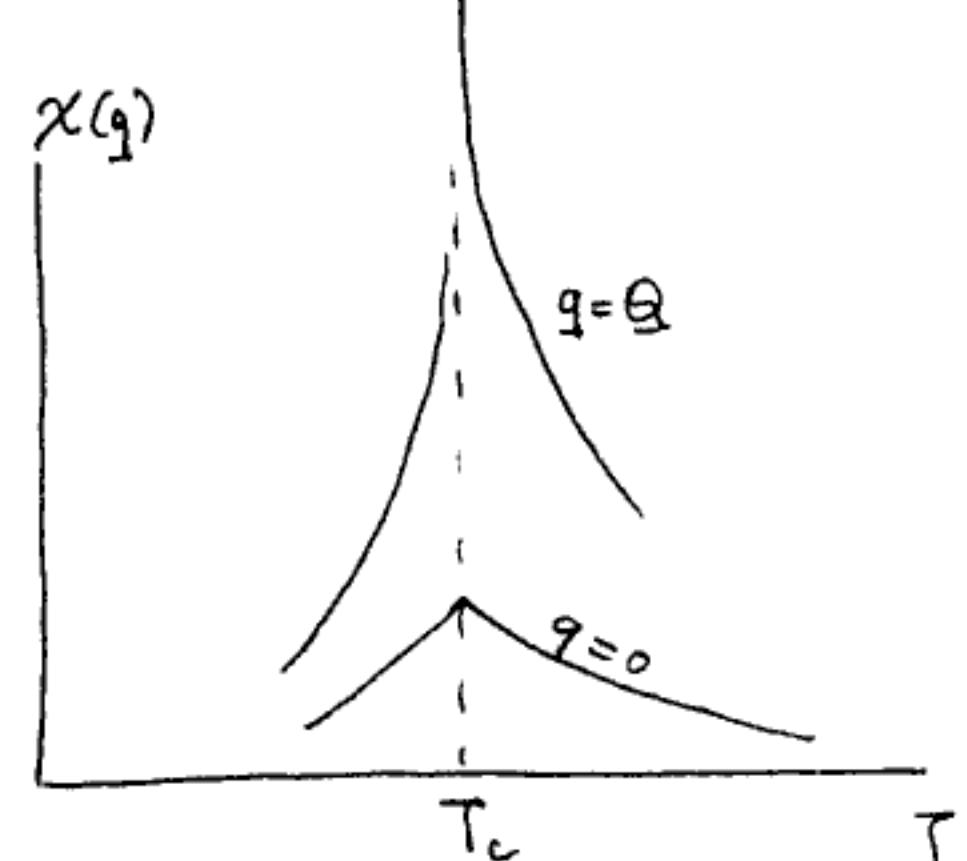
$$\boxed{n = \text{th}\left(\beta J(\underline{Q}) n\right) = \text{th}\left(\frac{T_c}{T} n\right)}$$

### susceptibilitás

$$T > T_c \quad \chi^{-1}(\underline{q}) = k(T-T_c) + J(\underline{Q}) - J(\underline{q})$$

$$T < T_c \quad m_i^2 = n^2 \quad (\chi^{-1})_{ij} = \frac{kT}{1-n^2} \delta_{ij} - J_{ij}$$

$$\chi^{-1}(\underline{q}) = \frac{kT}{1-n^2} - J(\underline{q})$$



### korrelációs függvény

legközelebbi szomszéd kölcsönhatás szerint:  $J(\underline{q}) = -2|J|\left(\cos(q_x a) + \cos(q_y a) + \cos(q_z a)\right)$

$|\underline{q} - \underline{Q}|a \ll 1$  határvonalban:  $J(\underline{q}) = 6|J| - |J|a^2(\underline{q} - \underline{Q})^2 + \dots, \quad J(\underline{Q}) = 6|J| = kT_c$

a megnézetek  $\underline{q} \approx \underline{Q}$  hullámrairány komponense az alrai smágneses erettség

$\hat{\underline{q}} = \underline{q} - \underline{Q}$  hullámrairány modulációjának felét meg:

$$m_i = a e^{i \underline{q} \cdot \underline{R}_i} = \underbrace{a e^{i \hat{\underline{q}} \cdot \underline{R}_i}}_{n_i} e^{i \underline{Q} \cdot \underline{R}_i}$$

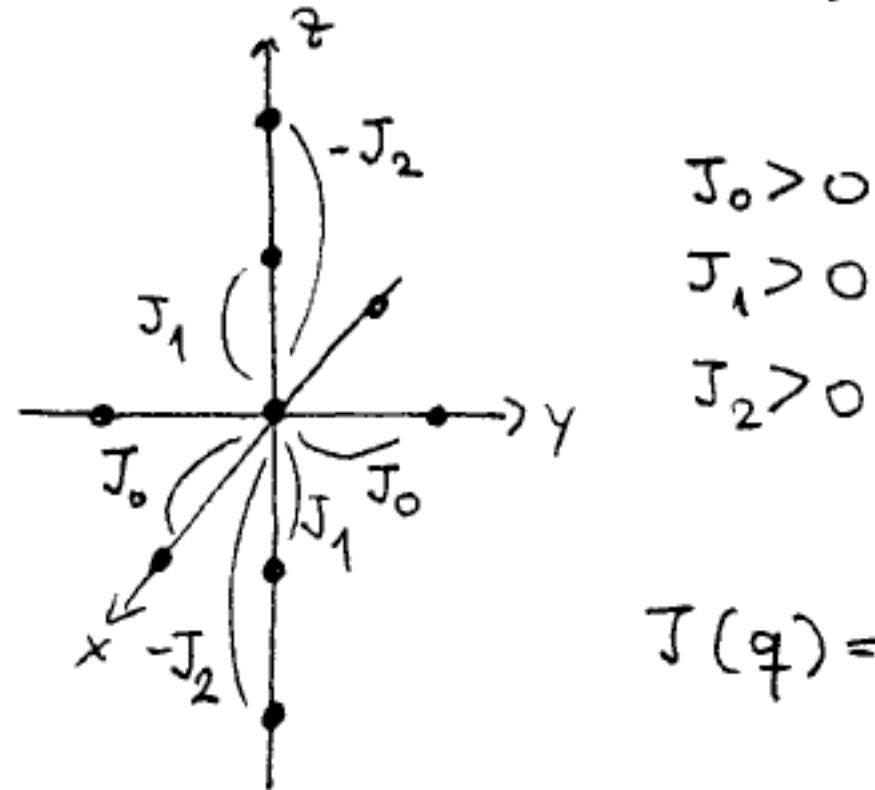
amik  $\hat{\underline{q}} a \ll 1$ , a lokális antiferromágneses rendszerek fennmarad az alrai smágneses erettség korrelációs függvénye:

$$C_n(\hat{\underline{q}}) = C(\underline{Q} + \hat{\underline{q}}) = kT \chi(\underline{Q} + \hat{\underline{q}}) = \frac{kT}{k(T-T_c) + |J|a^2 \hat{\underline{q}}^2}$$

$$\boxed{C_n(\hat{\underline{q}}) = \frac{kT}{|J|a^2} \frac{1}{\xi^{-2} + \hat{\underline{q}}^2}, \quad \xi^{-2} = \frac{k(T-T_c)}{|J|a^2}}$$

### C) ANNNI-modell

(axial-next-nearest-neighbour-Ising model)



$$\begin{aligned} J_0 &> 0 \\ J_1 &> 0 \\ J_2 &> 0 \end{aligned}$$

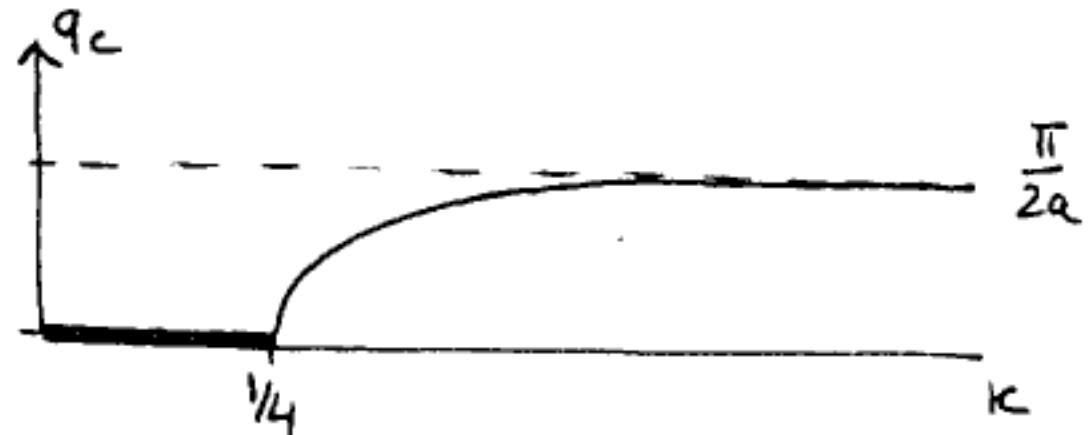
az x-y síkban ferromágneses erővel ( $J_0$ )

a z irányban ferromágneses erővel a leghozelébbi szomszédok között ( $J_1$ ), antiferromágneses erővel a második szomszédok között

$$J(q) = 2J_0(\cos(q_x a) + \cos(q_y a)) + 2J_1 \cos(q_z a) - 2J_2 \cos(2q_z a)$$

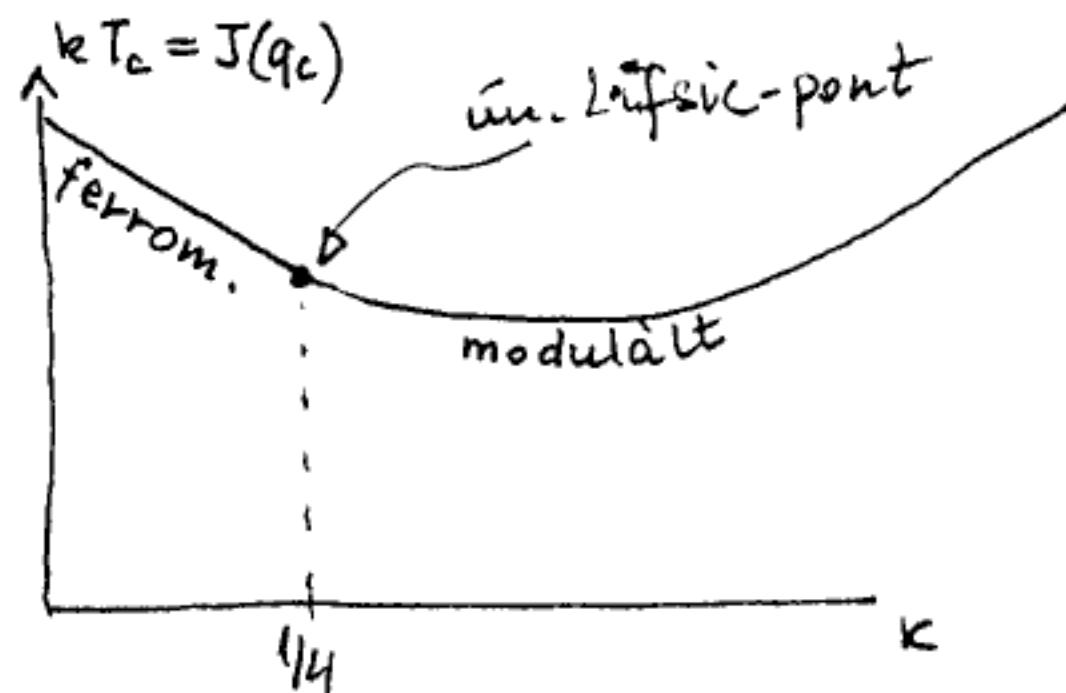
$J(q)$  maximuma:  $(0, 0, q_c)$  hullámvonal;  $\kappa = \frac{J_2}{J_1}$  bevezetésekkel:

$$q_c = \begin{cases} 0 & , (\kappa \leq 1/4) \\ \frac{1}{a} \arccos\left(\frac{1}{4\kappa}\right) & , (\kappa \geq 1/4) \end{cases}$$



átlátás közelítés:

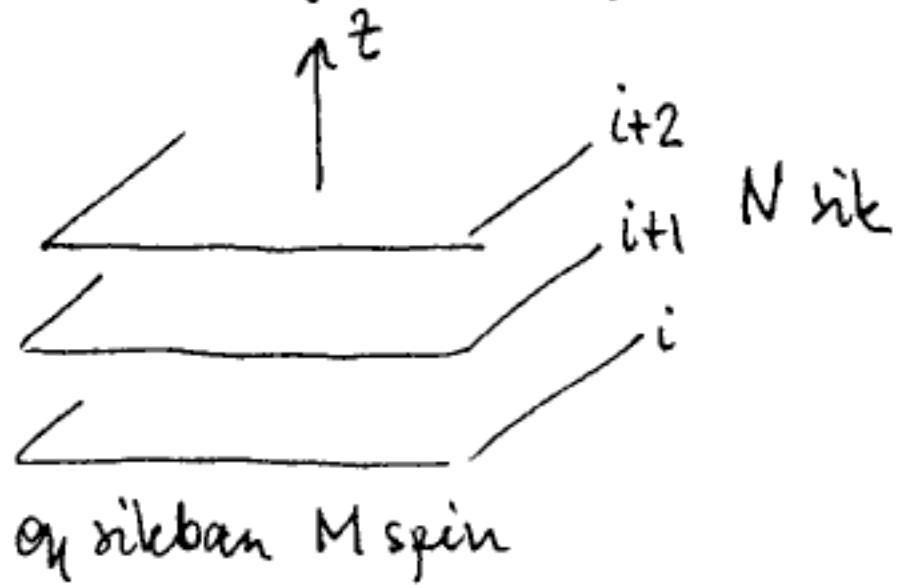
$$kT_c = J(q_c) = \begin{cases} 4J_0 + 2J_1(1-\kappa) & , (\kappa \leq 1/4) \\ 4J_0 + 2J_1\left(\frac{1}{8\kappa} + \kappa\right) & , (\kappa \geq 1/4) \end{cases}$$



$T < T_c$  hőmérsékleten  $\kappa < 1/4$  esetén ferromágneses,  $\kappa > 1/4$  esetén  $q_c(\kappa)$  hullámvonal modulált rendelődést váltja (inkommensurabilis rend)

alapállapot

a z irányra merőleges síkokban ferromágneses rend (parluráns beállás)



az i-k síkban a spinek állása  $S_i$ :

az energia:

$$E = -NM \cdot 2J_0 - MJ_1 \sum_i S_i S_{i+1} + MJ_2 \sum_i S_i S_{i+2}$$

az en láncra jutó energia

$$\frac{E}{M} = -2NJ_0 - J_1 \underbrace{\sum_i S_i S_{i+1}}_{\text{Ising-lánc energia}} + J_2 \sum_i S_i S_{i+2}$$

Ising-lánc energiaja

ennek az Ising-láncnak az alapállapotát kell meghatározni

a  $J_1$  ugyanabban a ferromágneses állapot optimális:  $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$   
 doménfalak energiaja (a ferromágneses állapotnak viszonyítva):

en doménfal:  $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow|\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow$

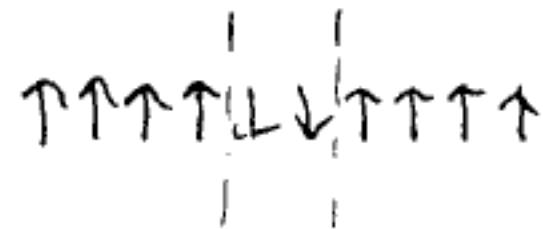
$$\Delta E_1 = 2J_1 - 2 \cdot 2J_2 = 2J_1(1-2\kappa)$$

csökkenő az energia, ha  $\kappa > \frac{1}{2}$

két doménfal:  $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow|\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$

$$\Delta E = 2 \cdot 2J_1 - 2 \cdot 2J_2 = \Delta E_1 + 2J_1 > \Delta E_1$$

magasabb energiájú, mint  
 en en doménfalek tartalmával állapot



$$\Delta E = 2 \cdot 2J_1 - 4 \cdot 2J_2 = 2 \Delta E_1$$

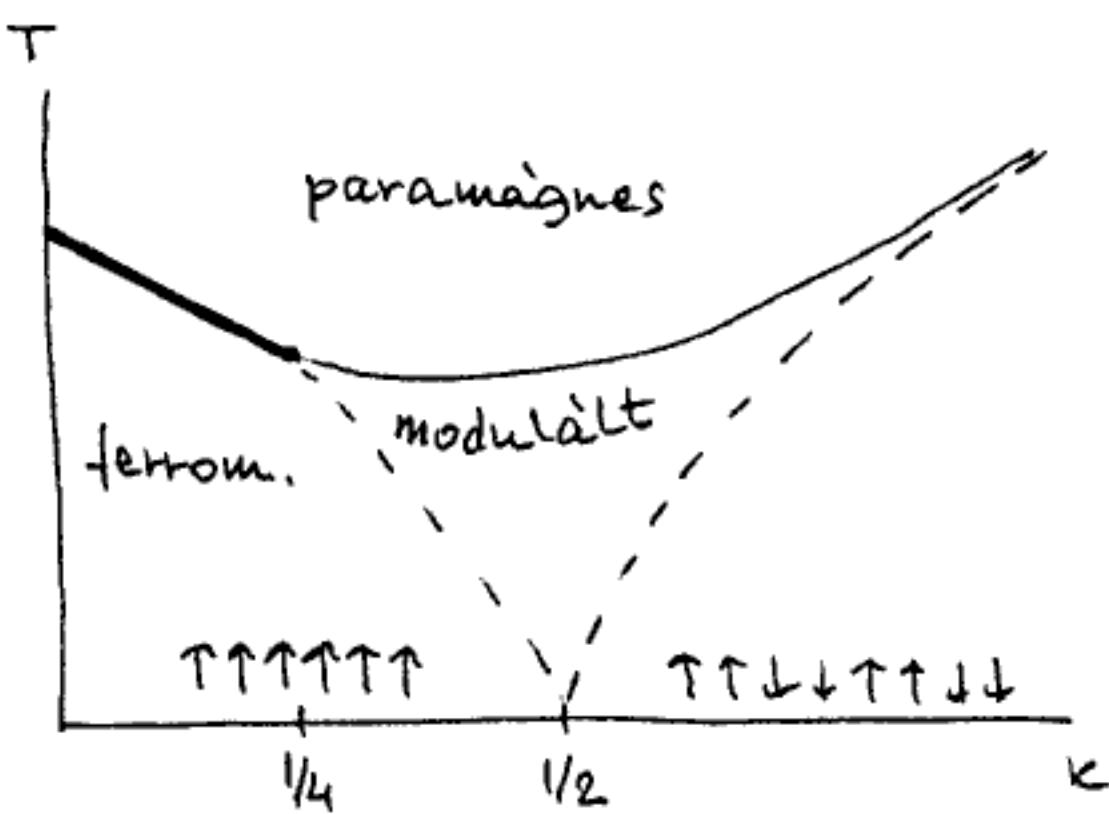
ne. energiaváltozás legrövidebb, ha a  
 két doménfal távolabb van

az alapállapotot a lehetséges legtöbb doménfal létrehozásával kezük, míg, ha en domén legalább két spint tartalmaz

ez az ún.  $\langle 2,2 \rangle$  színkent:  $\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow$

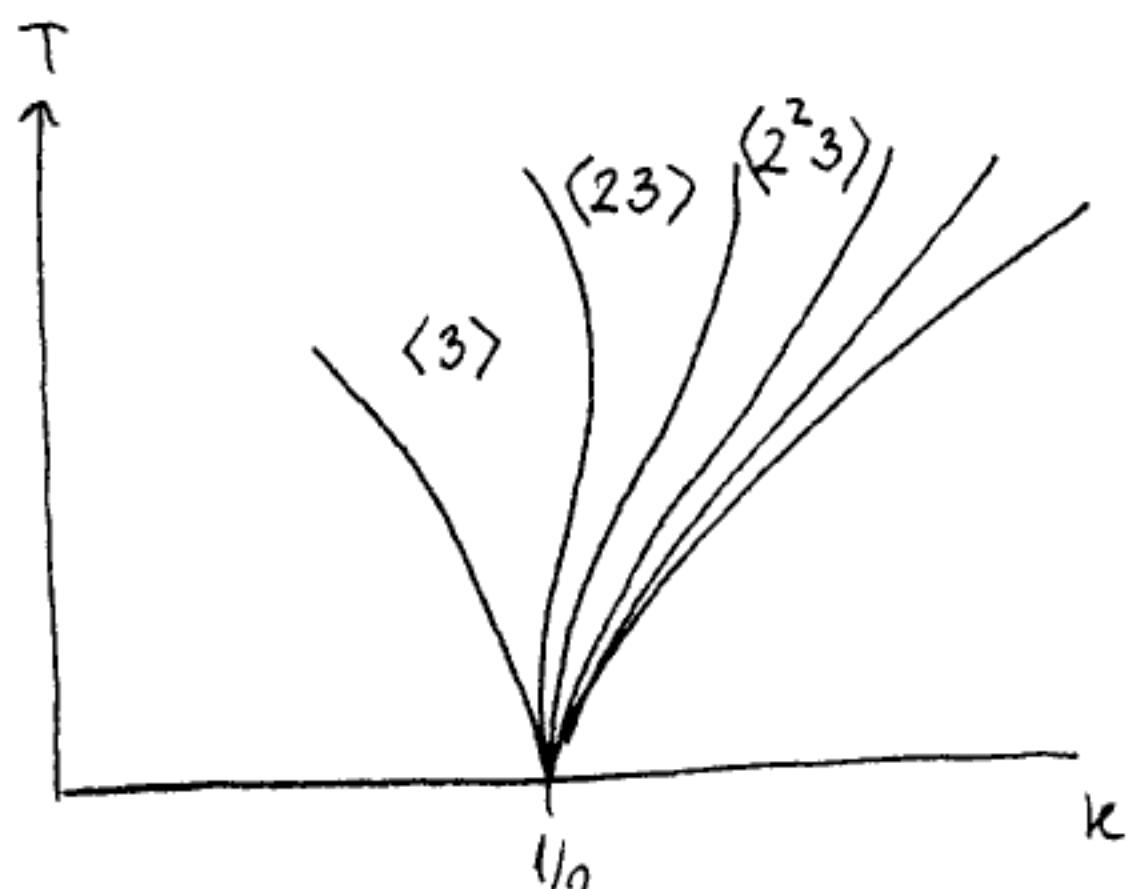
modulált színkent, hullámrendszer  $q = \frac{2\pi}{4a} = \frac{\pi}{2a} = q_c (\kappa \rightarrow \infty)$

a variáció fazisdiagram



$\kappa = \frac{1}{2}$ : erősen deg.  
 alapállapot  
 (maradékentropia)

a  $T=0, \kappa=1/2$  pont sokszíni pont, végtelen sok komponenciábilis fazis kiinduláspontja (egyált előreírás, rendeltetés nélküli)



$\langle 3 \rangle | \uparrow\uparrow\uparrow | \downarrow\downarrow\downarrow | \dots$

$\langle 23 \rangle | \uparrow\uparrow\uparrow | \downarrow\downarrow | \uparrow\uparrow\uparrow | \downarrow\downarrow | \dots$

$\langle 2^2 3 \rangle | \uparrow\uparrow\uparrow | \downarrow\downarrow | \uparrow\uparrow | \downarrow\downarrow | \dots$

$\langle 2^n 3 \rangle$

$\langle 2^\infty 3 \rangle | \uparrow\uparrow | \downarrow\downarrow | \uparrow\uparrow | \downarrow\downarrow | \dots$

a  $\langle 2^n 3 \rangle$  szélesített átlagos hullámhosszúsága

$$\bar{q} = \frac{\text{előjelváltások száma} \cdot \pi}{\text{hosszúság}} = \frac{(n+1) \cdot \pi}{(3+2n)a}$$

n növekvésekkel  $\bar{q}$  monoton növekszik,  $n \rightarrow \infty$  -re  $\bar{q} \rightarrow \frac{\pi}{2a}$

$$(\bar{q} = \frac{\pi}{2a} \frac{2(n+1)}{3+2n} \quad \bar{q} \cdot \frac{2a}{\pi} : \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \dots)$$

az ANNNI-modell vizsgálatát motiválta:

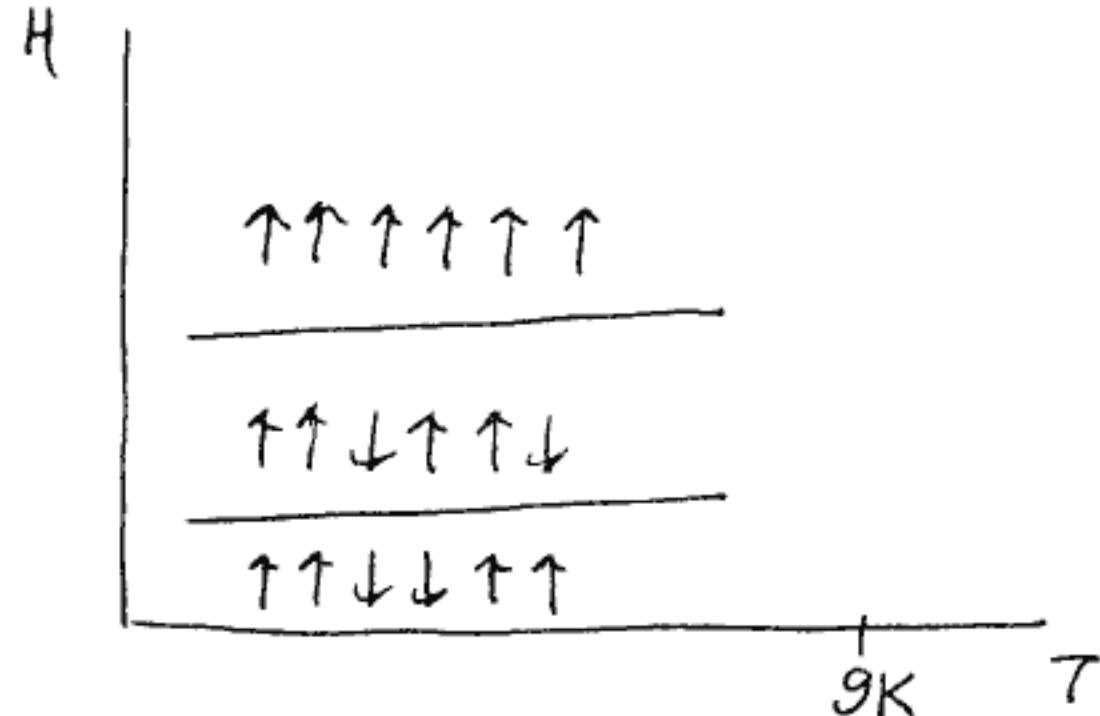
CeSb (cerium antimonit)

(összetett fazisdiagram; rendesített rétegek periodikus változásai)

3 rétegtípus: tetrahedronban megtalálható

felül elrendezés irányban megtalálható  
nem megtalálható

pl. alanyos homokszikliten (9K alatt)



Er, Ho, Tb, Dy egyszerűsítések

(minősősen modulált alanyos homokszikliti fazisok)

## Izotrop ferromágnes

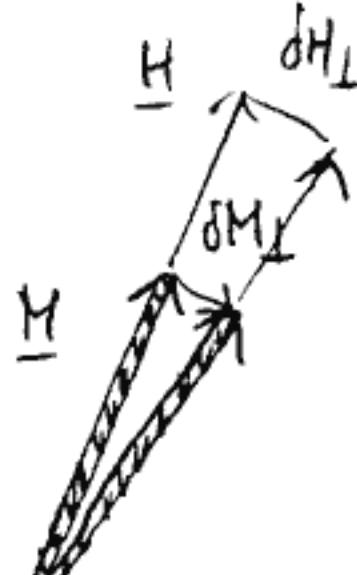
$\underline{H}$  kúpsík mágneses téren a mágneserettseg a térel párhuzamos:  $\underline{M} \parallel \underline{H}$

$$M_\alpha = M(H) \frac{H_\alpha}{H} = - \frac{\partial F(H)}{\partial H_\alpha}$$

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{\partial M_\alpha}{\partial H_\beta} = - \frac{\partial^2 F(H)}{\partial H_\alpha \partial H_\beta} = \underbrace{\frac{\partial M(H)}{\partial H}}_{X_L} \frac{H_\alpha H_\beta}{H^2} + \underbrace{\frac{M(H)}{H} \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{H_\alpha H_\beta}{H^2} \right)}_{\chi_T}$$

longitudinalis susceptibilitás      transversalis susceptibilitás

diagonális rendszer:  $\underline{H} = (0, 0, H)$ ,  $\chi_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \chi_T & \\ & \chi_T \\ & & X_L \end{pmatrix}$



$$\chi_T = \frac{\delta M_\perp}{\delta H_\perp} = \frac{M}{H}$$

a  $H \rightarrow 0$  határért: paramágneses fazis:  $M \rightarrow 0$ ,  $M \approx \chi_L H$ ,  $\chi_T = \frac{M}{H} \approx \chi_L$   
ferromágneses fazis:  $M$  négyszeres,  $\chi_T \rightarrow \infty$

## Heisenberg-modell (ferromágnes)

$s$  nagyságú spinel részen: az  $\underline{R}_i$  résponthozan  $\hat{\underline{S}}_i$ :

(az impulussmomentum:  $\hbar \hat{\underline{S}}_i$ )



$[\hat{S}_{ix}, \hat{S}_{iy}] = i \hat{S}_{iz}$  (ér ciklikusan átirányítva többi komponenter)

$$\hat{S}_i^2 = s(s+1)$$

a Hamilton-operátor:

$$\hat{H} = - J \sum_{\langle ij \rangle} \hat{S}_i \cdot \hat{S}_j - \underline{H} \sum_i \hat{S}_i$$

$J > 0$ : ferromágneses erővel a közközeli következő körmödele között

alapállapot ( $H=0$ ) a Hamilton-operátor forgásinvariantas

$$\hat{S}_i \cdot \hat{S}_j \text{ spektruma: } \hat{S}_i \cdot \hat{S}_j = \frac{1}{2} [j(j+1) - 2s(s+1)], \quad j = 0, 1, 2, \dots, 2s$$

$$= \frac{1}{2} [(\hat{S}_i + \hat{S}_j)^2 - \hat{S}_i^2 - \hat{S}_j^2]$$

Max. számérték:  $s^2$  ( $j = 2s$ , párhuzamos állás)

