Csoportelmélet

Jegyzet fizikus hallgatóknak

Bántay Péter

Bantai_-_Csoportelmelet_szoveges-1.psd

Tartalomjegyzék

1 Bevezetés 5

2 Általános csoportelmélet 9

2.1 Izomorfizmus és homomorfizmus 12

2.2 Részcsoportok és mellékosztályok 13

2.3 Konjugálás és normális részcsoportok 15

2.4 Izomorfizmus-tételek 16

2.5 *Direkt és féldirekt szorzatok* 18

2.6 Konjugált osztály, centralizátor 20

2.7 Derivált lánc és feloldhatóság 22

3 Permutációcsoportok 25

3.1 Permutációs hatás, pályák, tranzitivitás 25

3.2 Többszörös tranzitivitás, Mathieu-csoportok 29

3.3 A Burnside-gyűrű 31

3.4 *A Burnside-tábla* 33

4 Ábrázoláselmélet 37

4.1 Ábrázolás, ekvivalencia, irreducibilitás 38

4.2 Tenzorszorzat és elágazási szabályok 42

4.3 Véges csoportok ábrázolásai, karaktertábla 44

4.4 Projektív ábrázolások és kociklusok 50

4.5 Frobenius – Schur-indikátorok 52

4.6 *Indukált ábrázolások és a reciprocitási tétel* 55

Bantai_-_Csoportelmelet_szoveges-2.psd

4.7 Invariánselmélet 57

5 Lie-csoportok **63**

5.1 Alapfogalmak 63
5.2 Egyparaméteres részcsoportok, Lie tételei 67
5.3 Lie-algebra, infinitezimális generátorok 68
5.4 Lie-csoportok ábrázolásai, Haar-mérték 73
5.5 A forgáscsoport 74

6 Kombinatorikus csoportelmélet **79**

6.1 Szabad csoportok 80
6.2 Prezentációk és Tietze-transzformációk 81
6.3 Dehn-problémák és eldönthetőség 84
6.4 Kombinatorikus algoritmusok 86

Bantai_-_Csoportelmelet_szoveges-3.psd

Előszó

Bár a csoportelmélet már hosszú évek óta része a reguláris tantervnek az ELTE TTK fizikus szakán, eddig nem készült az előadáshoz illeszkedő jegyzet, amely figyelembe venné a fizikusoktatás speciális követelményeit. Használható magyar nyelvű szakirodalom is csak elvétve akad. E hiány pótlását célozza meg a jelen jegyzet, amely az 1999-2000 tanév első félévében az ELTE TTK-n tartott csoportelmélet előadáson alapszik. Természetesen ez csak egy általános áttekintést kíván adni a csoportelméletről, annak alkotó alkalmazásához szükséges ismeretek különféle speciálelőadások keretében sajátíthatók el.

Mint minden jegyzet, ez is tükrözi szerzőjének egyéni elképzeléseit arról, hogy mit is érdemes egy rövid kurzus keretein belül ismertetni egy ilyen hatalmas témakörből. Mindvégig igyekeztem, hogy az alapvető tantervi követelményeken túlmenően betekintést nyújtsak a csoportelmélet újabb eredményeibe, melyek meggyőződésem szerint meghatározóak lesznek jövőbeni fizikai alkalmazásaiban. Ez motiválta például a kombinatorikus csoportelmélet és az algoritmikus kérdések rövid áttekintését.

Mivel a jegyzet fizikus hallgatók számára készült, az állítások bizonyításától eltekintettem, azok fellelhetők az (idegennyelvű) szakirodalomban. Amennyire tőlem tellett, igyekeztem a magyar szakirodalomban elterjedt terminológiát használni, illetve ott, ahol ez nem állt rendelkezésre, a nemzetközi irodalomhoz minél szorosabban kapcsolódni.

Köszönetemet szeretném kifejezni Horváth Zalán professzornak a kézirat lektorálásáért. Végül, de nem utolsósorban, a kézirat olvashatóvá tételében döntő szerepet játszott feleségem és Jánosi Imre barátom, akik a gépelési hibák kijavításával és a stílus finomításával sokat segítettek, ezért hálás köszönet illeti őket.

Budapest, 2000. május 12.

Bántay Péter

Bantai_-_Csoportelmelet_szoveges-4.psd

Fejezet 1

Bevezetés

A csoport az egyik legsikeresebb példa a matematikai fogalomalkotásra: viszonylag kevés és egyszerű – és épp ezért elég általános – axiómák alapján rendkívül mély struktúraelmélet származtatható, és az így definiált objektumok sokrétűen alkalmazhatóak mind a matematika, mind a természettudományok számos területén.

Definíció : Csoportnak nevezünk egy G halmazt, ha adva van rajta egy $*$ kétváltozós művelet, amely kielégíti az alábbi axiómákat:

- asszociativitás : minden $x, y, z \in G$-re teljesül $x * (y * z) = (x * y) * z$.
- egységelem létezése : létezik olyan $e \in G$ elem, hogy minden $x \in G$-re igaz $x * e = e * x = x$.
- inverzek létezése : minden $x \in G$-hez van olyan $x^{-1} \in G$ inverz, hogy $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$.

Belátható, hogy a fenti axiómák teljesülése esetén mind az e egységelem, mind az inverzek egyértelműen meghatározottak. Mint az algebrában szokásos, a $*$ csoportműveleti jelet a továbbiakban elhagyjuk, vagyis ezentúl $x * y$ jelölése xy, továbbá az e egységelemet ezentúl egyszerűen 1-nek írjuk.

Néhány megjegyzés az egyes axiómákról. Ha eltekintünk az egységelem és az inverzek létezésétől, akkor az úgynevezett félcsoport fogalmára jutunk. A félcsoportoknak is létezik egy kiterjedt elmélete – és több fontos alkalmazásuk –, de

Bantai_-_Csoportelmelet_szoveges-5.psd

ez messze nem éri el a csoportelmélet mélységét. Amennyiben az asszociativitás követelményétől tekintünk el, akkor az úgynevezett kvázi-csoportokhoz jutunk, amelyek jelentősége szintén lényegesen elmarad a csoportokétól.

Természetesen maga az a tény, hogy a csoportaxiómák egy rendkívül mély matematikai elméletre vezetnek, csak részben indokolja a csoport fogalmának jelentőségét. A döntő szempont az, hogy a csoportok két igen fontos fogalomkör leírásában játszanak alapvető szerepet : a szimmetriáéban és a homológiáéban. Ezek közül a szimmetria fogalma a mindennapi életből ismert, ahol szimmetrikusnak nevezünk egy tárgyat, ha bizonyos transzformációkat végrehajtva rajta az alakja nem változik: például egy épületet szimmetrikusnak mondunk, ha a jobb és a bal része azonos kinézetű, vagyis a középvonalra való tükrözés nem változtatja meg az épület alakját. A tudományos szóhasználatban szimmetrikusnak nevezünk egy objektumot amennyiben bizonyos transzformációk nem változtatják meg az általunk vizsgált tulajdonságait. A számunkra legfontosabb az, hogy egy objektum szimmetriái mindig csoportot alkotnak: nyilván van egységelem, az ún. identitás-transzformáció, amikor nem csinálunk az objektummal semmit; két szimmetriát összeszorozhatunk úgy, hogy egymás után alkalmazzuk őket, az eredmény megint egy szimmetria lesz, és ez a művelet nyilván asszociatív; végül minden szimmetriának az inverz transzformációja maga is szimmetria, és inverz elem a fenti csoportműveletre nézve.

A szimmetriacsoportok matematikai alkalmazása sokrétű, és hosszú története van. Az egyik legelső alkalmazás Lagrange nevéhez fűződik, aki a polinomegyenletek gyökjelekkel való megoldhatóságát vizsgálta ilyen eszközökkel, ami végül is Galois elméletében nyerte el végső formáját. Az algebrai számelmélet már legkorábbi szakaszában alkalmazta a csoportelméletet (Galois-csoportok és ideálosztálycsoportok). Klein híres Erlangeni programjában már szimmetriacsoportjaikkal jellemezte a különféle geometriákat. Mára a szimmetriacsoportok minden matematikai diszciplínában jelentős szerepet játszanak.

A csoportelmélet első fizikai alkalmazása a háromdimenziós kristályszimmetriák osztályozása volt a múlt század végén – itt érdemes megjegyezni, hogy az osztályozás alapjául szolgáló fizikai feltevésekről a nyolcvanas években a kvázi-kristályok felfedezésével kiderült, hogy túlontúl megszorítóak voltak, de ezt igen könnyű volt korrigálni. A későbbiek szempontjából döntő jelentőségűnek bizonyult Noether híres tétele a szimmetriák és megmaradási tételek kapcsolatáról. A relativitás

elmélete valójában a fizikai téridő szimmetriacsoportjának felismerésén alapszik. A 30-as években kezdte meg Wigner alapvető munkásságát a csoportelmélet kvantumfizikai alkalmazása terén, melynek sikereit részben a kvantumelméleti állapotleírás azon sajátossága magyarázza, hogy az állapottér lineáris, és ezért a szimmetriák is lineárisan realizálódnak, ami lényegében a szuperpozíció elvének következménye. Ez a munka vezetett el az elemi részecskék és a relativisztikus hullámegyenletek híres osztályozásához. Az 50-es évek egyik legjelentősebb felismerése az volt, hogy egyes evidensnek tűnő szimmetriák a természetben sérülhetnek (paritássértés). A 60-as évek részecskefizikájának egyik fő motívuma a belső szimmetriák feltérképezése volt – ebből született a kvark modell. Végül, a 70-es évek során diadalmaskodtak az 50-es években kifejlesztett mértékelméletek, és váltak egyeduralkodóvá a modern részecskefizikában az ún. standard modell keretein belül, amely nagy precizitással képes megmagyarázni és leírni az összes eddig megfigyelt jelenséget. A modern fizika megértéséhez nélkülözhetetlen a csoportelmélet, már az alapfogalmak szintjén is. Persze a szimmetriacsoportok nemcsak a részecskefizikában játszanak jelentős szerepet, hanem a statisztikus és szilárdtest-fizikában is.

Mint korábban már említettük, a csoportelmélet nemcsak a szimmetriacsoportok révén talál jelentős alkalmazásokra a természettudományokban, bár kétségkívül ez utóbbi a meghatározó. A csoportok másik jelentős megjelenési formája az ún. homológiacsoportok. Ezek elmélete, az ún. homológikus algebra, topológiai és algebrai vizsgálatokból eredeztethető. Lényegében egy olyan eljárás, amely minden vizsgált objektumhoz csoportok egy végtelen sorozatát rendeli, és ezek az ún. (ko)homológiacsoportok révén fontos strukturális információk nyerhetők a vizsgált objektumról. A múlt század végén Poincaré topológiai kutatásai során vezette be az ún. fundamentális csoport és a homológiacsoportok fogalmát a topológikus terek osztályozására. Ezzel nagyjából egyidőben Hilbert invariánselméleti és kommutatív algebrai vizsgálatai során foglalkozott az ún. szabad rezolúciókkal, és állította fel híres syzygy-tételét. A két kutatási irány fél évszázadon keresztül teljesen független volt, míg a század közepén Eilenberg és MacLane nem egyesítette őket a homológikus algebra keretein belül. Azóta a homológikus algebrai módszerek döntő szerepre tettek szert a legtöbb matematikai diszciplínában : algebrai és differenciálgeometria, topológia, számelmélet, analízis, algebra, stb. A homológikus algebra csoportokra való alkalmazása vezetett a csoportkohomológia elméletéhez,

amely ma a csoportelmélet egyik fontos ága. A homológikus algebra eszköztárának elméleti fizikai alkalmazása viszonylag kései, és messze elmarad a szimmetriával kapcsolatos megfontolásokétól. A 70-es években a mértékelméletekben felfedezett ún. instanton megoldások vizsgálata az egyik legsikeresebb alkalmazás, de a homológikus algebra eszközei, a különféle homológia- és kohomológiacsoportok egyre jelentősebb szerepet játszanak a modern elméleti fizikában, például a húrelméletekben. A jelen előadás keretein belül csak érinteni tudjuk a homológikus algebrát, főképp a szimmetriacsoportok állnak majd érdeklődésünk homlokterében.

A csoportelmélet mára a matematika egyik legfejlettebb ága lett, ezért érthető, hogy több diszciplínára bomlik, amelyek vizsgálati módszerei és tárgyai jelentős eltéréseket mutatnak. Ezek közül az alábbiak a legfontosabbak :

- általános csoportelmélet, amely a csoportaxiómák legáltalánosabb következményeivel foglalkozik, semmiféle járulékos tulajdonságokat nem tételez fel a vizsgált csoportokról;
- permutációcsoportok elmélete, amely véges halmazok permutációinak csoportjait vizsgálja, illetve tetszőleges csoportok ilyen realizációit;
- ábrázoláselmélet, amely véges dimenziós lineáris terek operátorainak csoportjait, illetve teszőleges csoportok ilyen realizációit vizsgálja;
- Lie-csoportok elmélete, amely megfelelő simasági feltételeknek eleget tevő folytonos csoportokat vizsgál;
- kombinatorikus csoportelmélet, amely ún. végesen prezentált csoportok tulajdonságait vizsgálja, többnyire kombinatorikus eszközökkel.

Külön meg kell említeni két fontos ismérvet, amelyek alapján a csoportokat osztályozni szokás. Az első a végesség, vagyis hogy véges vagy végtelen sok eleme van-e a csoportnak. Egy csoport elemeinek számát a csoport *rendjének* nevezzük. A másik fontos szempont a csoportművelet kommutativitása, vagyis a $xy = yx$ egyenlőség teljesülése tetszőleges $x, y \in G$ esetén: ha az egyenlőség teljesül, akkor a csoportot *ábelinek* nevezzük, ellenkező esetben a csoport nemábeli – az elnevezés Abel norvég matematikusnak állít emléket.

Bantai_-_Csoportelmelet_szoveges-8.psd

Fejezet 2

Általános csoportelmélet

Mint azt a bevezetőben már említettük, e címszó alatt tárgyaljuk a csoportelmélet azon eredményeit, amelyek pusztán a csoportaxiómák következményei, és így függetlenek a vizsgált csoportok minden speciális tulajdonságától.

Mielőtt nekilátnánk az alapfogalmak és a rájuk vonatkozó tételek taglalásának, lássunk néhány konkrét példát csoportra.

1. Számcsoportok.

   Mint az a matematikában szokásos, jelölje $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ rendre az egész, racionális, valós, illetve komplex számok halmazát. Könnyen belátható, hogy az összeadás művelete mind a négy esetben teljesíti a csoportaxiómákat, az egységelem minden esetben a zérus, míg egy x szám inverze a $-x$. Tehát mind a négy fenti számhalmaz az összeadásra nézve csoportot alkot, sőt – az összeadás kommutativitása miatt – Abel-csoportot. Ezeket nevezzük a megfelelő számtestek additív csoportjainak.

   Tekintsük most azt a négy halmazt, amelyeket az előzőekből úgy kapunk, hogy elhagyjuk belőlük a zérust, a művelet pedig legyen a szorzás. Az első esetben nem kapunk csoportot, hiszen a szorzás egységeleme nyilván 1, és két egész szám szorzata csak akkor lehet 1, ha mindkettő ± 1. A többi esetben Abel-csoportot kapunk, a csoportok egységeleme az 1, míg az x szám inverze az $\frac{1}{x}$ lesz – a zérust azért kellett kihagyni, hogy minden elemnek legyen inverze. Az így kapott csoportokat nevezzük a megfelelő számtestek

Bantai_-_Csoportelmelet_szoveges-9.psd

multiplikatív csoportjainak.

Az összes fenti csoport nyilván végtelen sok elemet tartalmaz.

2. Mátrixcsoportok

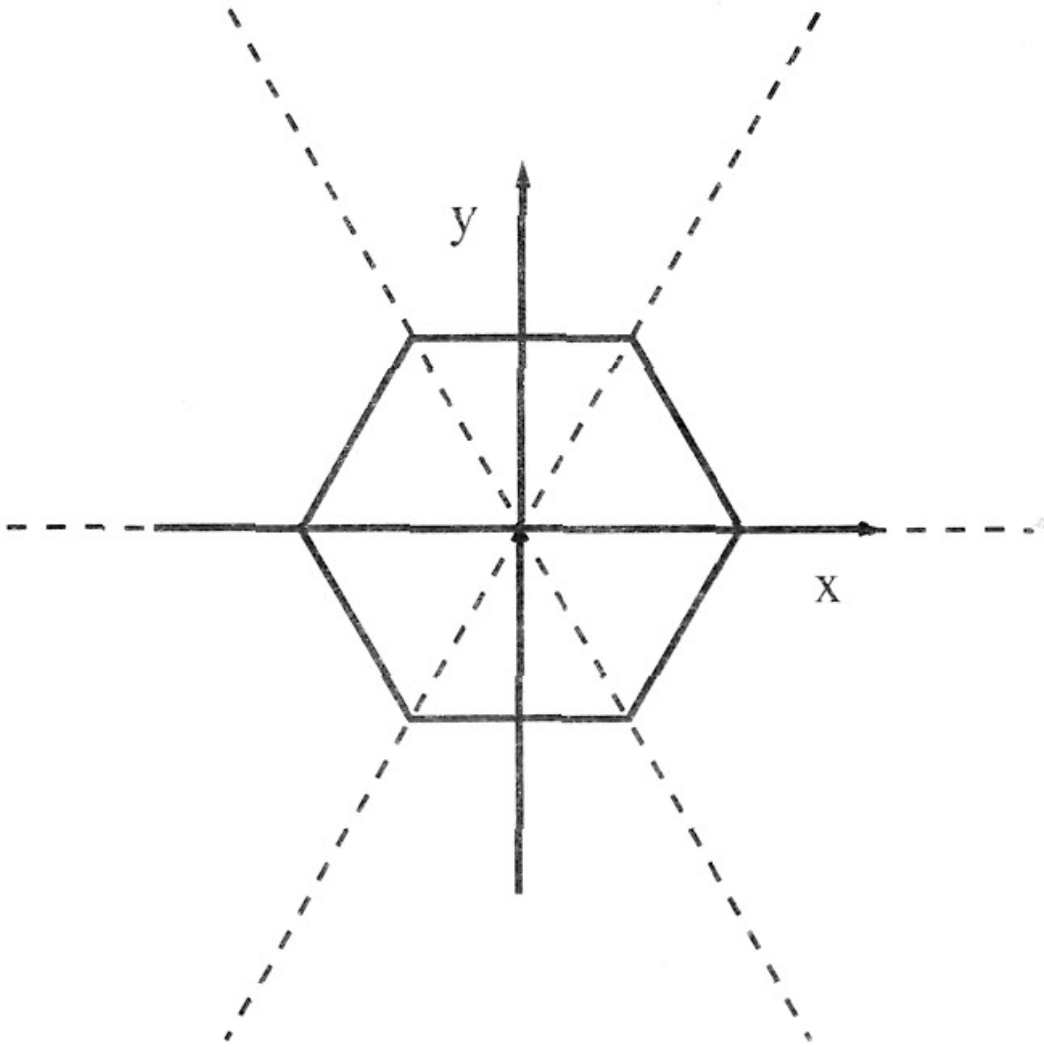
Jelöljük R-rel a fent említett három számtest bármelyikét – valójában R egy tetszőleges gyűrű lehetne –, és legyen n egy pozitív egész szám. $GL(n, R)$-rel jelöljük az összes $n \times n$-es *invertálható* mátrix halmazát, amelyek minden eleme R-beli. Ez a halmaz a mátrixszorzás műveletére csoportot alkot, az egységelem az egységmátrix, míg $A \in GL(n, R)$ inverze az A^{-1} inverzmátrix. Ha $n > 1$, akkor ez a csoport nemábeli. Elnevezése R feletti *általános lineáris csoport*. Általában, ha V egy lineáris tér, a V feletti általános lineáris csoport, $GL(V)$ a lineáris tér összes invertálható lineáris operátorából áll, a csoportművelet pedig az operátorok szorzása. A csoport végtelen, ha a lineáris tér végtelen sok vektort tartalmaz.