Min. számérték:  $-s(s+1)$  ( $j = 0$ , ellentétes irányú állás)

szimmetriás alapállapot: minden spin párhuzamos,  $E_0 = -NJS^2$

## Klasszikus Heisenberg-modell

a reciprocitásban lévő spinuk egységesi hosszúságú vektorral:  $\underline{S}_i^2 = 1$

az energia (Hamilton-függvény):  $H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i \cdot S_j - H \sum_i S_i$

$$(\text{a klasszikus határelnél: } \hat{S}_i^1 = \frac{\hat{S}_i}{\sqrt{s(s+1)}}, \hat{x} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{S}_i^1 \hat{S}_j^1 - H \sum_i \hat{S}_i^1 \quad (s \rightarrow \infty))$$

az egy spinre jutó szabadenergia  $f = -\frac{kT}{N} \ln Z$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} f_{N,s}^{\text{kv.}} = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N^{\text{kl.}}$$

áttaglás közelítés: 
$$H = -\frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} S_i \cdot S_j - \sum_i h_i S_i$$

eztlen klasszikus spin meghatározásban:

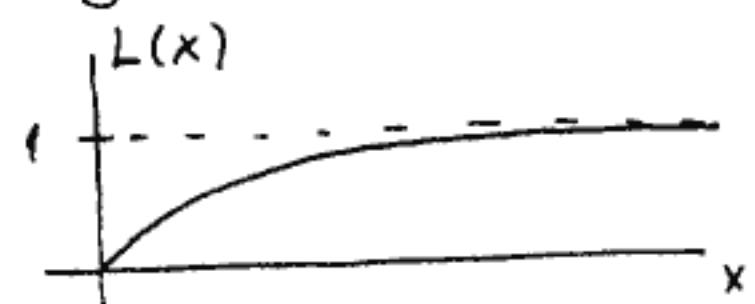
$$\begin{aligned} \text{az energia: } & -H \underline{S} , \text{ az állapotosszeg: } Z = \int dS e^{\beta H \underline{S}} = \iint d\varphi dt \sin \theta e^{\beta H \cos \theta} \\ & = 2\pi \int_0^1 du e^{\beta Hu} = 4\pi \frac{\sinh(\beta H)}{\beta H} \end{aligned}$$

$$\text{a meghatározás: } m_\alpha = \overline{S_\alpha} = kT \frac{\partial \ln Z}{\partial H_\alpha} = \left( \coth(\beta H) - \frac{1}{\beta H} \right) \frac{H_\alpha}{H}$$

$$\left. \begin{array}{l} m_\alpha = L(\beta H) \frac{H_\alpha}{H} \\ m = L(\beta H) \end{array} \right\}$$

$L(x)$  un. Langevin-függvény:

$$L(x) = \coth x - \frac{1}{x}$$



vagy invertálva:

$$\left. \begin{array}{l} H = kT l(m) \\ H_\alpha = kT l(m) \frac{m_\alpha}{m} \end{array} \right\} l(m) \text{ a Langevin-függvény inverze}$$

8

$$\text{könülönformulek: } L(x) = \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \dots \quad x \ll 1$$

$$l(m) = 3m + \frac{9}{5}m^3 + \dots \quad m \ll 1$$

## az áttegter közelítés operaterei

$$H_{i,\text{eff}} = h_i + \sum_j J_{ij} m_j = kT l(m_i) \frac{m_i}{m_i}$$

$$h_{i\alpha} = kT l(m_i) \frac{m_{i\alpha}}{m_i} - \sum_j J_{ij} m_{j\alpha}$$

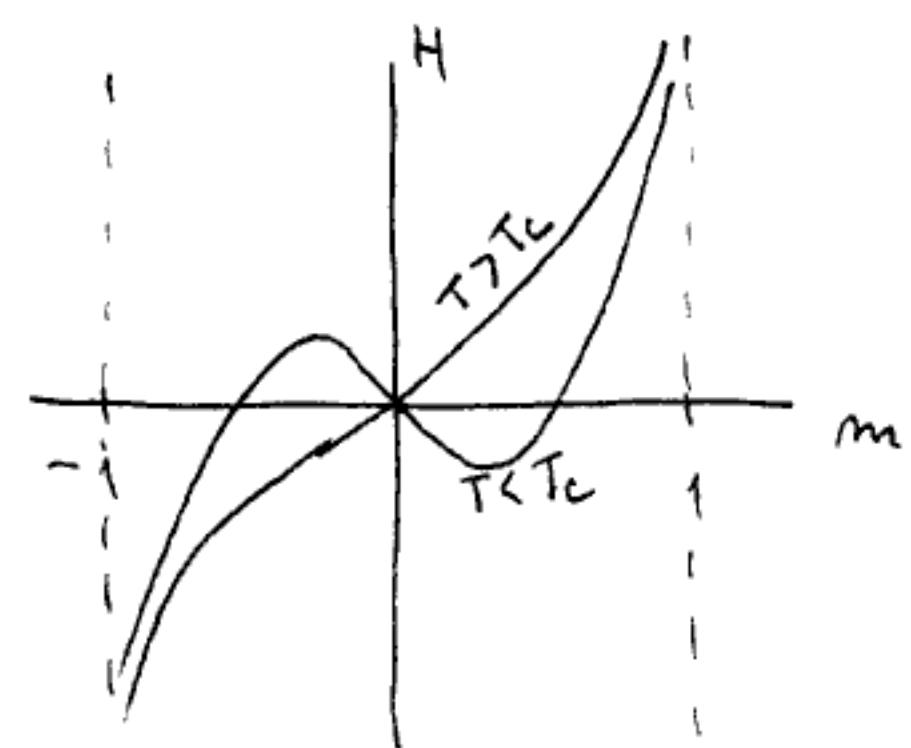
az általánosított homogén mágneses tében:  $\underline{h}_i = \underline{H}$ ,  $\underline{m}_i = \underline{m} \parallel \underline{H}$

$$\boxed{\underline{H} = kT\ell(\underline{m}) - m \sum_j J_{ij} = kT\ell(\underline{m}) - J(0)\underline{m}}$$

$$\text{vagy } \underline{m} = L(B(H+J(0)m))$$

$$m \ll 1 \text{ esetén } H \approx (3kT - J(0))m,$$

$$\text{elsől } \boxed{J(0) = 3kT_c}$$



a szusceptibilitás:

$$(\chi^{-1})_{i\alpha, j\beta} = \frac{\partial h_i \alpha}{\partial m_j \beta} = \delta_{ij} \left\{ kT \ell'(m) \frac{m_\alpha m_\beta}{m^2} + kT \frac{\ell(m)}{m} \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{m_\alpha m_\beta}{m^2} \right) \right\} - J_{ij} \delta_{\alpha\beta}$$

Fourier-transzformációval után:

$$\chi_{\alpha\beta}^{-1}(q) = \underbrace{\left( kT \ell'(m) - J(q) \right)}_{\chi_L^{-1}(q)} \frac{m_\alpha m_\beta}{m^2} + \underbrace{\left( kT \frac{\ell(m)}{m} - J(q) \right)}_{\chi_T^{-1}(q)} \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{m_\alpha m_\beta}{m^2} \right)$$

longitudinális  
susceptibilitás

transverzális susceptibilitás

$$T > T_c : H \rightarrow 0, m \rightarrow 0, \text{ így } \chi^{-1}(q) = 3kT - J(q) = 3k(T-T_c) + J(0) - J(q)$$

$$T < T_c : \chi_T^{-1}(q) \rightarrow \chi_L^{-1}(q) \text{ különböző } H \neq 0 \text{ esetén is}$$

$$H \neq 0 : \chi_T^{-1}(q=0) = \frac{H}{m}$$

$$H=0 \quad \chi_T^{-1}(q) = J(0) - J(q^2) = J_0 q^2 + \dots$$

(legközelebbi montrázó kölcsönhatás  
egyensúlyi köbös rácis  
 $qa \ll 1$ )

$$\text{mivel } \boxed{\chi_T(q) \sim \frac{1}{q^2} \text{ (} qa \ll 1 \text{)}}$$

az s spinű kvantum-Heisenberg-modell ötféle közelítésben

megancsere leírásban kerülnek, a változás az s spinű vonatkozó általánosított modellben van:

$$\underline{m} = \frac{1}{S} \overline{\underline{S}}, \quad m = \frac{k_B T}{S} \frac{\partial \ln Z}{\partial H}, \quad Z = \sum_{m=-S}^S e^{B H m} = \operatorname{sh}(B H (S+1/2)) / \operatorname{sh}(B H / 2)$$

$$\underline{m} = B_S(\beta_S H) \cdot \frac{\underline{H}}{H}, \text{ ahol } B_S(x) = \frac{2S+1}{2S} \operatorname{cth}\left(\frac{2S+1}{2S}x\right) - \frac{1}{2S} \operatorname{cth}\frac{x}{2S}$$

az ún. Brillouin-függvény

a Langevin-függvény helyette a Brillouin-függvény lép.

az  $S \rightarrow \infty$ ,  $BH = \text{állandó}$  határváltozóban a klassz. Heisenberg-modellt kapjuk

## transzverzális (orientációs) fluctuációk ( $T < T_c$ )

$$\left. \begin{aligned} C_T(q) = kT \chi_T(q) \sim \frac{1}{q^2} \quad (H=0, q \ll 1) \\ \text{maz } C_T(r) \sim \frac{1}{r} \quad (r \gg a) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{horizontális (hatályfüggelék} \\ \text{szint leengő) korrelációk} \\ \text{a rendszer fázisban} \end{array}$$

### egy könnyűmény

$$H = (0, 0, H), M = (0, 0, m)$$

$$1 \geq \overline{s_{ix}^2} = C_{T,ii} = \frac{1}{N} \sum_q C_T(q) = \frac{V_0}{(2\pi)^d} \int d^d q C_T(q)$$

termodynamikai, d-dimenziós rácson

$$H \rightarrow 0 : C_T(q) \sim \frac{1}{q^2} \quad (q \ll 1), \quad \int d^d q C_T(q) \text{ divergens } d \leq 2 \text{ dimenziókból}$$

$$\left( \int dqq^{d-3} = \infty, d \leq 2 \right)$$

az elmentesítés feloldása:  $d \leq 2$  dimenziókból minős horizontális rend

megjire kiötdíthető az eredmény a tel. Heisenberg-modellhez ill. az ötlyér közeliítéshet?

### Mermin-Wagner-tétel – en egyrészt eredmény

$$\text{kv. Heisenberg-modell: } \mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} S_i S_j - H \sum_i S_i, \quad S_i^2 = s(s+1)$$

$$\frac{C_T(q)}{kT} \geq \chi_T(q) \geq \frac{m^2}{Hm + \omega q^2}, \quad w = \sum_i |J_{ij}| \cdot (R_i - R_j)^2 \cdot s(s+1)$$

(= csak a  $q \neq 0$  határesetben) <sup>†</sup> Ilyen korlát, ha  $m \neq 0$  és  $w$  véges (rövidtávú kölcsönhatás)

### könnyűmények

$$a) s(s+1) > \overline{s_{ix}^2} = \frac{1}{N} \sum_q C_T(q) = \frac{V_0}{(2\pi)^d} \int d^d q C_T(q)$$

$H \rightarrow 0$  esetén az integrál divergens  $d \leq 2$  dimenziókból

$\left. \begin{array}{l} d \leq 2 \text{ dimenziókból} \\ \text{a Heisenberg-modellhez} \\ \text{minős abelhelyet ki} \\ \text{horizontális rend} \end{array} \right\}$

b)  $d \geq 3$  dimenzióban,  $T < T_c$  következik:  $\chi_T$  és  $C_T$  legalább  $\frac{1}{H}$  ill.  $\frac{1}{q^2}$  szintű divergál

korollár állítások minden isotrop simetriájú rendszere nyogalmazhatók  
(isotrop antiferromágnes, magisztrális He)

azaz  $d=1, 2$  dimenzióban a fluctuációk nem tenik lehetséges a horizontális rend

### kiejtéseket

(isotrop rendszereken  $d=1, 2$  dimenzióban, anisotróp rendszerekben  $d=1$  dimenzióban)

## Goldstone-tétel

szimmetriásérés: soktest-rendszerek alcsoport kömérőkleten általában szimmetriásérést mutatnak, amit megalosultó átléptetések alcsoportabb szimmetriájú, mint a rendszer leíró törzseinek

térzefizika / térelválasztás: folytonos globális szimmetria sérülésekkel skálár ( $0$ -spinű), zérus tömegű boson jelentkezik meg (Goldstone-boson)

soktest-rendszerben: folytonos globális szimmetria sérülésekkel

a) hosszútávú korrelációk (algebrai / hatványfüggvény szerinti lemezejük)

b) propagátor, gap nélküli elemi gerjesztés (Goldstone-módus)

$$(q \rightarrow 0 : \omega_q \rightarrow 0, \frac{\text{Im } \omega_q}{\text{Re } \omega_q} \rightarrow 0)$$

Soktest-rendszerben a folytonos szimmetria általában közelítőleg áll fenn.

Példák Goldstone-módusokra:

izotrop ferromágnes

— spinhullám ( $\omega_q = D_s q^2$ )

izotrop antiferromágnes

— spinhullám ( $\omega_q = c_q$ )

superfolyékony  $\text{He}^4$

— második hang ( $\omega_q = c_2 q$ )

inkommungruabilitás szerkezet

— fáron ( $\omega_q \sim 1/q - q_0$ )

illusztráció: izotrop ferromágnes

$H$  ↑ hosszútávú korrelációk (az irányfluktuációiban)

$$\chi_T \sim C_T \sim \frac{1}{q^2}$$

$$\text{spinhullámok} \\ \omega_q = D q^2$$

(lassú irányváltások dinamikája)

$$\omega_q \sim e^{i(qx - \omega_q t)}$$

spin diffúzió  
 $\omega_q = -i D q^2$   
 (a megnöveztetett  
 megnövező megszűnésig)

kritikus lelassulás

$$T \rightarrow T_c : D_s \rightarrow 0$$

$$D \rightarrow 0$$

$$T = T_c \quad \omega_q \sim -i q^2 \\ z \approx 5/2$$

## NEVEZETES MODELLEK, EGZAKT MEGOLDÁSOK

I sing-modell (legközelebbi szomszéd kölcsönhatással):  $\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j - \sum_i H S_i$   
 egzakt megoldás d=1 dimenzióban, külső térel és amélküd  
 minden fázisállapotkülönbség  $S_i = \pm 1$   
 $J > 0$

d=2 dimenzióban, külső tér nélküli ( $H=0$ )

különböző sűrűségi rácsokon ( $\square, \Delta, \ast$  stb.)  
 ( $\square$ -rács előnöör: Onsager, 1944)

néhány eredmény:

$$\left. \begin{array}{l} T > T_c \\ H = 0 \end{array} \right\} F \approx a - \frac{b}{2} (T - T_c)^2 \ln |T - T_c| \quad (T \rightarrow T_c)$$

logaritmikus divergens fajho

$$T < T_c, H = 0 : m \sim (T_c - T)^{1/2} \quad (T \rightarrow T_c)$$

$$T = T_c, H = 0 : \overline{S_i S_j} \sim |R_i - R_j|^{-1/4}$$

kritikus pont ( $\square$ -rács):  $v_c = \sqrt{2} - 1$ ,  $v = \text{th}(J/k_B T)$

### Szférikus modell

N spin rácsok,  $-\sqrt{N} < S_i < \sqrt{N}$ ,  $\sum_{i=1}^N S_i^2 = N$

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j$$

a Ising-modell fázistere: N dimenziós hiperkocka csinai  
 $(S_i = \pm 1, S_i^2 = 1, i = 1, 2, \dots, N)$

a szférikus modell fázistere: N dimenziós,  $\sqrt{N}$  sugorú gömb felülete

egzakt megoldás d=1, 2, 3 dimenzióban (külsőtérel is)

fázisállapotkülönbség d≥3 dimenzióban, a krit. részhálók ismeret minden d≥3 dimenzióban

## n-vetor modell

d dimenziós rácon  $\underline{S}_i$ : n-komponensű vektorek:  $\underline{S}_i = (S_1, \dots, S_n)$

$$\underline{S}_i^2 = \sum_{\alpha=1}^n S_{i\alpha}^2 = 1$$

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \underline{S}_i \cdot \underline{S}_j - H \cdot \sum_i \underline{S}_i$$

$n=1$  Ising-modell

$n=2$  mikkelő rotátor (klasszikus XY) modell

$n=3$  klasszikus Heisenberg-modell

:

$n \rightarrow \infty$  ekvivalens a szénikus modellel

különböző környezetekben:

$O(n)$  szimmetria

## Heisenberg-modell

$\hat{\underline{S}}_i$ : spin operátorok:  $[\hat{S}_{ix}, \hat{S}_{iy}] = i \hat{S}_{iz}$ ,  $\hat{\underline{S}}_i^2 = s(s+1)$

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \hat{\underline{S}}_i \cdot \hat{\underline{S}}_j - H \cdot \sum_i \hat{\underline{S}}_i \quad (H=0 \text{ extén fügeszimmetria})$$

anizotróp Heisenberg-modell is definíálható, pl.:

$$\hat{H} = - \sum_{\langle ij \rangle} (J_{\perp} (S_{ix} S_{jx} + S_{iy} S_{jy}) + J_{\parallel} S_{iz} S_{jz})$$

speciálisan:  $J_{\parallel}=0$  esetén az ún. XY-modell

különböző környezetekben isztróp modellökben (Heisenberg-modell, n-vetor modell ( $n \geq 2$ ))

minős fázisátabelekben (kosszintári rend, más spontán mejurányzatok elavult hőméreteleken) d  $\leq 2$  dimenzióban (L. Mermin-Wagner-tétel)

d=2 dimenzióban az XY-modell kinétele: Kosterlitz-Thouless-fázisátalakulás

$T > T_c$ : paraméteres, a korrelációk exponenciálisan nőnek le

$T < T_c$ : minős kosszintári rend, de a korrelációk hatvánnyfüggvények néhány nőnek le, mint a kritikus állapotban

Egyéb modellek: d=2 ferroelectromos modellek, Potts-modell,  $\phi^4$ -modell (ketőbb), stb.

## KRITIKUS VISELKEDÉS — KRITIKUS EXPONENSEK

Mérésök, átléptér közelítés, Landau-elmelet, stb. merül a kritikus viselkedés hatásfüggvényekkel jellemzhető

### kritikus kiterők

$f(x)$  folytonos, pozitív függvény

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln f(x)}{\ln x} \quad \text{létente, akkor } f(x) \sim x^\lambda$$

ε definícióval megadott a λ exponentt adják a következő függvéjet:

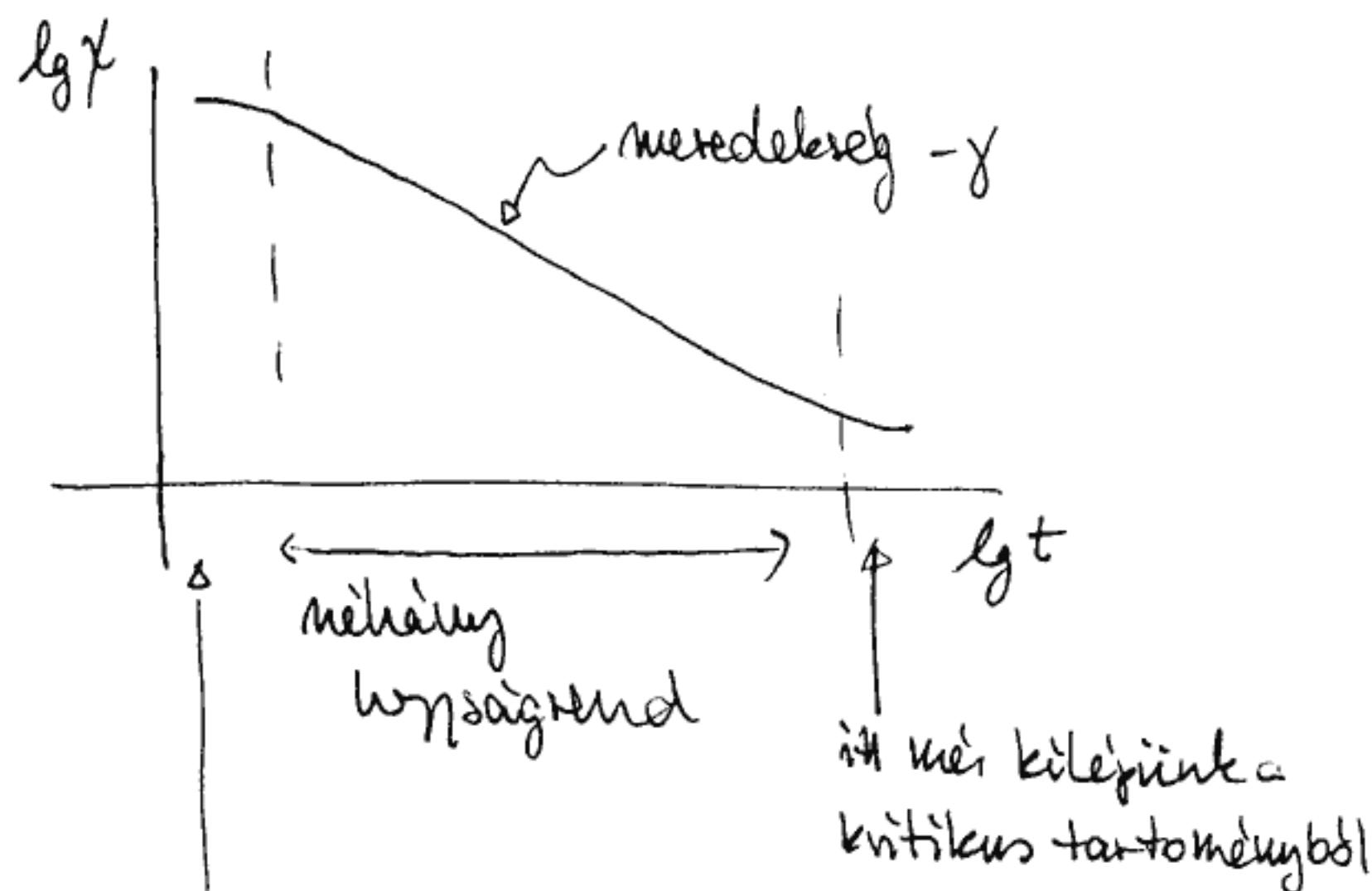
$$x^\lambda, x^\lambda |\ln x|^\sigma, x^\lambda (1 + Bx^\sigma + \dots) (\sigma > 0), \text{ stb.}$$

így pl.  $\lambda = 0$  jelenthet konstans,  $|\ln x|$  singularitást.

### mérésleben:

pl. a susceptibilitás viselkedése  $x \sim t^{-\gamma}$ ,  $t = \frac{T - T_c}{T_c}$  in. redukált hőmérséklettel

$$\lg x = -\gamma \lg t + \text{const}$$



az elterés lehetségei: véges méret,

$T_c$  változása makroszkópikus inhomogenitás miatt,

"cross-over" (a mérés nem a hajtó aszimptotikus viselkedést mutatja)

## kritikus exponensek kegyménys definició

$$t = \frac{T - T_c}{T_c}$$

méghozzá:

$\beta$ :	$t < 0, H=0$	$m \sim  t ^\beta$
$\gamma$ :	$t \geq 0, H=0$	$\chi \sim  t ^{-\gamma}$
$\delta$ :	$t=0$	$m \sim H^{1/\delta}$
$\alpha$ :	$t \geq 0, H=0$	$C_{H=0} \sim  t ^{-\alpha}$
$\nu$ :	$t \geq 0, H=0$	$\xi \sim  t ^{-\nu}$
$\mu$ :	$t=0,$	$E_H \sim H^{-\mu}$
$\eta$ :	$t=0, H=0$	$C(q) \sim \frac{1}{q^{2-\eta}}, C(r) \sim \frac{1}{r^{d-2+\eta}}$

$\gamma, \chi, \nu$  esetben  
külső jelölést  
alkalmazhatunk  
 $t < 0 \Rightarrow t > 0$   
esetekre,  
pl.  $\gamma$  és  $\gamma'$ .  
mérésök, elvállíték  
nemint  $\gamma = \gamma'$ , stb.

Más rendszerekben: értelmi kerint,  $m$  — rendparaméter,  
 $H$  — konjugált térfogat

## folyadék-gáz átalakulásnál

$C(r)$  a párokorelációs függvény

$$S_f - S_g \sim |t|^\beta \quad (\text{a koegritenencia görbén})$$

$$\kappa_T \sim |t|^{-\gamma} \quad (\text{izoterm kompressibilitás, kritikus izochor})$$

$$|P - P_c| \sim |P - P_c|^\delta \quad (\text{a kritikus izotermén})$$

$$C_v \sim |t|^{-\alpha} \quad (\text{kritikus izochor})$$

## Klasszikus kritikus exponensek

átlagter közelítésből, Landau-elvállítóból

pl. Ising-modell, átlagter közelítés:

állapotágynelet homogen térbeli:

$$H = k_B T \text{Arth} m - J(0)m = k_B(T - T_c)m + \frac{k_B T}{3} m^3 + \dots$$

$$\text{ebből } \beta = 1/2, \gamma = 1, \delta = 3,$$

$$C(q) = \frac{k_B T}{J \alpha^2} \frac{1}{\xi^{-2} + q^2}, \text{ ebből } \eta = 0,$$

$$\xi^{-2} = \left( \frac{k_B T}{1-m^2} - k_B T_c \right) \frac{1}{J \alpha^2}$$

$$T > T_c, H=0: \xi^{-2} = \frac{k_B(T-T_c)}{J \alpha^2}, \text{ ebből } \nu = 1/2$$

$$T = T_c: \xi^{-2} = \frac{k_B T_c}{J \alpha^2} \left( \frac{m^2}{1-m^2} \right) \sim m^2 \sim H^{2/3} \quad \left| \mu = 1/3 \right.$$

termodynamikai potenciál és a fajkő:

$$H = \left( \frac{\partial W}{\partial m} \right)_T, \quad W = W_0(T) + \int_0^m H dm = W_0(T) + \frac{k_B(T-T_c)}{2} m^2 + \frac{k_B T}{12} m^4$$

$$S = - \left( \frac{\partial W}{\partial T} \right)_m = - \frac{dW_0}{dT} - \frac{k_B}{2} m^2 - \frac{k_B}{12} m^4$$

$\uparrow \quad \quad \quad \uparrow$   
 $\sim T-T_c \quad \sim (T-T_c)^2$

$$C_{H=0} = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{H=0} = \begin{cases} -T \frac{d^2 W_0}{dT^2} & T > T_c \\ -T \frac{d^2 W_0}{dT^2} - \frac{k_B T}{2} \frac{\partial m^2}{\partial T} & T < T_c \end{cases}$$

$$m^2 = \frac{3}{T_c} (T_c - T), \quad \text{elből} \quad C_{H=0} \Big|_{T_c^-} - C_{H=0} \Big|_{T_c^+} = \frac{3 k_B}{2} \quad \text{fajkőugrás}$$

$\alpha = 0$

	klasszikus kiterők	Ising-modell $d=2$	szeníkum modell $d=3$	mérések (tajékoztatás értékek)
$\beta$	$1/2$	$1/8$	$1/2$	$\approx 1/3$
$\gamma$	$1$	$\neq 1/4$	$2$	$\approx 4/3$
$\delta$	$3$	$15$	$5$	$\approx 5$
$\alpha$	$0$ /ugrás/	$0$ /ln/	$-1$	$\approx 0$
$\nu$	$1/2$	$1$	$1$	$\approx 2/3$
$\eta$	$0$	$1/4$	$0$	$\approx 0$
$\mu$	$1/3$		$2/5$	

a klasszikus elveletek konfliktusai:

- egzaktan megoldható modellek
- mérések
- Ellettmondás: fluktuációkat elhangosító elveletben felerősödő fluktuációk

egyelő összefüggések (egenlökhessék) kritikus exponensek között

$$C_H = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_H, \quad C_M = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_M, \quad \chi_T = \left( \frac{\partial M}{\partial H} \right)_T$$

$$\text{ismeret: } C_p - C_v = \frac{T V \alpha^2}{\kappa_T} = \frac{T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p^2}{-\left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T}$$

ennek analógiájára:

$$\boxed{C_H - C_M = \frac{T \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)_H^2}{\left( \frac{\partial M}{\partial H} \right)_T}}$$

$$\text{minél } C_M \geq 0, \text{ így } C_H \geq \frac{T \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)_H^2}{\left( \frac{\partial M}{\partial H} \right)_T}$$

$$H=0, T < T_c: \quad C_H \sim |t|^{-\alpha}$$

$$\frac{\left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)_H^2}{\left( \frac{\partial M}{\partial H} \right)_T} \sim |t|^{2\beta - 2 + \gamma}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{az egenlökhesség von tanítatónak} \\ |t| \rightarrow 0 \text{ esetén, ke} \\ -\alpha \leq 2\beta - 2 + \gamma \\ 2\beta + \gamma + \alpha \geq 2 \end{array} \right\}$$

ún. Rushbrooke-egenlökhesség

korai egenlökhességek képrámmal levezethetők

(pl. Griffith-egenlökhesség  $\alpha + \beta(1+\delta) \geq 2$ )

$$\text{klasszikus exponensek } 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 + 0 = 2$$

$$d=2 \text{ Ising-modell } 2 \cdot \frac{1}{8} + \frac{7}{4} + 0 = 2$$

$$\text{sferikus modell } 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 - 1 = 2$$

$$\text{itámyertékek } 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + 0 = 2$$

} az egenlökhesség szimmetriáját teljesül

(korai tapasztalat més  
egenlökhességekkel is)

## Magas hőmérsékletű sorok

Magas hőmérsékleten a kölcsönhatás elhamartható mértékben befolyásolja a rendszert keletkezőt.

Ha a maximális energia  $\ll kT$ , használható a komplexus sorfeszítés:

$$\bar{e}^{-\beta E} = 1 - \beta E + \frac{1}{2} \beta^2 E^2 + \dots$$

$$\text{pl. } Z = \text{Tr } e^{-\beta E} = \text{Tr } 1 - \beta \text{Tr } E + \frac{\beta^2}{2} \text{Tr } E^2 \dots + \frac{(-\beta)^n}{n!} \text{Tr } E^n + \dots$$

$$\frac{\ln Z}{\text{Tr } 1} = -\beta \frac{\text{Tr } E}{\text{Tr } 1} + \frac{\beta^2}{2} \left[ \frac{\text{Tr } E^2}{\text{Tr } 1} - \left( \frac{\text{Tr } E}{\text{Tr } 1} \right)^2 \right] + \dots \quad (\text{kumulatív sor})$$

technikai okokból ezen modelllehetőz  $\beta$  helyett más változót érdemessé hármasztani

## Ising-modell

(legkölcsönbözőbbi nemedik kölcsönhatással)

$$e^{-\beta E} = \exp \left\{ \beta J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j \right\} = \prod_{\langle i,j \rangle} e^{KS_i S_j} \quad (K = \frac{J}{kT})$$

Legyen  $\eta = \pm 1$ , ekkor igaz:  $e^{\eta A} = \cosh A + \eta \sinh A = \cosh A (1 + \eta \tanh A)$

Mivel  $S_i S_j = \pm 1$ , így

$$e^{-\beta E} = (\cosh K)^N \prod_{\langle i,j \rangle} (1 + v S_i S_j)$$

ahol  $v = \tanh K = \tanh \frac{J}{kT}$ , az  $\beta$  a legkölcsönbözőbbi nemedik párok száma (a termodinamikai heterogenitásban)

$$\beta = N z / 2, \quad N \text{ a spinek száma, } z \text{ a koordinációs szám}$$

Bemutatás után:  $e^{-\beta E} = (\cosh K)^N (1 + v \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j + \dots)$   $v$  hatásnyai során belépnek sorba. Ha  $J \ll kT$ ,  $v \approx K = \frac{J}{kT}$ .