3. Permutációcsoportok

Legyen X egy véges halmaz, és jelöljük $Sym(X)$-szel az X összes permutációjának – azaz önmagára való egy-egyértelmű leképezéseinek – halmazát. Ez a halmaz csoportot alkot a permutációk szorzásával mint csoportművelettel, az egységelem az identikus leképezés, míg egy permutáció inverze az inverz leképezés – amely létezik az egy-egyértelműség miatt. Ezt a véges csoportot hívjuk az X *szimmetrikus csoportjának*, amely nemábeli, ha X kettőnél több elemet tartalmaz. $Sym(X)$ számossága, vagy a csoportelméleti szóhasználat szerint a rendje, egyenlő $|X|!$-sal.

Egy másik fontos példa permutációcsoportra az alternáló csoport. Tetszőleges permutáció felbontható *transzpozíciók* szorzatára, ez utóbbiak olyan permutációk, amelyek az X halmaz két elemét felcserélik, míg a többi elemet fixen hagyják. A transzpozíciók szorzataként való előállítás nem egyértelmű ugyan, viszont egyértelmű az előállításban szereplő transzpozíciók számának páros vagy páratlan volta, ezt nevezzük az adott permutáció *paritásának*. A páros permutációk csoportot alkotnak, ez az X halmaz $Alt(X)$ *alternáló csoportja*. Az alternáló csoport rendje pont fele a szimmetrikus csoport rendjének.

4. Geometriai szimmetriacsoportok



Tekintsünk egy szabályos n-szöget a síkban, ahol $n > 2$. A sík azon mozgásait, amelyek az n-szöget önmagába viszik, nevezzük az n-szög szimmetriáinak, a csoportművelet a mozgások egymás utáni alkalmazása. Belátható, hogy az n-szög D_{2n}-nel jelölt, és n-edfokú *diéder csoportnak* nevezett szimmetriacsoportja $2n$ mozgást tartalmaz, méghozzá a $\frac{2\pi k}{n}$ szögekkel történő origó körüli forgatásokat ($k = 0, \ldots, n-1$), valamint a csúcspontokon és a sokszög súlypontján átmenő tengelyekre, illetve az oldalfelező merőlegesekre vett tükrözéseket. A diéder csoportok nemábeliek és végesek. Az ábra szemlélteti a szabályos hatszög esetét.

Természetesen még sok hasonló példát lehetne sorolni, de már a fentiek is ízelítőt adnak a csoportok sokféleségéből.

2.1 Izomorfizmus és homomorfizmus

Az algebrában mindig az egyik legfontosabb feladat annak meghatározása, hogy mikor tekintsünk két vizsgált objektumot azonosnak. Például, ha tekintünk két azonos számosságú X és Y halmazt, bár $Sym(X)$ és $Sym(Y)$ különböznek egymástól, hiszen az őket alkotó permutációk más-más halmazokon hatnak, de mégis nagyon hasonló a szerkezetük. A csoportok struktúrájának összehasonlítására szolgál az *izomorfizmus* fogalma.

Definíció : Ha $\phi : G \to H$ egy bijektív leképezés két csoport között, amely teljesíti a

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$$

feltételt minden $x, y \in G$-re, akkor ϕ-t izomorfizmusnak nevezzük. G izomorf H-val, jelben $G \cong H$, amennyiben létezik $\phi : G \to H$ izomorfizmus. Izomorf csoportokat csoportelméleti szempontból azonosaknak tekintünk. Egy $\phi : G \to G$ izomorfizmust ***automorfizmusnak*** nevezünk, ezek összesége alkotja az $Aut(G)$ ***automorfizmus-csoportot***, ahol a művelet a leképezések kompozíciója.

A fenti definíció szerint $Sym(X)$ és $Sym(Y)$ akkor és csak akkor izomorf, ha $|X| = |Y|$. Ezért egy n elemű halmaz szimmetrikus csoportját szokás S_n-nel jelölni, és ***n-edfokú szimmetrikus csoportnak*** nevezni. Egy kevésbé nyilvánvaló izomorfizmus $S_3 \cong D_6$, azaz a harmadfokú szimmetrikus csoport izomorf a szabályos háromszög szimmetriacsoportjával. Ez abból következik, hogy a szabályos háromszög minden szimmetriája egyben felfogható a csúcspontok egy permutációjaként is, és mivel a két csoport rendje megegyezik, ezért izomorfak.

Az izomorfizmus speciális esete a *homomorfizmus* fogalmának, amennyiben a bijektív homomorfizmusokat nevezzük izomorfizmusnak.

Definíció : Egy $\phi : G \to H$ leképezés homomorfizmus, ha művelettartó, azaz teljesül minden $x, y \in G$ esetén a $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ egyenlőség.

A homomorfizmusok vizsgálatára még visszatérünk később, amikor már rendelkezésre állnak majd a megfelelő csoportelméleti fogalmak.

2.2 Részcsoportok és mellékosztályok

A következő alapvető fogalom a részcsoport, illetve a vele szorosan összefüggő mellékosztály fogalma.

Definíció : A G csoport egy nemüres H részhalmazát *részcsoportnak* nevezzük, jelben $H < G$, ha minden $x, y \in H$-ra teljesül $xy^{-1} \in H$.

A fenti definíció szerint egy H részhalmaz részcsoport, amennyiben csoportot alkot a csoportműveletre nézve. Minden G csoportnak van két részcsoportja, maga a G és az ún. *triviális részcsoport*, ez utóbbi csupán az egységelemet tartalmazza. A többi részcsoportot nevezzük valódi részcsoportoknak. Példa egy nemtriviális részcsoportláncra: $\mathbb{Z} < \mathbb{Q} < \mathbb{R} < \mathbb{C}$.

A részcsoport fogalom alapvető jelentőségű mind a csoportelméletben, mind alkalmazásaiban. Mivel izomorf csoportok szerkezete azonos, ezért egy konkrét csoport vizsgálatánál gyakran célszerű egy olyan vele izomorf csoportot tekinteni, amelynek elemei már jól ismert objektumok egy természetes művelettel ellátva. Ilyen izomorfizmusok konstruálásával foglalkoznak a különböző reprezentáció-elméletek. Egy véges csoport leírásához például célszerű egy vele izomorf permutációcsoport, vagyis egy szimmetrikus csoport részcsoportjának vizsgálata, ezzel foglalkozik a permutációs hatások elmélete. Gyakran fontos egy adott csoporthoz találni egy olyan vele izomorf csoportot, amely egy általános lineáris csoport részcsoportja, ez az ábrázoláselmélet feladata. A csoportelméleti alkalmazásokon kívül a részcsoportok vizsgálata fontos szerepet játszik a topológiában az ún. fedőterek osztályozásában, és a fizikában a szimmetriasértés jelenségének tárgyalásában.

A részcsoport definíciójából következő fontos tény, hogy részcsoportok tetszőleges rendszerének metszete maga is részcsoport. Ennek alapján értelmes az alábbi

Definíció : Legyen $X \subseteq G$ egy tetszőleges részhalmaz, és tekintsük G azon részcsoportjainak összességét, amelyek tartalmazzák X-et. Ezen részcsoportok metszete maga is részcsoport, amelyet $\langle X \rangle$-szel jelölünk, és az X elemei által *generált részcsoportnak* nevezünk.

$$\langle X \rangle = \bigcap_{X \subseteq H < G} H \tag{2.1}$$

Amennyiben $H = \langle X \rangle$, akkor az X halmazt a H részcsoport *generátorrendszerének* nevezzük.

A fentiek alapján megállapítható, hogy egy csoport részcsoportjainak összessége *hálót* alkot, vagyis egy olyan rendezett halmazt a tartalmazási relációra nézve, amelyben bármely véges részhalmaznak van minimuma – a részcsoportok metszete – és maximuma – a részcsoportok uniója által generált részcsoport. Ezért beszélhetünk egy csoport *részcsoporthálójáról.*

A részcsoportok között kitüntetett jelentőségüek az ún. *ciklikus részcsoportok,* amelyeket egy elem generál, azaz $\langle x \rangle$ alakúak valamely $x \in G$-re. Míg minden elem generál egy ciklikus részcsoportot, addig előfordulhat, hogy több különböző elem ugyanazt a ciklikus részcsoportot generálja, vagyis a kapcsolat nem egy-egyértelmű. Az $x \in G$ elem generálta $\langle x \rangle$ ciklikus részcsoport rendjét (vagyis elemszámát) nevezzük az *elem rendjének* is. Ez utóbbi úgy is definiálható, mint az a legkisebb pozitív egész n amelyre $x^n = 1$ teljesül. Ha x véges n-ed rendű elem, akkor az általa generált részcsoport

$$\langle x \rangle = \{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\} ,$$

és ez utóbbi izomorf $\mathbb{Z}_n$-nel, az egész számok mod n additív csoportjával. Ha x rendje végtelen, akkor $\langle x \rangle$ az x elem összes egész kitevős hatványából áll, és izomorf $\mathbb{Z}$-vel, az egész számok addítív csoportjával. Egy csoport akkor ciklikus, ha önmagának ciklikus részcsoportja, azaz egy elemmel generálható.

Ezen a ponton célszerű bevezetni az ún. *komplexusszorzás* fogalmát. Ha $X, Y \subseteq G$ két részhalmaza G-nek, akkor XY-nal jelölt komplexusszorzatuk definíció szerint

$$XY = \{xy \mid x \in X, y \in Y\} .$$

Hasonlóan, egy $x \in G$ elemnek egy $Y \subseteq G$ részhalmazzal vett szorzatát az alábbi definíció alapján értelmezzük

$$xY = \{xy \mid y \in Y\} .$$

Például két $H, K < G$ részcsoport HK komplexusszorzatát is tekinthetjük, ám ez általában nem lesz részcsoport, kivéve ha $HK = KH$ teljesül, amikor az is igaz, hogy $HK = \langle H \cup K \rangle$. Ez esetben azt mondjuk, hogy H és K *permutál* egymással.

Tekintsük most egy adott $H < G$ részcsoport esetén az összes xH alakú részhalmazokat, ahol x végigfut a G csoport elemein. Az ilyen részhalmazokat nevez-

zük H *bal oldali mellékosztályainak* vagy *cosetjeinek* (a jobb oldali cosetek Hx alakúak), összességüket G/H-val jelöljük. A részcsoport definíciója alapján könnyen belátható, hogy két mellékosztály vagy megegyezik, vagy diszjunkt, azaz a cosetek a G csoport egy partícióját alkotják. Maga a H részcsoport is egy coset, az ún. triviális coset. A H részcsoport cosetjeinek a számát nevezzük H *indexének* G-ben, és $[G : H]$-val jelöljük (belátható, hogy ez független attól, hogy bal vagy jobb oldali coseteket tekintünk-e). A definícióból az is azonnal adódik, hogy minden egyes coset számossága megegyezik H rendjével. Ebből következik az alábbi *nevezetes tétel.*

Lagrange tétele : Véges rendű G csoport tetszőleges $H < G$ részcsoportjára

$$|G| = |H|\,[G : H]\ . \tag{2.2}$$

Ebből az is látszik, hogy $|H|$ osztója $|G|$-nek.

A fenti tételnek sok fontos következménye van, talán a legnyilvánvalóbb az, *hogy minden prímrendű csoport ciklikus, hiszen egy nemtriviális elem által generált* részcsoport rendje a fentiek szerint megegyezik a csoport rendjével, és ezért az adott elem generálja a csoportot.

A mellékosztályok fogalmával többször is fogunk még találkozni a továbbiakban, például a kombinatorikus csoportelméletben és a permutációs hatásokkal kapcsolatban. Zárjuk ezt a szakaszt egy másik híres tétellel, ami ehhez a problémakörhöz kapcsolódik.

Poincaré tétele : Véges sok véges indexű részcsoport metszete maga is véges indexű.

2.3 Konjugálás és normális részcsoportok

A csoportművelet révén definiálható egy új művelet, amely különös jelentőségű a csoportelméletben, az ún. *konjugálás.*

Definíció : Ha $x, y \in G$, akkor az $x^y := y^{-1}xy$ elemet az x elem y általi konjugáltjának nevezzük. Adott $y \in G$ esetén, az $x \mapsto x^y$ leképezés a G csoportnak egy automorfizmusát adja, az ilyen alakú leképezéseket *belső automorfizmusoknak* nevezzük.

Az automorfizmusok definíciójából következik, hogy részcsoportot részcsoportba

képeznek, többek között egy $H < G$ részcsoportra a $H^x = \{y^x \mid y \in H\}$ részhalmaz maga is részcsoport, a H (x általi) *konjugált részcsoportja.*

Definíció : Az $N < G$ részcsoportot *normálisnak* nevezzük – jelben $N \triangleleft G$ – amennyiben minden $x \in G$-re $N^x = N$, vagyis megegyezik minden konjugáltja.

Világos, hogy mind G, mind a triviális részcsoport normális. Egy olyan csoportot, amelynek nincs más normális részcsoportja *egyszerűnek* hívunk. A Lagrange tételét követő gondolatmenet alapján például minden prímrendű csoport egyszerű. Belátható, hogy $|X| > 4$ esetén az $Alt\,(X)$ alternáló csoport szintén egyszerű. Az egyszerű csoportok feltérképezése és osztályozása a csoportelmélet egyik alapproblémája, tekintve, hogy sok általános kérdés visszavezethető egyszerű csoportok vizsgálatára. Az egyik legjelentősebb csoportelméleti eredmény az ún. klasszifikációs tétel, a véges egyszerű csoportok osztályozása.

A normális részcsoport fogalmának jelentősége abból fakad, hogy mivel tetszőleges $x \in G$ esetén $xN = Nx$, ezért az N normális részcsoport cosetjeinek G/N halmaza természetes módon csoportot alkot a komplexusszorzás műveletére, mivel

$$(xN)\,(yN) = xyN\,.$$

Az így kapott G/N csoportot nevezzük a G csoport N szerinti *faktorcsoportjának.*

A fenti konstrukció és a normális részcsoport fogalma egy általános jelentőségű algebrai fogalommal kapcsolatos, az ún. *kongruenciarelációval.* Ez utóbbi olyan ekvivalenciarelációt jelöl, amely kompatibilis az algebrai struktúrával. Csoportok esetén ez a következőt jelenti: amennyiben $\equiv$ jelöli a kongruenciarelációt, akkor $x_1 \equiv y_1$-ből és $x_2 \equiv y_2$-ből következik $x_1x_2 \equiv y_1y_2$. Egy-egyértelmű kapcsolat van egy csoport normális részcsoportjai és a rajta bevezethető kongruenciarelációk között: a normális részcsoport cosetjei egy kongruencia ekvivalenciaosztályait alkotják, míg a normális részcsoport nem más, mint az egységelem ekvivalenciaosztálya.

2.4 Izomorfizmus-tételek

Az előző fejezetben megismert három fontos fogalom, a homomorfizmus, a faktorcsoport és normális részcsoport – vagy ami ugyanaz, a megfelelő kongruenciareláció –, szoros kapcsolatban állnak egymással. E kapcsolatnak csak egyik as-

pektusát láttuk eddig, azt, hogy egy normális részcsoport meghatároz egy faktorcsoportot. A fenti kapcsolat másik fontos összetevője, hogy minden faktorcsoport meghatároz egy ún. *természetes homomorfizmust.*

Definíció : Legyen $N \triangleleft G$ egy normális részcsoport, és tekintsük a $\pi : x \mapsto xN$ hozzárendeléssel értelmezett $G \to G/N$ leképezést. Ekkor π egy szürjektív homomorfizmus, a G/N faktorcsoportra képező természetes homomorfizmus.

Látjuk tehát, hogy minden normális részcsoport meghatároz egy faktorcsoportot, az meg egy homomorfizmust. Hogy teljes legyen a kapcsolat, minden homomorfizmusnak meg kell határoznia egy normális részcsoportot, amely beleillik a fenti sémába. Ezt a tényt mondja ki az alapvető fontosságú .

Homomorfizmus-tétel : Legyen $\phi : G \to H$ egy homomorfizmus. Ekkor a $\ker \phi = \{x \in G \mid \phi(x) = 1\}$ halmaz, amit a ϕ homomorfizmus *magjának* nevezünk, egy normális részcsoportja G-nek, $\ker \phi \triangleleft G$, és fennáll a

$$\phi(G) \cong G/\ker \phi \tag{2.3}$$

izomorfizmus, ahol $\phi(G) = \{\phi(x) \mid x \in G\}$ a homomorfizmus *képe.*

A fenti tételből azonnal adódik, hogy egy csoport homomorf képei pont a faktorcsoportjai, ez indokolja az utóbbi fogalom jelentőségét. A homomorfizmus-tétel *fontos kiegészítője az alábbi*

Korrespondencia-tétel : Legyen H homomorf képe G-nek, és legyen $N \triangleleft G$ a homomorfizmus magja. Ekkor egy-egyértelmű megfeleltetés van a H részcsoportjai és G azon részcsoportjai között, amelyek tartalmazzák a homomorfizmus magját, és hasonló állítás vonatkozik a normális részcsoportokra is.

A fentiek alapján a faktorcsoportok (és így a homomorf képek) részcsoporthálója egyszerű módon származtatható a csoport részcsoporthálójából. Ennek különös jelentősége van az alkalmazások szempontjából, mint azt majd látni fogjuk a permutációs hatások és az ábrázolás elmélet kapcsán.

Mint említettük, a homomorfizmus-tétel alapvető jelentőségű a csoportelméletben. Ehhez kapcsolódik két másik alaptétel, az ún. *izomorfizmus-tételek.*

Első izomorfizmus-tétel : Legyen $N \triangleleft G$ és $H < G$. Ekkor $N \triangleleft NH < G$ és $N \cap H \triangleleft H$, valamint fennáll az alábbi izomorfizmus:

$$NH/N \cong H/N \cap H\,. \tag{2.4}$$

Második izomorfizmus-tétel : Legyen $K, N \triangleleft G$ és $K < N$. Ekkor $K \triangleleft N$ és

$$G/N \cong (G/K) \,/\, (N/K) \,. \tag{2.5}$$

2.5 Direkt és féldirekt szorzatok

Fontos kérdés annak tanulmányozása, hogy ismert csoportokból hogyan lehet bonyolultabb csoportokat konstruálni, illetve az így kapott csoportok struktúrája hogy függ össze az eredeti csoportokéval. Ilyen típusú eljárásra már láttunk példát a faktorcsoportok kapcsán. Most két másik konstrukciós eljárást vizsgálunk meg.

Definíció : Legyen G és H két csoport, és tekintsük alaphalmazaik Descartes-szorzatát, vagyis az (x, y) alakú rendezett párok halmazát, ahol $x \in G$ és $y \in H$. Ez a halmaz csoportot alkot, a G és a H csoportok $G \times H$ direkt szorzatát, az alábbi műveletre nézve:

$$(x_1, y_1)\,(x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2) \,.$$

Könnyen belátható, hogy a direkt szorzás művelete kommutatív és asszociatív, vagyis például $G \times H \cong H \times G$. A többszörös direkt szorzatok definíciója nyilvánvaló. A $G \times H$ direkt szorzat fontos tulajdonsága, hogy tartalmaz két normális részcsoportot, $\widehat{G} = \{(x, 1) \mid x \in G\}$-t és $\widehat{H} = \{(1, y) \mid y \in H\}$-t, amelyek metszete a triviális részcsoport, együttesen generálják a direkt szorzatot, elemeik kommutálnak egymással, továbbá $\widehat{G} \cong G$ és $\widehat{H} \cong H$. Fordítva, ha egy csoport tartalmaz két normális részcsoportot amelyek elemei kommutálnak, metszetük a triviális részcsoport, és együttesen generálják a csoportot, akkor a csoport izomorf a két normális részcsoport direkt szorzatával.

Egyszerű példaként tekintsük a másod- és a harmadrendű ciklikus csoportok direkt szorzatát: $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. Könnyen belátható, hogy az (x, y) elem generálja a direkt szorzatot, ahol x egy generátora $\mathbb{Z}_2$-nek, míg y generálja $\mathbb{Z}_3$-at. Következésképpen $G \cong \mathbb{Z}_6$ hatodrendű ciklikus csoport. Általában, ha n és m két relatív prím szám, akkor $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{nm}$.

A direkt szorzat fogalmához szorosan kapcsolódik az alábbi struktúratétel, amely teljesen leírja a véges Abel-csoportok szerkezetét.

Frobenius–Stickelberger-tétel: Minden véges Abel-csoport prímhatványrendű

ciklikus csoportok direkt szorzata, és a felbontás lényegében egyértelmű.