## A állapotosság sorra

$$Z = \text{Tr } e^{-\beta E} = (\cosh K)^N \sum_{\{S_i\}} \left( \prod_{\langle i,j \rangle} (1 + v S_i S_j) \right)$$

Bemutatás után az összes  $2^N$  tagja van. A konfigurációkra összegzés után csak azok a tagok csökkenek résztől különböző játszékkel, amelyekben minden spin páros hatására szerepel ( $= 0$ -t is beleértve). Ugyanis az egyes spinokra az összegzés függelmenet történik, és

$$\sum_{S_i=\pm 1} S_i^p = \begin{cases} 2, & \text{ha } p \text{ páros,} \\ 0, & \text{ha } p \text{ páratlan.} \end{cases}$$

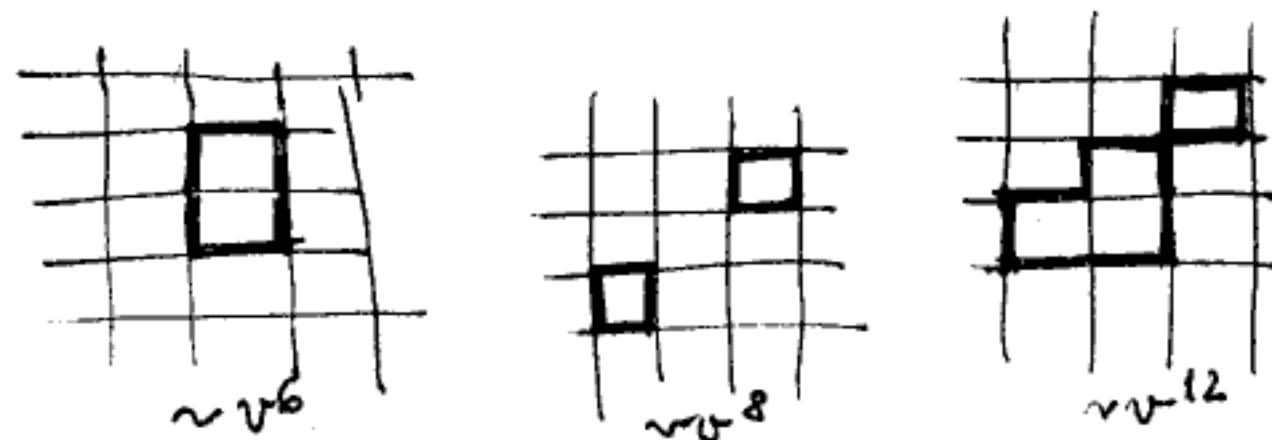
Ez a tag játssza:  $v^p \cdot 2^N$

ábrázolás grafokkal:  $v S_i S_j$  véletlenszerűen a rácsnak behúzottak az  $\langle i j \rangle$  pár közötti kötést. minden olyan pár osztályon szerepel, amely a graffban minden rácspontból párba sorakozó kötés indul ki. Néhány példa:

legyen az  $\ell$  kötések tartalma:

grafok száma  $g(\ell)$

és  $g(0) = 1$  ( $\forall \ell \in \mathbb{N}, g(\ell) = 0 \dots$ )



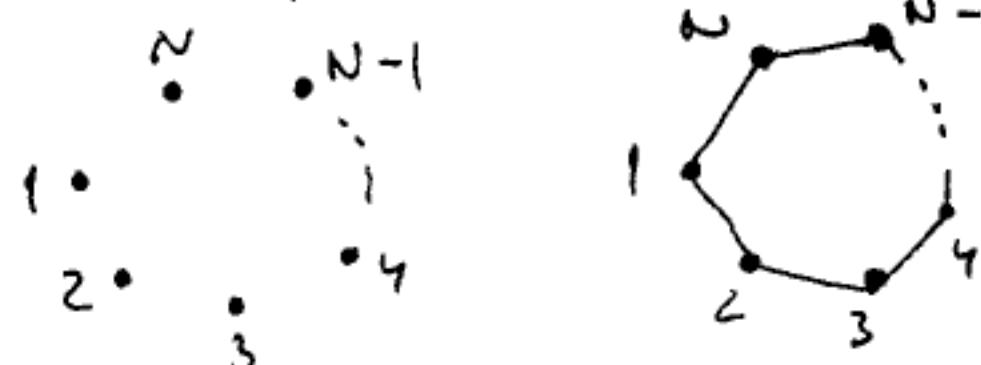
akkor:

$$Z = (\text{ch } K)^3 \cdot 2^N \cdot \sum_{\ell=0}^3 g(\ell) v^\ell$$

Ezután az alkotósság neműtséget grafelméleti problémára vezetik vissza

(pl): Ising-léme (periodikus hatérfeltételekkel):

$g(\ell) = 0$ , kinevezve az  $\ell=0$  és  $\ell=N$  eseteket (üres és teljes graff);  $3 = N$



$$Z = (\text{ch } K)^N \cdot 2^N (1 + v^N) = (2 \text{ch } K)^N + (2 \text{sh } K)^N$$

a termodynamikai hatérelemben:

$$N \rightarrow \infty, v^N \rightarrow 0$$

$$Z = (2 \text{ch } K)^N$$

(pl): Ising-modell többi négyzetes konfigurációja: az öny kinézhető, az grafft meghibásítja elő (L. Landau-Lifschic, V. kötet)

$$\begin{aligned} & 1 + Nv^4 \dots (d=2) \\ & 1 + 3Nv^4 (d=3) \end{aligned} \quad \text{sc.}$$

a korrelációs függvény sora:

$$\overline{S_m S_n} = \frac{1}{Z} \sum_{\{S_i\}} S_m S_n e^{-\beta E}$$

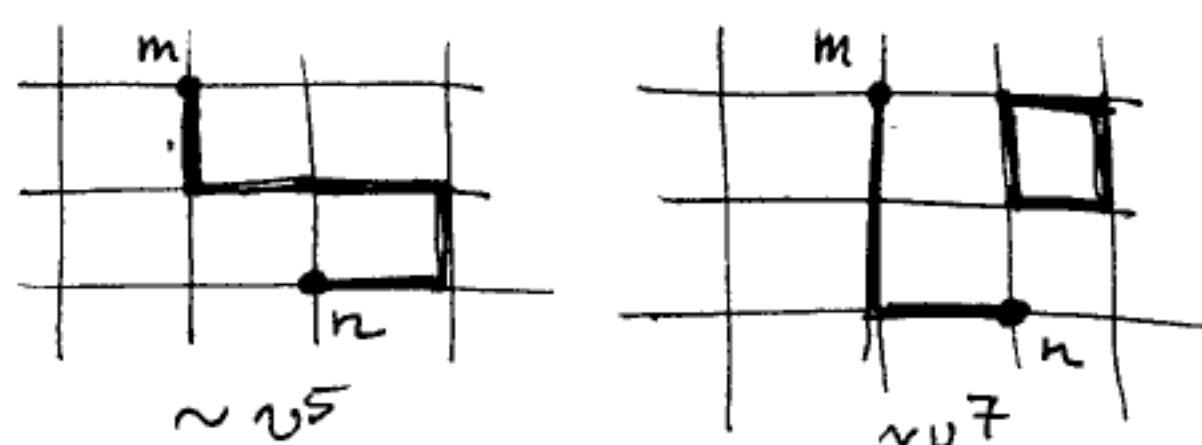
$$\text{a részletező sora: } (\text{ch } K)^3 \sum_{\{S_i\}} S_m S_n \prod_{\langle i j \rangle} (1 + v S_i S_j)$$

Bemutatás után  $2^3$  tag. A konfigurációkra összegzés után innét csak azok maradnak meg, amelyekben minden olyan pár osztályon szerepel.

ábrázolás grafokkal: az  $m$  és  $n$  pontokból páratlan számú, egész pontokból párba sorakozó kötés indulhat ki. Néhány példa:

adott  $m, n$  mellett az  $\ell$  kötések tartalma

grafok néme  $\eta_{mn}(\ell)$ , akkor



(m. 2-point graffde)

$$\overline{S_m S_n} = \frac{\sum_{\ell=0}^3 \eta_{mn}(\ell) v^\ell}{\sum_{\ell=0}^3 g(\ell) v^\ell}$$

a szuszceptibilitás sora

$$\chi = \sum_m \chi_{mn} = \frac{1}{kT} \sum_m C_{mn} = \frac{1}{kT} \frac{\sum_{e=0}^3 \bar{\eta}(e) v^e}{\sum_{e=0}^3 g(e) v^e}$$

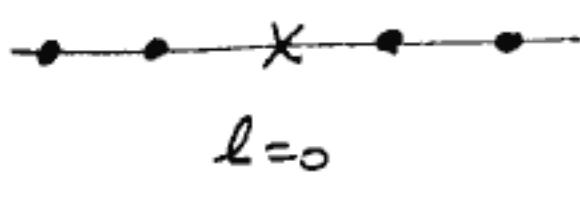
(21)

ahol  $\bar{\eta}(e) = \sum_m \eta_{mn}(e)$  az e-ig rögzített pontból kündülő, e kötessel telepítető 2-pont gráfok száma

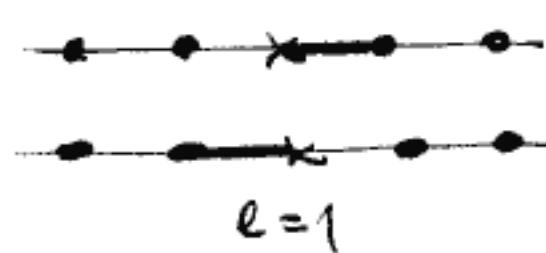
(pl) Spring-léne szuszceptibilitása (termodynamikai hatéreutben):

$$g(e) = \begin{cases} 1, & \text{ha } e=0 \\ 0, & \text{széleint}\end{cases}$$

$$\bar{\eta}(e) = \begin{cases} 1, & \text{ha } e=0 \\ 2, & \text{széleint}\end{cases}$$



$e=0$



$e=1$

$$\chi = \frac{1}{kT} (1 + 2v + 2v^2 + 2v^3 + \dots) = \frac{1}{kT} \left(1 + 2v \frac{1}{1-v}\right) = \frac{1}{kT} \frac{1+v}{1-v} = \frac{e^{2K}}{kT}$$

általában: a szuszceptibilitás sora an elö zérő pontnak megjelenéséig közben nemuttható (elöljáróként meg a névben an 1 utáni elö következik)

$kT \cdot \chi = 1 + zv + z(z-1)v^2 + z(z-1)^2 v^3 + \dots$ , ahol  $z = c$  koordinációs szám

(a keretpontból z irányba indulhatunk, keretből, minél a visszalépés tilos, z-1 irányba)

szuszceptibilitás sora an elö zérő pontnak megjelenésének rendjeiig bezörleg:

síkban:  $\square$ -racs:  $kT \chi = 1 + 4v + 12v^2 + 36v^3 + 100v^4 + \dots$



$\Delta$ -racs:  $kT \chi = 1 + 6v + 30v^2 + 138v^3 + \dots$



térben: egyszerű köbös raacs:

$kT \chi = 1 + 6v + 30v^2 + 150v^3 + 726v^4 + \dots$

Lengyelabb rendű trémítások: síkbeli  $\square$ -raacs: 34 rend  
(1981) terhelő bcc-raacs: 21 rend

## Megszűnésélelői szab és kritikus viselkedés

(22)

(a  $\chi(v)$  suszeptibilitás példáján)

A kritikus pont  $\chi(v)$  singuláris pontja,  $\chi(v) \sim (1 - \frac{v}{v_c})^{-\gamma}$ ,  $v_c = \text{th}(J/kT_c)$

A singuláris pont körül a viselkedésre a  $v=0$  körül hatványosan véges sok egészhatványból álló részükkel következik. Ez ugye kiegészítő feltételekkel megj.

A hatványt a komplex  $v$  török vizsgálja:  $kT\chi(v) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v^n$

Konvergenciásugár: d'Alembert-kritérium szerint  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| = \frac{1}{\rho}$ ,

$|\rho| < 1$ : a sor abszolút konvergens, az összefüggés nyilvánvaló,

$|\rho| > 1$ : a sor divergens.

$\chi(v)$  origóhoz legközelebbi singuláritása határozza meg hatványosnak konvergenciásugárát. Ha ez a pozitív valós tengelyen van, akkor a kritikus pontat megelőző fizikai singulitással arányos, s így  $\rho = v_c$

$v_c$  és  $\gamma$  meghatározása az ún. hagyadás módszerrel

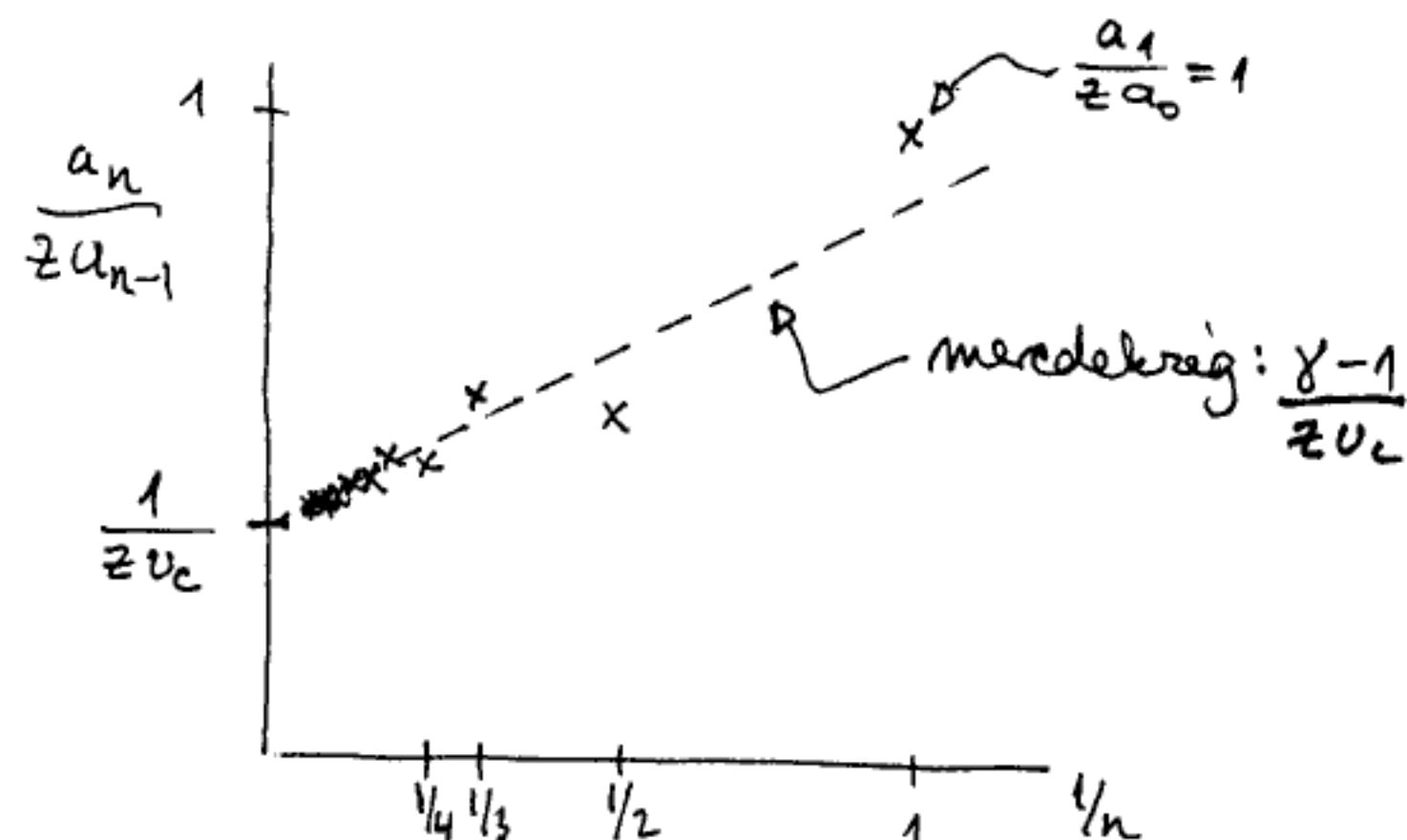
Feltehető, hogy az origóhoz legközelebbi singuláritás a fizikai singuláritás, és határozza meg a hatványos egészhatványok viselkedését minden  $n$ -re.

$$kT\chi(v) \approx A \left(1 - \frac{v}{v_c}\right)^{-\gamma} = A \left(1 + \frac{\gamma v}{v_c} + \frac{\gamma(\gamma+1)}{2!} \left(\frac{v}{v_c}\right)^2 + \dots + \frac{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}{n!} \left(\frac{v}{v_c}\right)^n + \dots\right)$$

Nagy  $n$ -re ion kell viselkedniük az egészhatványokat, azaz

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \approx \frac{\gamma+n-1}{n} \frac{1}{v_c} = \frac{1}{v_c} \left(1 + \frac{\gamma-1}{n}\right)$$

A szakaszos ábrázolás:  $\frac{a_n}{za_{n-1}}$  a  $\frac{1}{n}$  függvényében (z a koordinációs szám)



(a hagyadás módszer ugyan abban alkalmazható, ha  $a_n$  előjele minden  $n$ -re ugyanaz, a a hibát pl. az összefüggésnél)

ha nem a fizikai singularitás dominans:

a következő módszerek alkalmazhatók:

a) a komplex vektorlektorérei a singularitásokat

átrendezik, alkalmas leképezés a fizikai singularitást kedvezőbb helyzetbe hozza

b) az analitikus folytatás közelítése Padé-approximánsokkal

a Padé-approximánsoknak polinomokkal rendelkező finomabb függvények használata révén alkalmazhatók.  $\chi(v)$  logaritmikus derivateja válhatóan iken,  $\frac{\partial \ln \chi(v)}{\partial v} \approx \frac{-\gamma}{v - v_c}$ .

$$\frac{\partial \ln \chi(v)}{\partial v} = \underbrace{\frac{p_0 + p_1 v + \dots + p_L v^L}{1 + q_1 v + \dots + q_M v^M}}_{[L,M]} + O(v^{L+M+1})$$

[L,M] Padé-approximáns, gyűthető a magasból kihúzott L+M+1 rendű hulltösszegűre gyűthetői szintetiken nyilatkozzák.

Az origonális lehűtőlebb erő singularitás (pólus) a valós tengelyen:  
a pólus helye  $v_c$ , résiduumme  $-\gamma$  közelítő értéke.

gyakorlati megoldás: Ising-modell törböl bcc rácson  
hügneter transformáció és Padé-approximánsok alkalmazásával

$$\gamma = 1.240 \pm 0.002$$

$$v = 0.628 \pm 0.002$$

$$v_c = 0.15609$$

operátor sorbítések:

alemannykömörételektől valók: az alemannykömörételektől kiindulva, a legalsó nevezőtől  
gyorsítésket vesik figyelembe

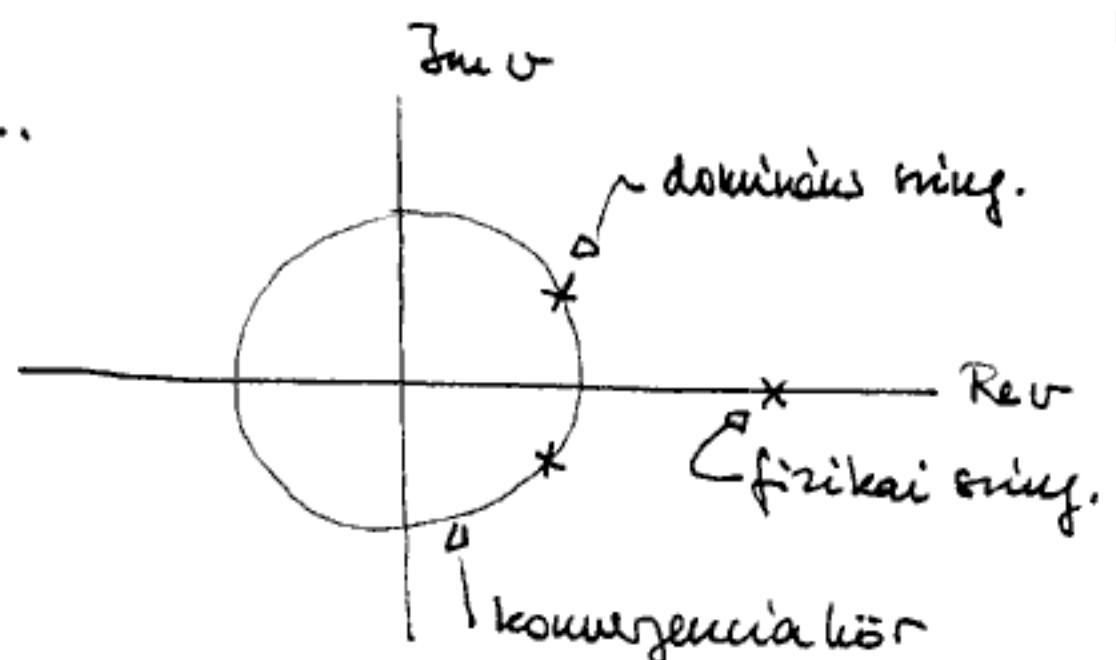
a) Ising-modell: a spinek átfordításával kapott gyorsított algoritmusban  
páros számú kötés energia volt előjelet  $\rightarrow e^{-4K}$  hatásjai merint heledő sorok

b) Heisenberg-modell: spinhullám-elémítet

cluster-sorbítés: kiindulás a wigner megnézés terén kialakuló álegyből

Ising-modell:  $e^{-2\beta H}$  hatásjai merint heledő sorok

a sorbítés során a ritka szerkezet nyílásai Mayer-jelle  
cluster-sorbítéssel



lepték, leptéleváltás:

lepték: a megfigyelés jellemző hosszúsága ( $\ell$ )

$\lambda \ll \ell$  hosszúsági jelenségek elmosva jelenhetnek (felbontóképesség)

$\lambda \gg \ell$  hosszúságok szin uszágyellátók (létehető)

ha az rendszernél, a hosszúság több nyssenzeljén, nincs jellemző, természetes  
lepték, akkor a megfigyelés leptékkel valtoztatásával kaphatóan  
korrelációjai törvénye fognak meghető meg → ez a skálázás

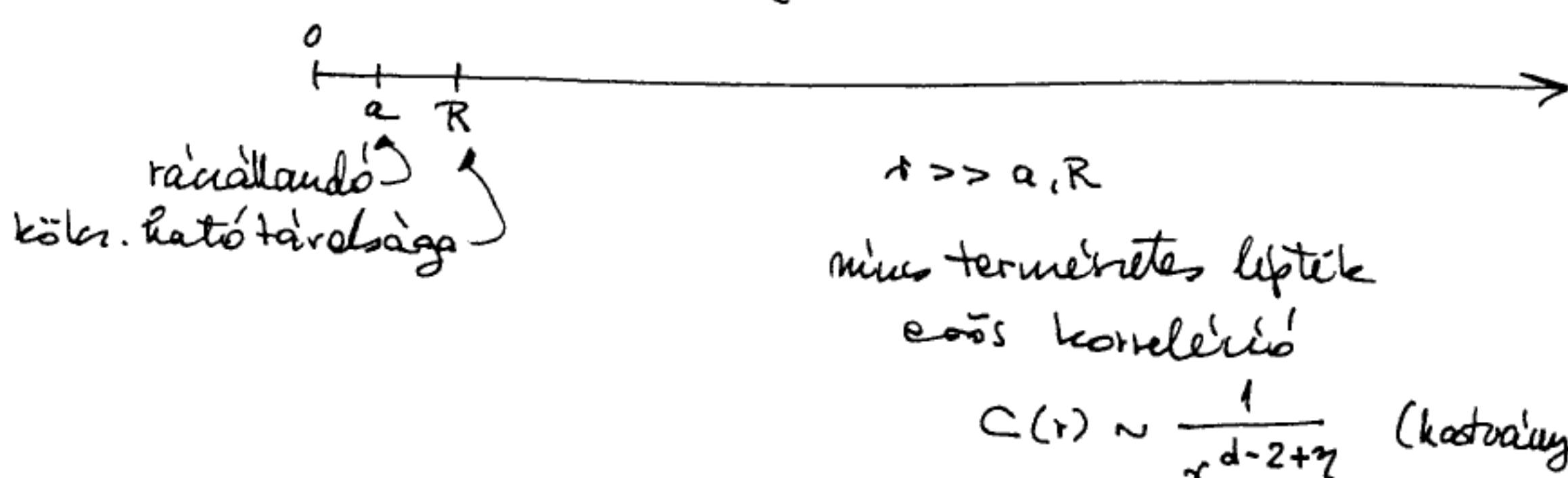
pl.: termodynamika: a makroskopikus rendszerek mérete minden jellemző mellett  
egybe; függelkesség, additivitás → terfogattal arányos  
skálázás

hidrodinamika: karakteristikus hosszaknak a hiteleltetésekkel  
adódnak

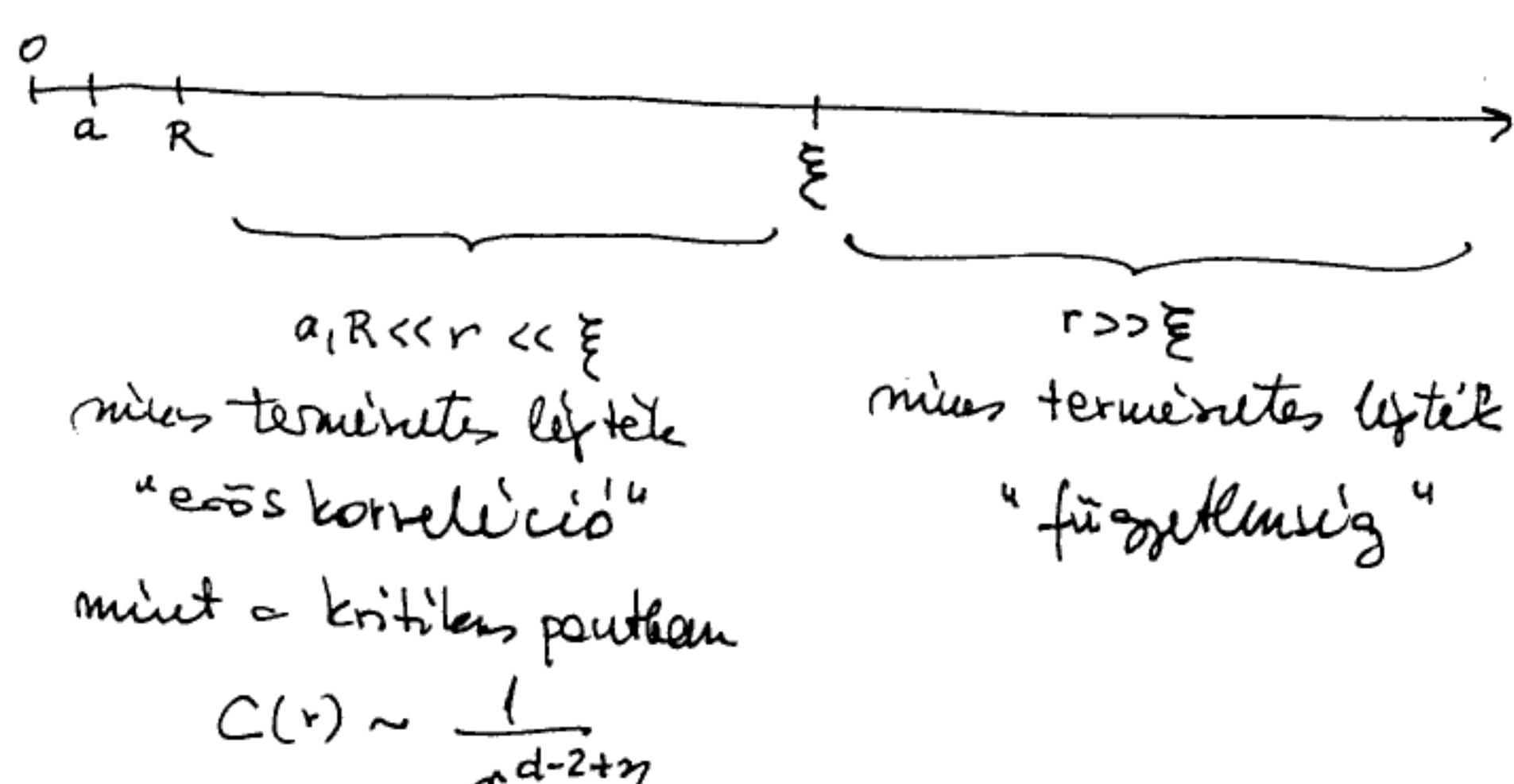
leptéknélküliség a kritikus pontban és közelében

a kritikus ponthoz közelítve a korrelációs hossz,  $\xi \rightarrow \infty$

hosszúságok a kritikus pontban:  $\xi = \infty$



hosszúságok a kritikus ponthoz közel:  $\xi \gg a, R$



hullámzásnakal megvalósítva:

$$q \ll \frac{1}{\xi}$$

$$\frac{1}{\xi} \ll q \ll \frac{1}{R}, \frac{1}{a}$$

$$C(q) \approx C(0) = k_B T \chi$$

$$\chi \propto \xi^{\delta/\nu}$$

$$C(q) \sim \frac{1}{q^{2-\gamma}}$$

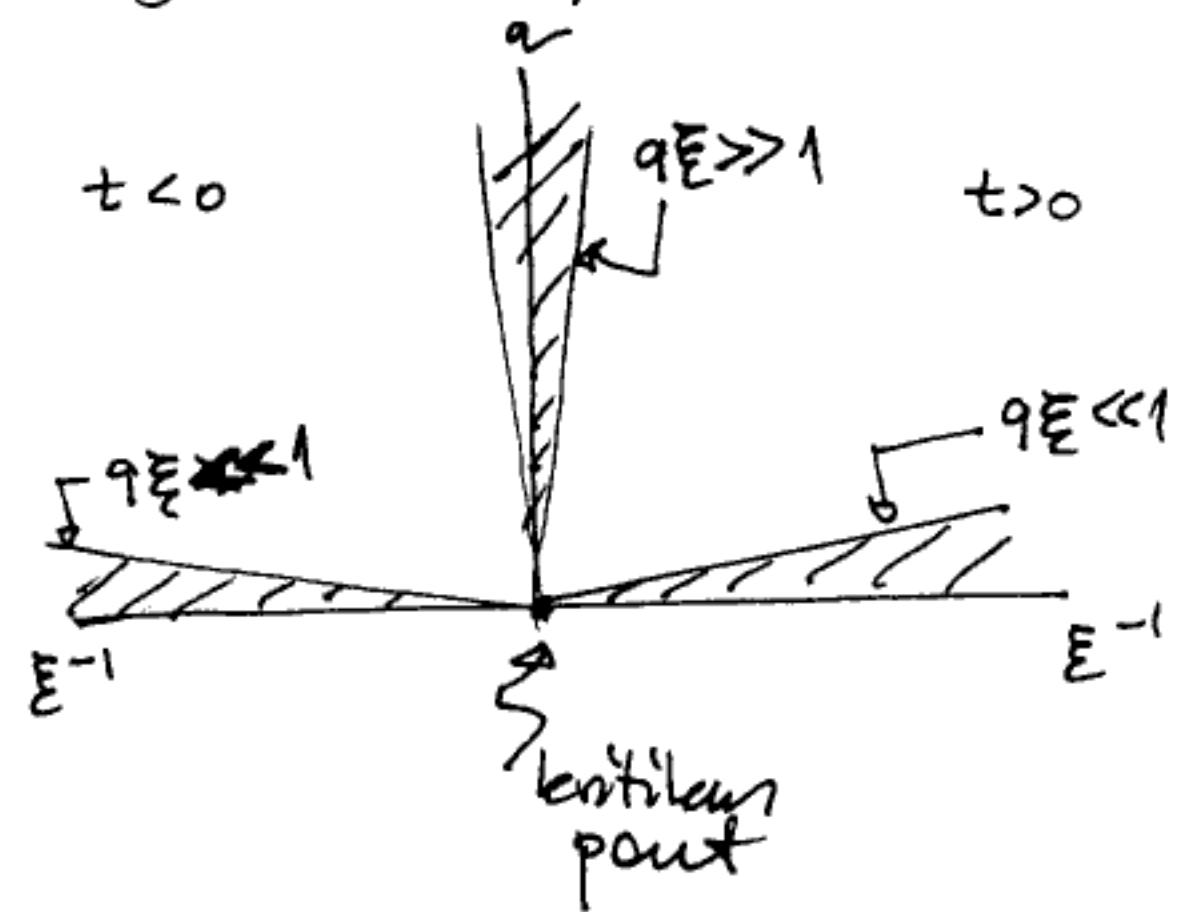
skálahipotézis: korrelációk függvénye

$H=0$  eset:  $a \cdot t = \frac{T-T_c}{T_c}$  redukált hőmérséklet helyett használhatjuk a  $E^{-1} \sim |t|^\beta$  változót

dimenzióanalízis:

$$C(q, \xi) = C(q=0, E) \cdot f_{\pm}(qE)$$

$\underbrace{\phantom{C(q, \xi) = C(q=0, E) \cdot f_{\pm}(qE)}}$  összetlen jellemző lesz:  $\xi$   
 $\underbrace{\phantom{C(q, \xi) = C(q=0, E) \cdot f_{\pm}(qE)}}$  összetlen dimenzióban  
kombináció:  $q\xi$



$$C(q, \xi) = \xi^{\delta/\nu} f_{\pm}(q\xi)$$

az  $f_{\pm}(x)$  függvény tulajdonságai:

$$x \ll 1 \quad (q\xi \ll 1) \quad f_{\pm}(x) \approx f_{\pm}(0) \text{ néges}$$

$$x \gg 1 \quad (q\xi \gg 1) \quad f_{\pm}(x) \sim x^{-(2-\gamma)}$$

ebbén a tartományban  $C \sim q^{-(2-\gamma)}$ , ebből  $\xi$ -től független, ezért

$$\frac{\delta}{\nu} = 2 - \gamma$$

összefüggés kettőkönkörnyezetben között, mű. skálára

a hosszúság átskálázásának hatása:

$$C(q, \xi) = \lambda^{\delta/\nu} \left(\frac{\xi}{\lambda}\right)^{\delta/\nu} f_{\pm}(\lambda q, \frac{\xi}{\lambda})$$

$$C(q, \xi) = \lambda^{\delta/\nu} C(\lambda q, \frac{\xi}{\lambda})$$

vegy  $\xi$  helyett a  $t$  redukált hőmérsékletet használva:

$$C(q, t) = \lambda^{\delta/\nu} C(\lambda q, \lambda^{\delta/\nu} t)$$

$t=0$  eset: a  $H$  mágneses térfelvételhez köthető a  $E_n^{-1} \sim H^\mu$  változót az előző gondolatmentű nyírnihető, eredménye:

$$C(q, H) = \lambda^{8/\nu} C(\lambda q, \lambda^{1/\mu} H)$$

a skálahipotézis ált. gyakorlása:

$$C(q, t, H) = \lambda^{8/\nu} C(\lambda q, \lambda^{1/\nu} t, \lambda^{1/\mu} H)$$

a korreláció függése a  $q, t, H$  változók általánosított homogen függése

### általánosított homogen függések

homogen ( $p$ -ed rendű) függvény:  $\lambda^p f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y)$

általánosított homogen függvény:  $\lambda^p f(x, y) = f(\lambda^a x, \lambda^b y)$

(az egész kiterő 1-nek valamint, pl. a  $\lambda^p \rightarrow \lambda$  lefuttatással

$$\lambda f(x, y) = f(\lambda^{a/p} x, \lambda^{b/p} y)$$

általánosított homogen függvény parciális deriváltjai is ált. homogen függések

### skálahipotézis: termodynamikai függések

a kritikus pont közelében a szabadenergia minimális (dominans) helyre

a  $t, H$  változók általánosított homogen függések

közvetlenül feltételez: összhangban áll a korreláció függése valamitől

$f(t, H)$  (egyégi térfogat v. egy spin szabadenergiája) skálahipotézissel

$$\downarrow \\ m(t, H) = -\frac{\partial f}{\partial H}$$

$$\downarrow \\ \chi(t, H) = \frac{\partial m}{\partial h} \rightarrow \chi(t, H) = \frac{1}{k_B T} C(q=0, t, H)$$

$\chi(t, H) = \lambda^{8/\nu} \chi(\lambda^{1/\nu} t, \lambda^{1/\mu} H)$ , vagy a  $t$ -höz tartozó hatvány kiterőjét 1-nek valamint:

$$\chi(t, H) = \lambda^\delta \chi(\lambda t, \lambda^\Delta H), \quad \Delta = 2/\mu.$$

A megnövekedés és a szabadenergia skálafordításai, ezzel összhangban:

$$m(t, H) = \lambda^{8-\Delta} m(\lambda t, \lambda^\Delta H)$$

$$f(t, H) = \lambda^{8-2\Delta} f(\lambda t, \lambda^\Delta H)$$

## A skálahipotézis következményei:

a) skálatorszintyek (kritikus kiterők közötti összefüggések)

$$t=0, H=0 \quad C(q, 0, 0) = \lambda^{\frac{\gamma}{\nu}} C(\lambda q, 0, 0)$$

$$\text{a } \lambda q = 1 \text{ változással: } C(q, 0, 0) = q^{-\frac{\gamma}{\nu}} C(1, 0, 0) \sim q^{-(2-\gamma)}$$

$$\text{azaz: } \boxed{\gamma = \nu(2-\gamma)}$$

$$H=0, t < 0 \quad m(t, 0) = \lambda^{\frac{\gamma-\Delta}{\nu}} m(\lambda t, 0)$$

$$\text{a } \lambda|t|=1 \text{ változással: } m(t, 0) = |t|^{\frac{\Delta-\gamma}{\nu}} m(-1, 0) \sim |t|^{\beta}$$

$$\text{azaz } \boxed{\beta = \Delta - \gamma}$$

$$t=0, H \neq 0 \quad m(0, H) = \lambda^{\frac{\gamma-\Delta}{\nu}} m(0, \lambda^\Delta H)$$

$$\text{a } \lambda^\Delta H = 1 \text{ változással: } m(0, H) = |H|^{\frac{\Delta-\gamma}{\nu}} m(0, \pm 1) \sim |H|^{1/\delta}$$

$$\text{azaz } \frac{1}{\delta} = \frac{\Delta-\gamma}{\nu} = \frac{\beta}{\nu}, \quad \boxed{\Delta = \beta\nu}$$

$$H=0, t \neq 0 \quad f(t, 0) = \lambda^{\frac{\gamma-2\Delta}{\nu}} f(\lambda t, 0)$$

$$\text{a } \lambda|t|=1 \text{ változással: } f(t, 0) = |t|^{\frac{2\Delta-\gamma}{\nu}} f(\pm 1, 0) \sim |t|^{2-\alpha}$$

$$\text{azaz } \boxed{2-\alpha = 2\Delta - \gamma} \text{ vagy: } 2-\alpha = 2(\Delta - \gamma) + \gamma = 2\beta + \gamma$$

nyolc exponens között 5 összefüggés:

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \Delta, \nu, \mu, \eta$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \nu(2-\gamma) & (1) \\ \beta &= \Delta - \gamma & (2) \\ 2-\alpha &= 2\Delta - \gamma & (3) \\ \Delta &= \frac{\nu}{\mu} & (4) \\ \Delta &= \beta\nu & (5) \end{aligned}$$

skálatorszintyek

3 független exponens

(mi minden  $\gamma, \nu, \mu$  színtelenítve fejeztük ki)

további kérdés, az előzőektől nem független, skálatorszintek:

$$(2), (3) \rightarrow 2\beta + \gamma + \alpha = 2 \quad (\text{Rushbrooke-egyenlőség: } 2\beta + \gamma + \alpha \geq 2)$$

$$(2), (5) \rightarrow \beta(\delta-1) = \gamma$$

$$(2)(3)(5) \rightarrow \beta(\delta+1) = 2-\alpha$$

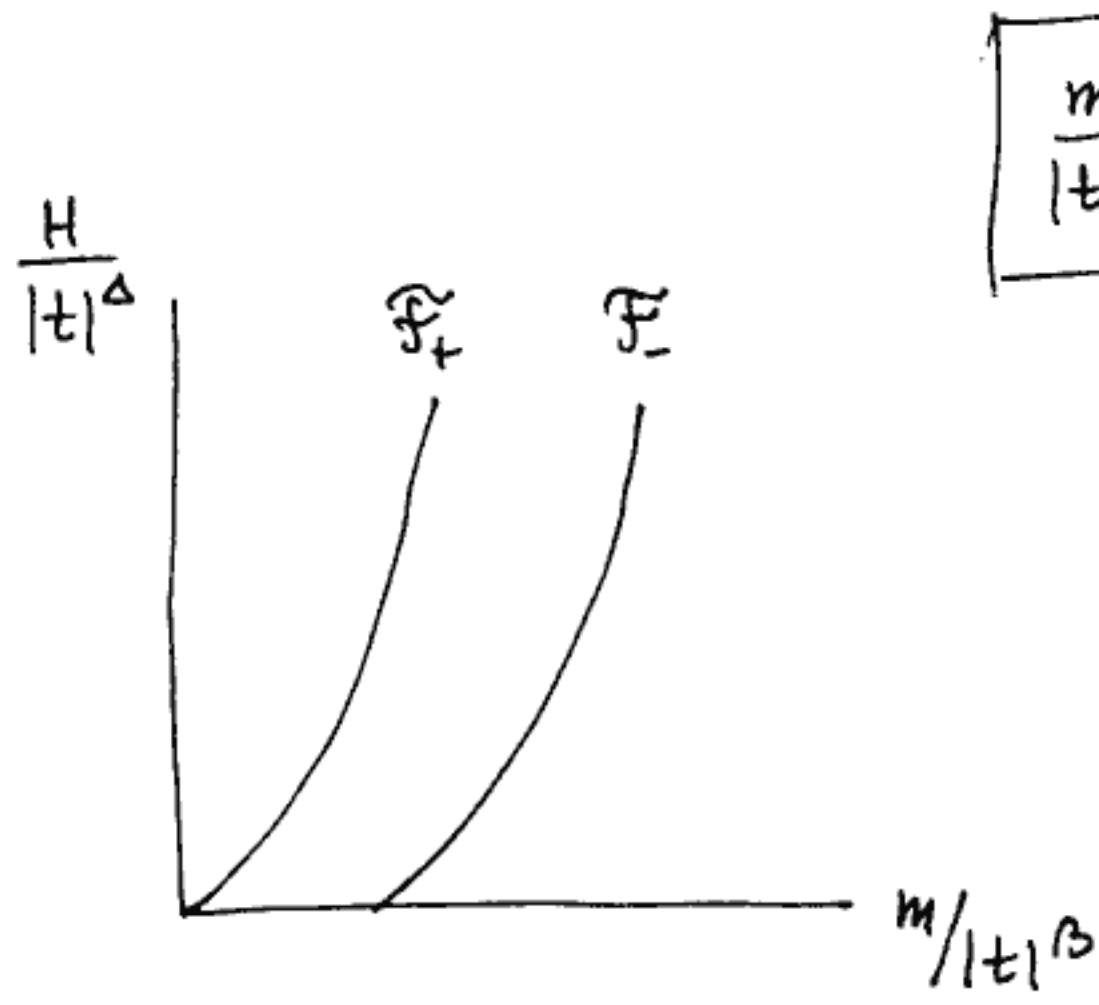
mérésök, erőlet és hözelítő (pl. nyeshom. stb.) számlálások a levezetett skálatorszintekkel összhangban állnak

b) skálázott állapotegyenlet ("data collapse") (28)

izotermek összeesése

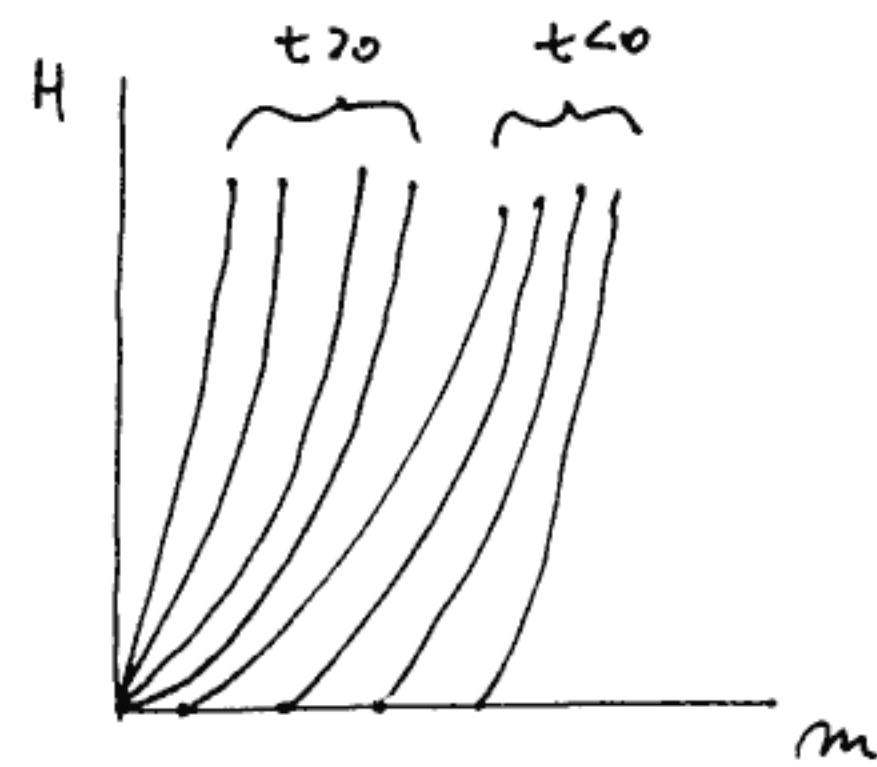
$$m(t, H) = \lambda^{-\beta} m(\lambda t, \lambda^\alpha H)$$

$$\text{a } \lambda|t|=1 \text{ változással: } m(t, H) = |t|^\beta m(|t|, \frac{H}{|t|^\alpha}) = |t|^\beta \tilde{F}_\pm \left( \frac{H}{|t|^\alpha} \right)$$



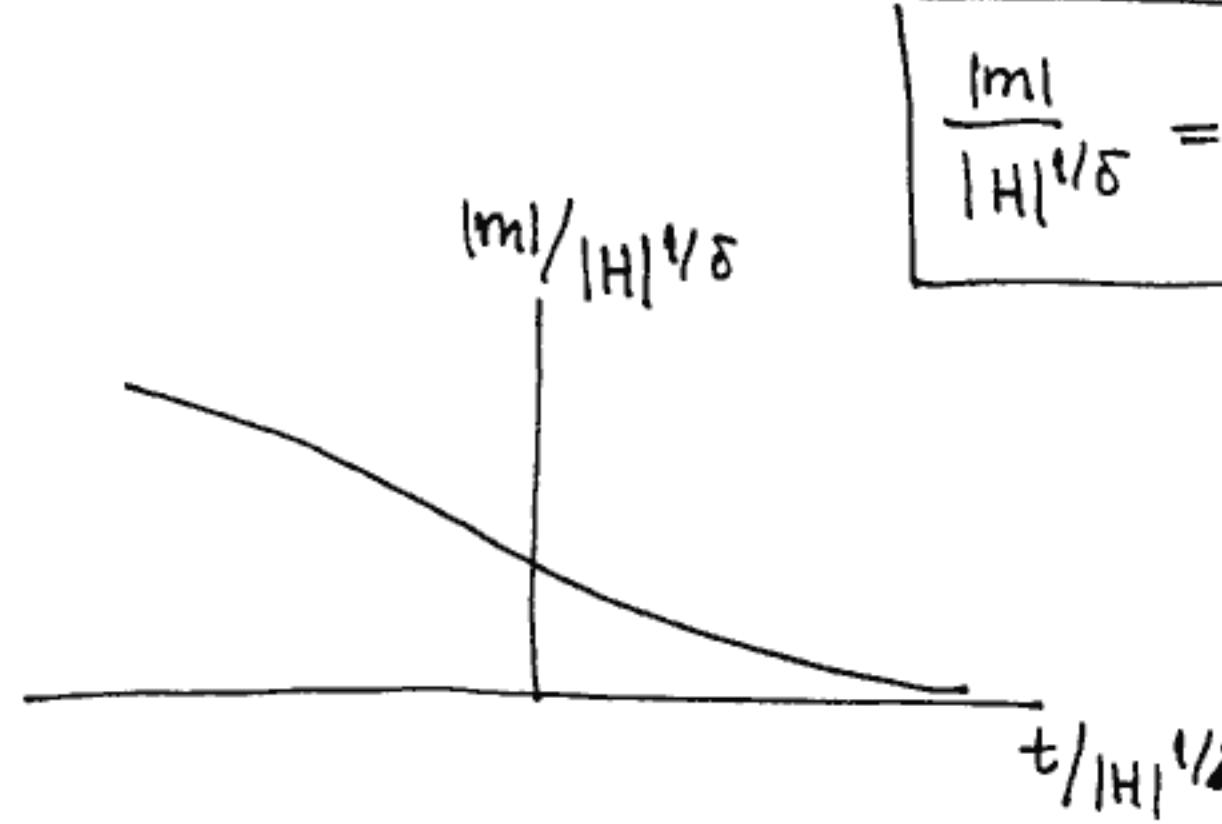
$$\boxed{\frac{m}{|t|^\beta} = \tilde{F}_\pm \left( \frac{H}{|t|^\alpha} \right)}$$

$$(\Delta = \gamma + \beta)$$



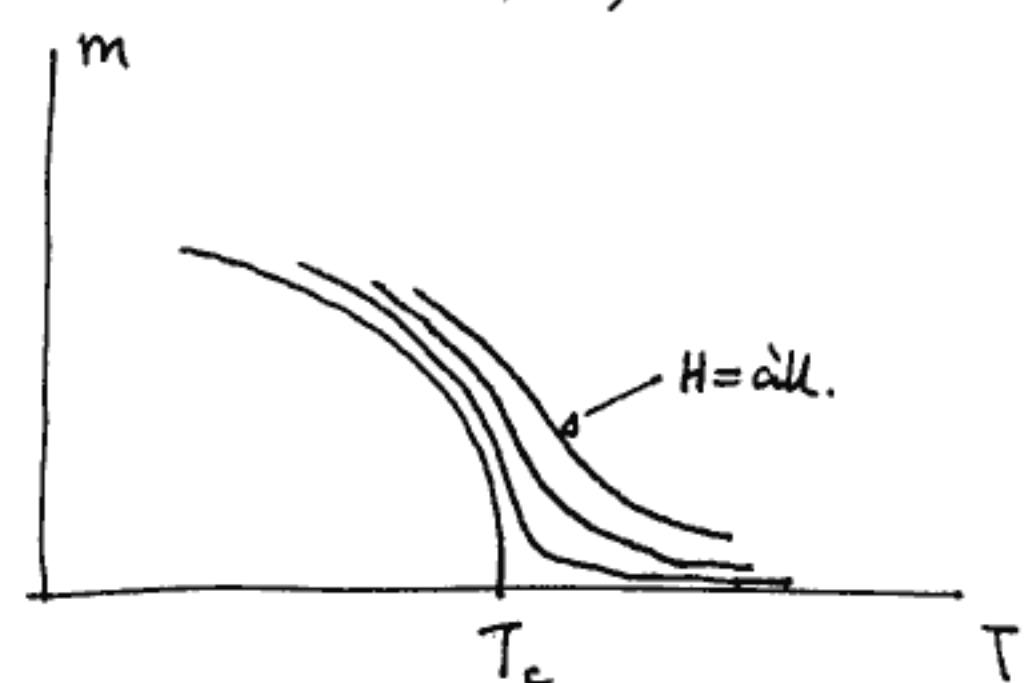
H = állandó görbék összeesése

$$\text{a } \lambda^\alpha(H)=1 \text{ változással: } m(t, H) = |H|^{1/\delta} m\left(\frac{t}{|H|^{1/\delta}}, \pm 1\right) = \text{sgn } H \cdot |H|^{1/\delta} g\left(\frac{t}{|H|^{1/\delta}}\right)$$



$$\boxed{\frac{|m|}{|H|^{1/\delta}} = g\left(\frac{t}{|H|^{1/\delta}}\right)}$$

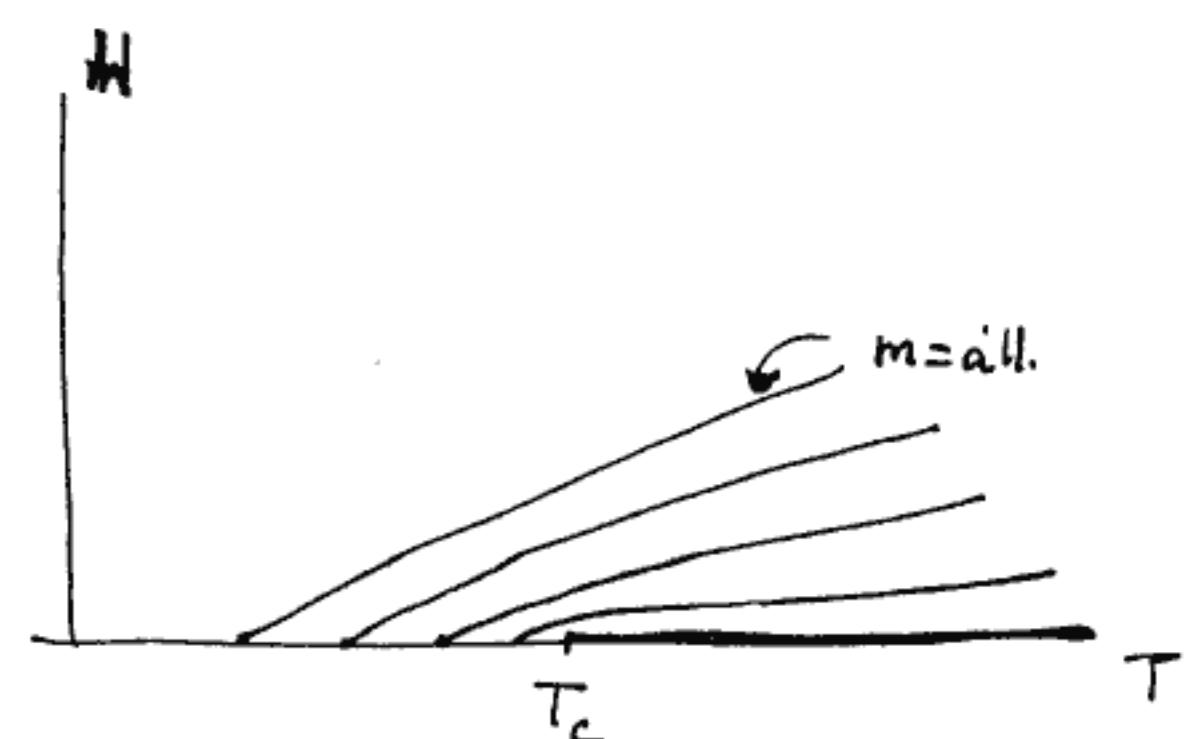
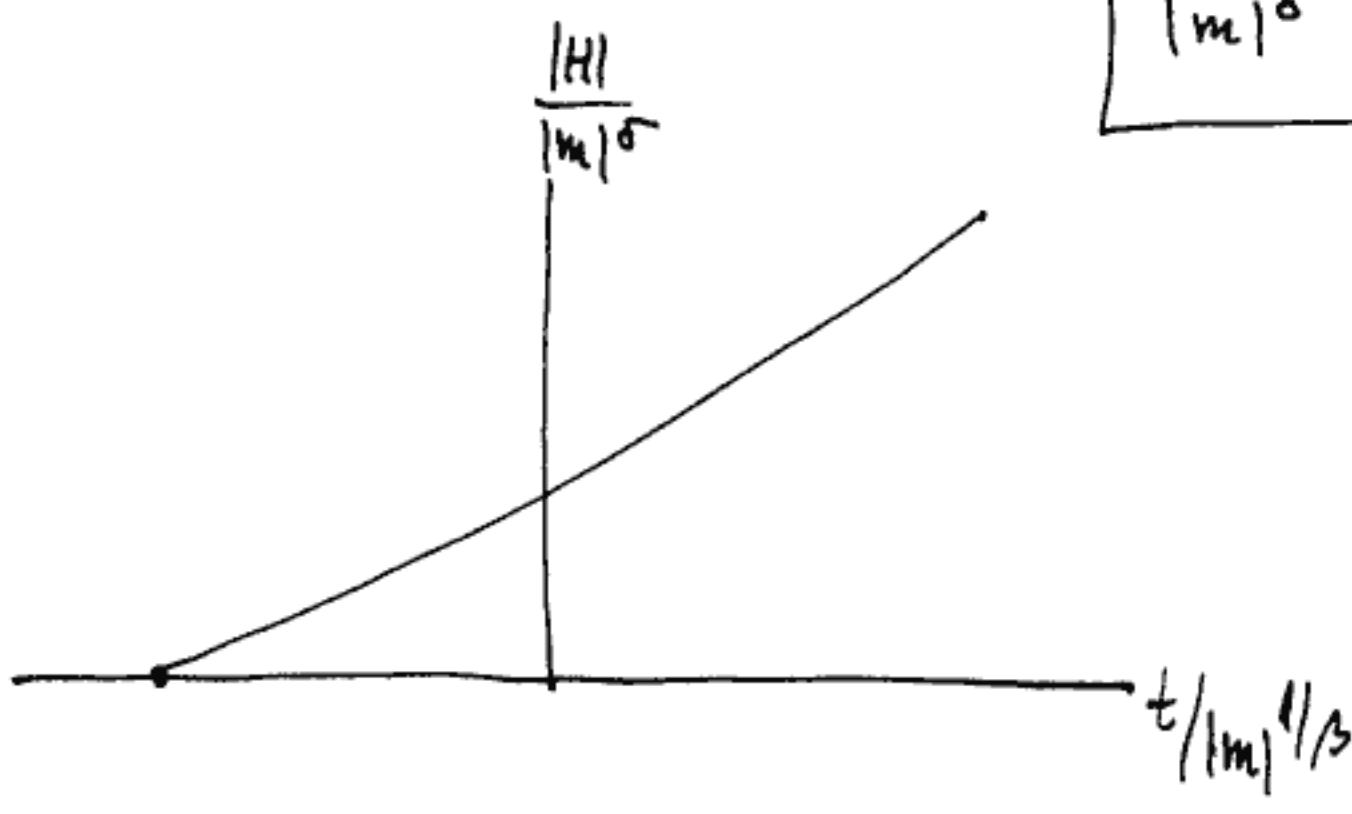
(m H-nak páratlan függése,  
 $\Delta = \beta\delta$ )



m = állandó görbék összeesése

$$\text{a } \lambda^\beta|m|=1 \text{ változással: } \pm 1 = m\left(\frac{t}{|m|^{1/\beta}}, \frac{H}{|m|^{\alpha/\beta}}\right) \quad \frac{\Delta}{\beta} = \delta$$

$$\boxed{\frac{|H|}{|m|^\delta} = h\left(\frac{t}{|m|^{1/\beta}}\right)}$$



## Hiperskálatörzsy

a korrelációs függvény és a szabadenergia ált. konzerváló tulajdonságaiiból nem következik; ezzel összeférhető, az esetben karakteristikus kosszisztégiával kell visszavezetni.

$$\text{a mértékérték: } M = mV$$

$$\text{fluktuációja: } \overline{\Delta M^2} = V k_B T \chi$$

$$T < T_c$$

érvényes olyan térfogatokra, amelyek hőmérséklete  $\xi - t$  meghaladja

$$(M = \int \overline{s(r)} d^3r = mV, m = \overline{s(r)})$$

$$\begin{aligned} \overline{\Delta M^2} &= \overline{\int (s(r) - m)^2 d^3r \cdot \int (s(r') - m)^2 d^3r'} = \int d^3r d^3r' (\overline{s(r)s(r')} - m^2) \\ &= V \int d^3r C(r) = V C(q=0) = V k_B T \chi \end{aligned}$$

• Relatív fluktuáció:  $\frac{\overline{\Delta M^2}}{M^2} = \frac{k_B T \chi}{m^2 V}$

a termodynamikai heterogenitás  $\frac{\overline{\Delta M^2}}{M^2} \sim \frac{1}{V}$

a) Ha a  $V \sim \xi^d$  térfogatban (erősen korrelált tartomány) a fluktuációk elhagyjóhatók, a Landau-elmélet alkalmazható

•  $\frac{\chi}{m^2 \xi^d} \ll 1$  konziszterens marad  $|t| \rightarrow 0$  esetén, ha  $|t|^{-1-\epsilon+\frac{d}{2}}$  nem divergál, más  $\frac{d}{2}-2 \geq 0$ ,  $d \geq 4$

a Landau-elmélet  $d \geq 4$  dimenzióban ketséges kritikus viselkedés (Ginzburg-kritérium)

b) Előkerülő esetben: a  $V \sim \xi^d$  térfogatban a fluktuációk jelentősége van olyan  $R$  hőmérsékletű tartomány, ahol a rel. fluktuáció  $\sim O(1)$   $R \sim \xi$  (hiszen ezekben ugyan karakteristikus kosszisztégiát határoznak meg)

$\frac{\chi}{m^2 \xi^d} \sim O(1)$  konziszterens marad  $|t| \rightarrow 0$  esetén, ha  $|t|^{-\delta-2\beta+d\nu}$  kiterjedje zérus, mert  $d\nu = 2\beta + \gamma$

melyhepp:  $d\nu = 2 - \alpha$

## Hiperskálatörzsy

( $\leftarrow$  klasszikus kiterők ugyan  $d=4$  dimenzióban teljesítik)

a hiperskálatörzsy miatt ugyan 2 függelten krit. kiterő van

# RENORMALÁSI CSOPORT TRANSFORMÁCIÓ

130

Minimális hossz:  $l_{\min}$

( $l_{\min} \sim \Lambda^{-1}$ ,  $\Lambda$ : leágás, maximális hullámvíz)

Az  $x \gg l_{\min}$  leptékű jelenségek leírásakor az  $x \ll l_{\min}$  leptékűkre átlagolunk. Az  $x \ll l_{\min}$  leptékű jelenségek a leírás paramétereiben vanek jelen.