Létezik e tételnek egy általánosítása véges sok elem által generált Abel-csoportokra, amely szerint az ilyen csoportok előállnak egy véges Abel-csoport és véges sok végtelen ciklikus csoport direkt szorzataként. Maga a Frobenius–Stickelberger-tétel általánosítja a számelmélet alaptételét, amely szerint tetszőleges egész szám előáll prímhatványok szorzataként, sorrend erejéig egyértelműen.

A direkt szorzat fogalmának általánosítása az ún. *féldirekt szorzat.*

Definíció : Legyen G és H két csoport, és legyen adva egy $\alpha : H \to Aut\,(G)$ homomorfizmus, ahol $Aut\,(G)$ jelöli G automorfizmusainak csoportját. A két alaphalmaz Descartes-szorzatán vezessük be az alábbi műveletet

$$(x_1, y_1)\,(x_2, y_2) = (x_1 \alpha_{y_1}\,(x_2)\,, y_1 y_2) \tag{2.6}$$

ahol α_y jelöli az $y \in H$ elemhez tartozó $Aut\,(G)$-beli automorfizmust. Ezzel a művelettel egy $G \bowtie_\alpha H$ csoportot kapunk, a G és H féldirekt szorzatát.

Amennyiben az α homomorfizmust triviálisnak választjuk, azaz a képe $Aut\,(G)$ triviális részcsoportja, akkor a féldirekt szorzat fogalma a direkt szorzatéra redukálódik. Természetesen a féldirekt szorzat képzése általában nem kommutatív, hiszen a definiáló adatok aszimmetriája miatt nincs is igazán értelme kommutativitásról beszélni. A $G \bowtie_\alpha H$ féldirekt szorzatban van két részcsoport, $\widehat{G} = \{(x, 1) \mid x \in G\} \cong G$, amely normális, és $\widehat{H} = \{(1, y) \mid y \in H\} \cong H$, amelyek együtt generálják a féldirekt szorzatot, és metszetük a triviális részcsoport. Fordítva, ha egy csoportban adott két G és H részcsoport, amelyek metszete triviális, együttesen generálják a csoportot, és G normális, akkor a csoport izomorf lesz a $G \bowtie_\alpha H$ féldirekt szorzattal, ahol az $\alpha : H \to Aut\,(G)$ homomorfizmust az alábbi módon határozhatjuk meg: minden $y \in H$-ra tekintsük G-nek az $\alpha_y : x \mapsto yxy^{-1}$ *önmagára való leképezését. Ekkor minden* $y \in H$*-ra* α_y *a* G*-nek egy automorfizmusa, és* $\alpha_{yz} = \alpha_y \circ \alpha_z$, azaz $\alpha : y \mapsto \alpha_y$ egy $H \to Aut\,(G)$ homomorfizmust ad.

A féldirekt szorzatok jelentősége óriási az alkalmazások szempontjából. Például a Poincaré-csoport, amely a relativitáselmélet értelmében a fizikai téridő szimmetriacsoportja, a transzlációk részcsoportjának és a Lorentz-csoportnak a féldirekt szorzata.

A direkt és féldirekt szorzatok speciális esetei az ún. *csoportbővítéseknek.*

Definíció : Az N csoport G általi bővítése egy olyan E csoport, amely tartalmaz egy, az N-nel izomorf $\widetilde{N} \lhd E$ normális részcsoportot úgy, hogy teljesül $E/\widetilde{N} \cong G$.

Azonnal látszik a definícióból, hogy a $G \bowtie_\alpha H$ féldirekt szorzat a G-nek H általi bővítése. Adott N és G csoportok esetén az N csoport G általi bővítéseinek osztályozása homológikus algebrai módszerekkel lehetséges. Különösen fontosak az *ábeli bővítések*, amikor N Abel-csoport, és a *centrális bővítések*, amikor $\widetilde{N}$ elemei kommutálnak E minden elemével.

A különféle csoportosztályok vizsgálatánál fontos szerepet játszik a *varietás* fogalma. Ez alatt csoportoknak olyan $\mathcal{V}$ összességét értjük, amelyre

1. $G \in \mathcal{V}$ és $H \cong G$ esetén $H \in \mathcal{V}$;
2. $G \in \mathcal{V}$ esetén G minden részcsoportja is $\mathcal{V}$-beli;
3. $\mathcal{V}$-beli csoport minden homomorf képe is $\mathcal{V}$-beli;
4. $\mathcal{V}$-hez tartozó csoportok tetszőleges rendszerének direkt szorzata is $\mathcal{V}$-beli.

Például az összes csoportok osztálya triviálisan varietás, míg nemtriviális varietás az Abel-csoportok összessége. A véges csoportok vagy a ciklikus csoportok nem alkotnak varietást. Azt a kérdést, hogy csoportok mely osztályai alkotnak varietást, az alábbi híres tétel válaszolja meg.

Birkhoff tétele : Csoportok egy osztálya akkor és csak akkor alkot varietást, ha azonosságokkal definiálható.

2.6 Konjugált osztály, centralizátor

A konjugálás műveletét már korábban bevezettük a normális részcsoportok tárgyalásakor. Eszerint az $x^y = y^{-1}xy$ elemet az $x \in G$ csoportelem y általi konjugáltjának nevezzük. Általában, az x^y alakú elemeket nevezzük x konjugáltjainak, ezek x^G halmazát pedig x *konjugált osztályának*. Két csoportelem akkor konjugált, ha ugyanazon konjugált osztályba esnek. Azonnal adódik a definícióból, hogy a konjugált osztályok a G csoport egy partícióját adják, azaz két konjugált osztály vagy egybeesik, vagy diszjunkt. Az egységelem egymaga alkot egy konjugált osztályt, ez az ún. triviális osztály, és a normális részcsoport definíciója úgy is megfogalmazható, hogy egy részcsoport akkor normális, amennyiben konjugált

osztályok uniója. Abel-csoportban minden elem egymaga alkot egy konjugált osztályt. Egymással konjugált elemek sok szempontból hasonlítanak egymásra, például megegyezik a rendjük.

Egy szorosan kapcsolódó fogalom a *centralizátoré*. Ha $X \subseteq G$, akkor az X részhalmaz $C_G(X)$ centralizátora azon csoportelemekből áll, amelyek kommutálnak minden X-beli elemmel, azaz

$$C_G(X) = \{y \in G \mid xy = yx, \quad , \forall x \in X\} . \tag{2.7}$$

Könnyen belátható, hogy tetszőleges részhalmaz centralizátora részcsoport. Az egyelmű $\{x\}$ részhalmaz centralizátorát nevezzük az $x \in G$ csoportelem $C_G(x)$ *centralizátorának*. Vegyük észre, hogy $C_G(X) = \cap_{x \in X} C_G(x)$. Az alábbi két állítás permutációs hatásokra vonatkozó általános tételek speciális esetei.

1. Az x^G konjugált osztály elemszáma megegyezik centralizátora $[G : C_G(x)]$ indexével. Ebből következik, hogy a konjugált osztályok elemszámai osztják a csoport rendjét.

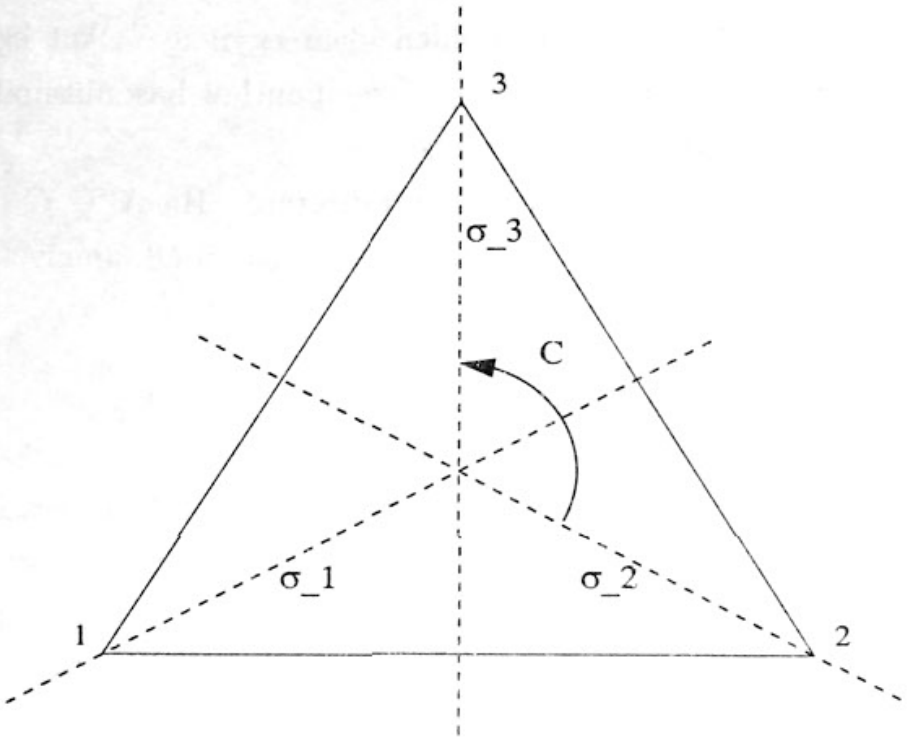
2. A G csoport konjugált osztályainak száma egyenlő a $\frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} |C_G(x)|$ kifejezéssel.

A csoport $Z(G)$ *centrumának* nevezzük azon elemek összeségét, amelyek minden csoportelemmel kommutálnak, azaz $Z(G) = C_G(G)$. A centrum mindig normális ábeli részcsoport, és Abel-csoport centruma megegyezik magával a csoporttal. A centrum elemei – ezeket nevezzük *centrális elemeknek* – önmagukban alkotnak egy-egy konjugált osztályt, és ez a tulajdonság jellemzi is őket.

A centralizátorhoz közeli fogalom a *normalizátoré*. Egy $X \subseteq G$ részhalmaz $N_G(X)$ normalizátora

$$N_G(X) = \{x \in G \mid X^x = X\} . \tag{2.8}$$

A normalizátor mindig részcsoport, és egy $H < G$ részcsoport $N_G(H)$ normalizátora a legnagyobb olyan részcsoportja G-nek, amelyben H még normális, azaz $H \triangleleft N_G(H)$. Igaz továbbá, hogy $C_G(H) \triangleleft N_G(H)$. Egy adott $H < G$ részcsoport különböző konjugáltjainak számát normalizátorának $[G : N_G(H)]$ indexe adja meg.



ábra 2.1: A D_6 diéder csoport

A fenti fogalmak illusztrálására tekintsünk egy egyszerű példát. Legyen a vizsgált csoport D_6, azaz a szabályos háromszög szimmetriacsoportja. Számozzuk meg valamilyen sorrendben a háromszög csúcspontjait, és jelöljük σ_i-vel az i-edik csúcsponton és a súlyponton átmenő egyenesre való tükrözést. Jelölje C a súlypont körüli 120 fokos forgatást. Ekkor D_6 elemeinek halmaza $\{1, C, C^2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, itt C^2 nyilván a 240 fokos forgatást jelöli. D_6-nak három konjugált osztálya van, a triviális $\{1\}$, a forgásokból álló $\{C, C^2\}$, és a tükrözésekből álló $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. A forgások rendje 3, míg a tükrözéseké 2. A centrum triviális, $Z(D_6) = \{1\}$. $C_{D_6}(\sigma_i) = \{1, \sigma_i\}$ minden $i = 1, 2, 3$-ra, másfelől $C_{D_6}(C) = C_{D_6}(C^2) = \{1, C, C^2\}$. Ez utóbbi részcsoport az egyetlen nemtriviális normális részcsoportja D_6-nak, és $D_6/\{1, C, C^2\} \cong \mathbb{Z}_2$.

2.7 Derivált lánc és feloldhatóság

Fontos fogalom a *kommutátor-részcsoporté* (más néven *derivált részcsoport*). Ennek definiálásához szükségünk van két csoportelem *kommutátorának* fogalmára.

Definíció : Az $x, y \in G$ csoportelemek kommutátora az

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy \tag{2.9}$$

csoportelem.

Világos, hogy két csoportelem akkor felcserélhető, ha kommutátoruk az egységelem. A csoportelemek kommutátorai által generált G' részcsoportot nevezzük G kommutátor-részcsoportjának. Ez mindig normális részcsoport, $G' \triangleleft G$, és azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy egy G/N faktorcsoport valamely $N \triangleleft G$-re akkor és csak akkor ábeli, ha $G' < N$, más szóval a korrespondencia-tétel értelmében G/G' a G maximális ábeli homomorf képe. Egy csoport akkor és csak akkor ábeli, ha derivált részcsoportja triviális. Bár a definíció alapján nem látszik egyszerűnek a kommutátor-részcsoport meghatározása, látni fogjuk, hogy az ábrázoláselmélet segítségével ez viszonylag könnyű feladat. Például a $Sym\,(X)$ szimmetrikus csoport kommutátor-részcsoportja az $Alt\,(X)$ alternáló csoport.

Valójában a kommutátor-részcsoport egy lánc első eleme. Bevezethetjük ugyanis az alábbi rekurzív definíció alapján az ún. *derivált láncot*: a lánc 0-adik tagja maga a csoport, minden további tag az előző tag kommutátor-részcsoportja. A k-adik tagot nevezzük G *k-adik derivált részcsoportjának*, és $G^{(k)}$-val jelöljük. Amennyiben valamely véges k-ra $G^{(k)}$ a triviális részcsoport, a G csoportot *feloldhatónak* mondjuk. A feloldható csoport fogalmát Galois vezette be, és az elnevezés azzal kapcsolatos, hogy egy polinom gyökei akkor fejezhetők ki gyökvonások és az alapműveletek segítségével, ha a polinom ún. Galois-csoportja feloldható. Például az általános n-edfokú egyenlet Galois-csoportja S_n, és ez feloldható ha $n < 5$, ellenkező esetben pedig nem. A véges csoportok elméletének egyik leghíresebb tétele azt mondja ki, hogy páratlan rendű csoport mindig feloldható.

A véges feloldható csoportok részcsoporthálója viszonylag jól leírható az alábbi tétel segítségével.

Hall tétele : Legyen G feloldható és $|G| = mn$, ahol m és n relatív prím egészek. Ekkor G-nek létezik n-edrendű részcsoportja, és bármely két n-edrendű részcsoport egymás konjugáltja. Fordítva, ha egy G véges csoport esetén $|G|$ bármely olyan n osztójára, amely relatív prím $\frac{|G|}{n}$-nel, létezik n-edrendű részcsoport, akkor G feloldható.

A feloldhatóság fogalma megközelíthető más oldalról is. A G csoport részcso-

portjainak egy

$$G = G_0 \rhd G_1 \rhd \ldots \rhd G_r = \{1\} \tag{2.10}$$

sorozatát *szubnormál láncnak* hívjuk, ha $G_{i+1} \lhd G_i$ minden $i < r$ esetén. Például a derivált lánc egy szubnormál lánc. Amennyiben még az is teljesül, hogy G_i/G_{i+1} egyszerű csoport minden i-re, akkor a szubnormál láncot *kompozícióláncnak* nevezzük, a faktorcsoportokat pedig a lánc *kompozíciófaktorainak*. Nem minden csoportnak van kompozíciólánca, példa erre az egész számok additív csoportja. De sok fontos csoport, például minden véges csoport rendelkezik kompozíciólánccal. A kompozícióláncokra vonatkozik az alábbi fontos tétel.

Jordan–Hölder-tétel : Ha egy csoportnak létezik kompozíciólánca, akkor bármely két kompozíciólánca azonos hosszúságú, és kompozíciófaktoraik sorrendtől eltekintve megegyeznek.

A Jordan–Hölder-tétel bizonyításában fontos szerepet játszik a normális részcsoportok alábbi tulajdonsága.

Moduláris tulajdonság : Legyen H, K, L normális részcsoportja G-nek és $K < L$. Ekkor

$$HK \cap L = (H \cap L)\, K\,. \tag{2.11}$$

A hálóelmélet nyelvén azt is mondhatjuk, hogy a normális részcsoportok *moduláris hálót* alkotnak. A moduláris tuljadonság fontos következménye, hogy amennyiben H, K normális részcsoportok, akkor egy-egyértelmű kapcsolat áll fenn a $H < L < HK$ feltételnek eleget tevő L normális részcsoportok és a $H \cap K < M < K$ feltételnek eleget tevő M normális részcsoportok között.

A Jordan–Hölder-tétel értelmében egy kompozíciólánccal rendelkező csoport jellemezhető kompozíciófaktorainak összességével, vagyis a csoport előáll egyszerű csoportokkal történő egymás utáni csoportbővítések eredményeként. E tény az alapja az egyszerű csoportok kiemelkedő jelentőségének, hiszen ezáltal sok csoportelméleti kérdést egyszerű csoportokra vonatkozó kérdéssé redukálhatunk.

Végül megemlítjük, hogy egy csoport akkor és csak akkor feloldható, ha létezik olyan szubnormál lánca, amelynek faktorai Abel-csoportok.

Fejezet 3

Permutációcsoportok

A permutációcsoportok elmélete a csoportelmélet legrégebbi és az alkalmazások szempontjából egyik legjelentősebb területe. Ennek részben az a magyarázata, hogy mivel a permutációk szorzása viszonylag egyszerű művelet, és a permutációcsoportokra sok olyan hatékony eljárás létezik, amelyek nem állnak rendelkezésre általában, a csoportelméleti számítások végrehajtása során gyakran célszerű egy, a vizsgált csoporthoz igen hasonló permutációcsoportra áttérni. A fizikai alkalmazások szempontjából a permutációcsoportok alapvető szerepet játszanak a másodkvantálási eljárásban, amikor egy több azonos részecskéből álló kvantumrendszer leírásánál érvényesítjük az azonos részecskék megkülönböztethetetlenségének kvantumelméleti alapelvét (Pauli-elv).

3.1 Permutációs hatás, pályák, tranzitivitás

Egy véges X halmaz összes permutációjából álló $Sym\,(X)$ szimmetrikus csoport részcsoportjait nevezzük permutációcsoportoknak, ezek a definíció szerint mind véges csoportok. Egy valamivel általánosabb fogalomra lesz szükségünk ahhoz, hogy a *permutációcsoportok elméletét bizonyos végtelen csoportokra is* alkalmazhassuk.

Definíció : Egy G csoportnak a véges X halmazon értelmezett *permutációs hatása* egy $\phi : G \to Sym\,(X)$ homomorfizmus. Az X számossága a permutációs hatás

Bantai_-_Csoportelmelet_szoveges-25.psd

foka.

Más szóval egy permutációs hatás a G csoport minden g eleméhez hozzárendeli az X halmaz egy $\phi(g)$ permutációját, amely minden $x \in X$ pontot egy gx pontba képez.

$$\phi(g) : x \mapsto gx$$

A ϕ homomorfizmus voltát úgy fejezhetjük ki, hogy az egységelemnek megfelelő permutáció minden pontot önmagára képez

$$\phi(1) : x \mapsto x$$

és

$$g_1(g_2 x) = (g_1 g_2)\, x \tag{3.1}$$

teljesül minden $g_1, g_2 \in G$*-re és* $x \in X$*-re.*

Egyszerű példát szolgáltatnak permutációs hatásokra a szabályos sokszögek. Ebben az esetben a vizsgált G csoport egy szabályos sokszög szimmetriacsoportja – vagyis egy diéder csoport –, az X halmaznak pedig válasszuk a sokszög csúcspontjainak halmazát. Mivel egy szimmetria csúcspontot csúcspontba visz, ezért egy permutációs hatást kapunk. De választhatjuk X-nek akár a sokszög oldalainak halmazát, vagy a szomszédos oldalpárokét, stb. Látszik, hogy egy adott csoportnak sok különféle permutációs hatása lehet, ezek osztályozása lesz egyik fő célunk.

A fenti példa arra is rámutat, hogy bizonyos permutációs hatások annyira hasonlóak egymáshoz, hogy célszerű őket azonosnak tekinteni. Például a sokszög csúcspontjainak X halmazán megadott hatás és a szomszédos oldalpárok Y halmazán megadott hatás ilyen, hiszen tetszőleges szomszédos oldalpárhoz hozzárendelhetjük a közös csúcspontjukat, és fordítva. Ez vezet a hatások ekvivalenciájának fogalmához.