A kondenzált anyagban van természetes min. hossz (rainákkal, személyes atomok távolsága, atomok mérete).

A min. hossz változtatása által befolyásolja a leírást, ha közben karakteristikus hosszúságot lepiuk át.

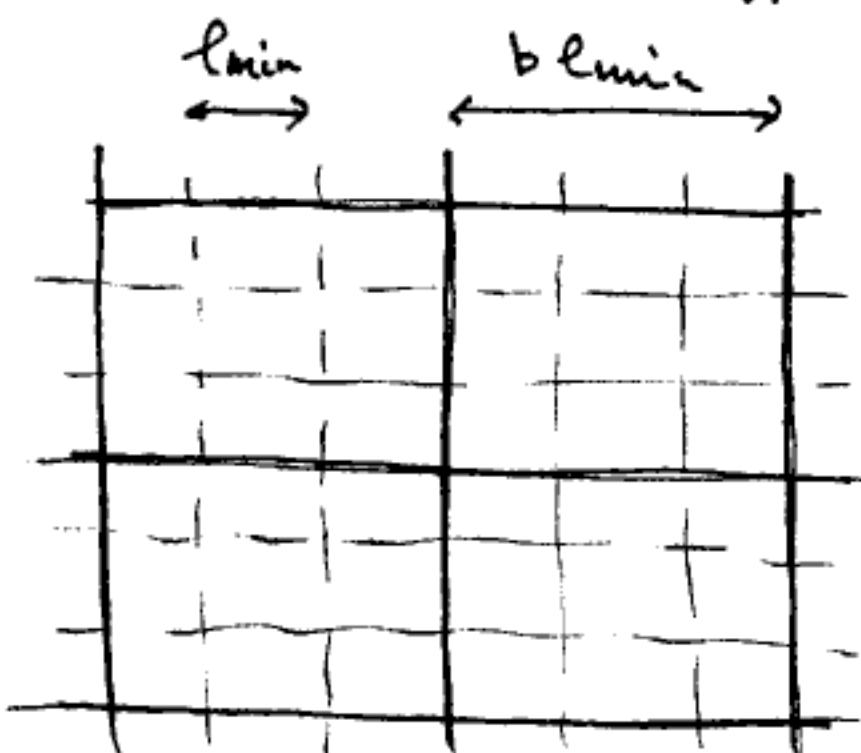
pl: hidrodinamika, illetve termodynamika: akkor változik értékesítő, ha  $l_{\min}$  a lokális egységesített biatoritó tartomány hosszúsága.  $l_{\min}$  nélküli hatások körött változtatható anélkül, hogy a hidrodin. (illetve termodyn.) leírás változné (lepték nélkülisége). Az atomi méreteken lejtőződő fajamataik az átlagot tüneteleben, paramétereiben jelezzék meg.

Renormálási csoport transformáció: játszik a min. hosszúsággal a transformáció kit lépése:

a) a szabadseji fokok váltakozása:  $l_{\min}$  növelése  $b l_{\min}$  értékre, a közbülső skálára ennek szabadseji fokok kiintegralásával

$$\boxed{l_{\min} \rightarrow b l_{\min}} \quad (b > 1)$$

b) a hosszúság átskálázása oly módon, hogy a min. hosszúság ujjból az eredeti értéket vegye fel:



$$\boxed{x \rightarrow x' = \frac{x}{b}}$$

$$l'_{\min} = \frac{b l_{\min}}{b} = l_{\min}$$

### a szabadsei fokok ritkítása:

a szabadsei fokok száma  $N \sim \frac{V}{b^d}$  ( $b_{\min}$  méretű blokkok száma)

$$I = \text{Tr}_N e^{-\beta E} \quad (\text{Itt } \beta = k_B T \text{ esetében mérhető energia való feltételezés})$$

Külön négyezzük az összegzést az  $b > b_{\min}$  és az  $b_{\min} < b < b_{\max}$  leírtakban szabadsei fokokra:

$$I = \text{Tr}_{N'} \left( \underbrace{\text{Tr}_{N-N'} e^{-\beta E}}_{e^{-\beta E'}} \right) = \text{Tr}_{N'} e^{-\beta E'}$$

a ritkítás után megmaradt szabadsei fokok száma

$$N' \sim \frac{V}{(b_{\min})^d}$$

$$N' = \frac{N}{b^d}$$

az  $N'$  szabadsei fok,  $\beta E'$  feltételezés szabadenergia az új fizikai rendszernél tekinthető

### a harmonikai csapott transzformáció:

$$\text{fiz. rendszer} \xrightarrow{R_b} \text{fiz. rendszer}$$

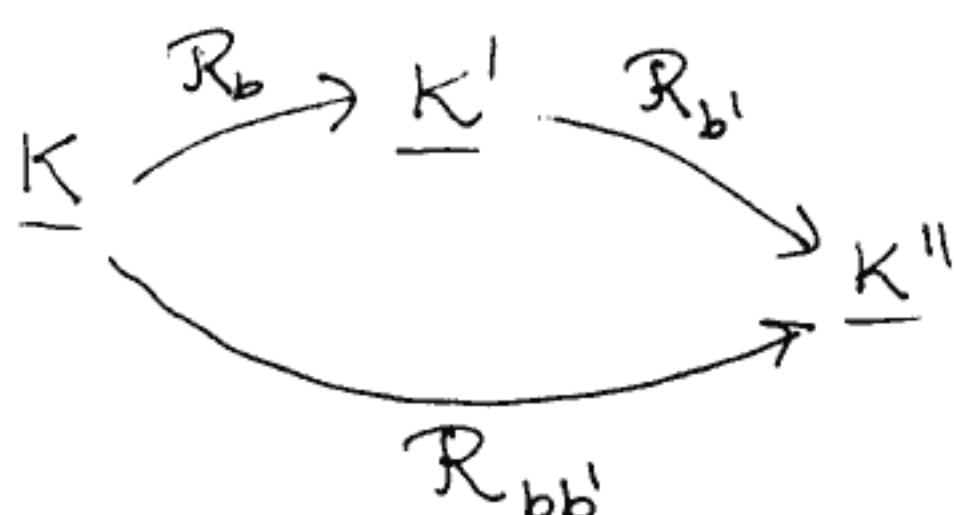
$$\underline{E} \xrightarrow{R_b} \underline{E}' \quad (\text{ha a szabadsei fokok arányos tipusúak})$$

ha a feltételezett szabadenergia paraméterezhető:

$$\underline{E}(\underline{K}) \xrightarrow{R_b} \underline{E}' = \underline{E}(\underline{K}') \quad (\underline{K} = (K_1, K_2, \dots))$$

$$\underline{K} \xrightarrow{R_b} \underline{K}'$$

félcsapott tulajdonság:



definiciója

a transzformáció a résletekben meg szabadsejt egyed meghozzá - flexibilis módszer!

az egy szabadsági fokra jutó nabadeurzia:

$$f = -\frac{1}{N} \ln Z = -\frac{1}{N^d b^d} \ln Z = \frac{f'}{b^d} \quad \boxed{f' = b^d f}$$

a korrelációs hossz:  $\xi' = E/b$  (akosmíseg ötskálázása)

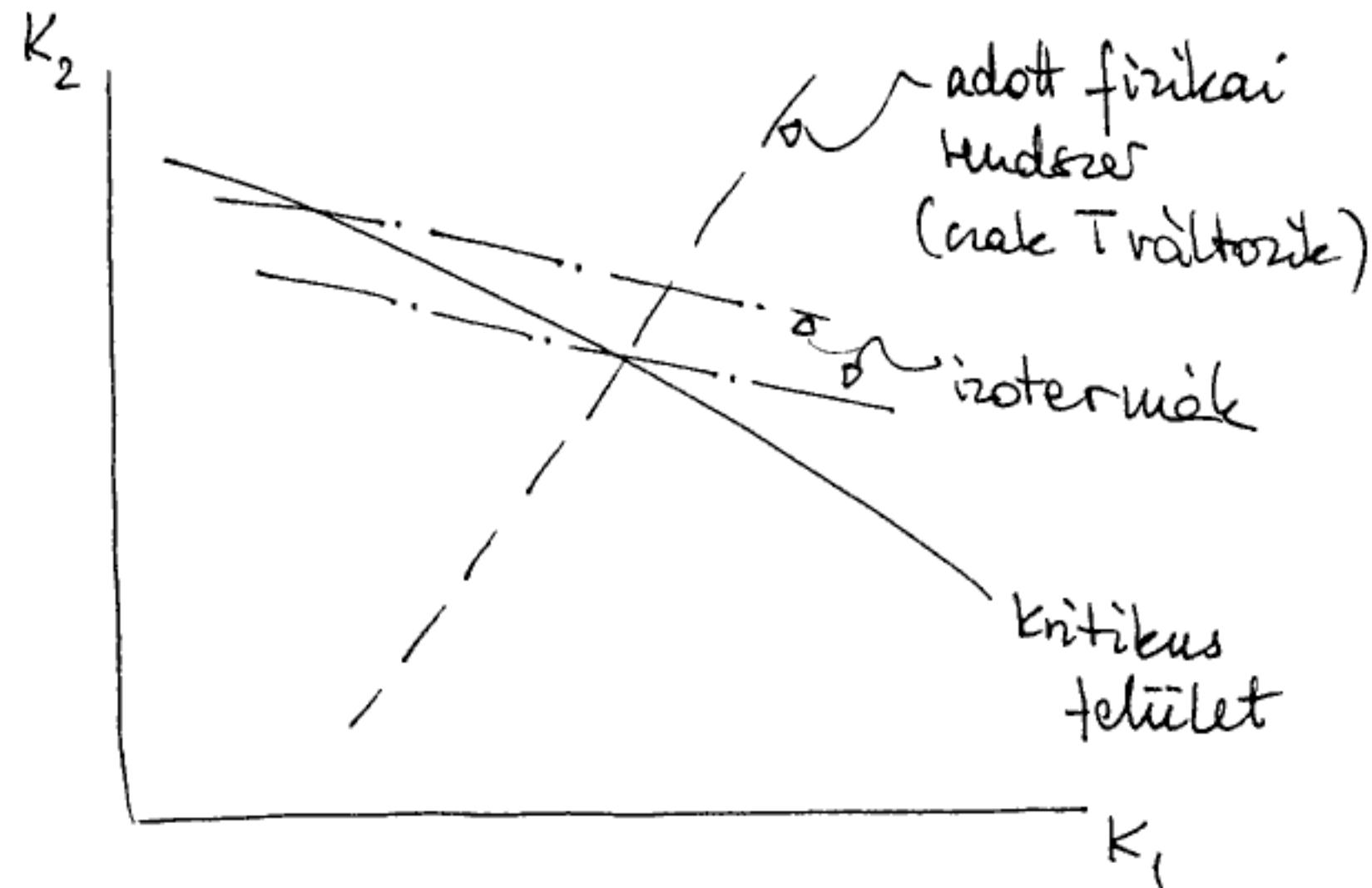
sz paramétereivel:

$$\begin{aligned} f' &= f(K') = b^d f(K) \\ \xi' &= \xi(K') = b^{-1} \xi(K) \end{aligned} \quad \boxed{\quad}$$

### KAPCSOLAT A KRITIKUS VISELKEDÉSSEL

az egyszerűség kedvéért legyen két paraméter:  $K = (K_1, K_2)$

$K_1$  és  $K_2$  natúrbeli állandók,  
kümelekkel összefüggői



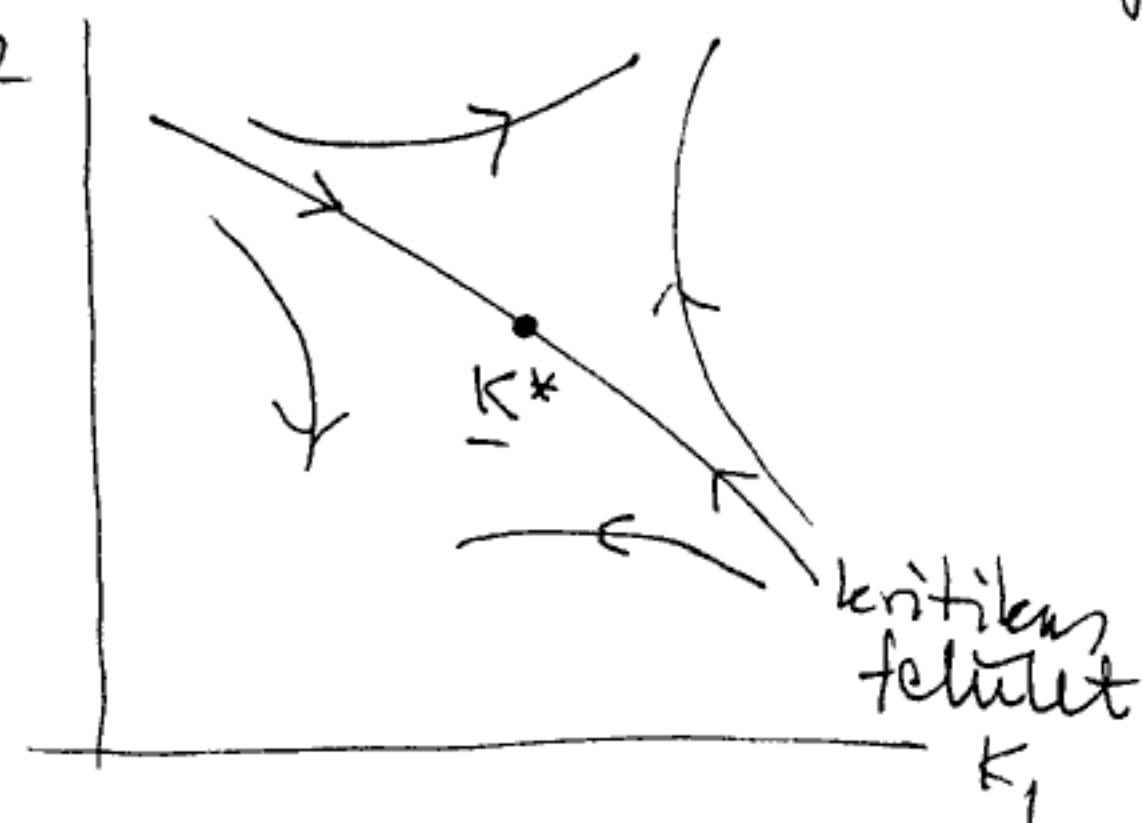
a kritikus felület a ren. csoport transformációs invariants felülete

(e felületen  $\xi = \infty$ , ezzel  $\xi' = \xi/b = \infty$ )

a kritikus felületen a transformációt zökkenő ismételve (vagy a  $b \rightarrow \infty$  határonban) fixpointba jutunk

(ez a legegyszerűbb lehetőség; látjuk meg, hogy ez felel meg a röklés kritikus viselkedésének)

ha nem vannak a kritikus felületen, a transformációs a  $\xi$  korr. hosszat nökkentí, anan a kritikus állapotból (felülettől) távolodunk



$\underline{K}^*$  körül linearizált transformáció:

$$\underline{K}' = \underline{K}^* + \delta \underline{K}' = F_b(\underline{K}^* + \delta \underline{K}) = \underline{K}^* + L_b \delta \underline{K}$$

$$\boxed{\delta \underline{K}' = L_b \delta \underline{K}} \quad L_b = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{b1}}{\partial K_1} & \frac{\partial F_{b1}}{\partial K_2} \\ \frac{\partial F_{b2}}{\partial K_1} & \frac{\partial F_{b2}}{\partial K_2} \end{pmatrix}_{\underline{K} = \underline{K}^*}$$

jobboldali sajátvektork:  $L_b e_1 = \lambda_1(b) e_1$

$$L_b e_2 = \lambda_2(b) e_2 \quad \left. \right\}$$

a félugoró tulajdonság miatt:  $\lambda_1(b) \lambda_1(b') = \lambda_1(bb')$

a függvényegyenlet sima gyöldése a  $\lambda_1(1)=1$  feltétel mellett

$$\lambda_1(b) = b^{y_1}$$

hasonlóan:  $\lambda_2(b) = b^{y_2}$

a kritikus feltétel invariáns, így az egyik sajátvektor (ezután  $e_2$ )

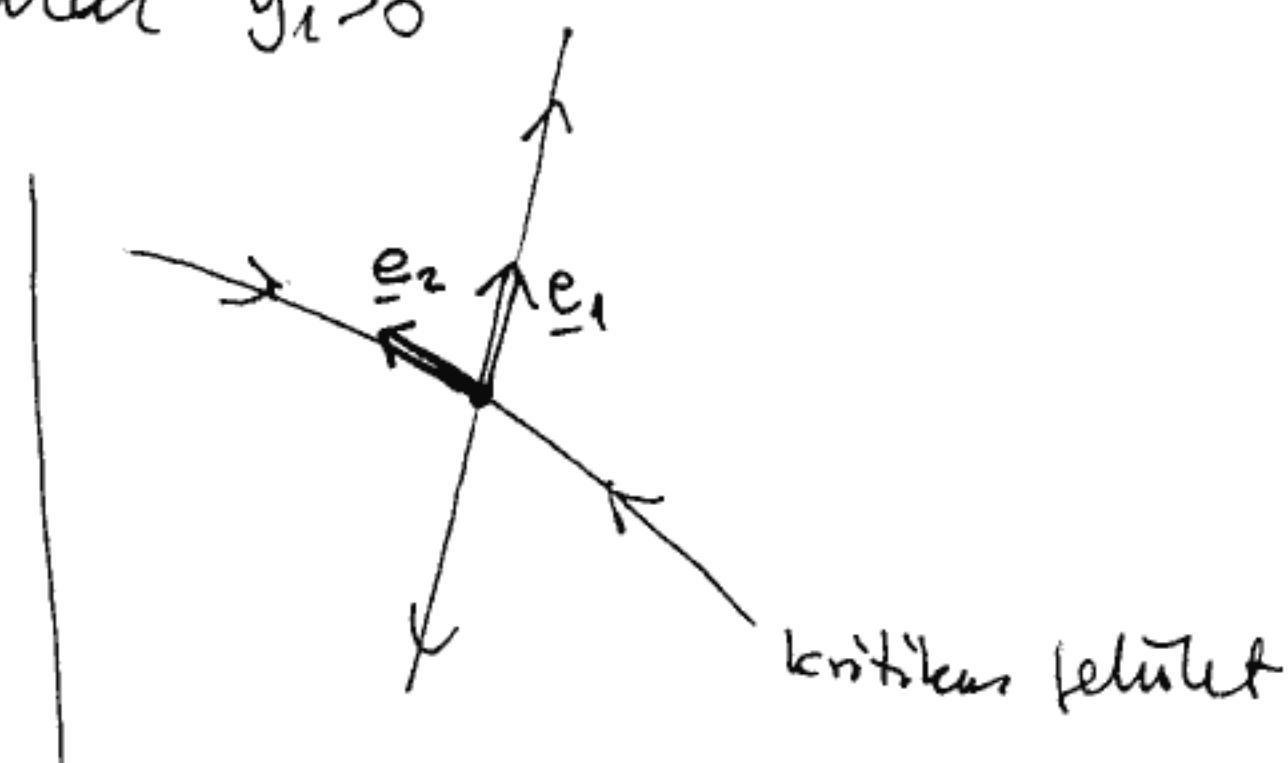
a kritikus feltételekhez köthető. Ebben az irányban a fixpoint vonzó, ezért  $b^{y_2} < 1$ , azaz  $y_2 < 0$ . Az  $e_1$  irányban eltarthatóanak a kritikus feltéttől, így  $b^{y_1} > 1$ , azaz  $y_1 > 0$

Az  $e_1, e_2$  vektorokat közelítésként  
kennelva:

$$\delta \underline{K} = t_1(\delta \underline{K}) e_1 + t_2(\delta \underline{K}) e_2$$

$$\delta \underline{K}' = b^{y_1} t_1 e_1 + b^{y_2} t_2 e_2$$

$$y_2 < 0, y_1 > 0$$



a habadenergia és a korrelációs hossz transzformációja:

$$f(t_1, t_2) = b^{-d} f(b^{y_1} t_1, b^{y_2} t_2)$$

$$\xi(t_1, t_2) = b \xi(b^{y_1} t_1, b^{y_2} t_2)$$

A kritikus felületen:  $t_1(\delta K) = 0$ .

$t_1$  a kritikus felülettől való eltávolodást jellemzi

Adott fizikai rendszerekben  $t_1$  a kritikus ponton általadás előjelet vált,

$$t_1 \sim \frac{T - T_c}{T_c}$$

A kritikus pontban  $t_2$  véges.

Válasszuk b értékét ion, míg  $b^{y_1} |t_1| = 1$  legyen. Ehhez

$$\left. \begin{aligned} f(t_1, t_2) &= |t_1|^{\frac{d}{y_1}} f(\pm 1, |t_1|^{-y_2/y_1} t_2) \\ \xi(t_1, t_2) &= |t_1|^{\frac{-1}{y_1}} \xi(\pm 1, |t_1|^{-y_2/y_1} t_2) \end{aligned} \right\}$$

- Minel  $-y_2/y_1 > 0$ ,  $|t_1|^{-y_2/y_1} t_2 \rightarrow 0$ , ha  $|t_1| \rightarrow 0$ ,  $\rightarrow$  ion ebben a határesetben:

$$\left. \begin{aligned} f(t_1, t_2) &\simeq |t_1|^{\frac{d}{y_1}} f(\pm 1, 0) \\ \xi(t_1, t_2) &\simeq |t_1|^{\frac{-1}{y_1}} \xi(\pm 1, 0) \end{aligned} \right\}$$

Ebből leolvasható:

$$\boxed{\frac{1}{y_1} = \nu \quad \frac{d}{y_1} = 2 - \alpha}$$

Teljesül a  $d\nu = 2 - \alpha$  hiperkálatörvény.

Univerzalitás: az asymptotikus viselkedés független  $t_2$  értékétől (t<sub>2</sub> értéke változtatja ki a adott fizikai rendszert)

Korrelációk az asymptotikus viselkedéshez: visszajukat  $|t_1|^{-y_2/y_1} t_2$  jellemzi.

## külső tér bennetise

paramétereik:  $K, H$

a kritikus felületen  $H=0$ , így a fixpontban is.

a  $H \leftrightarrow -H$  szimmetria miatt  $K$  transformációjában csak  $H^2$  merepel, így a linearizált transformáció nem változik.

$H$  linearizált transformációja:

$$H' = b^{y_H} H, \quad y_H > 0$$

(ha  $H \neq 0$ , a  $\mathbb{E}$  kör. hossz véges, a transformáció

eltávolít a kritikus felületről, így  $y_H > 0$ )

skálázás:

$$f(t_1, t_2, H) = b^{-d} f(b^{y_1} t_1, b^{y_2} t_2, b^{y_H} H)$$

a  $b^{y_1} |t_1| = 1$  valantéssal:

$$f(t_1, t_2, H) = |t_1|^{d/y_1} f(\pm 1, |t_1|^{-y_2/y_1} t_2, |t_1|^{-y_H/y_1} H)$$

$t_1 \sim \frac{T-T_c}{T_c}$  en adott fizikai rendszer esetén

$$|t_1|^{-y_2/y_1} t_2 \rightarrow 0, \text{ ha } t_1 \rightarrow 0$$

$$f(t_1, t_2, H) = |t_1|^{d/y_1} f(\pm 1, 0, H/|t_1|^{y_H/y_1})$$

A skálahipotézisek nyelvétő alak!

ebből leolvasható, hogy  $\frac{y_H}{y_1} = \Delta = \frac{\nu}{\mu}$ , amit  $\frac{1}{\nu} = y_1$  felhasználásval

$$y_H = \frac{1}{\mu}$$

ugyanes a gondolatmenet  $\Xi(t_1, t_2, H)$ -ra alkalmazva:

$$\Xi(t_1, t_2, H) = |t_1|^{-1/y_1} \Xi(\pm 1, 0, H/|t_1|^{y_H/y_1})$$

$$\text{ha } H=0, \quad \Xi \sim |t_1|^{-1/y_1}$$

$$\text{ha } |t_1|=0, \quad \Xi \sim |H|^{-1/y_H}$$

} ismét az  $\frac{1}{y_1} = \nu, \frac{1}{y_H} = \mu$  nyíltettséget adjja

a lin. közelítőben igazoltuk: a fixpont leírásából következik a skálázás, univerzalitás; a kritikus exponenselőt a fixpont köül linearizált transformációs sajátértékei határozzák meg.

a hőmérséklet ( $t_1$ ) és a bánya térfogata ( $H$ ) a kritikus felülettől eltérő esetben, a hozzájuk tartozó sajátértékek:  $b^{y_1} > 1$ ,  $b^{y_H} > 1$  (azaz  $y_1 > 0$ ,  $y_H > 0$ ) erek az ún. relevans paraméterek

a kritikus felületen történő elmozdulások ( $t_2$ ) sajátértékei:  $b^{y_2} < 1$ , (azaz  $y_2 < 0$ ), erek az ún. irrelevans paraméterek. Az irrelevans paraméterek adott fizikai rendszerekben független értékeitől a kritikus viselkedés nem függ — ebben áll az univerzalitás.

### nonlineáris skáláterek

segítségstílel beléhető, hogy a <sup>képpel</sup> a lin. közelítőn kívül is elvégyez  $g_1(\underline{K})$  és  $g_2(\underline{K})$  nonlineáris skáláterek:

$$\left. \begin{array}{l} g_1(\underline{K}') = b^{y_1} g_1(\underline{K}) \\ g_2(\underline{K}') = b^{y_2} g_2(\underline{K}) \end{array} \right\}$$

néhány tükrözésük:

a fixpontban:  $g_1(\underline{K}^*) = g_2(\underline{K}^*) = 0$

a kritikus felületen:  $g_1(\underline{K}) = 0$

(e feltételellettleg van a transformáció ismétlésével a fixpontba érkezés)

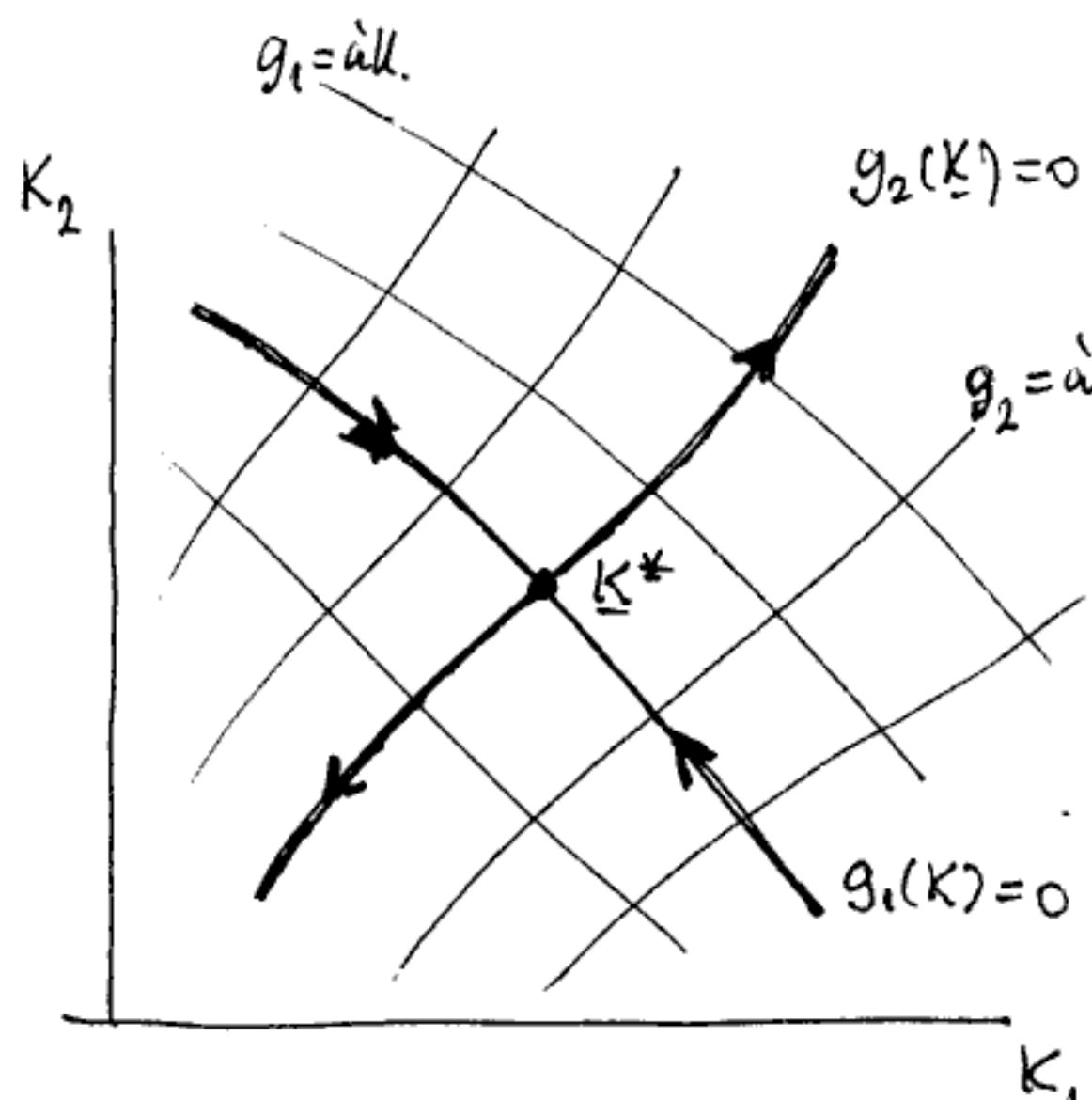
a fixpont közelében ( $\underline{K} \approx \underline{K}^*$ ):

$$g_1(\underline{K}) \approx t_1(\underline{K})$$

$$g_2(\underline{K}) \approx t_2(\underline{K})$$

a nonlineáris skáláterek  $K_1, K_2$  helyett parameterként használhatóak:

$$\left. \begin{array}{l} f(g_1, g_2) = b^{-d} f(b^{y_1} g_1, b^{y_2} g_2) \\ \xi(g_1, g_2) = b \xi(b^{y_1} g_1, b^{y_2} g_2) \end{array} \right\}$$



adott fizikai rendszerekben: a kritikus pontok közel

$$g_1 \sim \frac{T - T_c}{T_c}, \quad g_2 \approx g_2(T_c)$$

a skálásas, univerzalitás a lin. környezethet körülönben vérfelőle ( $t_1$  és  $t_2$  nevezet  $g_1$ , ill.  $g_2$  venni át): a  $b^{y_1} |g_1|=1$  nélkülössel

$$f(g_1, g_2) = |g_1|^{d/y_1} f(\pm 1, |g_1|^{-y_2/y_1} g_2) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$$

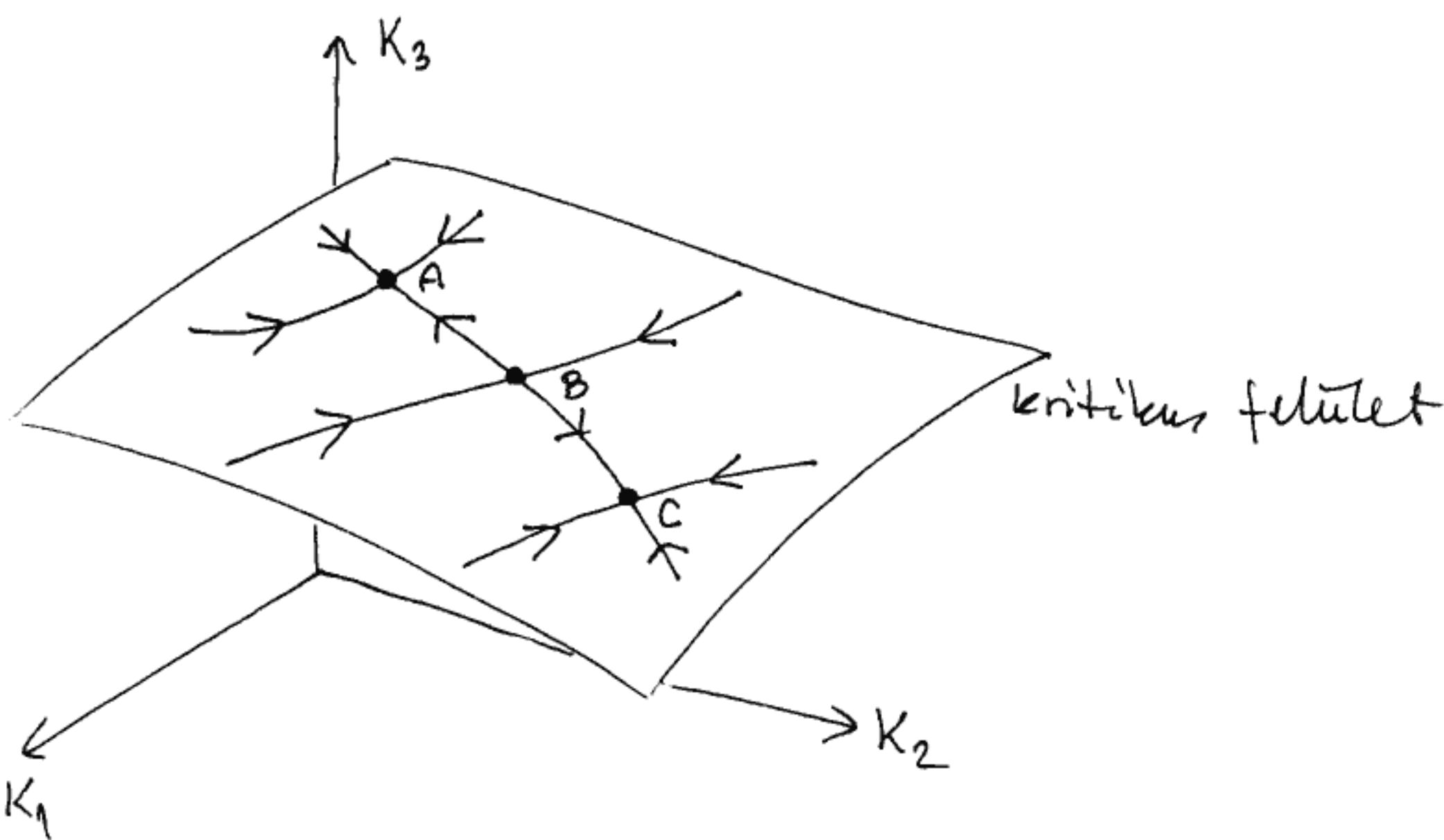
$$\mathcal{E}(g_1, g_2) = |g_1|^{-1/y_1} \mathcal{E}(\pm 1, |g_1|^{-y_2/y_1} g_2) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{n. ion torabb.}$$

Létezik-e a nemlineáris skálaterel? Konkrét esetben megkonstruálható

### Univerzalitási osztályok, multikritikus pontok

A kritikus felületen egyelő több fixpont is elhelyezkedhet.

pl  $K = (K_1, K_2, K_3)$



A és C stabil fixpontok, meghatározzák a vonzási tartományukba eső rendszerek kritikus viselkedését (két univerzalitási osztály)

B instabil fixpont, csak A és C vonzási tartományai közötti határon (separatrix) lévő pontokat "vonza", meghatározza az ellen a vonalon lévő rendszerek kritikus viselkedését. B ún. multikritikus pont

## A renormálási transformáció sikereinek titka:

Egy rendszert  $\mathcal{E}$  méretű blokkokra bontunk. Az őszéb blokkok egymástól közel függetlenek. Elégítő az  $\mathcal{E}$  méretű blokk pontos kerelése.

A kritikus ponthoz közeledve  $\xi \rightarrow \infty$ . Hogy a singuláris kritikus viselkedést megelőzik, nagyrami ( $\approx \infty$ ) korrelált szabadsági fokot kell kerelniük. Néhaug kiüttelől eltekintve, végrehozhatatlan feladat.

A renormálási algoritmusnak a következőképpen néges zök szabadsági fok nevezel. A transformáció sima, a fizikai rendszer singuláris viselkedését e sima transformáció fixpont körül többidomáigai határozata meg.

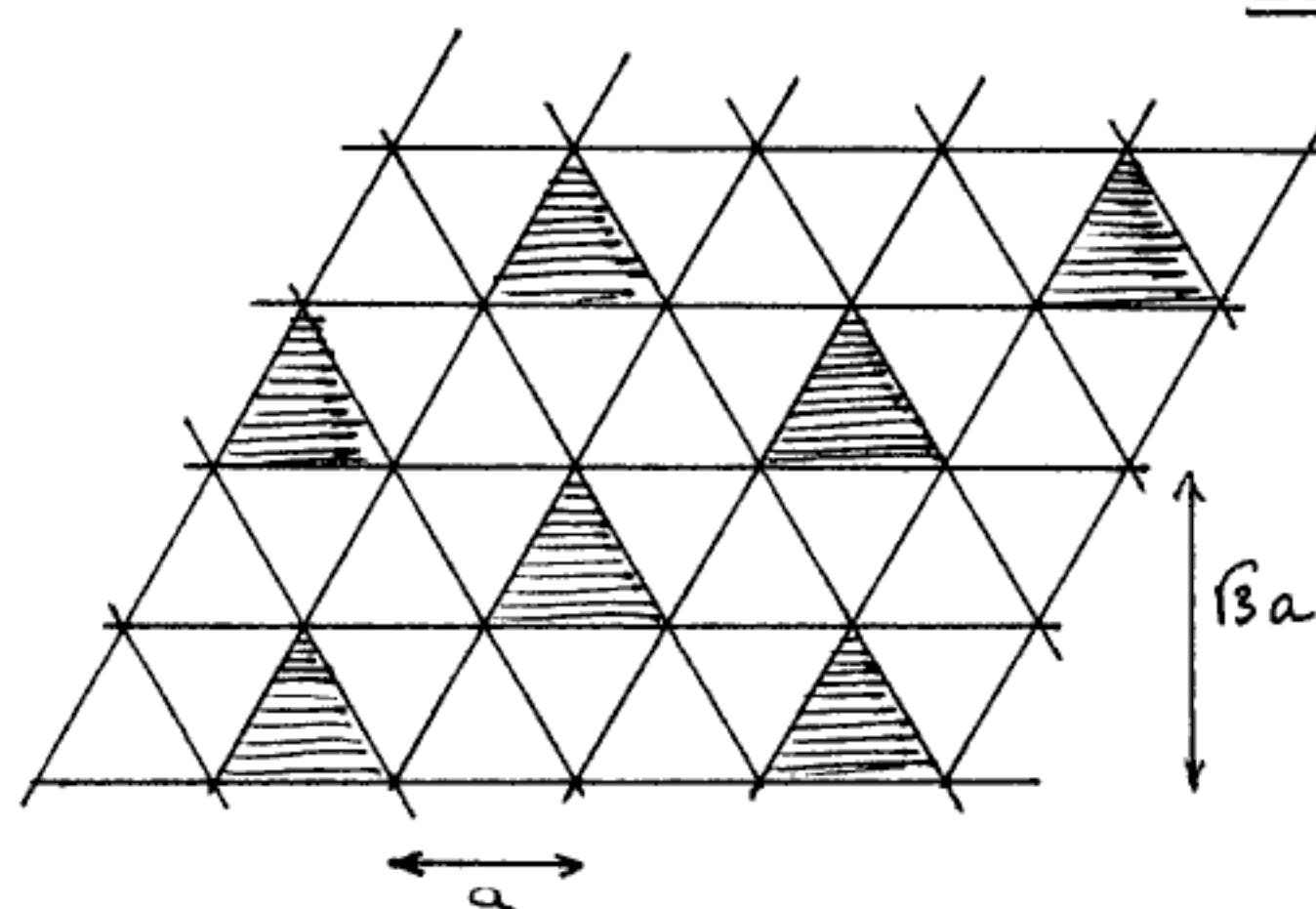
Az eddigi definíció igen flexibilis, a transformáció igazodhat a konkrét feladathoz.

- Alaptípusok:
- valós téren definiált transformáció  
(blokkok növelése lokális szabadsági fokok kiintegrá-  
lásával)
  - hullámról-téren definiált transformáció  
( $\lambda$  leágás nökkentése a rövidhullámú Fourier-  
komponensek kiintegrolásával)

## Renormálási csoport transformáció valós téren:

(39)

### Icing-modell mikeli $\Delta$ -rács



(Niemeijer, van Leeuwen)

az a racionálisodjú hármaszögrács  
i-k részeitben  $\sigma_i = \pm 1$  spin

a  $\{\sigma_i\}$  konfiguráció energiaja ( $kT$  esetében)

$$H(\{\sigma_i\}) = -K \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i$$

$$(K = \frac{J}{kT}, h = \frac{H}{kT})$$

A spineket hármas blokkokba rendezzük. A kétter blokkra ismét  $\Delta$ -rács, magassága  $\sqrt{3}a$ . A blokkok indexei  $I, J, \dots$

A léptelérváltás tényezője:  $b = \sqrt{3}$



A blokkspint a többsegi szabály definíciója:

$$\sigma_I = \text{sgn} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3$	$\uparrow \uparrow \uparrow \quad \uparrow \uparrow \downarrow \quad \uparrow \downarrow \uparrow \quad \downarrow \uparrow \uparrow$	$\downarrow \downarrow \uparrow \quad \downarrow \uparrow \downarrow \quad \uparrow \downarrow \downarrow \quad \downarrow \downarrow \downarrow$
$\sigma_I$	1	-1

Az energia szétbontása blokkonként:

$$H = -K \sum_I \left( \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j \right) - K \sum_{\langle I, J \rangle} \left( \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j \right) - h \sum_I \left( \sum_i \sigma_i \right)$$

$\underbrace{\text{egy blokk energiája, különböző térfelükből}}$   
 $\underbrace{\text{körönkörül a blokkok között}}$   
 $\underbrace{\text{körönkörül a különböző térfelükből}}$

$H_0$

$V$

$$H = H_0 + V$$

högyszettet  $\{\sigma_I\}$  blokkspin konfiguráció mellett összegük a  $\sigma_i$  spinek, így kapunk meg a blokkspin rendszer energiáját (feltételes rehaderenergiáját):

$$a) Z_0 = \sum_{\{\sigma_i | \sigma_I\}} e^{-H_0} \quad \text{és} \quad \langle \dots \rangle = \frac{1}{Z_0} \sum_{\{\sigma_i | \sigma_I\}} e^{-H_0} \dots \quad \text{szabályokkal}$$

$$e^{-H(\{\sigma_I\})} = \sum_{\{\sigma_i | \sigma_I\}} e^{-H_0 - V} = Z_0 \langle e^{-V} \rangle$$

$Z_0$  számítása:

$$Z_0 = \prod_I \sum_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} e^{K(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)} = \prod_I (e^{3K} + 3e^{-K})$$

$$\text{sgn}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_I$$

$\sigma_I = +1$	$\sigma_I = -1$	$\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1$
$\uparrow \uparrow \uparrow$		3
$\uparrow \uparrow \downarrow$		-1
$\uparrow \downarrow \uparrow$		-1
$\downarrow \uparrow \uparrow$		-1

$\sigma_I = -1$ : csak az állapotok a  $\sigma_I = +1$  állapotokból  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  előjelváltásával kaphatók, a számítandó kifejezés értéke ezekkel nem változik.

$\langle e^{-V} \rangle$  névűtása (közelítő számítás)

a közelítés alegja a kumulatív kifejezés:

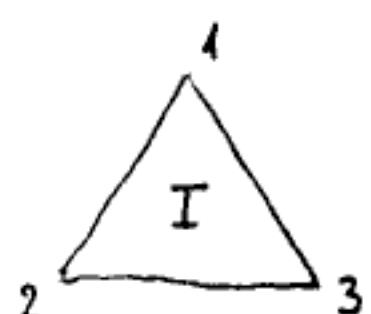
$$\langle e^{-\lambda V} \rangle = 1 - \lambda \langle V \rangle + \frac{\lambda^2}{2!} \langle V^2 \rangle + \dots$$

$$\ln \langle e^{-\lambda V} \rangle = -\lambda \langle V \rangle + \frac{\lambda^2}{2!} (\langle V^2 \rangle - \langle V \rangle^2) + \dots$$

megállunk az elso kumulatívnel:

$$\langle e^{-V} \rangle = e^{-\langle V \rangle_0} + \dots \approx e^{-\langle V \rangle_0}$$

$$\langle V \rangle_0 = -K \sum_{\langle I, J \rangle} \left( \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_0 \right) - h \sum_I \left( \sum_{i \in I} \langle \sigma_i \rangle_0 \right)$$

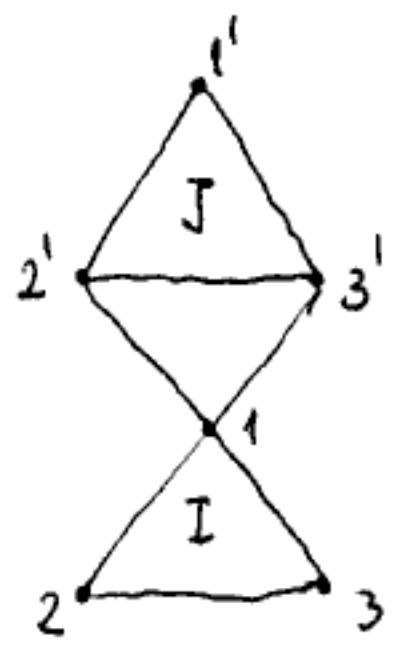


$\sigma_I = 1$	$\sigma_1 e^{K(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)}$
$\uparrow \uparrow \uparrow$	$e^{3K}$
$\uparrow \uparrow \downarrow$	$e^{-K}$
$\uparrow \downarrow \uparrow$	$e^{-K}$
$\downarrow \uparrow \uparrow$	$-e^{-K}$

$\sigma_I = -1$ : minden előjelet van

ugyilvánvalóan  $\langle \sigma_1 \rangle_0 = \langle \sigma_2 \rangle_0 = \langle \sigma_3 \rangle_0$

$$\langle \sigma_1 \rangle_0 = \frac{\sum_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} e^{K(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)}}{\sum_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} e^{K(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)}} \sigma_1 = \sigma_I \frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}} = \sigma_I g(K)$$



$$\langle \sigma_1 \sigma_2' \rangle_o + \langle \sigma_1 \sigma_3' \rangle_o = \langle \sigma_1 \rangle_o \langle \sigma_2' \rangle_o + \langle \sigma_1 \rangle_o \langle \sigma_3' \rangle_o = 2 \sigma_I \sigma_J g^2(K)$$

a blokkok  
függvénye  
a  $\langle \dots \rangle_o$  átlagelésben

$$\langle V \rangle_o = -K \sum_{\langle I, J \rangle} 2g^2(K) \sigma_I \sigma_J - 3h g(K) \sum_I \sigma_I$$

eszreírve:  $\mathcal{H}(\{\sigma_I\})$  az eredeti energiakifejezést korszerű árkéretű lesz,

$$e^{-\mathcal{H}(\{\sigma_I\})} = \exp \left\{ \frac{N}{3} \ln (e^{3K} + 3e^{-K}) + K' \sum_{\langle I, J \rangle} \sigma_I \sigma_J + h' \sum_I \sigma_I \right\}$$

azalé

$$K' = 2Kg^2(K)$$

$$h' = 3h g(K)$$

és a renormálási csapott transformáció

Megjölt: Magasabb körülbelülök bevonása más típusú kölcsönhatásokat is tükrözhet. Ezeket elker a kiindulási energiakifejezésekben is megelőzni kell. Pé.

$$\langle V^2 \rangle_o - \langle V \rangle_o^2 :$$



3-spin kölcsönhatások  
is megjelennek

a  $K' = 2Kg^2(K)$  teljesítő vizsgálata

$$K \rightarrow 0: g(K) = \frac{1}{2} + \sigma(K)$$

$$2Kg^2(K) = \frac{K}{2} + \sigma(K^2)$$

$$K \rightarrow \infty: g(K) = 1 + \sigma(e^{-4K})$$

$$2Kg^2(K) = 2K(1 + \sigma(e^{-4K}))$$

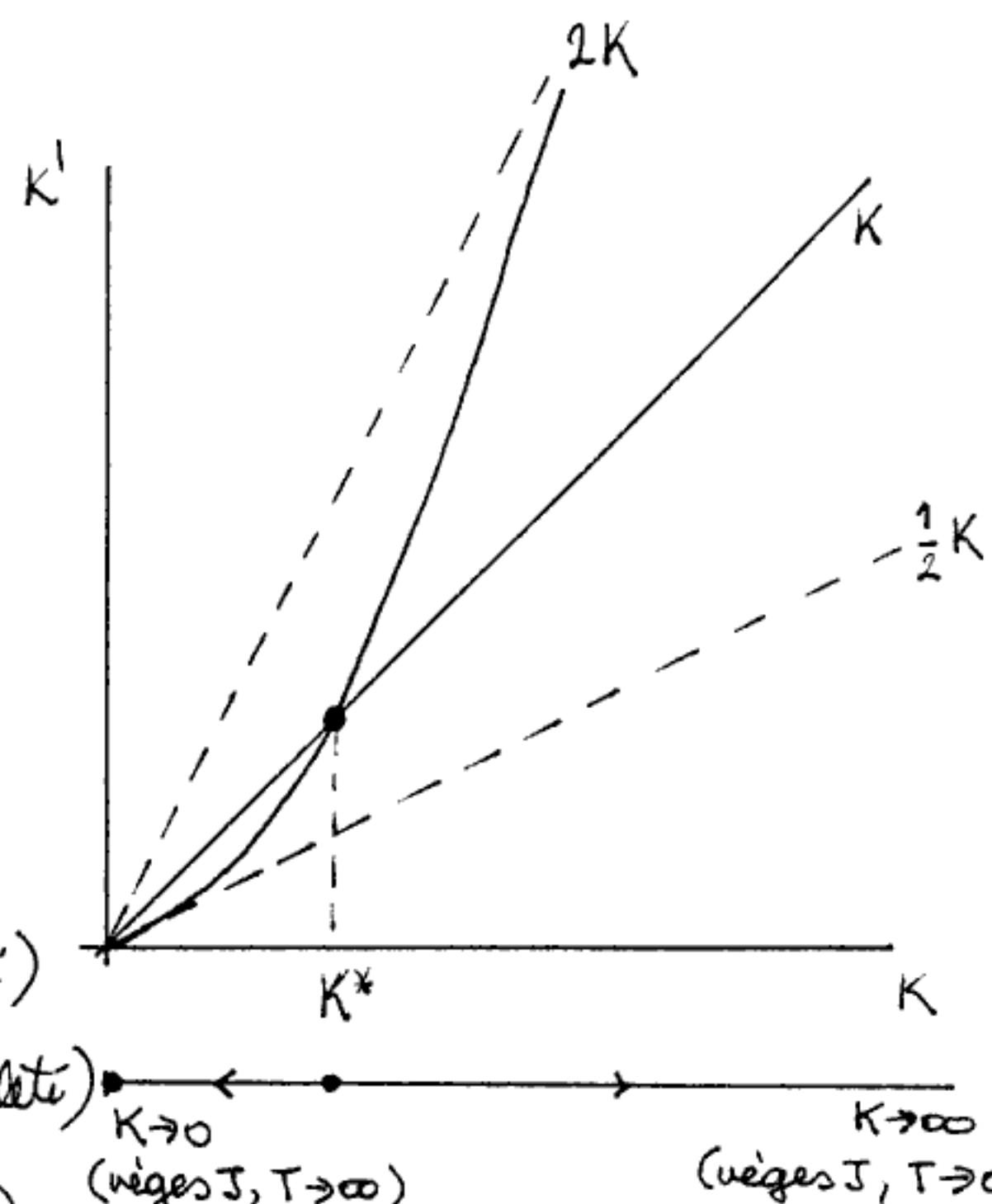
$$\text{fixpont: } K^* = 2K^*g^2(K^*)$$

trivialis fixpontok:  $K^* = 0$  (magashőmérőléleti)

$K^* = \infty$  (alevongő hőmérőléleti)

non-trivialis (négys) fixpont:  $1 = 2g^2(K^*)$

$$e^{4K^*} = \frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$



$$K^* = \frac{1}{4} \ln \frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 0.336$$

## a fixpont körül linearizált transzformáció

$$K = K_* + \delta K$$

$$\delta K^l = \left. \frac{d}{dK} (2Kg^2(K)) \right|_{K=K^*} \cdot \delta K \approx 1.624 \cdot \delta K$$

$$h^l = 3g(K^*)h = \frac{3}{\sqrt{2}} h$$

$$\left( \left. \frac{d}{dK} (2Kg^2(K)) \right|_{K=K^*} = 1 + \frac{16\sqrt{2} K^* e^{4K^*}}{(e^{4K^*} + 3)^2} \approx 1.624 \right)$$

### kritikus körzetök

$$\begin{cases} b^{1/\nu} = 1.624 \\ b^{1/\mu} = \frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad b = \sqrt{3}$$

$y_1 = \frac{1}{\nu} = \frac{\ln 1.624}{\ln \sqrt{3}} = 0.833$
$y_H = \frac{1}{\mu} = \frac{\ln (3/\sqrt{2})}{\ln \sqrt{3}} = 1.369$

összehasonlítható az egzakt és az átlagos közelítések kapott értékekkel

	számítások	egzakt	átlagos közelítés
$K^* = K_c = \frac{J}{kT_c}$	0.336	0.274	$\frac{1}{2} = \frac{1}{6} = 0.16$
$1/\nu$	0.883	1	2
$\Delta = \frac{\nu}{\mu}$	1.551	$\frac{15}{8} = 1.875$	$\frac{3}{2}$

( $K^*$  értéke nem univerzális, a  $\Delta$  másik vonatkozik)

A közelítés a kumulatív konkavitásban alapult. Magasabb kumulatív függelék vétele a számításokat elbonyolítja. A közelítés pontossága ellenőrizhetően.

### renormálási népot transzformáció valós téren — többi kikemények

variációs renorm. népot transzformáció (Kadanoff, 1975)

(Ising-modell:  $d=2 \quad \nu = 0.9991$   
 $d=3 \quad \nu = 0.6289$   
 $d=4 \quad \nu = 0.491$  )

Migdal-féle transzformáció (Migdal, 1975)

Monte Carlo renorm. népot transzformáció (Ma, 1976; Swendsen, 1979)

A valós térbeli transzformáció alacsonyabb dimenzióban jobb eredményeket ad.

a modell:

szemérettel leírás:  $\ell_{\min} \gg$  ránállandó, amit már kiintegráltunk a  $\ell_{\min}$ -nél kisebb leptékű szabadsejti fokozatra.

Ha  $\ell_{\min}$  elég nagy, mér mindenek kuantummechanikailag, tömörülő alkalmazható a kontinuum közelítés.

a rendparaméter:  $\phi(x) = \frac{1}{\ell^d} \sum_q e^{iqx} \phi_q$ ,  $\Lambda \sim \frac{1}{\ell_{\min}}$  levágás

eloszlásfüggvény:  $P[\phi(x)] \sim e^{-S[\phi(x)]}$

Periodikus határfeltételek  
V térfogatban.

a modellt a  $S[\phi]$  feltételes mebadalomjával definiáljuk.

$\phi^4$ -modell:  $S[\phi] = \int d^d x \left\{ \frac{r}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{u}{4} \phi^4 - h \phi \right\}$

$\# h$  a rendparaméterhez kapcsolt térfogat (phi - megszérettetés, h - megszéretlenítés)

dimenziók:  $S[\phi]$  dimenzióiban

$\phi$ -t  $d$ -nél normálizálva, ha  $(\nabla \phi)^2$  szimmetriája  $\frac{1}{2}$  lesen,

$$[\phi(x)] = \ell^{1-d/2} = \Lambda^{d/2-1} \quad [\phi_q] = \ell = \Lambda^{-1}$$

Landau-elméletben érkeünk, his a várható értéket a legelőször többségi értékkal azonosítjuk:

$$P[\phi(x)] = \text{max}, \quad S[\phi(x)] = \text{min}.$$

Homogen kúpos tér mellett an állapotot írunk  $r\phi + u\phi^3 = h$ , amiből

$\delta \sim T - T_0$ ,  $T_0$  a Landau-elmélet átalakuláni körérejelélete,

$$u \approx u(T_c).$$

A fániszteret a  $\phi_q$  Fourier-komponensek alkotják.

Helyettesítésekkel (h=0 mellett):

$$R = \frac{1}{2} \sum_q (r+q^2) \phi_q \phi_{-q} + \frac{u}{4V} \sum_{q_1 q_2 q_3} \phi_{q_1} \phi_{q_2} \phi_{q_3} \phi_{-q_1-q_2-q_3}$$

Integrálás a fániszteren (pl. az átlagpotenciál műntársánál):

$$\underbrace{\int D\phi \dots}_{\text{szimbolikus felölésök}} = \int \prod_q d\phi_q \dots = \int \prod_a d\phi_q' d\phi_q'' \dots, \quad \phi_q = \phi_q' + i\phi_q''$$

Valós  $\uparrow$   
 Valós  $\uparrow$   
 körzets  
 hozzá

Mivel  $\phi_q = \phi_{-q}^*$ ,  $\phi_q \neq \phi_{-q}$  nem következik, innen a  $q > 0$  szigorítás.

### A renormálási sejtő transformáció konstrukciója

Idejük: 1) kiintegálás a  $1/b < q < 1$  hullámhosszú Fourier-komponensek

2) átskálázás:  $x = b x'$

$$q = q'/b$$

$$\phi_q = b^{1-\gamma/2} \phi_{q'}$$

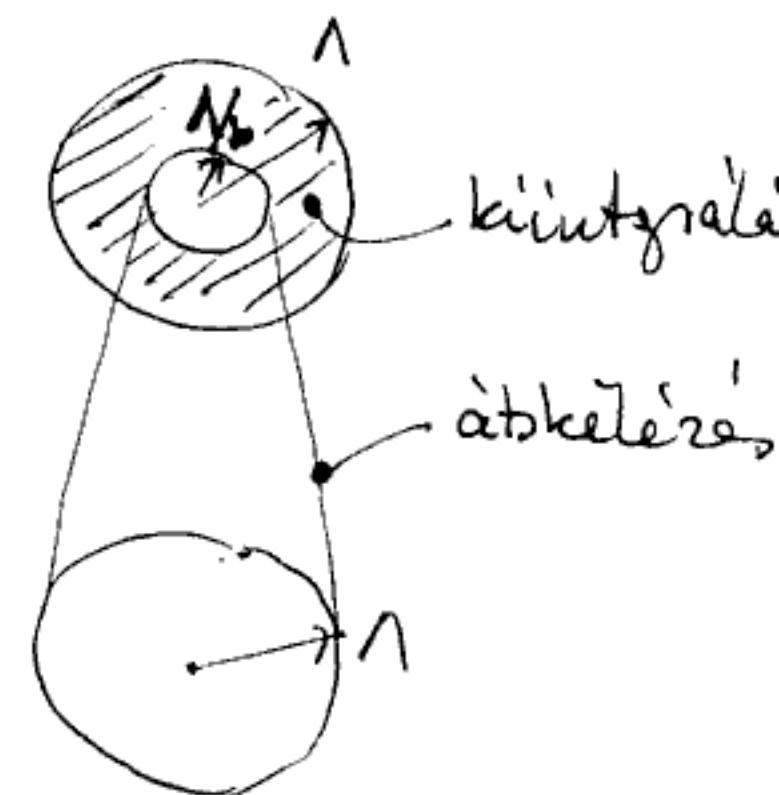
A leágás nem változik:  $\Lambda' = b \frac{\Lambda}{b} = \Lambda$

$\phi_q$  nem a dimenziójának (kosztans) megfelelően skálázódik. A  $b^{-\gamma/2}$  tényező benyötése akkor kell, hogy  $\phi_q$  ( $q \neq 0$ ) fluktuációi négesek maradjanak a transformáció során.