Definíció : Egy $\phi : G \to Sym(X)$ és egy $\psi : G \to Sym(Y)$ hatás *ekvivalens,* ha létezik olyan $\alpha : X \to Y$ bijekció hogy

$$\alpha \circ \phi(g) = \psi(g) \circ \alpha\,,$$

vagy a jelölést egyszerűsítve, $\alpha(gx) = g\alpha(x)$ *minden* $x \in X$*-re.*

Úgy is felfoghatjuk a fenti definíciót, hogy ekvivalens permutációs hatásoknál

lényegében ugyanazokat az objektumokat permutálgatjuk, csak más-más címkékkel ellátva. A fenti példában felsorolt összes hatás egymással ekvivalens. Az ekvivalens permutációs hatásokat a továbbiakban azonosnak fogjuk tekinteni, ezzel nagymértékben lecsökkentve egy adott csoport különböző permutációs hatásainak a számosságát, de mint később kiderül, még mindig végtelen sok marad. Hogy ezek között rendet teremthessünk, szükségünk lesz az alábbi fogalmakra.

Definíció : Legyen adva a G csoportnak egy hatása az X halmazon, és legyen $x \in X$. Az x pont *pályájának (orbitjának)* nevezzük a

$$Gx = \{gx \mid g \in G\}$$

részhalmazát X-nek. Két különböző pont pályája vagy megegyezik, vagy diszjunkt, azaz a pályák egy partícióját adják X-nek. Amennyiben X egyetlen pályából áll, a hatást *tranzitívnak* hívjuk.

Az előbb tárgyalt példában a diéder csoport tranzitíven hatott a megfelelő szabályos sokszög csúcspontjain (és a hatások ekvivalenciája miatt a szomszédos oldalpárok halmazán is). Ha viszont a csúcspárok halmazán tekintjük a hatást, akkor az már nem lesz tranzitív.

Definíció : Legyen adva a G csoportnak egy hatása az X halmazon. Egy $x \in X$ *fixpontja* $g \in G$-nek, amennyiben $gx = x$, ekkor azt is mondjuk, hogy g *stabilizálja* x-et. Egy adott $g \in G$ összes fixpontjainak halmazát $Fix(g)$-vel jelöljük, míg $x \in X$ *stabilizátora*

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\} \ . \tag{3.2}$$

Belátható, hogy $G_x < G$ és $G_{gx} = gG_xg^{-1}$, vagyis egyazon pálya különböző pontjainak stabilizátorai konjugált részcsoportok.

Definíció : Egy G csoportnak egy permutációs hatását *regulárisnak* nevezzük, amennyiben tranzitív és csak az egységelemnek vannak fixpontjai.

Könnyen belátható, hogy a fenti definíció értelmében csak véges csoportnak lehet reguláris permutációs hatása, és az ekvivalencia erejéig egyértelmű. Ha G véges, akkor a reguláris hatást az alábbi módon adhatjuk meg: legyen $X = G$, és a $g \in G$ csoportelem hasson a $x \in X$ elemen a szorzási szabály szerint, azaz $\phi(g) : x \to gx$, ahol a jobb oldalon a g és az x csoportelemek szorzata áll. A csoportaxiómák biztosítják, hogy valóban egy reguláris hatást kapunk, és ez a

példa egyben igazolja az alábbi híres tételt.

Cayley tétele : Minden G véges csoport izomorf egy $|G|$-edfokú permutációcsoporttal, vagyis az $S_{|G|}$ egy részcsoportjával.

A fenti tétel szerint bármilyen véges csoportot kezelhetünk permutációcsoportként, és ennek nagy jelentősége van a csoportelméleti algoritmusok területén, amint arra már korábban utaltunk.

A reguláris hatásnak létezik egy igen fontos általánosítása, amely egy $H < G$ részcsoport (bal oldali) cosetjeinek terén definiál egy permutációs hatást. Legyen ugyanis H véges indexű részcsoportja G-nek, és tekintsük az alábbi $\phi : G \to Sym(G/H)$ homomorfizmust :

$$\phi(g) : xH \to gxH$$

minden $g, x \in G$-re. Könnyen belátható, hogy így egy tranzitív permutációs hatását kapjuk G-nek az $X = G/H$ halmazon, amely csak akkor reguláris, ha $H = \{1\}$ a triviális részcsoport. Az is igaz, hogy a G/H és a G/K halmazokon így megadott hatások akkor és csak akkor ekvivalensek, ha a H és a K részcsoportok egymás konjugáltjai. Ezzel a hatással kapcsolatos az alábbi alapvető tétel.

Orbit–stabilizátor-tétel : Legyen adva a G csoportnak egy hatása az X halmazon, és legyen $x \in X$. Ekkor az x pont Gx orbitján G tranzitíven hat, és ez a hatás ekvivalens a G/G_x halmazon a fentiekben definiált hatással, többek között $|Gx| = [G : G_x]$. Következésképpen tranzitív hatás foka osztja a csoport rendjét.

Az orbit–stabilizátor-tétel egyik fontos következménye, hogy segítségével osztályozhatjuk egy tetszőleges G csoport összes tranzitív hatását, hiszen az eddig elmondottak szerint ezek egy-egyértelmű kapcsolatban állnak a csoport véges indexű részcsoportjainak konjugált osztályaival. Viszont ezáltal már az összes hatás is osztályozható, mert tetszőleges hatás előáll tranzitív hatásokból az alábbiak szerint.

Definíció : Legyen X, Y két diszjunkt véges halmaz, és legyen adva a G csoportnak két, $\phi : G \to Sym(X)$ és $\psi : G \to Sym(Y)$ hatása. Ekkor létezik az $X \cup Y$ halmazon egy ekvivalencia erejéig egyértelmű $\phi \oplus \psi : G \to Sym(X \cup Y)$

összeghatás, ahol

$$\phi \oplus \psi\,(g) : x \to \begin{cases} \phi\,(g)\,x, & \text{ha } x \in X; \\ \psi\,(g)\,x, & \text{ha } x \in Y. \end{cases} \tag{3.3}$$

Visszaidézve a pálya fogalmát látjuk, hogy egy tetszőleges hatás felbomlik az egyes pályákon értelmezett tranzitív hatások összegére, vagyis valóban elegendő a tranzitív hatások ismerete az összes hatás osztályozásához. Bizonyos értelemben a tranzitív hatások tovább nem bontható elemi hatásoknak tekintendők.

Az orbit–stabilizátor-tétel azt is megmondja, hogy egy tetszőleges $x \in X$ pont Gx orbitjának számosságát, vagyis a pálya hosszát megkapjuk a G_x stabilizátor indexeként G-ben. Egy másik érdekes kérdés az, hogyan határozható meg egyszerűen egy hatás pályáinak száma. Erre ad választ az alábbi tétel.

Cauchy–Frobenius-lemma : A G csoport X-en adott permutációs hatása pályáinak száma egyenlő az

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix\,(g)| \tag{3.4}$$

kifejezéssel.

3.2 Többszörös tranzitivitás, Mathieu-csoportok

Létezik a tranzitivitás fogalmának egy élesítése, amely különösen fontos szerepet töltött be a permutációcsoportok elméletének fejlődésében, az ún. *többszörös tranzitivitás*. Tekintsük a G csoportnak egy tranzitív hatását az X halmazon, és jelölje minden $k > 0$ pozitív egész esetén $X^{\{k\}}$ az olyan k hosszúságú X-beli sorozatok halmazát, amelyekben minden elem különbözik az összes többitől (ezek száma nyilván $|X|\,(|X|-1)\ldots(|X|-k+1)$ lesz). Definiáljuk a G csoportnak egy hatását az $X^{\{k\}}$ halmazon az alábbi szabály szerint:

$$g\,(x_1, \ldots, x_k) = (gx_1, \ldots, gx_k)\ ,$$

vagyis a sorozat minden egyes komponensét az eredeti hatás szerint transzformáljuk. Amennyiben az így kapott hatás tranzitív, azt mondjuk, hogy a G eredeti hatása az X-en *k-szorosan tranzitív*. Az 1-szeres tranzitivitás nem más, mint a

közönséges tranzitivitás. Könnyen belátható, hogy ha valamilyen hatás k-szorosan tranzitív, akkor $(k-1)$-szeresen is az. Például az S_n szokásos hatása az $\{1,\ldots,n\}$ halmazon n-szeresen tranzitív, míg az A_n alternáló csoporté $(n-2)$-szeresen az. A permutációcsoportok elméletének egyik klasszikus problémája volt megtalálni az összes többi többszörösen tranzitív csoportot, és ez lehetővé is vált a véges egyszerű csoportok osztályozása révén. Kiderült, hogy az S_n és az A_n példáján kívül nem léteznek 6-szorosan tranzitív csoportok. Sőt, 5-szörösen és 4-szeresen tranzitív csoportokból is csak kettő-kettő létezik, az ún. Mathieu-csoportok, ezek közül M_{12} és M_{24} 5-szörösen, míg M_{11} és M_{23} 4-szeresen tranzitív, ahol az indexek a permutációs hatás fokát jelölik. A Mathieu-csoportokhoz tartozik még két 3-szorosan tranzitív csoport, az M_{10} és az M_{22}. Kiemelendő, hogy M_{10} kivételével minden Mathieu-csoport egyszerű, valójában ezek voltak az első – és sokáig egyedüli – példák ún. *szporadikus* egyszerű csoportokra, amelyek nem tagjai a klasszikus végtelen sorozatoknak.

A 2-szeresen és 3-szorosan tranzitív hatások is osztályozhatók az egyszerű csoportok osztályozása segítségével: nyolc végtelen sorozatot kapunk és tíz ún. *szporadikus* hatást. A további részletek fellelhetők a szakirodalomban.

Létezik még egy fontos fogalom, a primitivitás, amely közbenső helyet foglal el a 2-szeres tranzitivitás és az (1-szeres) tranzitivitás között. Tekintsük a következő szituációt: adva van a G-nek egy tranzitív hatása az X halmazon és egy $\approx$ ekvivalenciareláció az X-en. Azt mondjuk, hogy az ekvivalencia *kompatibilis* a hatással, ha minden $g \in G$-re és $x \approx y$-ra igaz $gx \approx gy$, vagyis ekvivalens pontok képei is ekvivalensek. Mindig van két kompatibilis ekvivalencia, az egyik az egyenlőség (amikor minden pont csak önmagával ekvivalens), a másik pedig, amikor minden pont ekvivalens az összes többivel. A kompatibilis ekvivalenciák jelentősége abban rejlik, hogy egy ilyen reláció ekvivalenciaosztályain természetes módon megadható a G-nek egy új hatása, amikor is $g \in G$ az $x \in X$ pont ekvivalenciaosztályát a gx pont ekvivalenciaosztályába képezi. Vagyis a G hatása az X-en indukálja G-nek egy hatását az ekvivalenciaosztályok $X/\approx$ halmazán, és ez a hatás bizonyos értelemben egyszerűbb, mint az eredeti. Például, ha tekintjük a négyzet szimmetriacsoportjának 4-edfokú hatását a csúcspontokon, és két csúcspontot akkor tekintünk ekvivalensnek, ha nem szomszédosak, akkor egy kompatibilis ekvivalenciarelációt kapunk, és a fenti gondolatmenet alapján egy másodfokú hatást az ekvivalenciaosztályok halmazán, amely megfeleltethető az átlók halmazának.

Egy tranzitív permutációs hatást akkor hívunk *primitívnek*, ha a két fentebb említett triviális ekvivalencián kívül nincs több vele kompatibilis ekvivalenciareláció, ellenkező esetben a hatás *imprimitív*. Megmutatható, hogy minden 2-szeresen (és ezért minden többszörösen) tranzitív hatás primitív. Ha adott fokú permutációcsoportokat vizsgálunk, az S_n és az A_n példáin kívül nagyon kevés primitív csoportot találunk, sőt, végtelen sok olyan $n > 0$ létezik, hogy a fentieken kívül nincs más n-edfokú primitív csoport. A primitivitás megfogalmazható a stabilizátorok segítségével is, ugyanis egy tranzitív hatás akkor és csak akkor primitív, ha egy $x \in X$ pont G_x stabilizátora maximális részcsoportja G-nek, vagyis $G_x < H < G$ esetén $H = G_x$ vagy $H = G$. Az is belátható, hogy imprimitív hatás esetén egy-egyértelmű kapcsolat van a hatással kompatibilis ekvivalenciák és a $G_x < H < G$ tulajdonságú részcsoportok között.

3.3 A Burnside-gyűrű

Mint korábban láttuk, a permutációs hatások vizsgálatánál fontos szerepet játszik az összeghatás fogalma, hiszen ezáltal vezethető vissza egy tetszőleges hatás vizsgálata tranzitív összetevőire. Valójában egy műveletet definiáltunk egy adott csoport hatásaira, amelyről egyszerűen belátható, hogy kommutatív és asszociatív, de nincs egységeleme.

Létezik egy másik fontos művelet egy adott csoport permutációs hatásaira, amelynek eredményét *szorzathatásnak* nevezzük, és az alábbi módon értelmezzük.

Definíció : Legyen adva a G csoportnak két $\phi : G \to Sym(X)$ és $\psi : G \to Sym(Y)$ hatása az X, illetve Y halmazokon. A $\phi \otimes \psi : G \to Sym(X \times Y)$ *szorzathatást*

$$\phi \otimes \psi (g) : (x, y) \mapsto (gx, gy)$$

értelmezi.

Azonnal adódik a definícióból, hogy a szorzathatás foka egyenlő az egyes tényezők fokainak szorzatával. Az így bevezetett művelet kommutatív és asszociatív, egységeleme a triviális, egyelemű halmazon adott hatás, és igaz az alábbi disztributív tulajdonság:

$$\phi \otimes (\psi \oplus \theta) = (\phi \otimes \psi) \oplus (\phi \otimes \theta) .$$

A G csoport hatásainak összességét a fenti két művelettel, azaz az összeggel és szorzással, szokás a csoport *Burnside-gyűrűjének* nevezni, bár szigorú algebrai értelemben ez nem gyűrű, csak egy ún. félgyűrű, hiszen az összegnek nincs egységeleme.

Általában nem igaz, hogy két tranzitív hatás szorzata megint tranzitív lesz. Ha $\phi_1, \ldots, \phi_s$ jelöli a G csoport tranzitív hatásait, akkor

$$\phi_i \otimes \phi_j = \bigoplus_{k=1}^{s} N_{ij}^k \phi_k$$

alakban dekomponálható a $\phi_i \otimes \phi_j$ szorzat, ahol az N_{ij}^k nemnegatív egész számok, a Burnside-gyűrű *struktúraállandói*, azt mondják meg, hogy mekkora multiplicitással fordul elő a ϕ_k tranzitív hatás a $\phi_i \otimes \phi_j$ szorzatban. A hatások szorzásának disztributivitása miatt a struktúraállandók ismeretében tetszőleges két hatás szorzatának tranzitívekre való felbontása egyszerűen adódik, ha ismerjük az egyes tényezők dekompozícióit. Megjegyezzük, hogy minden i-re igaz $N_{ii}^i \geq 1$, hiszen a $\phi_i \otimes \phi_i$ szorzathatásnak az (x, x) alakú elemek egy olyan orbitját alkotják, amelyen a csoport a ϕ_i szerint hat.

A szorzathatás fogalmának egy fontos alkalmazása, hogy segítségével egyszerűen megfogalmazható a többszörös tranzitivitás: például egy hatás akkor kétszeresen tranzitív, ha önmagával vett szorzata két tranzitív hatás összege – amelyek közül az előbbiek szerint az egyik maga a vizsgált hatás.

Létezik egy másik fontos fogalom, a permutációs hatások *megszorítása* egy részcsoportra. Tekintsünk ugyanis egy $\phi : G \to Sym\,(X)$ permutációs hatást és egy $H < G$ részcsoportot. A ϕ homomorfizmust megszorítva a H részcsoportra egy $\phi_H : H \to Sym\,(X)$ homomorfizmust kapunk, vagyis a H-nak egy hatását X-en. A megszorítás művelete felcserél az összeggel és a szorzással az alábbi értelemben:

$$\begin{aligned} (\phi \oplus \psi)_H &= \phi_H \oplus \psi_H\,, \\ (\phi \otimes \psi)_H &= \phi_H \otimes \psi_H\,. \end{aligned}$$

Ezért egy tetszőleges hatás megszorításának ismeretéhez elegendő, ha ismerjük tranzitív hatásokra való felbontását, valamint tranzitív összetevőinek megszorításait. Igaz továbbá, hogy a megszorítás tranzitív művelet, azaz ha ϕ a G-nek egy hatása

és $K < H < G$, akkor

$$(\phi_H)_K = \phi_K \,.$$

Általában a G egy ϕ tranzitív hatásának a megszorítása egy részcsoportra már nem lesz tranzitív. Ha $\phi_1, \ldots, \phi_s$ jelöli a G tranzitív hatásait és $\theta_1, \ldots, \theta_r$ a $H < G$ részcsoport tranzitív hatásait, akkor

$$(\phi_i)_H = \bigoplus_{j=1}^{r} B_i^j \theta_j$$

alakú lesz a ϕ_i megszorításának a felbontása, ahol a B_i^j-k nemnegatív egészek. *Elágazási szabályoknak* nevezzük a G tranzitív hatásai $H < G$-re való megszorításainak H tranzitív hatásai szerinti dekompozícióját.

3.4 A Burnside-tábla

Mint korábban láttuk, egy tetszőleges permutációs hatás felbomlik tranzitív hatások összegére, és ez a felbontás ekvivalencia erejéig egyértelmű. E felbontások ismeretében egyszerű megállapítani két hatás ekvivalenciáját, hiszen ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy a felbontásban ugyanazok a tranzitív hatások forduljanak elő ugyanazokkal a multiplicitásokkal. Ehhez viszont meg kell határozni az összes pályát és a stabilizátorokat. Felvetődik a kérdés, létezik-e olyan egyszerű numerikus jellemzése egy permutációs hatásnak, amelynek segítségével a fenti feladat egyszerűen megoldható. Erre utaló jelzésnek tekinthető a Cauchy–Frobenius-lemma, ami a hatás pályáinak számát a csoportelemek fixponthalmazainak számossága segítségével fejezi ki. A numerikus jellemzéstől azt is elvárjuk, hogy illeszkedjen az előző fejezetekben megismert műveletekhez, vagyis az összeg- és szorzathatások, valamint a megszorított hatások könnyen számolhatóak legyenek a segítségével.

A numerikus jellemzés megoldását szolgáltatja a ϕ permutációs hatás *fixpontfüggvénye*. Ez a Θ_ϕ függvény a G csoport minden $H < G$ részcsoportjához hozzárendeli a H fixpontjainak számát, azaz

$$\Theta_\phi(H) = |\{x \in X \mid \phi(h)\, x = x \;\; \forall h \in H\}| \,. \tag{3.5}$$

Amennyiben $H = \langle g \rangle$ a $g \in G$ elem által generált ciklikus részcsoport, akkor

$$\Theta_\phi(\langle g \rangle) = |Fix(g)| .$$

Könnyen belátható, hogy konjugált részcsoportokra a fixpontfüggvény értéke azonos lesz. Kevésbé triviális, hogy a fixpontfüggvény ekvivalencia erejéig egyértelműen jellemzi a hatást, azaz a ϕ és ψ hatás akkor és csak akkor ekvivalens, ha $\Theta_\phi = \Theta_\psi$. Vagyis a fixpontfüggvény valóban megoldja a fent felvetett numerikus jellemzés problémáját.

Jelöljük $\phi_1, \ldots, \phi_s$-sel a G csoport összes tranzitív hatását. Minden egyes ϕ_i megfelel részcsoportok egy konjugált osztályának, válasszunk ki egy H_i reprezentánst az adott osztályból. Ezek után tekintsük az alábbi $s \times s$ méretű mátrixot:

$$m_{ij} = \Theta_{\phi_i}(H_j) \; ! \tag{3.6}$$

Belátható, hogy az így kapott mátrix invertálható, és minden eleme nemnegatív egész szám. Az is világos, hogy a mátrix független az egyes H_i reprezentánsok választásától, hiszen a fixpontfüggvény konjugált részcsoportokra azonos értékű. Ezt a mátrixot nevezzük a G csoport *Burnside-táblájának,* ez tartalmazza az összes lényegi numerikus információt a csoport permutációs hatásairól.

Ezek után egyszerűen meg tudjuk oldani egy tetszőleges hatás tranzitívekre való dekomponálásának problémáját. Tegyük fel ugyanis, hogy a vizsgált hatás

$$\phi = \bigoplus_{i=1}^{s} n_i \phi_i$$

alakú, ahol az n_i nemnegatív egész szám adja meg a ϕ_i tranzitív összetevő multiplicitását. A feladat pont ezeknek az n_i-knek a meghatározása. Egyszerű megfontolással arra a következtetésre jutunk, hogy

$$\Theta_\phi(H) = \sum_{i=1}^{s} n_i \Theta_{\phi_i}(H) . \tag{3.7}$$

Mivel a fixpontfüggvény csak a részcsoport konjugált osztályától függ, ezért a fenti

egyenlet ekvivalens az alábbival:

$$\Theta_\phi(H_j) = \sum_{i=1}^{s} n_i m_{ij} ,$$

felhasználva az m_{ij} definícióját. Mivel az m_{ij} mátrix invertálható, ezért a fenti egyenletrendszert megoldhatjuk az n_i-kre, az eredmény

$$n_i = \sum_{j=1}^{s} \left(m^{-1}\right)_{ji} \Theta_\phi(H_j) , \tag{3.8}$$

vagyis a Burnside-tábla és a fixpontfüggvény ismeretében kifejezhetők az n_i multiplicitások. Ezzel a felbontási probléma is meg van oldva.

Érdekes következménye a fenti eredményeknek, hogy egy alternatív kifejezést kapunk a hatás pályáinak számára. Ugyanis a ϕ felbontásából következik, hogy a pályák száma $\sum_{i=1}^{s} n_i$, hiszen minden egyes ϕ_i tranzitív. Felhasználva a multiplicitásokra kapott előző képletet, a pályák száma

$$\sum_{i=1}^{s} K_i \Theta_\phi(H_i) ,$$

ahol $K_i = \sum_{j=1}^{s} \left(m^{-1}\right)_{ij}$. Természetesen az így kapott számnak meg kell egyeznie a Cauchy–Frobenius-lemmából adódó eredménnyel.

A fixpontfüggvény segítségével a szorzathatás is egyszerűen dekomponálható, ugyanis egyszerű megfontolás alapján

$$\Theta_{\phi\otimes\psi}(H) = \Theta_\phi(H)\,\Theta_\psi(H) ,$$

vagyis a szorzathatás fixpontfüggvénye a tényezők fixpontfüggvényeinek szorzata. Ennek alapján kifejezhetjük a Burnside-gyűrű struktúraállandóit a Burnside-tábla segítségével, hiszen

$$N_{ij}^{k} = \sum_{l=1}^{s} \left(m^{-1}\right)_{lk} \Theta_{\phi_i\otimes\phi_j}(H_l) = \sum_{l=1}^{s} \left(m^{-1}\right)_{lk} m_{il} m_{jl} \tag{3.9}$$

a 3.8 képlet alapján.

Az elágazási szabályok szintén egyszerűen meghatározhatók a Burnside-tábla alapján, ugyanis $K < H < G$ esetén

$$\Theta_{\phi_H}(K) = \Theta_{\phi}(K) .$$

Felhívjuk a figyelmet, hogy az elágazási szabályok meghatározásánál figyelembe kell venni, hogy H két olyan részcsoportja, amely konjugált G-ben, nem szükségszerűen konjugált H-ban.

Lássunk egy egyszerű példát a fentiekre, vizsgáljuk meg az S_3 szimmetrikus csoport Burnside-tábláját. Az S_3-nak 6 részcsoportja van, és ezek négy konjugált osztályba esnek, ezekből egy-egy reprezentáns

$$\begin{aligned} H_1 &= \{1\}, \\ H_2 &= \{1,(1,2)\}, \\ H_3 &= \{1,(1,2,3),(1,3,2)\}, \\ H_4 &= S_3 . \end{aligned}$$

Meghatározva az ezeknek megfelelő ϕ_i tranzitív hatásokat, az alábbi Burnside-táblát kapjuk:

$$m = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

A tranzitív hatások szorzási szabályát az alábbi táblázat összegzi.

$\otimes$	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4
ϕ_1	$6\phi_1$	$3\phi_1$	$2\phi_1$	ϕ_1
ϕ_2	$3\phi_1$	$\phi_1 \oplus \phi_2$	ϕ_1	ϕ_2
ϕ_3	$2\phi_1$	ϕ_1	$2\phi_3$	ϕ_3
ϕ_4	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4

Fejezet 4

Ábrázoláselmélet

Az előző fejezetben tárgyalt permutációs hatásokat egy G csoportnak egy véges X halmaz összes permutációinak $Sym\,(X)$ csoportjába képező homomorfizmusokként definiáltuk. A permutációs hatások jelentősége abban áll, hogy az alkalmazásokban igen sok csoport egy hatásával van megadva, illetve a permutációk egyszerű műveleti szabályai és a belőlük képzett csoportokra rendelkezésre álló hatékony eljárások jelentős mértékben segítik az adott csoport vizsgálatát. A permutációcsoportokon kívül létezik egy másik osztálya a csoportoknak, amely hasonlóan jó tulajdonságokkal rendelkezik: a mátrixcsoportok. Egy adott G csoportnak különféle mátrixcsoportokba – elsősorban egy véges dimenziós V lineáris tér invertálható lineáris operátorainak $GL\,(V)$ csoportjába – vivő homomorfizmusainak vizsgálata az ábrázoláselmélet tárgya. Mint azt rövidesen látni fogjuk, az így adódó elmélet *nagymértékben hasonlít a permutációs hatások elméletére, de alapvető* különbségek vannak a kettő között. A fizikai alkalmazások szempontjából az ábrázoláselmélet a csoportelméletnek a legfontosabb fejezete, aminek magyarázata *részben a kvantummechanikai állapotleírás jellegében és a szuperpozíció elvében* gyökerezik (Wigner tétele).

Bantai_-_Csoportelmelet_szoveges-37.psd

4.1 Ábrázolás, ekvivalencia, irreducibilitás

Definíció : A G csoport *lineáris ábrázolása* egy $D : G \to GL(V)$ homomorfizmus, ahol V egy lineáris tér. Az ábrázolás $\dim D$ *dimenziója* a V lineáris tér dimenziója. Az ábrázolás *magja* a D homomorfizmus magja, és az ábrázolás *hű*, amennyiben a magja triviális.

Más szóval, egy D lineáris ábrázolás minden egyes $g \in G$ csoportelemhez hozzárendeli a V lineáris tér egy $D(g)$ invertálható lineáris operátorát úgy, hogy teljesül

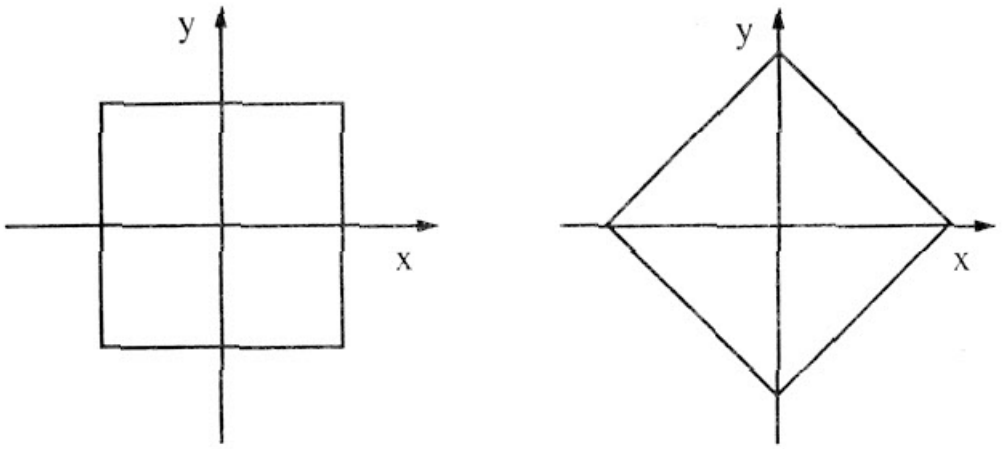
1. $D(1) = \mathbb{I}$, a V téren ható egységoperátor;
2. $D\left(g^{-1}\right) = D(g)^{-1}$ minden $g \in G$-re;
3. $D(gh) = D(g)\,D(h)$ minden $g, h \in G$-re, ahol a jobb oldalon a megfelelő lineáris operátorok szorzata áll.

Minden csoportnak van egy ún. *egységábrázolása*, amikor V dimenziója 1 és minden csoportelemhez az egységoperátort rendeljük. Amennyiben D egy ábrázolás a V-n és $A \in GL(V)$ egy invertálható operátor, akkor

$$\widetilde{D}(g) = A^{-1} D(g) A$$

szintén egy ábrázolást definiál. Az ily módon D-ből adódó ábrázolásokat D-vel *ekvivalensnek* nevezzük, és a továbbiakban azonosítjuk őket egymással. Ennek az az oka, hogy az A operátorral való konjugálás úgy értelmezhető, hogy áttérünk a V tér egy másik bázisára, de ez nem okoz lényegi változást. Amennyiben a V lineáris tér véges dimenziós, egy konkrét bázis kiválasztása mellett a $D(g)$ ábrázolási operátorokat reprezentálhatjuk az adott bázisra vonatkozó mátrixukkal.

Lássunk néhány példát ábrázolásokra. Világos, hogy minden mátrixcsoport, legyen az $GL(n)$, $SL(n)$, $O(n)$, $Sp(2n)$ stb., esetén természetes módon kapunk egy ún. *definiáló ábrázolást*, hiszen ezen csoportok elemei maguk is lineáris operátorok. Tekintsük most egy szabályos n-szög D_{2n} szimmetriacsoportját. A sokszöget tartalmazó síkon Descartes-koordinátákat bevezetve és az origót a sokszög súlypontjának választva a sík pontjai lineáris teret alkotnak, és a D_{2n} elemei



ábra 4.1: A négyzet két koordinátázása

lineáris transzformációk ezen a kétdimenziós vektortéren, vagyis egy kétdimenziós ábrázolást alkotnak. Ha például egy négyzetet tekintünk és egy olyan síkbeli koordináta-rendszert, melynek origója a négyzet középpontja, míg koordinátatengelyei a csúcspontokon áthaladó egyenesek, akkor a D_8 csoportnak az alábbi kétdimenziós ábrázolását kapjuk.

$$
\begin{aligned}
D(C) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
D(C^2) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
D(C^3) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
D(\sigma_x) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
D(\sigma_y) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
D(\sigma_+) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
D(\sigma_-) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Itt C jelöli a pozitív irányú 90°-os forgatást, $\sigma_{x,y}$ a megfelelő koordinátatengelyre, míg $\sigma_{\pm}$ az $y = \pm x$ egyenesre való tükrözést. Amennyiben a koordinátatengelyeket 45°-kal elforgatjuk, akkor egy az előzővel ekvivalens ábrázolást kapunk, ahol például

$$D(\sigma_x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Másik fontos példa a következő: legyen $\phi : G \to Sym(X)$ a G csoportnak egy permutációs hatása a véges X halmazon, és tekintsünk egy $|X|$ dimenziós V vektorteret. Mivel V dimenziója megegyezik X számosságával, ezért V tetszőleges bázisának elemei egy-egyértelmű kapcsolatba hozhatók az X halmaz elemeivel. Jelöljük e_x-szel a V bázisának az $x \in X$ elemhez tartozó vektorát, és minden $g \in G$ csoportelemhez definiáljunk egy $D_\phi(g)$ lineáris operátort, amely e_x-et e_{gx}-be képezi, azaz

$$D_\phi(g) : e_x \mapsto e_{gx}.$$

A permutációs hatás definíciója alapján egyszerűen belátható, hogy így egy ábrázolást kapunk, a ϕ hatáshoz tartozó D_ϕ *permutációs ábrázolást*. Ennek dimenziója megegyezik a ϕ hatás fokával.

Fontos megemlíteni, hogy mivel a lineáris tér definíciójában szerepel a skalárok teste, ezért az ábrázolás fogalmának is fontos része az alaptest megadása. Így beszélhetünk valós, komplex stb. ábrázolásokról, sőt, bizonyos alkalmazásokban egész, illetve véges testek feletti ábrázolások is szerepet játszanak. A különféle alaptestek feletti ábrázolások osztályozása, illetve egymáshoz való viszonyának meghatározása bonyolult feladat, ezért a továbbiakban az alaptest mindig a komplex számtest lesz, amely a fizikai alkalmazások szempontjából amúgy is a legfontosabb eset.

A permutációs hatások esetéhez hasonlóan alapvető szerepet játszanak az elméletben egyes ábrázolásokra értelmezett műveletek.

Definíció : Legyen $D_1 : G \to GL(V_1)$ és $D_2 : G \to GL(V_2)$ két ábrázolása a G csoportnak. A $D_1 \oplus D_2 : G \to GL(V_1 \oplus V_2)$ direkt összegük

$$(D_1 \oplus D_2)(g) = D_1(g) \oplus D_2(g),$$

ahol a jobb oldalon a megfelelő lineáris operátorok direkt összege áll. Az ábrázolási

operátorok mátrixainak segítségével a direkt összeg az alábbi blokk-diagonális mátrix:

$$(D_1 \oplus D_2)(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix}.$$

A lineáris operátorok direkt összegének tulajdonságaiból következik, hogy az ábrázolások direkt összege kommutatív és asszociatív, de nincs egységeleme. Különösen jelentősek azok az ábrázolások, amelyek nem állnak elő két ábrázolás direkt összegeként, ezekkel kapcsolatosak az alábbi fogalmak.

Definíció : Egy $D : G \to GL(V)$ ábrázolást *reducibilisnek* nevezünk, amennyiben létezik invariáns altere, vagyis olyan $U < V$ lineáris altér, amelyet minden ábrázolási operátor önmagába képez. Ellenkező esetben az ábrázolás *irreducibilis*. Egy ábrázolást akkor nevezünk *teljesen reducibilisnek*, amennyiben előáll irreducibilis ábrázolások direkt összegeként.

Ezek szerint egy ábrázolás akkor reducibilis, ha alkalmasan választott bázisban az ábrázolási operátorok alakja

$$\begin{pmatrix} A(g) & 0 \\ C(g) & D(g) \end{pmatrix}.$$

Fel kell hívnunk a figyelmet, hogy a fenti fogalmak erősen függnek az alaptesttől, például a valós testről a komplexre való áttérés során egy irreducibilis ábrázolás reducibilissá válhat. Csoportok igen széles osztályaira igaz, hogy minden (komplex számtest feletti) ábrázolásuk teljesen reducibilis, igaz ez például az ún. félegyszerű Lie-csoportokra, amelyek egyszerű Lie-csoportok direkt szorzataként állnak elő. Hasonló állítást mond ki véges csoportokra az alábbi alaptétel.

Maschke tétele : Egy G véges csoport minden komplex ábrázolása teljesen reducibilis.

Amennyiben minden ábrázolás teljesen reducibilis, az irreducibilis ábrázolások pont azok, amelyek nem állnak elő két ábrázolás direkt összegeként. Egy másik fontos jellemzésüket adja az alábbi, az alkalmazások szempontjából különösen fontos állítás.

Schur-lemma : A G csoportnak egy $D : G \to GL(V)$ ábrázolása akkor és csak akkor irreducibilis, ha minden $A : V \to V$ lineáris operátor, amely felcserélhető az

összes ábrázolási operátorral, azaz

$$AD(g) = D(g)A,$$

az egységoperátornak skalárszorosa, $A = \lambda\mathbb{I}$.

A Schur-lemma rendkívül fontos a kvantumelméletben, ahol a szimmetriacsoportot ábrázoljuk az állapottéren, és a Hamilton-operátor kommutál az ábrázolási operátorokkal, így a rendszer energiaszintjeinek elfajultsága tükrözi a szimmetriákat a Schur-lemma alapján.

4.2 Tenzorszorzat és elágazási szabályok

Hasonlóan a permutációs hatások elméletéhez, az ábrázoláselméletben is fontos szerepet játszik az ábrázolások megszorítása egy részcsoportra, illetve az ábrázolások tenzorszorzata. Ez utóbbi fogalom ismertetése előtt idézzünk emlékezetünkbe néhány lineáris algebrai fogalmat.

Amennyiben V egy lineáris tér, lineáris funkcionálnak nevezzük a V-nek egy lineáris leképezését az alaptestbe. Természetes módon értelmezve lineáris funkcionálok összegét, illetve skalárral való szorzását, a lineáris funkcionálok összessége maga is egy V^* lineáris teret alkot, amelyet V duálisának nevezünk. Amennyiben V véges dimenziós, akkor V^* izomorf V-vel, és V^* duálisa azonosítható magával V-vel (ugyanis $v \in V$ esetén a $\phi \mapsto \phi(v)$ leképezés egy lineáris funkcionál V^*-on). Bilineáris funkcionálnak nevezünk egy leképezést $V \times W$-ből az alaptestbe, amennyiben mindkét változójában lineáris. A bilineáris funkcionálok megint lineáris teret alkotnak a nyilvánvaló műveletekkel, és ennek a térnek a duálisát nevezzük a V és W lineáris terek $V \otimes W$ tenzorszorzatának. A tenzorszorzat dimenziója az egyes tényezők dimenzióinak szorzata, és amennyiben a V lineáris tér egy bázisa $e_1, \ldots, e_r$, míg a W tér egy bázisa $f_1, \ldots, f_s$, akkor a $V \otimes W$ tenzorszorzat egy bázisát alkotják az $e_i \otimes f_j : \phi \mapsto \phi(e_i, f_j)$ elemek.

Tenzorszorzatok gyakran fordulnak elő a fizikában, már a nevük is sugalja szoros kapcsolatukat a tenzormennyiségekkel, a kvantummechanikában pedig egy összetett objektum állapottere az összetevők állapottereinek tenzorszorzata.

Definíció : Legyen $D : G \to GL(V)$ egy lineáris ábrázolás. A D ***konjugáltjának***

nevezzük azt a $D^* : G \to GL(V^*)$ ábrázolást, amelyre teljesül

$$D^*(g)\phi(v) = \phi\left(D(g^{-1})v\right)$$

minden $\phi \in V^*$ és $v \in V$ esetén.

Nyilván D és D^* dimenziója megegyezik, és az is igaz, hogy $(D^*)^* = D$. Amenynyiben egy ábrázolás ekvivalens a konjugáltjával, akkor önkonjugáltnak nevezzük.

Tekintsünk most két, $D_1 : G \to GL(V)$ és $D_2 : G \to GL(W)$ ábrázolást és a bilineáris funkcionálok terét, amely az előzőek szerint megegyezik a $V \otimes W$ tenzorszorzat duális terével. Minden $g \in G$-hez rendeljünk hozzá egy $(D_1 \otimes D_2)^*(g)$ lineáris operátort, amely kielégíti a

$$(D_1 \otimes D_2)^*(g)\phi(v,w) = \phi\left(D_1(g^{-1})v, D_2(g^{-1})w\right)$$

feltételt minden ϕ bilineáris funkcionálra és minden $v \in V, w \in W$-re. Így egy ábrázolást kapunk a bilineáris funkcionálok terén, és ennek $D_1 \otimes D_2 : G \to GL(V \otimes W)$ duálisát nevezzük a D_1 és D_2 *tenzorszorzatának*. $D_1 \otimes D_2$ dimenziója nyilván D_1 és D_2 dimenziójának szorzata, és a $D_1 \otimes D_2(g)$ ábrázolási operátor az alábbi módon hat a $V \otimes W$ bázisvektorain :

$$D_1 \otimes D_2(g) : e_i \otimes f_j \mapsto D_1(g)e_i \otimes D_2(g)f_j \,.$$

A tenzorszorzás műveletéről belátható, hogy kommutatív és asszociatív, továbbá hogy az egységábrázolás az egységeleme. Igaz az is, hogy $D_1 \otimes (D_2 \oplus D_3) = (D_1 \otimes D_2) \oplus (D_1 \otimes D_3)$. Ezért teljesen reducibilis ábrázolások tenzorszorzatának meghatározásához elegendő ismernünk irreducibilisekre való felbontásukat, illetve az irreducibilis ábrázolások tenzorszorzatait. Egy G csoport ábrázolásainak halmazát a direkt összeg és a tenzorszorzás műveleteivel szokás a csoport *fúziós gyűrűjének* nevezni, bár a Burnside-gyűrűhöz hasonlóan ez is csak egy félgyűrű a szó szoros értelmében. Ha $D_1, \ldots, D_r$ jelöli egy G csoport összes irreducibilis ábrázolását, akkor a tenzorszorzat

$$D_i \otimes D_j = \bigoplus_{k=1}^{r} N_{ij}^k D_k$$

dekompozícióját szokás *Clebsch–Gordan-sornak* nevezni, illetve az N_{ij}^k multiplicitásokat *fúziós együtthatóknak*.