A konkret követelmény:  $q^2 \phi_q \phi_{-q}$  exszititója néges ( $= 1/2$ ) maradjon.

### A transformáció:

$$e^{-iE[\phi']} = \left\{ \int \prod_{q>\Lambda/b} d\phi_q e^{-iE[\phi]} \right\}_{\begin{array}{l} q=q'/b \\ \phi_q = b^{1-\gamma/2} \phi_{q'} \end{array}}$$



$$R_b: \mathcal{H}[\phi] \rightarrow \mathcal{H}'[\phi']$$

ha a paraméterezhető:  $\mu = (n_u, \dots)$

$$\mu' = R_b(\mu)$$

a korrelációs függvény transformációja:

$$C(q; \mu) = \overline{\phi_q \phi_{-q}} \Big|_{\mu} = b^{2-\eta} \overline{\phi'_q \phi'_{-q'}} \Big|_{\mu'} = b^{2-\eta} C(q'; \mu')$$

$q < 1/b$

(eredetie a Fourier-komponensekre nem integrálható)

a transformáció fixpontjában ( $\mu^* = R_b(\mu^*)$ )

$$C(q; \mu^*) = b^{2-\eta} C(bq; \mu^*) = q^{-(2-\eta)} C(1; \mu^*)$$

a fixpont a kritikus feltétel van, mely a hagyományosan definiált  
η kritikus exponenssel egyezik meg.

1. példa: Gauss-modell

$$\mathcal{H} = \int d^d x \left\{ \frac{r}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right\} = \frac{1}{2} \sum_q (r + q^2) \phi_q \phi_{-q}$$

$$P[\phi] \sim e^{-\mathcal{H}} = \prod_q \exp \left\{ -\frac{1}{2} (r + q^2) \phi_q \phi_{-q} \right\}$$

a  $\phi_q$  Fourier-komponensek független valószínűségi változók, melyek a magas hullámszámú komponensek kiintigrálása után konstans módon eredményez,  
ami a normális tégyűbe olvadható.

Az átskálázás után:

$$\mathcal{H}' = \frac{1}{2} \sum_{q'} \left( b^{2-\eta} r + \frac{b^{2-\eta}}{b^2} q'^2 \right) \phi'_{q'} \phi'_{-q'} = \frac{1}{2} \sum_{q'} (r' + q'^2) \phi'_{q'} \phi'_{-q'}$$

$(q' < 1)$

$$b^{-2} = 1, \text{ mely } \underline{\eta = 0}$$

$$\underline{r' = b^2 r} \quad \text{fixpont: } r^* = 0 \text{ (kritikus pont)} \quad \frac{1}{\nu} = y_1 = 2$$

a Landau-elmelet exponenseit keptük.

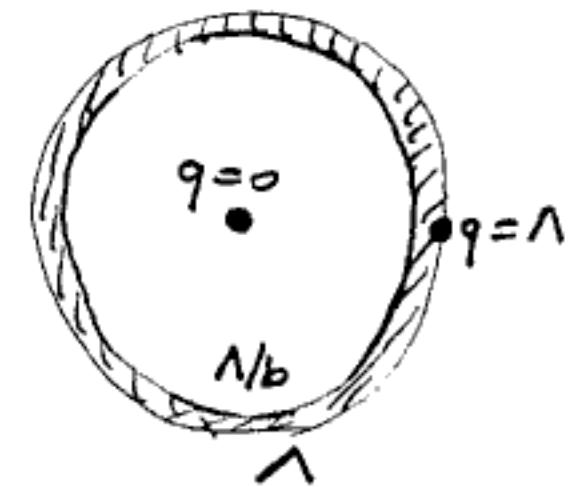
$$\underline{\nu = 1/2}$$

Korcs modell — csak  $r \geq 0$  mellett értelmes.

## 2. példa: $\phi^4$ -modell, két-módus közelítés

Vékonyságban végezzük a kiintegrálást ( $l \ll b \ll 1$ ) igen leegyszerűített módon: két tipikus fluctuációt szedünk meg ( $q=0$  és  $q=1$ ), kiintegráljuk a  $q=1$  módot, és vizsgáljuk a  $q=0$  módszertípusainak változását.

$$\phi(x) = \phi_0 + v\varphi(x_i), \quad \varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{V}} \cos(\Lambda x_i)$$



$$\begin{aligned} S = \int d^d x \left\{ \frac{r}{2} \phi_0^2 + \frac{u}{4} \phi_0^4 + \phi_0 v \varphi + \frac{r}{2} v^2 \varphi^2 + \frac{1}{2} v^2 (\nabla \varphi)^2 \right. \\ \left. + \frac{u}{4} (4v\varphi\phi_0^3 + 6v^2\phi_0^2\varphi^2 + 4v^3\varphi^3\phi_0 + v^4\varphi^4) \right\} \end{aligned}$$

$\varphi$  páratlan hatványaiuk integrálái elérnek, a páros hatványok integrálái:

$$\int \varphi^2 d^d x = 1, \quad \int (\nabla \varphi)^2 d^d x = \Lambda^2, \quad \int \varphi^4 d^d x = \frac{3}{2V}.$$

$$S = V \left\{ \frac{r}{2} \phi_0^2 + \frac{u}{4} \phi_0^4 \right\} + \frac{r+\Lambda^2}{2} v^2 + \frac{3}{2} u \phi_0^2 v^2 + \frac{3u}{8V} v^4$$

A  $q=1$  módszus kiintegrálása:  $u$  hatványai sorint haledő perturbációs módszert végezzük beléhető, hogy a  $v^4$ -es tag a legalacsoportosabb rendű konstansokat nem befolyásolja. A vérlétes vizsgálat helyett ezt a tagot elhagyjuk.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dv \exp \left\{ -\frac{r+\Lambda^2+3u\phi_0^2}{2} v^2 \right\} = \left( \frac{2\pi}{r+\Lambda^2+3u\phi_0^2} \right)^{1/2}$$

A  $q=1$  módszus a  $1/b < q < 1$  héj módszereit képviseli. Új módszert nevez:

$$\left. \begin{aligned} \frac{V}{(2\pi)^d} \int d\Omega_d \cdot \Lambda^{d-1} d\Lambda &= V \cdot K_d \cdot \Lambda^{d-1} d\Lambda \\ d\Lambda &= \Lambda - \frac{\Lambda}{b} = \Lambda \frac{b-1}{b} \approx \Lambda \ln b \end{aligned} \right\} K = VK_d \Lambda^d l \ln b$$

a kiintegrálás után:

$$f\ell^1 = V \left\{ \frac{r}{2} \phi_0^2 + \frac{u}{4} \phi_0^4 + \frac{K_d \Lambda^d \ln b}{2} \ln(r + \Lambda^2 + 3u\phi_0^2) \right\} + \text{const.}$$

$$= V \left\{ \frac{r}{2} \phi_0^2 + \frac{u}{4} \phi_0^4 + \frac{K_d \Lambda^d \ln b}{2} \left( \frac{3u\phi_0^2}{r + \Lambda^2} - \frac{9u^2\phi_0^4}{2(r + \Lambda^2)^2} + \dots \right) \right\} + \text{const.}$$

sorbaitejtve  $\phi_0^2$  hatvai merint ( $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \dots$ )

átskálázás:  $\phi_0 = b^{1-d/2} \phi_0^1$ ,  $V = b^d V^1$  (a  $\boxed{\eta=0}$  valatessével)

$$f\ell^1 = V^1 \left\{ \frac{\phi_0^1}{2} b^2 \left( r + \frac{3u K_d \Lambda^d}{r + \Lambda^2} \ln b \right) + \frac{\phi_0^1}{4} b^{4-d} \left( u - \frac{9u^2 K_d \Lambda^d}{(r + \Lambda^2)^2} \ln b \right) \right\}$$

Innen leszható a rekurziós összefüggések:

$$\boxed{r^1 = b^2 \left[ r + \frac{3u K_d \Lambda^d}{r + \Lambda^2} \ln b \right] \underset{\substack{(b \ll 1) \\ (b^2 \approx 1 + 2 \ln b)}}{\approx} r + \left( 2r + \frac{3u K_d \Lambda^d}{r + \Lambda^2} \right) \ln b}$$

$$\boxed{u^1 = b^{4-d} u \left( 1 - \frac{9u K_d \Lambda^d}{(r + \Lambda^2)^2} \ln b \right) \underset{(b^{4-d} \approx 1 + (4-d) \ln b)}{\approx} u \left[ 1 + \left[ 4-d - \frac{9u K_d \Lambda^d}{(r + \Lambda^2)^2} \right] \ln b \right]}$$

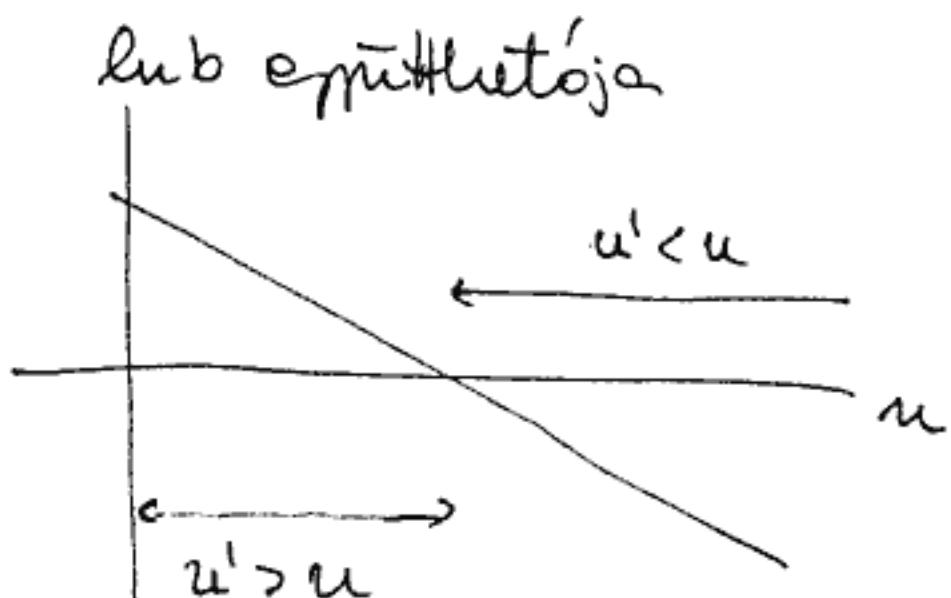
$4 < d$  eset: a rekurziós összefüggésben  $\ln b$  exponenciális  $< 0$ ,  
így  $u^1 < u$ . Az iteráció során  $u \rightarrow 0$ , így  $u^* = 0$ .

$$\text{Ekkor } r^1 = b^2 r, \quad r^* = 0, \quad \frac{1}{2} = y_1 = 2$$

A kritikus exponensek:  $\boxed{\eta=0, \nu=1/2}$  (a Landau-elvét exponensei)

Az eldedmény összhangban van a fizsburg-kritérium jöslátával.

$h > d$  eset:



Az iteráció során u véges  $u^*$  értéket tesz.

A fixpontban lub szükségesi eltrükk:

$$\left. \begin{aligned} 2r^* + \frac{3u^* K_d \Lambda^d}{r^* + \Lambda^2} &= 0 \\ 4-d - \frac{3u^* K_d \Lambda^d}{(r^* + \Lambda^2)^2} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

+ reakciós összefüggésnek linearizált változata:

$$t = r^* + \delta r$$

$$\left. \begin{aligned} \delta r' &= \delta r + \left( 2 - \frac{3u^* K_d \Lambda^d}{(r^* + \Lambda^2)^2} \right) \delta r \cdot \text{lub} = \delta r \left[ 1 + \text{lub} \left( 2 - \frac{4-d}{3} \right) \right] \\ \delta r' &= b^{y_1} \delta r \approx (1-y_1 \text{lub}) \delta r \end{aligned} \right\}$$

A kettő összetételeből:  $\boxed{\frac{1}{v} = y_1 = 2 - \frac{4-d}{3}}$

$d=3$  dimenzióban:  $\frac{1}{v} = y_1 = \frac{5}{3}$

$$\boxed{\begin{aligned} v &= \frac{3}{5} = 0.6 \\ \gamma &= 0 \end{aligned}}$$

További exponensek a skálatorányok segítségével kephetők:

$$\gamma = v(2-\gamma)$$

$$\boxed{\gamma = 1.2}$$

$$2\beta + \gamma = 2 - \alpha = d\nu$$

$$\boxed{\beta = 0.3}$$

A primitív közelítés ellenese, a legtöbb esetben neglecionálható közelítés esetén a mérések, ill. magesskömörökhez sorozatrendszereiket.

A hármas elemi sorozat a  $\phi^4$ -modell reakciós összefüggései  $d < 4$  dimenzióban  $u$  és  $\epsilon = 4-d$  hatványai merül először kétötököt követően ki. A következő közelítést a sorokat  $u \sim \epsilon$  függeléssel vételeivel kell elvágni. Ily módon a kritikus exponensek  $\epsilon = 4-d$  hatványai merül először ki a sorokból meg. A két-módus közelítés a reakciós összefüggésekkel, így az exponenseket is,  $O(\epsilon)$  rendig helyesen adja meg:  $\frac{1}{v} = 2 - \frac{\epsilon}{3} + \dots$ ,  $v = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12} + \dots$

$$\gamma = 0 + \dots$$

## Eredmények összefüggése

49

$\phi^4$ -modell n-komponensű rendparaméterrel:

$$\phi(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_n(x), \dots, \phi_n(x))$$

$$\mathcal{H}[\phi] = \int d^d x \left\{ \frac{r}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{u}{4} (\phi^2)^2 - h \phi \right\}$$

$$\text{ahol } \phi^2 = \sum_{\alpha=1}^n \phi_\alpha^2, \quad (\nabla \phi)^2 = \sum_{\alpha=1}^n (\nabla \phi_\alpha)^2, \quad h \phi = \sum_{\alpha} h_{\alpha} \phi_{\alpha}$$

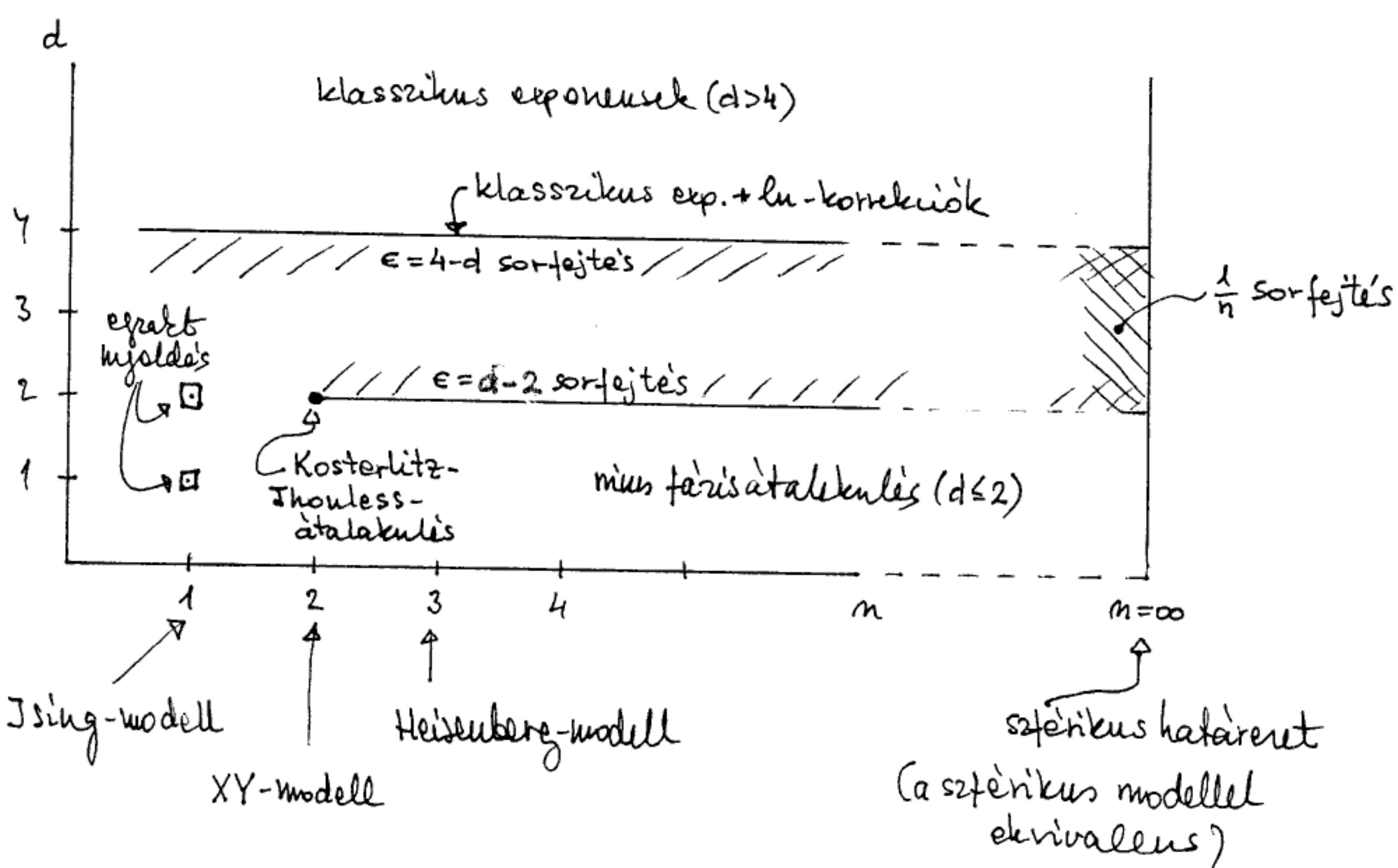
Ha  $h_{\alpha}=0$ , a rendparaméter n komponenseinek terében nincs kitüntetett irány,  
isotróp modell,  $O(n)$  szimmetria

Univerzalitási öntények: a renormális ágazat analízis szerint a kritikus  
telkedésnak csak  $d$  és  $n$  értékétől függ (n értékétől nem).

Nem univerzális meghívégek: kritikus homárzások,  
a hatványfüggvények számításá  
(amplitudók)

Univerzális meghívégek: kritikus exponenciák,  
(nak  $n, d$ -től függnek) amplitudó hényadosok,  
skálafüggvények

## $n-d$ térkép



d > 4: klasszikus exponensek, a Ginzburg-kritériummal összhangban (5)

d = 4: ún. marginális dimenzió: klasszikus exponensek, logaritmikus korrekciók:

$$\chi \sim \frac{1}{t} |\ln t|^{\frac{n+2}{n+8}}, \quad C_{H=0} \sim |\ln t|^{\frac{4-n}{n+8}} \quad (t > 0)$$

$$m \sim |t|^{1/2} |\ln |t||^{\frac{3}{n+8}} \quad (t < 0)$$

d = 4 - ε (ε > 0): ε-sorfejtés

$$\left. \begin{aligned} \nu &= \frac{1}{2} + \frac{n+2}{4(n+8)} \epsilon + \frac{(n+2)(n^2+23n+60)}{8(n+8)^3} \epsilon^2 + O(\epsilon^3) \\ \eta &= \frac{n+2}{2(n+8)^2} \epsilon^2 + O(\epsilon^3) \end{aligned} \right\} \epsilon = 4-d$$

Asymptotikus rez.

Magasabbrendű számítások és rafinált összegzési eljárások segítségével meghatározhatók d=3 dimenzióban az exponensek, a megastömörülési sorszával összehangolt pontossággal. A két eljárási eredményei összhangban vannak egymással.

d < 2, n ≥ 2: nem minden ki hosszítáni rend (l. Mermin-Wagner-tétel)

d = 2, n = 2: ún. Kosterlitz-Thouless-átalakulás: Tc alatt más hosszítáni rend (spontán megúszorulás), a korrelációk minden T < Tc homogénekként hatványfüggelék szerint nőnek le (kritikus (hosszítáni) korrelációk)

d = 2 + ε (ε > 0), n > 2: ε-sorfejtés

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\nu} &= \epsilon + \frac{\epsilon^2}{(n-2)} + \dots \\ \eta &= \frac{\epsilon}{n-2} - \frac{n-1}{(n-2)^2} \epsilon^2 + \dots \end{aligned} \right\} \epsilon = d-2, n > 2$$

$n \rightarrow \infty$  határevest: a kritikus viselkedés megeperje a szférikus modelllel. Szintematikus sorfejtés végezhető  $1/n$  hatványai miatt:

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{2}{d-2} \left( 1 - \frac{3A_d}{n} + \dots \right) \\ \gamma &= \frac{2(4-d)}{d} \frac{A_d}{n} + \dots \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} 2 < d < 4, \text{ ahol } A_d = &\begin{cases} \epsilon + \dots & (d=4-\epsilon) \\ \frac{4}{\pi^2} & (d=3) \\ \frac{\epsilon}{2} + \dots & (d=2+\epsilon) \end{cases} \end{aligned}$$

### Anizotrópia és hosszutávú kölcsönhatások

egyszerű anizotrópia:

$$\mathcal{H} = \int d^d x \left\{ \frac{r_1}{2} \sum_{\alpha=1}^m \phi_\alpha^2 + \frac{r_2}{2} \sum_{\alpha=m+1}^n \phi_\alpha^2 + \dots \right\}, \quad r_1 \sim T - T_0, \quad r_2(T_0) > 0$$

Csatlakoztatva a  $\{\phi_\alpha\}_{\alpha=1}^m$  köműjű meghatározási áltér valkív kritikussá. A kritikus viselkedés meghatározásából m komponensű rendszer.

### köböös (hiperköböös) anizotrópia

$$\mathcal{H} = \int d^d x \left\{ \frac{r}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{u}{4} (\phi^2)^2 + \frac{v}{4} \sum_{\alpha=1}^n \phi_\alpha^4 \right\}$$

Nincs forgás-simmetria, de nincs körültekercses komponens sem ( $\mathcal{H}$  invariáns a rendparaméter komponenseinek ötödik-magasabbal rendben.)

$n < n_c(d)$ : a stabil fixpont izotróp ( $u^* \neq 0, v^* = 0$ )

a kritikus fluktuációk forgás-simmetriát generálva  
a köböös anizotrópia irreleváns

$n > n_c(d)$ : a stabil fixpont köböös ( $u^* \neq 0, v^* \neq 0$ )

ügyes kritikus viselkedés (köböös exponensek)

$\epsilon$ -sorfejtésből:  $n_c(d) = 4 - 2\epsilon + O(\epsilon^2)$  ( $\epsilon = 4-d$ )

jelentőségi becslések miatt:  $d=3$ -ban  $n_c \gtrsim 3$  valható.

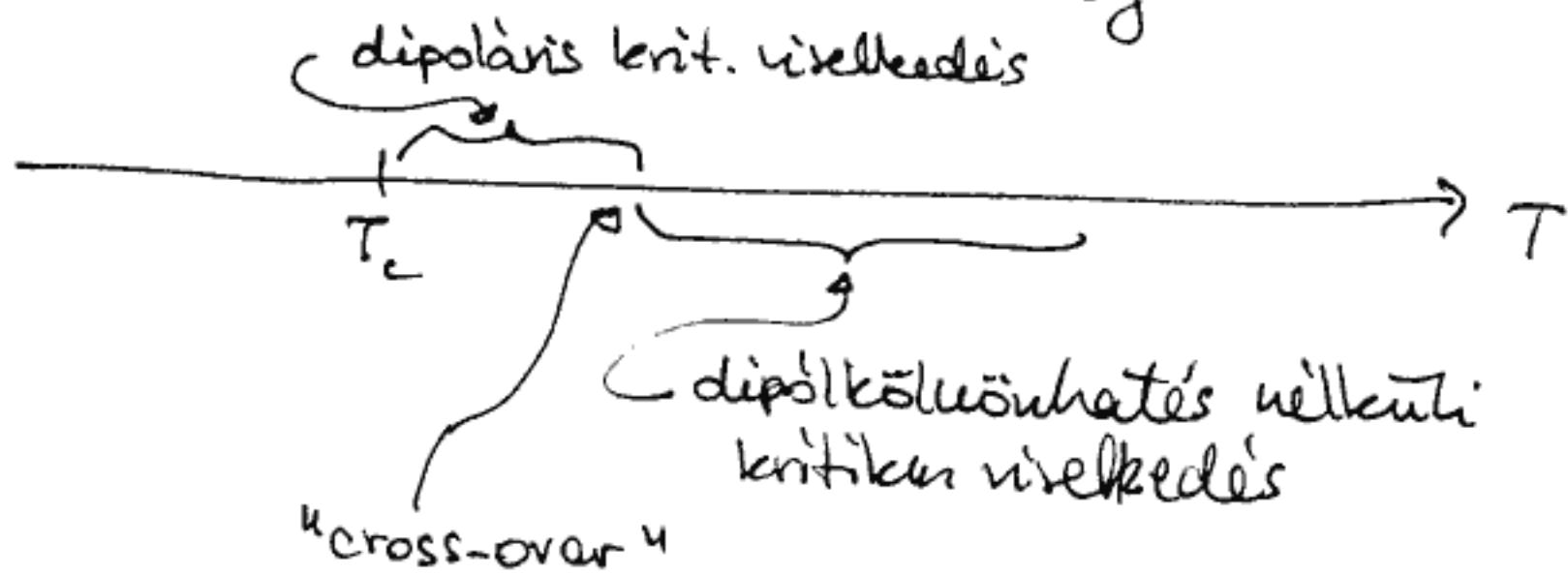
dipoliköltözékhetség: A rövid és a hosszú hatótávolság határán.

A hullámterem téren jelent anizotrópiát. Itt bővül a

$$\sum_{\alpha\beta} \sum_q \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \phi_{q\alpha} \phi_{-q\beta}$$

taggal. Releváns perturbáció, mely tipikus kritikus viselkedést eredményez.

A dipoliköltözékhetség operye, "cross-over" jelenség:



egytereljű dipoláris megsz.: en komponensű rendszereknél

$$H = \frac{1}{2} \sum_q (r + q^2 + g \frac{q_1^2}{q^2}) \phi_q \phi_{-q} + \dots$$

a marginális dimenzió 3, ahol  $d > 3$  dimenzióban klasszikus exponensek vannak,  $d=3$  dimenzióban klasszikus exponensek logaritmikus konstansikkal:

pl.  $\chi \sim \frac{1}{t} |\ln t|^{1/3}$ ,  $m \sim |t|^{1/2} |\ln |t||^{1/3}$ , stb.

(megjelenik a rövidhatótávolságú  $\phi^4$ -modell  $d=4, n=1$  viselkedésénél.)

A renormális körpot analízis eredményei közvetlenül összehasonlíthatóak a mérésekkel.

## Kritikus dinamika

(53)

sztatika: egyszerűi elosztás  $\rightarrow$  szabadeségvisz, általánosan  
sztatikus korrelációk  
sztatikus valasz

dinamika: mozgássejnelet  $\rightarrow$  transport és kinetikus egyszerűsítés  
relaxáció  
időfüggő perturbációkhoz adott valasz  
korrelációs függvények

a kritikus lelassulás jelensége:

A folytonos fázisátmennet kritikus pontja a magasabb szimmetriájú fázis stabilitási határa. A rendparaméter fluktuációi nagy távolságokon is köhögések és lassulás lesznek.

kommunikatív elmélet

(van Hove (1954), Landau - Khalatnikov (1954))

A lineáris irreverzibilis termodynamikát alkalmazzák a rendparaméter hosszúidőbeni viselkedésének leírására.

(A kritikus lelassulás miatt a rendparaméter lassú változó, a lin. irrev. termo. epp lassú változó leírására kölcsön.)

new-megújuló rendparaméter cím

(pl. entengelyi mágnes,  $T > T_c$ )

a megnövekedett változásnak sebessége a termodynamikai hajtóerővel arányos:

$$\dot{M} = - \Gamma \left( \frac{M}{\chi} - H \right) = - \Gamma \left( \frac{\partial W}{\partial M} - H \right)$$

↑                      ↑  
kinetikus          termodynamikai  
egyszerűsítés      hajtóerő  
(egyszerűen elosztás)

$W(M)$  termodynamikai potenciál

$$W(M) = \frac{M^2}{2\chi} + \dots$$

zárt megnövés törben:  $M(t) = M(0) e^{-\frac{\Gamma}{\chi} t}$

relaxációs idő:  $\frac{\chi}{\Gamma}$

relaxáció sebessége:  $\omega_c = \frac{\Gamma}{\chi}$

## általánosítás inkohézén rendszere:

$$\dot{M} = -\Gamma \frac{\delta W}{\delta M}, \text{ azaz } \dot{M}_q = -\Gamma \frac{\partial W}{\partial M_q} = -\Gamma \frac{M_q}{\chi(q)}$$

a termodynamikai potenciál:  $W = \frac{1}{2} \sum_q \frac{|M_q|^2}{\chi(q)}$

a relaxáció sebessége:  $\boxed{\omega_c(q) = \frac{\Gamma}{\chi(q)}}$

Korrelációs függvény: feltételezve, hogy a termikus fluktuációk visszavágó nélkülözök, mint a kis kiélező zavarok által keltetett nemegyenlőségi állapotok.