A permutációs hatások elméletéhez hasonlóan az ábrázoláselméletben is fontos szerepe van a részcsoportra való megszorítás műveletének. Ha ugyanis adva van egy $D : G \to GL(V)$ ábrázolás és egy $H < G$ részcsoport, akkor az ábrázolás $D_H : H \to GL(V)$ megszorítása a H részcsoportra megint csak homomorfizmus, vagyis a H részcsoport egy ábrázolása lesz. A megszorítás a szokásos jó tulajdonságokkal bír, például direkt összeg, illetve tenzorszorzat megszorítása az egyes tényezők megszorításainak direkt összege, illetve tenzorszorzata. Ezért elegendő az irreducibilis ábrázolások megszorításait ismerni, az úgynevezett *elágazási szabályokat*:

$$(D_i)_H = \bigoplus_{k=1}^{s} B_i^k E_k \,,$$

ahol $D_1, \ldots, D_r$ jelöli a G, míg $E_1, \ldots, E_s$ a H irreducibilis ábrázolásait, és a B_i^k multiplicitások nemnegatív egész számok. Az elágazási szabályok segítségével már tetszőleges ábrázolás megszorítása meghatározható. Az elágazási szabályok ismerete fontos a fizikai alkalmazásokban a szimmetriasértés jelenségének tárgyalásakor.

4.3 Véges csoportok ábrázolásai, karaktertábla

A véges csoportok ábrázoláselmélete igen jól illusztrálja az általános jelenségeket, emellett viszonylag egyszerű és jól áttekinthető. Ennek egyik oka a már korábban ismertetett Maschke-tételben rejlik, miszerint egy véges csoport minden komplex ábrázolása teljesen reducibilis, ezért előáll irreducibilisek direkt összegeként. A másik ok az, hogy véges csoportok esetén rendelkezésre áll az ábrázolások ekvivalenciaosztályainak egy egyszerű numerikus jellemzése az ábrázolási karakterek segítségével.

Általában is megfogalmazható az a probléma, hogy létezik-e valamilyen egyszerű numerikus kritérium két ábrázolás ekvivalenciájának eldöntésére. Erre vonatkozik az alábbi tétel.

Invariánselmélet alaptétele : Legyen G egy végesen generált csoport, és n pozitív egész szám. Ekkor létezik G elemeinek egy olyan G_n véges részhalmaza, hogy

a csoport két n dimenziós ábrázolása akkor és csak akkor ekvivalens, ha a G_n-beli elemekhez rendelt ábrázolási operátorok spurjai megegyeznek a két ábrázolásban.

Fontos megjegyezni, hogy a G_n halmaz nincs egyértelműen meghatározva, adott G és n mellett sok különféle halmaz megfelel a célnak. A tétel elvileg megoldja az ekvivalencia kérdését: először meg kell vizsgálni, hogy a két vizsgált ábrázolás dimenziója megegyezik-e, és ha igen, akkor a G_n halmaz ismeretében dönthetünk az ekvivalenciáról. A probléma abban rejlik, hogy nem áll rendelkezésre általános algoritmus, amely adott G és n esetén meghatározna egy megfelelő G_n halmazt. Véges csoportok esetén ez a probléma úgy kerülhető meg, hogy tekintjük az összes csoportelem ábrázolási operátorának spurját, így tetszőleges n mellett megállapíthatjuk két ábrázolás ekvivalenciáját. Ez vezet az *ábrázolási karakter* Frobenius-tól származó fogalmához.

Definíció : Egy G véges csoport $D : G \to GL(V)$ ábrázolásának $\chi_D : G \to \mathbb{C}$ karaktere

$$\chi_D(g) = Tr\left(D(g)\right) . \tag{4.1}$$

Vegyük észre, hogy $\chi_D(1) = \dim V$ éppen az ábrázolás dimenziója, és hogy az előbbiek szerint két ábrázolás akkor és csak akkor ekvivalens, ha karaktereik megegyeznek. Egy másik fontos tulajdonsága a karakternek, hogy

$$\chi_D\left(g^h\right) = \chi_D(g), \quad \forall h \in G ,$$

más szóval a karakter *osztályfüggvény*, vagyis konstans G konjugált osztályain. Ez egyszerű következménye a spur ciklicitásának, vagyis hogy $Tr(AB) = Tr(BA)$, illetve annak, hogy az ábrázolás homomorfizmus.

Mivel egy mátrix spurja egyenlő sajátértékeinek összegével – feltéve, hogy a mátrix diagonalizálható, ami az ábrázolási operátorokra mindig igaz –, és mivel véges rendű mátrix sajátértékei komplex egységgyökök, ezért könnyen adódnak a karakterek alábbi tulajdonságai :

$$\chi_D\left(g^{-1}\right) = \overline{\chi_D(g)} , \tag{4.2}$$

$$|\chi_D(g)| \leq \chi_D(1) . \tag{4.3}$$

A definíció alapján egyszerű meghatározni a duálisok, direkt összegek és tenzorszorzatok karakterét, és az alábbi eredmény adódik:

$$\chi_{D^*}(g) = \overline{\chi_D(g)}, \tag{4.4}$$

$$\chi_{D_1 \oplus D_2}(g) = \chi_{D_1}(g) + \chi_{D_2}(g), \tag{4.5}$$

$$\chi_{D_1 \otimes D_2}(g) = \chi_{D_1}(g)\chi_{D_2}(g). \tag{4.6}$$

A fentiekből láthatjuk, hogy az ábrázolási karakter hasonló szerepet tölt be az ábrázoláselméletben, mint amilyet a fixpontfüggvény játszott a permutációs hatások elméletében. Fontos különbség a két eset között, hogy a fixpontfüggvény a részcsoportok összességén van értelmezve, és csak nemnegatív egész értékeket vehet fel, míg a karakter az egyes elemekhez rendel – általában komplex – értékeket.

Tekintsük a G véges csoport inekvivalens irreducibilis ábrázolásainak $D_1, \ldots, D_r$ összességét, és jelölje a továbbiakban χ_i az i-edik D_i irreducibilis ábrázolás karakterét, ezeket nevezzük *irreducibilis karaktereknek*. Belátható, hogy az irreducibilis karakterek száma megegyezik a csoport konjugált osztályainak r számával. Sőt, az irreducibilis karakterek bázist alkotnak az osztályfüggvények terében, vagyis azon $f : G \to \mathbb{C}$ komplex értékű függvények terében, amelyek minden $g, h \in G$-re teljesítik az $f(g^h) = f(g)$ egyenlőséget. A 4.5 összefüggés alapján az is belátható, hogy az ábrázolási karakterek pont azok az osztályfüggvények, amelyek előállíthatók az irreducibilis karakterek nemnegatív egész együtthatós lineárkombinációjaként.

Szokás egy adott véges G csoport irreducibilis karaktereit egybegyűjteni a G ún. *karaktertáblájába*. Ez egy $r \times r$-es táblázat, amelynek sorait a G irreducibilis karakterei indexelik, míg oszlopai a G konjugált osztályainak felelnek meg. Az i-edik sor és a j-edik oszlop találkozásában az χ_i karakternek a j-edik konjugált osztály elemein felvett értéke szerepel – emlékezzünk vissza, hogy a karakterek konstansok a konjugált osztályokon. Szokás az első sorba a triviális ábrázolás karakterét írni – ez a konstans 1 értéket veszi fel minden elemen –, míg az első oszlopba az egységelemet tartalmazó triviális osztályt – így itt az egyes irreducibilis ábrázolások dimenziói szerepelnek. Ez utóbbi mennyiségekre vonatkozik az alábbi híres állítás.

Burnside-tétel : Az irreducibilis ábrázolások dimenzióinak négyzetösszege megegyezik a csoport rendjével, azaz

$$\sum_{i=1}^{r} \chi_i(1)^2 = |G| \,. \tag{4.7}$$

A Burnside-tétel egy sokkal általánosabb állítás speciális esete, amint azt mindjárt látni fogjuk. Az irreducibilis karakterek egyik legfontosabb tulajdonságát mondja ki az alábbi állítás.

Ortogonalitási relációk :

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g)\overline{\chi_j(g)} = \delta_{i,j} \,. \tag{4.8}$$

Az ortogonalitási relációkból már következnek az ún. második ortogonalitási relációk, amelyek szerint $\sum_{i=1}^{r} \chi_i(g)\overline{\chi_i(h)}$ egyenlő $|C_G(g)|$-vel, amennyiben $g, h \in G$ egymás konjugáltjai, egyébként az összeg 0. A $g = h = 1$ speciális esetben visszakapjuk a Burnside-tétel állítását. Megjegyezzük még, hogy létezik az ortogonalitási relációknak egy általánosítása, mely szerint

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g)\chi_j(g^{-1}h) = \delta_{i,j} \frac{\chi_j(h)}{\chi_j(1)} \,. \tag{4.9}$$

Az ortogonalitási relációk egy elegáns megfogalmazását kapjuk, amennyiben bevezetjük az osztályfüggvények terén az alábbi *skalárszorzatot*:

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g)\overline{f_2(g)} \,. \tag{4.10}$$

Könnyen belátható, hogy így egy pozitív definit skalárszorzatot kapunk az osztályfüggvények terén, és az ortogonalitási relációk azt fejezik ki, hogy az irreducibilis karakterek ennek a térnek egy ortonormált bázisát alkotják. Ennek alapján most már könnyen megoldható az elmélet alapproblémája, vagyis egy adott ábrázolás irreducibilisekre való dekompozíciója: ha ugyanis $D = \oplus_{i=1}^{r} n_i D_i$, akkor $\chi_D(g) = \sum_{i=1}^{r} n_i \chi_i(g)$, és az ortogonalitási relációkat felhasználva kifejezhetjük az

n_i multiplicitásokat

$$n_i = \langle \chi_D, \chi_i \rangle$$

alakban.

Látjuk tehát, hogy a karaktertábla ismeretében megoldott az ábrázolások osztályozása, illetve az irreducibilis dekompozíció problémája. Ennek alapján meghatározhatjuk például a fúziós gyűrű struktúraállandóit is, hiszen 4.6 szerint a $D_i \otimes D_j$ ábrázolás karaktere $\chi_i \chi_j$, ezért

$$N_{ij}^k = \langle \chi_i \chi_j, \chi_k \rangle \tag{4.11}$$

adja meg a fúziós együtthatókat.

A karaktertábla sok fontos információt tartalmaz a vizsgált csoportról. Segítségével meghatározható például a kommutátor-részcsoport: belátható ugyanis, hogy $g \in G'$ akkor és csak akkor, ha $\chi_i(g) = 1$ minden olyan i-re, amelyre $\chi_i(1) = 1$, vagyis D_i dimenziója 1. Az egydimenziós ábrázolások karaktereit *lineáris karaktereknek* nevezzük. Mivel két egydimenziós ábrázolás tenzorszorzata maga is egydimenziós, ezért ezek egy Abel-csoportot alkotnak a tenzorszorzás műveletére nézve, amely izomorf a kommutátor-részcsoport szerinti faktorcsoporttal. Sőt, egydimenziós ábrázolásnak egy irreducibilissel vett tenzorszorzata maga is irreducibilis, ezért az egydimenziós ábrázolások fent bevezetett csoportjának egy permutációs hatását kapjuk az összes irreducibilis ábrázolások halmazán. Nem csak a kommutátor-részcsoport határozható meg a karaktertábla alapján, hanem a normális részcsoportok hálója is. Vezessük be ugyanis a

$$K_i = \{g \in G \mid \chi_i(g) = \chi_i(1)\}$$

halmazokat. Mivel az ábrázolási operátorok sajátértékei egységgyökök, ezért $K_i = \ker D_i$ egy normális részcsoport – a D_i ábrázolás magja –, és belátható, hogy minden normális részcsoport előáll a K_i részcsoportok valamely halmazának metszeteként.

Lássunk egy egyszerű példát karaktertáblára. Az S_3 3-adfokú szimmetrikus

csoportnak 3 konjugált osztálya van:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \{1\}, \\ \mathcal{C}_2 &= \{(1,2),(1,3),(2,3)\}, \\ \mathcal{C}_3 &= \{(1,2,3),(1,3,2)\}. \end{aligned}$$

Mivel 3 konjugált osztály van, ezért 3 irreducibilis karaktere van a csoportnak, amelyek dimenziói könnyen meghatározhatók a Burnside-tétel alapján. A karaktertábla:

S_3	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_3$
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

Vagyis két egydimenziós és egy kétdimenziós irreducibilis ábrázolása van S_3-nak. A kommutátor-részcsoport $S_3' = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_3 = \{1,(1,2,3),(1,3,2)\} = K_2$, és *mivel* $K_1 = S_3$ *és* $K_3 = \{1\}$, *ezért* K_2 *az egyetlen nemtriviális normális részcsoport*. A fúziós együtthatókat a 4.11 képlet alapján kiszámolva az alábbi táblázatot kapjuk az irreducibilisek tenzorszorzataira:

$\otimes$	D_1	D_2	D_3
D_1	D_1	D_2	D_3
D_2	D_2	D_1	D_3
D_3	D_3	D_3	$D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$

Vegyük még észre, hogy S_3 karaktertáblájában csak egész számok fordulnak elő. Ez általában nincs így, de belátható, hogy minden szimmetrikus csoport karaktertáblája *csak egész értékeket* tartalmaz. Egy másik érdekes jelenség, hogy minden irreducibilis ábrázolás dimenziója osztja az S_3 rendjét, ami tetszőleges csoportra is igaz.

A karaktereknek létezik még egy fontos alkalmazása, a *homogén komponensek* meghatározása. Egy $D : G \to GL(V)$ ábrázolás homogén komponense egy olyan $V_i < V$ invariáns altér, amelyen a D ábrázolás összes D_i-vel ekvivalens irreducibilis komponensének direkt összege ábrázolódik. Ezen alterek meghatározása fontos

például a Clebsch–Gordan-együtthatók számításánál. Minden egyes V_i homogén komponenshez tartozik egy $P_i : V \to V$ *projekciós operátor*, amelyre $P_i v = v$ akkor és csak akkor, ha $v \in V_i$. Ezen projektorok alapvető tulajdonsága, hogy $P_i P_j = \delta_{i,j} P_i$ és $\sum_{i=1}^{r} P_i = \mathbb{I}$. Mint belátható, a projekciós operátorok kifejezhetők az alábbi alakban:

$$P_i = \frac{\chi_i(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} D(g) \,. \tag{4.12}$$

Eme képlet alapján számolható projekciós operátorok $P_i V$ képterei adják a D ábrázolás homogén komponenseit.

Végezetül megemlítjük, hogy a $G \times H$ direkt szorzat irreduciblis karakterei $\chi_i \# \theta_j$ alakúak, ahol χ_i jelöli a G, míg θ_j a H csoport irreducibilis karaktereit, és

$$\chi_i \# \theta_j (g,h) = \chi_i(g) \theta_j(h)$$

a karakterek úgynevezett külső szorzata.

4.4 Projektív ábrázolások és kociklusok

Az ábrázolást úgy definiáltuk, mint egy $D : G \to GL(V)$ homomorfizmust, de sok alkalmazás szempontjából ez a fogalom nem elég általános. Például a kvantumelméletben az állapottér egy Hilbert-tér, és a szimmetriacsoport elemei ezen tér unitér operátorai, de mivel az állapotok nem a Hilbert-tér vektoraival, hanem annak egydimenziós altereivel vannak egy-egyértelmű kapcsolatban, ezért a szimmetriacsoport ábrázolási operátorai is csak egy skalárszorzó erejéig vannak meghatározva. Más szóval a szimmetriacsoportnak egy *projektív ábrázolása* van megadva, ami egy olyan $D : G \to GL(V)$ leképezés, amelyre

$$D(1) = \mathbb{I} \,, \tag{4.13}$$

$$D(g)D(h) = \alpha(g,h) D(gh) \,, \tag{4.14}$$

ahol $\alpha : G \times G \to \mathbb{C}$ egy komplex értékű függvény, a projektív ábrázolás *kociklusa*. A kociklus nem lehet egy tetszőleges kétváltozós függvény, ugyanis a csoportaxiómákat és a lineáris operátorok szorzásának műveletei szabályait kihasználva

azt kapjuk, hogy

$$\alpha(1,g) = \alpha(g,1) = 1 \tag{4.15}$$

és

$$\alpha(g_1,g_2)\alpha(g_1g_2,g_3) = \alpha(g_2,g_3)\alpha(g_1,g_2g_3)\,. \tag{4.16}$$

Ez utóbbi egyenlőség abból adódik, hogy

$$D(g_1)\left(D(g_2)D(g_3)\right) = D(g_1)\alpha(g_2,g_3)D(g_2g_3) = \alpha(g_2,g_3)\alpha(g_1,g_2g_3)D(g_1g_2g_3) =$$

$$= \left(D(g_1)D(g_2)\right)D(g_3) = \alpha(g_1,g_2)D(g_1g_2)D(g_3) = \alpha(g_1,g_2)\alpha(g_1g_2,g_3)D(g_1g_2g_3)\,.$$

Általában, egy olyan $\alpha : G \times G \to \mathbb{C}$ függvényt, amely kielégíti a 4.15 és 4.16 egyenleteket, a G csoport (2-)kociklusának nevezzük, és ezek halmazát $Z^2(G)$-vel jelöljük.

Ne feledkezzünk meg arról, hogy a projektív ábrázolás fogalmára úgy jutottunk, hogy az ábrázolási operátorok csak egy skalárszorzó erejéig voltak meghatározva (kivéve $D(1)$-et), ezért megszorozhatjuk őket egy $\beta : G \to \mathbb{C}^*$ függvénnyel:

$$D(g) \mapsto \beta(g)D(g)\,,$$

amelyre $\beta(1) = 1$. Egy ilyen transzformáció során a projektív ábrázolás kociklusa is megváltozik,

$$\alpha(g,h) \mapsto \widetilde{\alpha}(g,h) = \alpha(g,h)\frac{\beta(g)\beta(h)}{\beta(gh)}\,.$$

Az α és $\widetilde{\alpha}$ kociklusokról azt mondjuk, hogy *kohomológok*. Ez a reláció nyilván egy ekvivalencia. Az ekvivalenciaosztályok véges halmazát $H^2(G)$-vel jelöljük, és a G *második kohomológiacsoportjának*, illetve *Schur-multiplikátorának* nevezzük a projektív ábrázolások elmélete megteremtőjének tiszteletére. A csoportstruktúra onnan adódik, hogy két kociklus pontonkénti szorzata megint kociklus, vagyis $Z^2(G)$ egy Abel-csoport, és az ekvivalencia kompatibilis ezzel a művelettel. A Schur-multiplikátor egységeleméhez tartozó projektív ábrázolások a korábban tárgyalt közönséges ábrázolások.

Mint azt az elnevezések is sugalják, nemcsak 2-kociklusok léteznek, hanem

tetszőleges k természetes számra definiálhatók k-kociklusok, azaz olyan $\alpha : G^k \to \mathbb{C}$ függvények, amelyek egy, a 4.16-hez hasonló függvényegyenletet elégítenek ki, és ezek kohomológia osztályai alkotják a $H^k(G)$ kohomológiacsoportokat. Ezek vizsgálata a homológikus algebra körébe tartozik, itt csak annyit említünk meg, hogy az 1-kociklusok nem mások, mint a lineáris karakterek, így $H^1(G)$ éppen az egydimenziós ábrázolások csoportja a tenzorszorzás műveletével.

Adott α kociklushoz tartozó projektív ábrázolások esetén a közönséges ábrázolások elméletéhez hasonló módon definiálhatók a reducibilitás és irreducibilitás fogalmai, és megfelelő feltételek teljesülése esetén itt is minden ábrázolás teljesen reducibilis lesz, vagyis előállítható irreducibilisek direkt összegeként. Fontos eltérés a szokásos ábrázoláselmélettől, hogy két projektív ábrázolás direkt összegének csak akkor van értelme, ha kociklusaik megegyeznek. Egy α és egy β kociklusú ábrázolás tenzorszorzata értelmezhető, de ez már egy $\alpha\beta$ szorzatkociklussal jellemzett ábrázolás lesz, vagyis adott α kociklusú ábrázolások halmaza nem zárt a tenzorszorzásra.

Egy adott csoport projektív ábrázolásainak meghatározására szolgál az ún. *univerzális fedőcsoport*. Ez egy olyan $\widehat{G}$ centrális bővítése $H^2(G)$-nek a G által, amelynek irreducibilis ábrázolásai egy-egyértelmű kapcsolatban vannak a G irreducibilis projektív ábrázolásaival. Mint azt majd látni fogjuk a Lie-csoportok elméletében, az $SO(3)$ forgáscsoport univerzális fedőcsoportja az $SU(2)$ csoport. Ez azzal kapcsolatos, hogy $H^2\left(SO(3)\right) \cong \mathbb{Z}_2$, vagyis a Schur-multiplikátor kételemű. A Schur-multiplikátor egységeleméhez tartozó közönséges $SO(3)$ ábrázolásokat általában tenzorábrázolásoknak nevezik, míg a Schur-multiplikátor nemtriviális eleméhez tartozó projektív ábrázolások az ún. spinorábrázolások. A fenti gondolatmenet a magyarázata az $SU(2)$ ábrázolások kvantumelméleti jelentőségének.

4.5 Frobenius – Schur-indikátorok

Tekintsünk egy $D : G \to GL(V)$ ábrázolást. Ekkor a $V \otimes V$ téren értelmezett a $D \otimes D$ tenzorábrázolás. A

$$\begin{aligned} \sigma : \quad V \otimes V &\to V \otimes V \\ a \otimes b &\mapsto b \otimes a \end{aligned}$$

leképezés négyzete nyilván az egységoperátor, $\sigma^2 = \mathbb{I}$, ezért sajátértékei csak ± 1 lehetnek. A $+1$ sajátértékhez tartozó altér a S^2V szimmetrikus négyzete a V-nek, míg a -1 sajátértékhez tartozó altér a $\wedge^2 V$ antiszimmetrikus négyzet. Könnyű belátni, hogy a σ leképezés kommutál az összes ábrázolási operátorral, ezért a Schur-lemma alapján mind S^2V, mind $\wedge^2 V$ invariáns altér, amelyeken megvalósuló ábrázolásokat S^2D-vel és $\wedge^2 D$-vel jelöljük, és a D *szimmetrizált négyzeteinek* nevezzük. Amennyiben az $\{e_1, \ldots, e_r\}$ vektorok egy bázisát alkotják a V lineáris térnek, akkor S^2V egy bázisa

$$e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i\,, \quad i \leq j\,,$$

míg $\wedge^2 V$ *egy bázisa*

$$e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i\,, \quad i < j\,.$$

A bázisok ismeretében könnyen meghatározható a szimmetrizált négyzetek karaktere:

$$\chi_{S^2 D}(g) = \frac{1}{2}\left(\chi_D^2(g) + \chi_D(g^2)\right)\,, \tag{4.17}$$

$$\chi_{\wedge^2 D}(g) = \frac{1}{2}\left(\chi_D^2(g) - \chi_D(g^2)\right)\,. \tag{4.18}$$

Különösen érdekesek az irreducibilis ábrázolások szimmetrizált négyzetei. Ez azzal kapcsolatos, hogy két irreducibilis ábrázolás tenzorszorzata akkor és csak akkor tartalmazza az egységábrázolást – éspedig pontosan egyszer–, ha egymás konjugáltjai. Vagyis irreducibilis D-re $D \otimes D$ csak akkor tartalmazza az egységábrázolást, ha $D \cong \overline{D}$. Amennyiben e feltétel nem teljesül, az ábrázolási karakter komplex értékű, és ezért nem létezhet olyan bázis, amelyben minden ábrázolási operátornak valósak a mátrixelemei, az ilyen ábrázolásokat *komplexnek* nevezzük. Amennyiben $D \cong \overline{D}$, még mindig két eset lehetséges: vagy S^2D tartalmazza az egységábrázolást, ekkor van olyan bázis, amelyben a mátrixelemek mind valósak, ezért az ilyen ábrázolásokat *valósnak* nevezzük; vagy $\wedge^2 D$ tartalmazza az egységábrázolást, amikor is megint csak lesznek szükségszerűen komplex mátrixelemek – bár a karakter csak valós értékeket vesz fel –, ezen ábrázolásokat *pszeudovalósnak* vagy *kvaternionikusnak* nevezzük. E három eset megkülönböztetésére

szolgál az ábrázolás ν_D *Frobenius–Schur-indikátora* :

$$\nu_D = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_D\left(g^2\right) ,$$

ami irreducibilis ábrázolás esetén három értékű, $+1$, ha az ábrázolás valós, -1, ha az ábrázolás pszeudo-valós, és 0, ha az ábrázolás komplex. Megjegyezzük, hogy pszeudo-valós ábrázolás dimenziója mindig páros.

A Frobenius–Schur-indikátorok egy érdekes alkalmazása, hogy segítségükkel azonos karaktertáblával rendelkező csoportok között is különbség tehető ábrázoláselméleti módszerekkel. Fontos példa erre a D_8 diédercsoport és a Q_8 *kvaterniócsoport* esete. Ez utóbbi a σ_k Pauli-mátrixok (lásd 5.11) $\pm\imath$-szereseiből, és a $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ egységmátrix ± 1-szereseiből álló 8 elemű nemábeli csoport, melynek konjugált osztályai:

$$\{\sigma_0\}, \{-\sigma_0\}, \{\pm\imath\sigma_1\}, \{\pm\imath\sigma_2\}, \{\pm\imath\sigma_3\} .$$

A két csoport karaktertáblája rendre

D_8	$\{1\}$	$\{C^2\}$	$\{C, C^3\}$	$\{\sigma_x, \sigma_y\}$	$\{\sigma_+, \sigma_-\}$
$\underline{1}$	1	1	1	1	1
$\underline{1_A}$	1	1	1	-1	-1
$\underline{1_B}$	1	1	-1	1	-1
$\underline{1_C}$	1	1	-1	-1	1
$\underline{2}$	2	-2	0	0	0

és

Q_8	$\{\sigma_0\}$	$\{-\sigma_0\}$	$\{\pm\imath\sigma_1\}$	$\{\pm\imath\sigma_2\}$	$\{\pm\imath\sigma_3\}$
$\underline{1}$	1	1	1	1	1
$\underline{1_1}$	1	1	1	-1	-1
$\underline{1_2}$	1	1	-1	1	-1
$\underline{1_3}$	1	1	-1	-1	1
$\underline{2}$	2	-2	0	0	0

Vagyis a karaktertábla, illetve a fúziós szabályok alapján nem lehet a két cso-

portot megkülönböztetni. Viszont egyszerűen belátható, hogy a kétdimenziós irreducibilis a D_8-ban valós, míg a Q_8-ban pszeudo-valós ábrázolás.

Többszörös tenzorszorzatok esetén a helyzet bonyolultabb, ekkor a megfelelő fokú szimmetrikus csoport irreduciblis ábrázolásai szerint végezhetők el a szimmetrizálások, ez vezet el az ún. Schur-funktorok elméletéhez. Ezek között különösen fontos szerepet játszik a teljes szimmetrizálás, amely a szimmetrikus csoport egységábrázolásának, illetve az antiszimmetrizálás, amely a nemtriviális egydimenziós ábrázolásnak (a permutációk paritásának) felel meg.

4.6 Indukált ábrázolások és a reciprocitási tétel

Mint azt már korábban láttuk, egy $D : G \to GL(V)$ ábrázolást megszoríthatunk egy $H < G$ részcsoportra, aminek eredményeként egy $res^G_H D : H \to GL(V)$ ábrázolást kapunk. Létezik egy fordított irányú művelet, amikor a $H < G$ részcsoport egy $D : H \to GL(V)$ ábrázolásából nyerjük a G egy $ind^G_H D$ ábrázolását, a D *indukált ábrázolását*. Az eljárás a következő: kiválasztunk minden egyes G/H-beli baloldali mellékosztályból egy g_i reprezentáns elemet ($i = 1, \ldots, [G : H]$). Ekkor tetszőleges $g \in G$-re és i-re létezik olyan $h \in H$ és k egész, hogy teljesül

$$g g_i = g_k h$$

(természetesen mind k, mind h függ i-től és g-től). Legyen a V lineáris tér egy bázisa $\{e_1, \ldots, e_r\}$, és tekintsünk egy $[G : H] \dim V$ dimenziós V^G lineáris teret, melynek egy bázisát (g_i, e_j) alakú párok alkotják. A $g \in G$ elem indukált ábrázolási operátorának hatása ezen a bázison

$$(g_i, e_j) \mapsto (g_k, D(h)e_j) \ .$$

Könnyen belátható, hogy a fenti definíció alapján egy

$$ind^G_H D : G \to GL\left(V^G\right)$$

ábrázolást kapunk. Ennek dimenziója nyilván $[G : H]$ szorosa D dimenziójának.

Az indukált ábrázolás speciális esete a permutációs ábrázolás. Legyen adva egy

tranzitív ϕ permutációs hatás, és legyen ebben egy kiválasztott pont stabilizátora H. Ekkor a D_ϕ permutációs ábrázolás ekvivalens az $ind_H^G \underline{1}$ indukált ábrázolással, ahol $\underline{1}$-gyel jelöltük a H részcsoport egységábrázolását. Amennyiben a vizsgált hatás nem tranzitív, akkor a megfelelő permutációs ábrázolás több indukált komponens direkt összege lesz.

Belátható, hogy az indukció tranzitív művelet, azaz ha $K < H < G$ és $D : K \to GL(V)$ egy ábrázolása a K részcsoportnak, akkor

$$ind_H^G \left(ind_K^H D\right) = ind_K^G D\,.$$

Másrészt az indukció felcserél a direkt összegek képzésével, azaz

$$ind_H^G \left(D_1 \oplus D_2\right) = ind_H^G D_1 \oplus ind_H^G D_2\,.$$

A D ábrázolás χ_D karakterének ismeretében kiszámítható az indukált ábrázolás χ_D^G karaktere:

$$\chi_D^G(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{h \in G \\ g^h \in H}} \chi_D\left(g^h\right)\,. \tag{4.19}$$

E kifejezés alapján már belátható az indukált ábrázolások alábbi alapvető tulajdonsága.

Frobenius reciprocitási tétele : Legyen G egy véges csoport, $H < G$ egy részcsoport, és legyen χ a G, míg ψ a H egy ábrázolási karaktere. Ekkor

$$\left\langle \psi^G, \chi \right\rangle_G = \left\langle \psi, \chi_H \right\rangle_H \tag{4.20}$$

teljesül.

A reciprocitási tétel jelentőségét az adja, hogy segítségével a H-ra vonatkozó elágazási szabályok ismeretében meghatározhatók a H-ról való indukciók eredményei, hiszen ez utóbbihoz nyilván elegendő a H irreducibilis ábrázolásai indukáltjainak ismerete.

Különösen fontos az a speciális eset, amikor a H részcsoport normális, ez az ún. Clifford-elmélet tárgya. Ekkor ugyanis a G csoport irreducibilis ábrázolásai előállíthatók a H részcsoport irreducibilisai és a G/H faktorcsoport irreducibilis

projektív ábrázolásainak ismeretében az indukció segítségével. Ezt a módszert szokás alkalmazni például a Poincaré-csoport, illetve a kristályok szimmetriacsoportjai ábrázoláselméletének tárgyalásakor, mindkét esetben a transzlációk ábeli normális részcsoportját választva H-nak – ez az úgynevezett *kiscsoportok módszere*.

4.7 Invariánselmélet

A csoportelmélet alkalmazásai szempontjából kiemelkedő jelentőségű az invariánselmélet. Például egy fizikai rendszer hatásfunkcionálja invariáns a rendszer szimmetriacsoportjára, ami nemcsak megmaradó mennyiségek létezését vonja maga után a Noether-tétel révén, hanem komoly megszorítást jelent a hatás konkrét alakjára nézve. Sok más esetben is alkalmaznak invariánselméleti megfontolásokat annak érdekében, hogy egy sok paramétertől bonyolult módon függő mennyiséget egyszerűen leírjanak néhány invariáns mennyiség segítségével, kihasználva a rendszer szimmetriáit. Ez a múlt században rendkívül aktívan kutatott terület fontos szerepet játszott a modern algebrai fogalmak kialakulásában. Mélyreható tanulmányozása komoly kommutatív algebrai ismereteket feltételez, ezért csak a legelemibb vonatkozásait tárgyalhatjuk.

Tekintsünk egy $A \in GL(n)$ mátrixot és az $R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ polinomgyűrűt. Egy $f \in R$ polinomból származtathatunk egy új $f^A \in R$ polinomot az A mátrix segítségével :

$$f^A(x_1, \ldots, x_n) = f\left(\sum_{i=1}^{n} A_{1i}x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} A_{ni}x_i\right), \tag{4.21}$$

vagyis az $x_1, \ldots, x_n$ határozatlanokon végrehajtva a

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

lineáris transzformációt. Vegyük észre, hogy a változók transzformációjának linearitása miatt, ha f egy d-edfokú homogén polinom, akkor f^A szintén d-edfokú

homogén. Az f akkor invariáns az A mátrixra nézve, ha azonosan teljesül

$$f^A(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) \,. \tag{4.22}$$

Legyen most adva egy $D : G \to GL(V)$ ábrázolás az n dimenziós V lineáris téren. Kiválasztva egy bázist, minden ábrázolási operátorhoz hozzárendelhető egy $GL(n)$-beli mátrix, és egy f polinomot akkor nevezünk *invariánsnak* a G-re nézve, ha invariáns minden ábrázolási mátrixra. A G-re invariáns polinomok halmazát jelöljük R^G-vel. Ez természetesen nem csak a G csoporttól függ, hanem a D ábrázolástól is, bár ezt expliciten nem jelöljük, viszont ekvivalens ábrázolásokra megegyezik.

A definícióból azonnal adódik, hogy invariánsok lineár kombinációja, illetve szorzata megint invariáns, vagyis R^G egy gyűrű. Az is látszik, hogy tetszőleges invariáns előáll homogén invariánsok összegeként, és hogy elegendő a csoport generátorai ábrázolási mátrixainak az invariánsait meghatározni. Az invariánselmélet alapfeladata az R^G *invariánsgyűrű* meghatározása.

Klasszikus példa a szimmetrikus polinomok esete. Tekintsük ugyanis az S_n szimmetrikus csoport természetes permutációs hatásához tartozó permutációs ábrázolást, illetve ennek az ábrázolásnak a R^{S_n} invariánsgyűrűjét, ennek elemeit nevezzük *szimmetrikus polinomoknak*. Ezek szerint egy $f \in R$ polinom akkor szimmetrikus, ha invariáns argumentumai bármely permutációjára nézve, vagyis

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_2, x_1, \ldots, x_n) = \ldots = f(x_2, \ldots, x_1) \,.$$

Nevezetes példák szimmetrikus polinomokra a *hatványösszegek*

$$p_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \,, \qquad 1 \le k \le n \,,$$

és az úgynevezett *elemi szimmetrikus polinomok*

$$s_k = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} \,, \qquad 1 \le k \le n \,.$$

A *szimmetrikus polinomok alaptétele* kimondja, hogy tetszőleges $f \in R^{S_n}$ szimmetrikus polinom egyértelműen előáll akár a p_k hatványösszegek, akár az s_k elemi

szimmetrikus polinomok egy n változós polinomjaként, azaz léteznek $P_f, S_f \in R$ polinomok, amelyekre

$$f(x_1, \ldots, x_n) = P_f(p_1, \ldots, p_n) = S_f(s_1, \ldots, s_n),$$

és P_f, S_f egyértelmű. Ez természetesen azt is jelenti, hogy mind a p_k-k az s_j-kel, mind az s_k-k a p_j-kel kifejezhetők az úgynevezett *Newton-formulák* segítségével.

A fenti példának két tanulsága van: egyfelől, bár nyilván végtelen sok szimmetrikus polinom van, létezik véges sok közöttük – akár a p_k-k, akár az s_k-k –, amelyek segítségével már az összes többi előállítható, más szóval létezik véges sok *fundamentális invariáns*; másfelől a fundamentális invariánsok segítségével való előállítás egyértelmű, azaz a fundamentális invariánsok *algebrailag függetlenek*. A fő kérdés az, hogy a fenti két tulajdonság igaz marad-e általában.

Kiderül, hogy bár általában végtelen sok fundamentális invariáns szükséges, de a gyakorlatban előforduló csoportok esetén – például véges csoportok, félegyszerű Lie-csoportok stb. – létezik fundamentális invariánsoknak egy *véges* halmaza. *Viszont ritka példáktól eltekintve, mint amilyen a fentebb tárgyalt S_n esete, a fundamentális invariánsok nem* lesznek algebrailag függetlenek. Az invariánselmélet feladata fundamentális invariánsok egy véges – lehetőleg minimális – rendszerének meghatározása, és az ezek között fennálló algebrai relációk leírása.

A továbbiakban csak véges csoportokkal fogunk foglalkozni, mivel ez az invariánselmélet legjobban feltárt területe. Ebben az esetben az invariánsok megkeresése nagyban egyszerűsödik, mivel rendelkezésre állnak a megfelelő projekciós operátorok. Legyen ugyanis $D : G \to GL(n)$ a vizsgált mátrixábrázolás, és legyen R_k az R gyűrű homogén k-adfokú polinomjainak halmaza, ami nyilvánvalóan egy lineáris altere R-nek, sőt, $R = \oplus_k R_k$. A 4.21 képlet alapján egy ábrázolását kapjuk G-nek az R_k lineáris téren, amelyről belátható, hogy ekvivalens a $S^k D$ szimmetrikus hatvánnyal. A k-adfokú invariánsok tere így nem más, mint az R_k azon homogén altere, amelyen az egységábrázolás valósul meg. Erre pedig az

$$\mathcal{R}^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} S^k D(g)$$

projekciós operátor, az úgynevezett *Reynolds-operátor* vetít, amelynek hatása egy

$f \in R$ polinomra

$$\mathcal{R}^G f(x_1 \ldots, x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f^{D(g)}(x_1, \ldots, x_n) \,. \tag{4.23}$$

Mivel az $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ alakú monomok az R-nek mint lineáris térnek egy bázisát alkotják – az R_k egy bázisát azok alkotják, amelyekre $\sum_i \alpha_i = k$ –, ezért az R^G-t kifeszítik az $\mathcal{R}^G(x^\alpha)$ alakú kifejezések.

A fenti eljárás alapján ugyan megkaphatjuk az R^G invariánsgyűrű egy bázisát, de mivel ennek végtelen sok eleme van, gyakorlati szempontból nincs jelentősége. A fundamentális invariánsok meghatározásában a Reynolds-operátor jelentőségét az alábbi tétel világítja meg.

Noether tétele : Az R^G invariánsgyűrűt generálja az $\{\mathcal{R}^G(x^\alpha) \mid \sum_i \alpha_i \leq |G|\}$ polinomok halmaza, amely tartalmazza a fundamentális invariánsokat.

A fenti tétel alapján már meg tudjuk határozni invariánsok egy olyan véges halmazát, amely tartalmazza a fundamentális invariánsokat. Hogy ez utóbbiakat ki tudjuk válogatni a halmaz elemei közül, szükségünk van a Hilbert–Poincaré-sor fogalmára.

Definíció : Jelölje H_k a homogén k-adfokú invariánsok terének dimenzióját. Ekkor a G csoport (pontosabban a D ábrázolás) *Hilbert--Poincaré-sora* az alábbi formális hatványsor:

$$H_G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} H_k z^k \,. \tag{4.24}$$

Belátható, hogy véges G esetén $H_G(z)$ egy racionális törtfüggvény $z = 0$ körüli Taylor-sora. Kiszámítása az alábbi tétel alapján lehetséges.