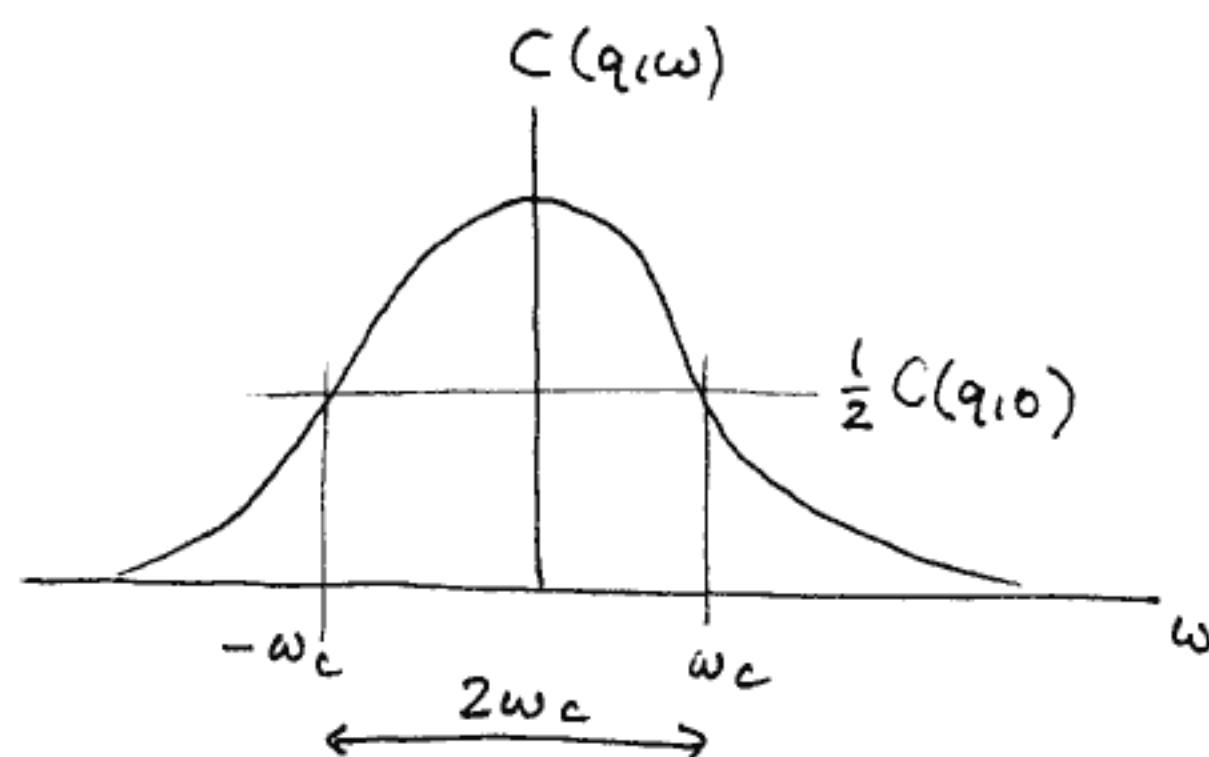
$$C(q,t) = \langle M_q(t) M_{-q}(0) \rangle = \langle M_q(0) M_{-q}(0) \rangle e^{-\frac{\Gamma}{\chi(q)}|t|}$$

$$\boxed{C(q,t) = kT \chi(q) e^{-\frac{\Gamma}{\chi(q)}|t|}}$$

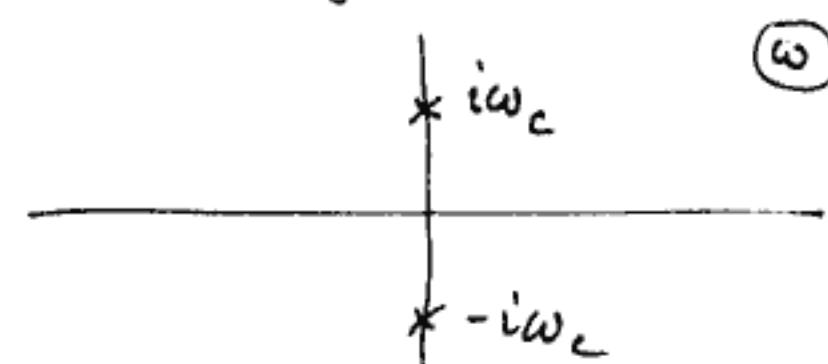
(a hosszihullámai, lesső fluktuációk nem kvantumosak, alkalmazható a kl. fluktuációs-válasz tétel)

Fourier-transzformálva:

$$C(q,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega|t|} e^{i\omega t} dt \cdot kT \chi(q) = kT \chi(q) \left( \frac{1}{\omega_c - i\omega} + \frac{1}{\omega_c + i\omega} \right)$$



pólusai a komplex síkon:



kritikus viselkedés: a konvencionális elvűlet alátétterére:  $\Gamma$  nem kritikus, azaz véges merad a kritikus pontban ( $\Gamma$ -t a nemkritikus rövidhullámai kölönösségek határozzák meg.)

így

$$\omega_c = \frac{\Gamma}{\chi(q)} \left\{ \begin{array}{l} \sim \xi^{-8/\nu} = \xi^{-(2-\eta)} \sim \tau^8 \quad (\Gamma > \Gamma_c, q=0) \\ \sim q^{2-\eta} \end{array} \right. \quad (\Gamma = \Gamma_c)$$

$$\tau = \frac{\Gamma - \Gamma_c}{\Gamma_c}$$

## Megnevadó rendparaméter esete

(pl. izotróp mágnes,  $T > T_c$ )

a  $q=0$  megneváratrig-komponens megnedvűlésének, így relaxáció's sebessége zérus, azaz

$$\Gamma = \Lambda q^2$$

( $\Lambda$ : transzportegyüthető)

az ún. hidrodinamikai tartományban ( $q\tilde{\epsilon} \ll 1$ ) a megneváratrig időbeli változása diffuzív (spindiffúzió):

$$\dot{M}_q = -\frac{\Lambda q^2}{\chi(q)} M_q , \text{ a } q \gg 0 \text{ határon kívül } \chi(q) \text{ véges, így}$$

$$\dot{M}_q = -\frac{\Lambda}{\chi(0)} q^2 M_q , \text{ ahol } \boxed{\dot{M} = \frac{\Lambda}{\chi(0)} \Delta M}$$

$\frac{\Lambda}{\chi(0)}$  az ún. spindiffúzió's együthető

## A kritikus viselkedés:

$$w_c = \frac{\Lambda q^2}{\chi(q)} \begin{cases} \sim q^2 \tilde{\epsilon}^{-(2-\gamma)} \sim q^2 \tau^\gamma & (T > T_c, q\tilde{\epsilon} \ll 1) \\ \sim q^{4-\gamma} & (T = T_c) \end{cases}$$

a kísérleti tapasztalatokkal össumbetűnö clivéest mutat az izotróp mágnes

pl.  $T = T_c$ ,  $w_c \sim q^{2.5}$ , ahol  $\Lambda \sim q^{-1.5}$  ( $\eta \approx 0$  függetlenül)

A konvenziós elmelet  $\Lambda$ -t végesnek feltételezi, a tapasztalat nem is dívezál

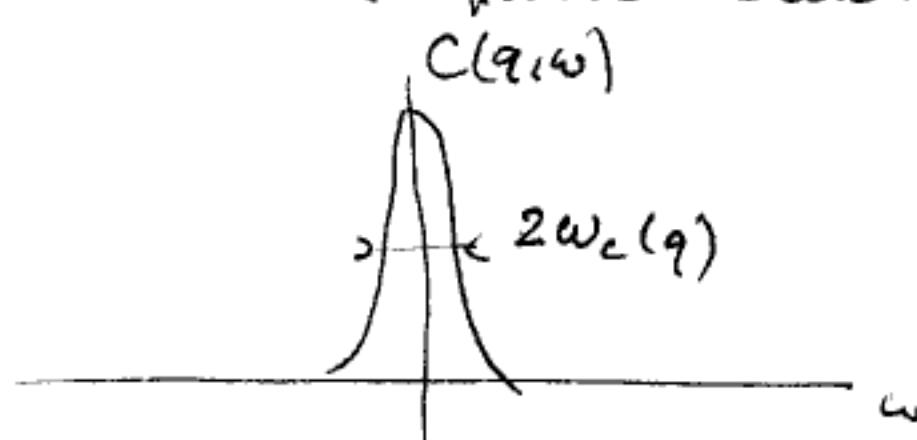
a kritikus pontban

## Dinamikai skálalípotézis

központi szerepet játszik az ún. karakteristikus frekvenciás,  $\omega_c(q)$ , amely a rendparaméter fluktuációinak időbeli változását jellemzi.

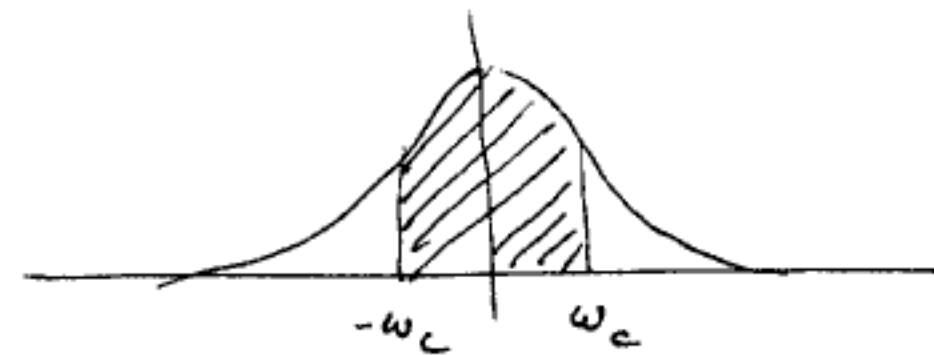
(A rendparaméter hosszihullámi fluktuációinak korrelációs függvényét a kritikussával (lelakmá) termikus elemi gerjesztések uralják. Az ekkor megjelenő minősök valamely folyamatra adatot (pl. félértékesség) valóan hatásnak karakteristikus frekvenciájának. A din. skálalípotérén ezek alsó feltere, hogy minden karakteristikus frekvencia létezik, míg a különböző frekvenciaadatok arányos módon viselkednek a kritikus pont közelében (háromszög nem kritikus).

pl. relaxáció (diffúzió) esetén:



egy más felülről:

$$\int_{-\omega_c}^{\omega_c} C(q, \omega) d\omega = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} C(q, \omega) d\omega = \frac{1}{2} C_s(q)$$



a karakteristikus frekvencia  $q$  és  $\xi$  függvénye,  $\omega_c(q, \xi)$

a kritikus tartományban ( $q\xi \gg 1$ ) más jellemző hosszúság, mint  $\omega_c$  a  $q$  hatásfüggvénye

$$\omega_c = A q^z \quad (q\xi \gg 1)$$

$\xi$  az ún. dinamikai kritikus exponens

általános  $q, \xi$  értékpárok esetén:

minél  $\xi$  az esetben lepők,  $\omega_c = q^z \Omega_{\pm}(q\xi)$

$$\omega_c = q^z \Omega_{\pm}(q\xi)$$

azaz  $\omega_c$  általánosan függ  $(\pm)$  a  $T > T_c$  és  $T < T_c$  esetek után

$$\omega_c(q, \xi) = b^{-z} (bq)^z \Omega(bq, \xi/b) = b^{-z} \omega_c(bq, \xi/b)$$

az  $\Omega(q, \xi)$  függvény tulajdonságai

$$q\xi \gg 1 : \Omega_{\pm}(q\xi) \approx A$$



$q\xi \ll 1$  : nem-megverődő rendparaméter:  $\omega_c$   $q$ -tól független,  $\Omega \sim (q\xi)^{-z}$

$$\text{azaz } \omega_c \sim \xi^{-z} \sim \tau^{z\nu}$$

megverődő rendparaméter ( $T > T_c$ ):  $\omega_c \sim q^2$ ,  $\Omega \sim (q\xi)^{2-z}$

$$\text{azaz } \omega_c \sim q^2 \xi^{2-z}, \text{ a spin-diff. összetétele } \sim \xi^{2-z} \sim \tau^{-(2-z)\nu}$$

a skálaközépötörés megfogalmazása a dinamikai korrelációs függvényre

$\xi$  az eretlen jellemző kosszúság

$w_c(q, \xi)$  az eretlen jellemző frekvencia a  $q$  hullámfrekvenciának

$$C(q, \omega, \xi) = \frac{C_s(q, \xi)}{\omega_c(q, \xi)} Y(q\xi, \frac{\omega}{\omega_c(q, \xi)})$$

$y$  dimenziókkal,  
erőt nélk dimenziókkal  
változásról függhet

az összegzésben miatt,  $\omega$ -ra integrálva:

$$\frac{1}{\omega_c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} Y(q\xi, \frac{\omega}{\omega_c}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} y(q\xi, u) du = 1$$

működési irány

$$C(q, \omega, \xi) = \frac{q^{-(2-\gamma+z)}}{\mathcal{L}(q\xi)} Y(q\xi, \frac{\omega}{q^z \mathcal{L}(q\xi)})$$

a din. korr. függvény ált. konzén függély,

$$C(q, \omega, \xi) = b^{2-\gamma+z} C(bq, b^z \omega, \xi/b)$$

a kosszúság mellett an  
idő (frekvencia) is  
sziszterzódik

könnyen ellenőrizhető, hogy a dinamikai skálaközépötörés a kompozicionális címével  
tcljénél, a dinamikai kritikus exponenciák értékei:

rem-megmaradó rendparaméter esetén:  $z = 2 - \gamma$

megmaradó rendparaméter esetén:  $z = 4 - \gamma$

## 1. példa: izotróp ferromágnes

Folytonos szimmetria sértésékor  $T < T_c$  következetben a  $q \xi \ll 1$  hidrodinamikai tartományban gap nélküli, propagáló módszert használunk (ún. Goldstone-módszer). Frekvenciája szatikus menetiségekkel kifejezhető. Illusztráció: izotróp ferromágnes.

$T < T_c$ : a rendparaméter nagyságát ( $m_0$ ) a kövéréket mehetőrezzük. A hosszú hullámú irányváltások rezonanciajához könni.

Az irányt rögzítő egységvektor:  $\underline{n} = \frac{\underline{m}}{m_0}$ . A z tengely irányába vonatkozó rendparaméter kis irányváltásai eredménye:

$$n_x, n_y \ll 1, \quad n_z = \sqrt{1 - n_x^2 - n_y^2} \approx 1$$

A rezonancia csak  $\nabla n_x$  és  $\nabla n_y$  függvénye lehet:

$$\boxed{W = \int d^3x \frac{\rho_s}{2} [(\nabla n_x)^2 + (\nabla n_y)^2] = \int d^3x \frac{\rho_s}{2m_0^2} [(\nabla m_x)^2 + (\nabla m_y)^2]} \\ = \frac{1}{2} \sum_q \frac{\rho_s q^2}{m_0^2} (|m_{xq}|^2 + |m_{yq}|^2)$$

Ebből leolvasható a transzverzális susceptibilitás:

$$\chi_T = \frac{m_0^2}{\rho_s q^2}$$

$\rho_s$  kritikus viselkedése a szatikus skálahipotézis segítségével meghatározható:

$$\chi_T = \frac{m_0^2}{\rho_s q^2} \sim \frac{\xi^{-2\beta/\nu}}{\rho_s q^2}$$

$$\rho_s \sim \xi^{-\frac{2\beta}{\nu} + \gamma} = \xi^{2-d} \stackrel{d=3}{=} \xi^{-1}$$

$$2\beta = 2 - \alpha - \gamma = d\nu - \nu(2-\gamma)$$

$$\chi_T = \frac{1}{q^{2-\gamma}} f(q\xi) \sim \frac{(q\xi)^{-2}}{q^{2-\gamma}}$$

$$d=3: \quad \rho_s \sim \frac{1}{\xi}$$

## (59)

### lineáris, teresribilis hidrodinamika egységei

en mélyezes momentum működésének mélyezes téren:

$$\text{Hamilton-egység: } \mathcal{H} = -\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{H}}$$

$$\underline{\underline{M}} = \mu \underline{\underline{S}}, \quad [S_x, S_y] = iS_z$$

$$[M_x, M_y] = i\mu M_z$$

$$\dot{\underline{\underline{M}}} = \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}, \underline{\underline{M}}] = \frac{\mu}{\hbar} (\underline{\underline{M}} \times \underline{\underline{H}}) = g (\underline{\underline{M}} \times \underline{\underline{H}}) \quad \text{v. spinprecesszió}$$

a teresribilis hidrodinamika a mikroskopikus működési állapotot tükrözi,  
de  $\underline{\underline{H}}$  helyette a termodynamikai kejtőerő elf:  $\underline{\underline{H}} - \frac{\delta W}{\delta \underline{\underline{M}}}$

$$\frac{\delta W}{\delta m_x} \text{ mennyisége: } m_x \rightarrow m_x + \delta m_x$$

$$W = \int d^3x \frac{\rho_s}{2m_0^2} \left( (\nabla m_x)^2 + 2m_x \nabla \delta m_x + \cancel{(\nabla \delta m_x)^2} \right)$$

négyzetes

$$= \int d^3x \frac{\rho_s}{2m_0^2} \left( (\nabla m_x)^2 - 2(\Delta m_x) \cdot \delta m_x \right)$$

parciális integrációval

$$\text{Ebből: } \frac{\delta W}{\delta m_x} = -\frac{\rho_s}{m_0^2} \Delta m_x$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -g (\underline{\underline{m}} \times \frac{\delta W}{\delta \underline{\underline{m}}})_x = g m_0 \frac{\delta W}{\delta m_y} = -g \frac{\rho_s}{m_0} \Delta m_y$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = -g (\underline{\underline{m}} \times \frac{\delta W}{\delta \underline{\underline{m}}})_y = -g m_0 \frac{\delta W}{\delta m_x} = g \frac{\rho_s}{m_0} \Delta m_x$$

$$\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ 0 & 0 & m_0 & \\ \frac{\delta W}{\delta m_x} & \frac{\delta W}{\delta m_y} & 0 & \end{pmatrix}$$

azaz a leíróváltozókban lineáris tagokat találunk meg

Fourier-komponensekre:

$$\left. \begin{aligned} -im_x &= g \frac{\rho_s}{m_0} q^2 m_y \\ -im_y &= -g \frac{\rho_s}{m_0} q^2 m_x \end{aligned} \right\}$$

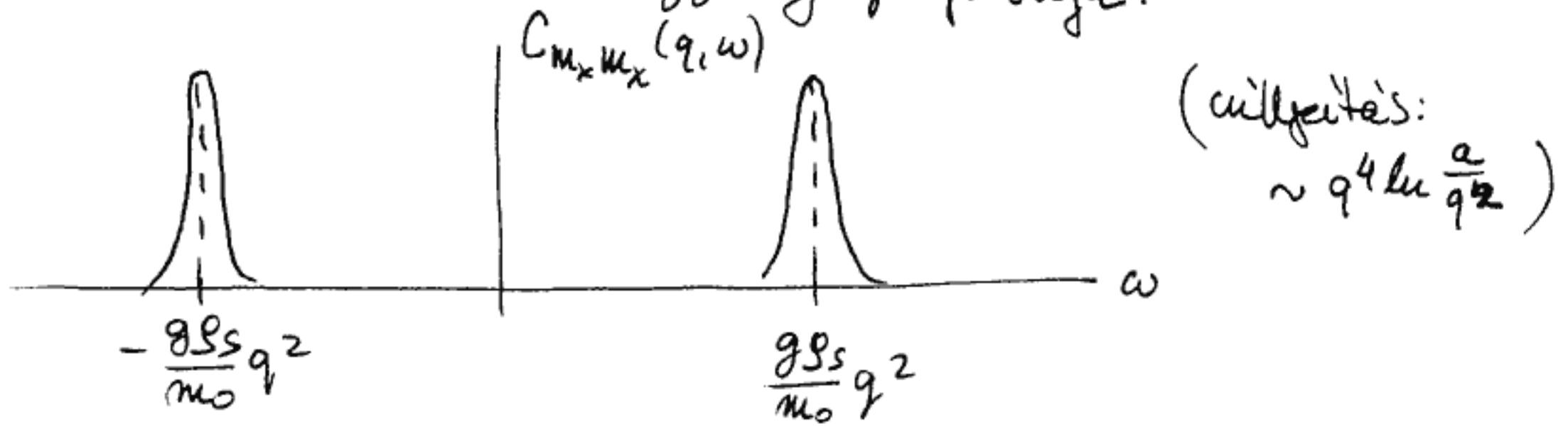
$$\begin{vmatrix} -iw & -g \frac{\rho_s}{m_0} q^2 \\ g \frac{\rho_s}{m_0} q^2 & -iw \end{vmatrix} = \left( g \frac{\rho_s}{m_0} q^2 \right)^2 - \omega^2 = 0$$

$m_x$  és  $m_y$  között  $\frac{\pi}{2}$  fázishüvelyel van.

$$\omega = \pm g \frac{\rho_s}{m_0} q^2$$

ferromélyezes spinhullámok

a transverzális dinamikai korrelációk hügnely grafikonja:



### a dinamikai skálahipotézis alkalmazása

$$g_s \sim \xi^{-1}$$

$$m_0 \sim \xi^{-\beta/\nu}$$

$$\frac{g g_s}{m_0} q^2 \sim \xi^{-1+\beta/\nu} q^2 = q^{3-\beta/\nu} (\xi q)^{-1+\beta/\nu}$$

Ebből a din. exponens:  $\tau = 3 - \frac{\beta}{\nu} = \frac{5-\gamma}{2} \approx \frac{5}{2}$  ( $\eta \approx 0$  felkészítéssel)

$$2\beta = 2 - \alpha - \gamma = d\nu - \nu(2-\gamma) = \nu(d-2+\gamma) \stackrel{d=3}{=} \nu(1+\gamma)$$

$T = T_c$ : a relaxáció sebessége:  $\omega_c \sim q^\tau = q^{5/2}$  ( $\eta \approx 0$ )

$T > T_c$ :  $q \xi \ll 1$  hidrodinamikai tartományban  $\omega_c = D_s q^2$  (szindiffúzió)

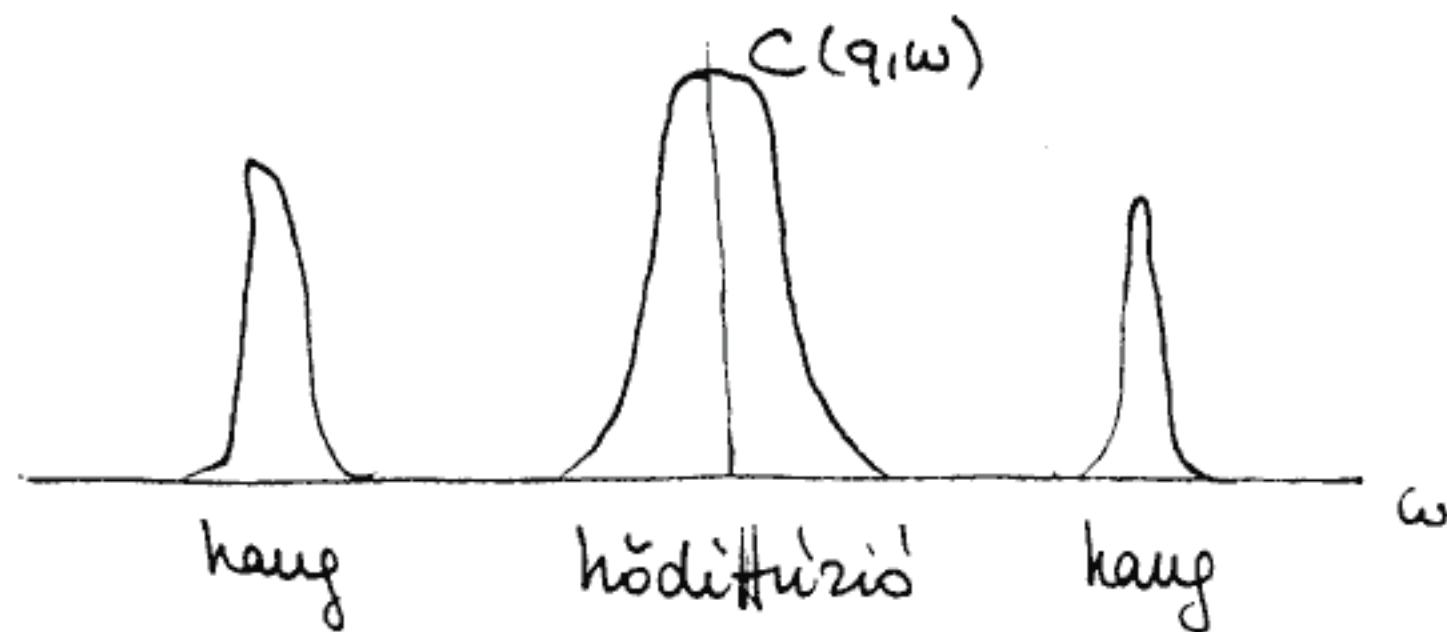
$$D_s \sim \xi^{-1+\beta/\nu} = \xi^{-\frac{1-\gamma}{2}} \sim \xi^{\frac{1-\gamma}{2}\nu} \sim \xi^{1/3}$$

( $\nu \approx 2/3$ ,  $\gamma \approx 0$  felhasználás)

mérésök (EuO, Fe): hibahatáron belüli szépség

## 2. példa: folyadék-gáz kritikus pont

a dinamikai exponens nem fejezhető ki statikus exponensekkel  
az érdekes korrelációs függvény: sűrűség-korr. függvény



A kritikus módus a hődiffúzió:  $\omega_c = D_T q_c^2$ ,  $D_T = \frac{\lambda}{\rho c_p}$  hődiffúziós sejtethető  
 $\lambda$  hővezetési tényező

$$T > T_c, \rho = \rho_c : \quad c_v \sim T^{-\alpha}$$

$$c_p = c_v + \frac{T\alpha^2}{\rho K_T} = c_v + \frac{T}{\rho} K_T \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v^2}_{\text{véges}} , \text{ így } c_p \sim K_T \sim T^{-\alpha}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = \frac{\alpha}{K_T}$$

$$\lambda \sim \xi^x \sim T^{-x\nu} \quad (\text{a hővezetési tényező divergál, ha } T \rightarrow T_c \text{ nem konvencionális esetként})$$

$$D_T q^2 \sim \xi^{x - \frac{\gamma}{\nu}} q^2 = (\xi q)^{x - \frac{\gamma}{\nu}} q^{2 + \frac{\gamma}{\nu} - x}$$

$$\text{ebből} \quad \boxed{z = 2 + \frac{\gamma}{\nu} - x = \underline{4 - \eta - x}}$$

(konvencionális elmeletben:  $x=0, z=4-\eta$ )

a hődiffúzió an energiatransport sejtete, an energia megosztás mértéke.

$$\begin{array}{ll} \text{mérések:} & x\nu = 0.6 \quad | \quad x = 0.90 \\ & \nu = 0.67 \quad | \quad z = 4 - 0.90 \approx 3 \end{array}$$

$$\boxed{\xi \approx 3}$$

## Hangbeséges:

$$u^2 = \frac{1}{\rho K_S} = \frac{1}{\rho} \frac{c_p}{c_v K_T} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{K_T} + \frac{T}{\rho c_v} \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v^2}_{\sim T^\delta} \right) \sim \frac{1}{c_v} \sim T^\alpha$$

## a dinamikai renormálási csoport transzformáció

A transzformációt a mozgásgeleter folyamatosan meg.

- 1) Kiküszöböljük a rendparaméter  $\frac{1}{b} < q < \Lambda$  Fourier-komponenseit.
- 2) A  $q < \frac{1}{b}$  Fourier-komponensek mozgásgeletereiben átskálázást hajtunk végre:

$$x = x' b$$

$$q = q'/b \quad (\text{ennek: } \lambda' = \frac{1}{b} \cdot b = \lambda)$$

$$t = b^3 t'$$

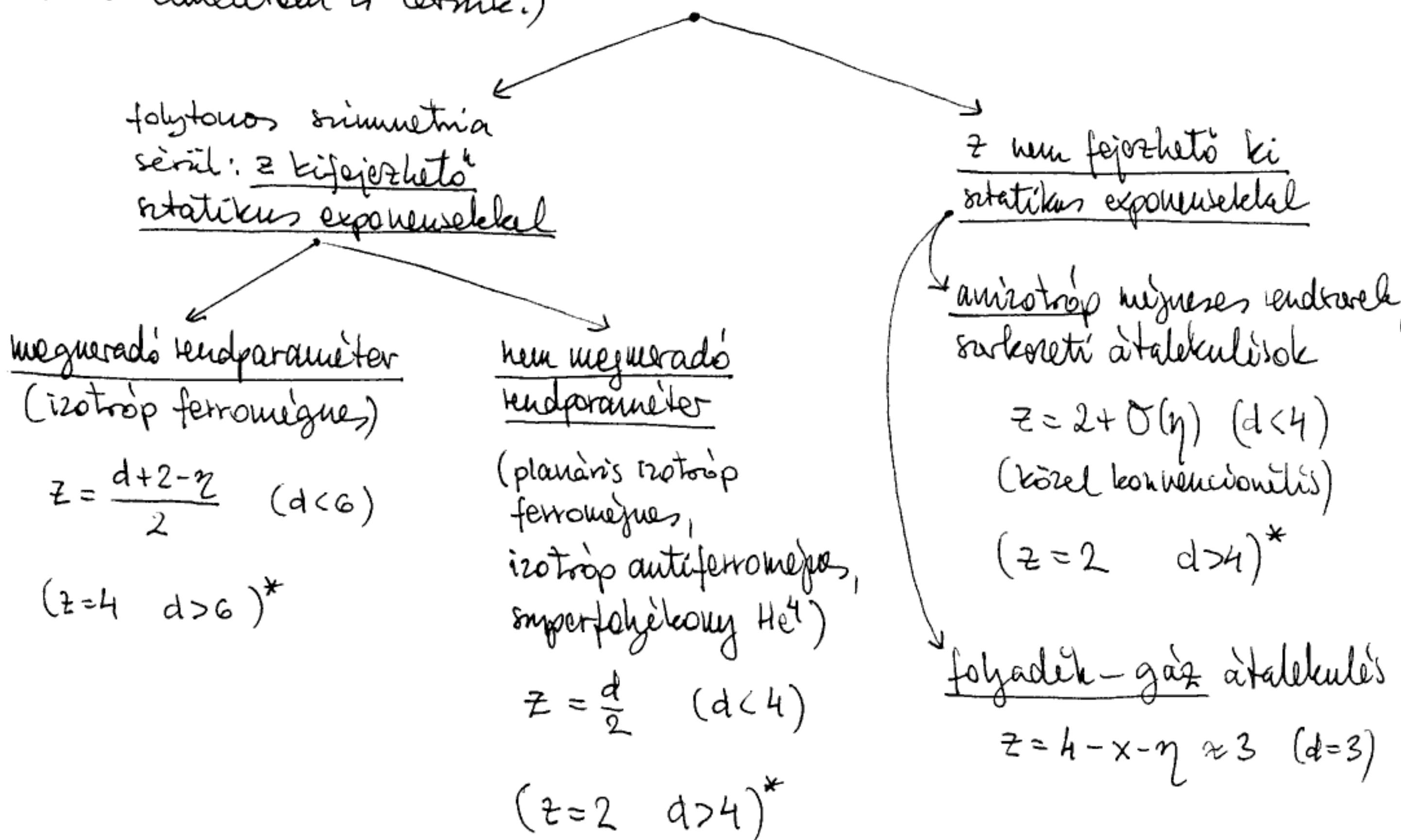
$$\phi_q(t) = b^{1-\gamma/2} \phi_{q'}(t')$$

Az új és a régi mozgásgeleletek paramétereinek összekapcsolásából megkapjuk a paraméterek transzformációját.

~ A véritási exponenciákat ismét a fixpont körről linearizált transzformáció sajátosságai határozzák meg.

## a universalitári osztályok

A statikus osztályok tovább osztódnak. Ugyanis a statikában meghatározó paramétereik (a rendszer dimenziója, a rendparaméter szimmetriája, komponenseinek száma) mellett számítanak a megmaradási törekmények is. (Ez az a konvergenciához is létrejön.)



\* E dimenziókban a konvencionális elvét elrinje.