Molien tétele : Véges G csoportra

$$H_G(z) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(\mathbb{I} - zD(g))} \,. \tag{4.25}$$

A *gyakorlatban a fenti eredményeken alapuló hatékony eljárások állnak rendelkezésre*, amelyek segítségével nemcsak a fundamentális invariánsok, de a közöttük fennálló algebrai összefüggések is meghatározhatók. Ez utóbbi kérdéssel kapcsolatban csak Hilbert híres tételét említjük meg. Legyen a G fundamentális invariánsainak halmaza $\{I_1, \ldots, I_r\}$, és tekintsük az ezek közötti algebrai össze-

függéseket, másnéven *syzygyket*, vagyis azon r-változós S polinomok összeségét, amelyekre

$$S(I_1, \ldots, I_r) = 0 .$$

Belátható, hogy a syzygyk maguk is egy végesen generált gyűrűt alkotnak, azaz létezik véges sok $\{S_1, \ldots, S_s\}$ fundamentális syzygy, amelyek polinomjaként az összes többi syzygy előállítható. De a fundamentális syzygyk maguk sem algebrailag függetlenek, azaz általában léteznek másodrendű syzygyk közöttük és így tovább. *Hilbert tétele* azt mondja ki, hogy az egyre magasabb rendű syzygyk képzésének folyamata maximum n lépés után véget ér, ahol n az ábrázolás dimenziója, azaz az n-edrendű syzygyk már biztosan algebrailag függetlenek.

Lássunk néhány példát invariánsgyűrűk szerkezetére. Elsőként tekintsük a négyzet D_8 szimmetriacsoportjának természetes kétdimenziós ábrázolását a 39-ik oldalról. Ebben az esetben a Hilbert–Poincaré-sor

$$H(z) = \frac{1}{(1-z^2)(1-z^4)} ,$$

és ebből leolvasható, hogy két algebrailag független fundamentális invariáns van, méghozzá

$$\begin{aligned} I_1 &= x_1^2 + x_2^2 , \\ I_2 &= x_1^2 x_2^2 , \end{aligned}$$

vagyis tetszőleges R^{D_8} invariáns egyértelműen kifejezhető $F(I_1, I_2)$ alakban. Vegyük észre hogy I_1 nem más, mint az euklideszi távolság, ami azzal kapcsolatos, hogy az ábrázolási mátrixok ortogonális mátrixok, illetve az ábrázolás valós. Általában, valós és pszeudo-valós ábrázolások esetén mindig létezik kvadratikus invariáns.

Második példánk a $\mathbb{Z}_6$ ciklikus csoport azon 3 dimenziós ábrázolása, ahol a csoport generátorának ábrázolási mátrixa

$$D(C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Molien tétele alapján kiszámolva a Hilbert.-Poincaré-sort, az alábbi eredményt kapjuk:

$$H(z) = \frac{1 + 2z^3 + z^4}{(1 - z^2)^2 (1 - z^4)} .$$

A fundamentális invariánsok egy rendszere:

$$\begin{aligned} I_1 &= x_1^2 + x_2^2 , \\ I_2 &= x_3^2 , \\ I_3 &= x_1 x_2 x_3 , \\ I_4 &= \left(x_1^2 - x_2^2\right) x_3 , \\ I_5 &= x_1^2 x_2^2 , \\ I_6 &= x_1 x_2 \left(x_1^2 - x_2^2\right) . \end{aligned}$$

Ezen fundamentális invariánsok közötti syzygyket az alábbi fundamentális syzygyk generálják:

$$\begin{aligned} S_1 &= I_3 I_4 - I_2 I_6 , \\ S_2 &= I_3 I_6 - I_4 I_5 , \\ S_3 &= I_3^2 - I_2 I_5 , \\ S_4 &= I_1^2 I_5 - 4 I_5^2 - I_6^2 , \\ S_5 &= I_1^2 I_3 - 4 I_3 I_5 - I_4 I_6 , \\ S_6 &= I_1^2 I_2 - I_4^2 - 4 I_2 I_5 , \end{aligned}$$

és ez utóbbiakról belátható, hogy algebrailag függetlenek, azaz nincsenek másodrendű syzygyk.

Fejezet 5

Lie-csoportok

A Lie-csoportok elmélete a fizikai alkalmazások szempontjából alapvető jelentőségű. Ennek egyik oka, hogy a fizikai téridő szimmetriái Lie-csoportot alkotnak, az ún. Poincaré-csoportot. A részecskefizika jelenleg elfogadott elmélete, az ún. Standard Modell szintén jelentős mértékben épít a Lie-csoportok elméletére. Természetesen egy ilyen jelentős és szerteágazó elmélet nem tárgyalható részleteiben a jelen kurzus keretei között, kénytelenek vagyunk néhány alapfogalom ismertetésére szűkíteni mondandónkat, remélve, hogy ez elégséges alapul szolgál majd a részletesebb speciálkollégiumok megértéséhez.

5.1 Alapfogalmak

A folytonos (kontinuum számosságú) csoportok közül különösen jelentősek azok, amelyek elemeit véges sok valós számmal lehet paraméterezni. A valós paramétereknek azt a legkisebb n számát, amely még elegendő a csoportelemek megkülönböztetéséhez, a csoport dimenziójának nevezzük, illetve n-paraméteres csoportról beszélünk. Tehát egy n-paraméteres csoport egy eleme $A(\alpha)$ alakú, ahol $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ a valós paraméterek összesége. Mivel két csoportelem szorzata megint csak így paraméterezhető, ezért létezik egy $\Phi(\alpha, \beta)$ függvény, amelyre

$$A(\alpha) A(\beta) = A(\Phi(\alpha, \beta)) . \tag{5.1}$$

Bantai_-_Csoportelmelet_szoveges-63.psd

Hasonló okból létezik egy $\Psi(\alpha)$ függvény is, amelyre

$$A(\alpha)^{-1} = A(\Psi(\alpha)) . \tag{5.2}$$

Természetesen a paraméterek megválasztásánál nagyfokú szabadságunk van, hiszen azok csak a csoportelemek megkülönböztetését szolgálják, így mindig elérhető, hogy az egységelemnek a $\vec{0} = (0, \ldots, 0)$ paramétersorozat feleljen meg. A csoportművelet asszociativitása miatt fenn kell állnia az alábbi függvényegyenletnek:

$$\Phi(\alpha, \Phi(\beta, \gamma)) = \Phi(\Phi(\alpha, \beta), \gamma) , \tag{5.3}$$

míg az egységelem és az inverzek definíciója szerint

$$\Phi\left(\vec{0}, \alpha\right) = \Phi\left(\alpha, \vec{0}\right) = \alpha ,$$

$$\Phi(\alpha, \Psi(\alpha)) = \Phi(\Psi(\alpha), \alpha) = \vec{0} .$$

Egy n-paraméteres folytonos csoportot akkor nevezünk *Lie-csoportnak*, ha mind a Φ, mind a Ψ leképezések konvergens Taylor-sorba fejthetők a $\vec{0}$ pont körül. Gleason–Montgomery–Zippin híres tétele kimondja, hogy a definícióban elég a kétszeres differenciálhatóságot kikötni, az már maga után vonja a fenti erősebb tulajdonságot.

Mielőtt példákon illusztrálnánk a fenti definíciót, meg kell említeni néhány topológiai fogalmat, amelyek jelentős szerepet játszanak az elméletben. Egy Lie-csoporton természetes módon értelmezhető egy topológia, amelynél egy adott csoportelem környezete azokból az elemekből áll, amelyek paraméterei elég közel vannak az adott elem paramétereihez. Annak megfelelően beszélünk kompakt vagy nemkompakt csoportról, hogy a megfelelő topológikus tér kompakt-e vagy sem, azaz minden nyílt lefedéséből kiválasztható-e véges lefedés. A G Lie-csoportban az egységelem komponensének nevezzük azt a G_0 halmazt, amely azon G-beli elemekből áll, amelyek az egységelemmel folytonos görbével összeköthetők. A G_0 mindig részcsoport, és cosetjei alkotják a G összefüggő komponenseit. Ez azt is jelenti, hogy G akkor és csak akkor összefüggő, ha $G = G_0$. Végül egy G összefüggő Lie-csoportot akkor nevezünk egyszeresen összefüggőnek, ha bármely G-beli zárt

görbe folytonosan egy pontra zsugorítható.

Példák :

1. A valós számok $\mathbb{R}$ additív csoportja egydimenziós Lie-csoport, amelynél $A(\alpha) = \alpha$ választható. Nyilván $\Phi(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$ és $\Psi(\alpha) = -\alpha$. Ez egy nemkompakt ábeli egyszeresen összefüggő Lie-csoport.

2. Az egységnyi abszolút értékű komplex számok $U(1)$ halmaza a szokásos szorzással egydimenziós kompakt ábeli Lie-csoportot alkot, amely összefüggő, de nem egyszeresen összefüggő. Ez esetben $A(\alpha) = \exp(\imath\alpha)$ és $\Phi(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$. Az $U(1)$ jelölés arra utal, hogy ez a csoport nem más, mint az 1×1-es unitér mátrixok csoportja.

3. A háromdimenziós tér forgásainak csoportja egy háromdimenziós kompakt nemábeli Lie-csoport, amelyről belátható hogy izomorf a 3×3-as egységnyi determinánsú ortogonális mátrixok $SO(3)$ csoportjával. Ez esetben egy célszerű paraméterezés az Euler-szögek segítségével adható meg. A csoport összefüggő, de nem egyszeresen összefüggő.

4. A téridő szimmetriacsoportja, az ún. Poincaré-csoport egy tízdimenziós nemkompakt nemábeli Lie-csoport, amelynek négy összefüggő komponense van.

5. Adott n pozitív egész szám esetén az $n \times n$-es valós elemű mátrixoknak az alábbi részhalmazai a mátrixszorzással mint csoportművelettel Lie-csoportot alkotnak :

   (a) $GL(n)$ az összes invertálható mátrix csoportja, az általános lineáris csoport. Dimenziója n^2.

   (b) $SL(n)$ az egységnyi determinánsú mátrixok csoportja, a speciális lineáris csoport. Dimenziója $n^2 - 1$.

   (c) $O(n)$ az ortogonális mátrixok csoportja, az ortogonális csoport. Dimenziója $\frac{n(n-1)}{2}$. A csoport kompakt, és két összefüggő komponense van, mivel ortogonális mátrix determinánsa ± 1.

(d) $SO(n)$ az egységnyi determinánsú ortogonális mátrixok csoportja, a speciális ortogonális csoport. Mivel ez az ortogonális csoportban az egységelem komponense, ezért kompakt, összefüggő és dimenziója megegyezik $O(n)$-ével. $SO(n)$ nem más, mint az n-dimenziós euklideszi tér forgáscsoportja. $n > 2$ esetén nemábeli, $n = 2$ esetén izomorf $U(1)$-gyel.

(e) Ha $n = 2k$ páros szám, akkor $Sp(n)$ jelöli azon $n \times n$-es valós elemű A mátrixok csoportját, amelyekre

$$AGA^T = G\,,$$

ahol A^T jelöli az A mátrix transzponáltját, míg

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ez a csoport a szimplektikus csoport. Jelentős például a klasszikus mechanika Hamilton-formalizmusának modern tárgyalásában.

6. Az $n \times n$-es unitér komplex elemű mátrixok szintén Lie-csoportot alkotnak, az $U(n)$ unitér csoportot, míg az egységnyi determinánsúak alkotják az $SU(n)$ speciális unitér csoportot. Dimenziójuk n^2, illetve $n^2 - 1$. Ezen csoportok alapvető szerepet játszanak az elemi részecskék kölcsönhatásainak leírásában, illetve a részecskék osztályozásában. Különösen fontos közülük az $SU(2)$ csoport, amely egy egyszeresen összefüggő háromdimenziós kompakt Lie-csoport, ez ugyanis a forgáscsoportnak az ún. univerzális fedőcsoportja, amint azt a későbbiekben látni fogjuk.

Hosszasan lehetne tovább sorolni a példákat, de a fizikai alkalmazások szempontjából az előbbiek a legjelentősebbek. Ezek után térjünk át a Lie-csoportok részletesebb vizsgálatára.

5.2 Egyparaméteres részcsoportok, Lie tételei

Az általános csoportelmélet tárgyalásánál láttuk a ciklikus csoportok jelentőségét a csoport szerkezetének leírásában. Ezek szerepét a Lie-csoportok elméletében az egyparaméteres részcsoportok veszik át. Míg G ciklikus részcsoportjai felfoghatók mint $\phi : \mathbb{Z} \to G$ homomorfizmusok képei az egész számok additív csoportjából G-be, addig az egyparaméteres részcsoportok $\phi : \mathbb{R} \to G$ homomorfizmusok képei a valós számok additív csoportjából G-be.

Definíció : Egy $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ differenciálható görbét (lokális) egyparaméteres részcsoportnak nevezünk, amennyiben a 0 egy környezetében

$$\Phi\left(s\left(\tau_1\right), s\left(\tau_2\right)\right) = s\left(\tau_1 + \tau_2\right) .$$

A Lie-csoport egy $A(\alpha)$ paraméterezését kanonikusnak nevezzük, amennyiben minden

$$\alpha(\tau) = (c_1\tau, \ldots, c_n\tau)$$

alakú lineáris $\alpha(\tau)$ leképezés, ahol a c_i-k valós konstansok, egyparaméteres részcsoportot határoz meg. Tetszőleges Lie-csoportnak létezik kanonikus paraméterezése.

Kanonikus paraméterezés esetén teljesül $\Phi(\alpha, -\alpha) = \vec{0}$, és kihasználva a Φ Taylor-sorba fejthetőségét

$$\Phi_i(\alpha, \beta) = \alpha_i + \beta_i + \frac{1}{2} c_i^{jk} \alpha_j \beta_k + \ldots \tag{5.4}$$

Az itt szereplő c_i^{jk} valós konstansokat nevezzük a Lie-csoport *struktúraállandóinak*. Ezek tulajdonságait írja le az alábbi tételek lánca.

Lie I. tétele : A Φ_i függvények kielégítik az alábbi parciális differenciálegyenletrendszert:

$$\frac{\partial}{\partial \beta_j} \Phi_i(\alpha, \beta)\, v_{jk}(\beta) = v_{ik}\left(\Phi_i(\alpha, \beta)\right) ,$$

ahol

$$v_{ij}(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \beta_j} \Phi(\alpha, \beta)_{|\beta = \vec{0}} .$$

Továbbá teljesül a $v_{ij}(\vec{0}) = \delta_{ij}$ mellékfeltétel. Az adott mellékfeltétel mellett a fenti rendszer megoldása egyértelmű.

A *bizonyítás viszonylag egyszerű, az asszociativitást kifejező függvényegyen-*

letet kell differenciálni β_j szerint az egységelem helyén.

Lie II. tétele: Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy a fenti differenciálegyenlet-rendszernek létezzék a mellékfeltételt kielégítő megoldása, az, hogy a $v_{ij}(\alpha)$ függvények kielégítsék az alábbi parciális differenciálegyenlet-rendszert:

$$\frac{\partial v_{ij}}{\partial \beta_l} v_{lk} - \frac{\partial v_{ik}}{\partial \beta_l} v_{lj} + v_{il} c_l^{jk} = 0\,,$$

ahol a c_i^{jk} konstansok a csoport struktúraállandói.

Lie III. tétele: Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a második tételben szereplő parciális differenciálegyenlet-rendszernek létezzék megoldása, az, hogy az ott szereplő c_i^{jk} mennyiségek eleget tegyenek az alábbi két feltételnek:

1. *antiszimmetria* : $c_i^{jk} = -c_i^{kj}$;
2. Jacobi-azonosság : $c_i^{jk} c_k^{lm} + c_i^{mk} c_k^{jl} + c_i^{lk} c_k^{mj} = 0$.

5.3 Lie-algebra, infinitezimális generátorok

A Lie-tételek üzenete az, hogy a csoportművelet meghatározható – legalábbis az egységelem egy környezetében – a struktúraállandók ismeretében, vagyis a Φ_i függvények Taylor-sorfejtésének kvadratikus tagjaiból. Lie III. tétele szerint az antiszimmetriának és a Jacobi-azonosságnak eleget tevő konstansok tetszőleges rendszere előáll valamely Lie-csoport struktúraállandóinak összességeként. A fentiek lehetőséget nyújtanak arra, hogy a Lie-csoportok vizsgálatát lineáris algebrai kérdésekre vezessük vissza az alábbi konstrukció segítségével.

Definíció : Legyen G egy n paraméteres Lie-csoport, és jelöljük c_i^{jk}-val a struktúraállandóit valamely kanonikus paraméterezésben. Tekintsünk egy n-dimenziós valós lineáris teret és annak egy $\{X^1, \ldots, X^n\}$ bázisát, és definiáljunk ezen a téren egy $[,]$ bilineáris műveletet az alábbi relációk révén:

$$\left[X^i, X^j\right] = c_k^{ij} X^k\,. \tag{5.5}$$

Természetesen a bilinearitás miatt ezzel a tér két tetszőleges elemére is értelmeztük a műveletet, amit kommutátornak nevezünk. Ez a művelet eleget tesz az alábbi

két azonosságnak:

$$[A, B] = -[B, A] \,, \tag{5.6}$$

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \,, \tag{5.7}$$

amelyeket rendre antiszimmetriának és Jacobi-azonosságnak hívunk. Ezt a lineáris teret a kommutátorral mint művelettel nevezzük a G Lie-csoport g *Lie-algebrájának*.

A Lie-algebra egyik fontos tulajdonsága, hogy lokális izomorfizmus erejéig jellemzi a Lie-csoportot. Itt lokális izomorfizmus alatt olyan homomorfizmust értünk, amely az egységelem egy környezetében az inverzével együtt differenciálható. Lokálisan izomorf csoportok nagymértékben hasonlóak, bár globális topológiai tulajdonságaik, mint a kompaktság, összefüggőség, illetve egyszeresen összefüggőség, nem szükségszerűen azonosak. Például az $O(3)$ és az $SU(2)$ csoportok lokálisan izomorfak, de az utóbbi egyszeresen összefüggő, míg az előbbi még csak nem is összefüggő. Hasonlóképpen, a valós számok additív csoportja lokálisan izomorf az $U(1)$ csoporttal, és az utóbbi kompakt, míg az előbbi nem az.

Az alkalmazások szempontjából alapvető feladat egy adott Lie-csoport esetén meghatározni a Lie-algebra szerkezetét. Ez természetesen megtehető úgy, hogy a csoportművelet sorfejtésének kvadratikus tagjából leolvassuk a struktúraállandókat, de létezik egy egyszerűbb módszer abban az esetben, ha a vizsgált Lie-csoport elemei valamilyen geometriai objektum folytonos transzformációi. Mivel az alkalmazások szempontjából fontos Lie-csoportok gyakorlatilag mind ebbe a kategóriába esnek – például a mátrixcsoportok lineáris koordináta-transzformációkból állnak –, ezért röviden ismertetjük ezt a módszert.

Tegyük fel tehát, hogy n paraméteres Lie-csoportunk $A(\alpha)$ elemei valamilyen s valós $x_1, \ldots, x_s$ koordinátával paraméterezhető geometriai objektum koordináta-transzformációiként vannak definiálva :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} \overset{A(\alpha)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_s' \end{pmatrix} ,$$

ahol az $x_i'(x_1, \ldots, x_s|\alpha)$ transzformált koordináták differenciálható függvényei mind az α paramétereknek, mind az $x_1, \ldots, x_s$ eredeti koordinátáknak. Válasszuk ki valamelyik α_i paramétert, és tekintsük azt a transzformációt, amelynek minden

paramétere 0, kivéve az i-ediket, ami egy ϵ *infinitezimális mennyiség*. Az $x_1, \ldots, x_s$ koordináták egy tetszőleges $F(x_1, \ldots, x_s)$ függvénye a transzformáció után sorbafejthető ϵ szerint:

$$F\left(x_1^{'}, \ldots, x_s^{'}\right) = F(x_1, \ldots, x_s) + \epsilon I_i F(x_1, \ldots, x_s) + \ldots$$

Az ϵ-ban elsőrendű tag együtthatója $I_i F(x_1, \ldots, x_s)$, ahol I_i egy elsőrendű parciális differenciáloperátor, az i-edik *infinitezimális generátora* a csoportnak. Belátható, hogy két infinitezimális generátor $[I_i, I_j]$ kommutátora előáll infinitezimális generátorok lineáris kombinációjaként, azaz

$$[I_i, I_j] = \sum_k c_{ij}^k I_k \,.$$

A differenciáloperátorok kommutátora definíció szerint antiszimmetrikus és teljesíti a Jacobi-azonosságot, következésképpen az infinitezimális generátorok lineáris kombinációinak tere a kommutátorral egy Lie-algebrát alkot, és belátható, hogy ez megegyezik a csoport Lie-algebrájával. Természetesen az egyes infinitezimális generátorok konkrét alakja függ a csoport választott paraméterezésétől, két különböző paraméterezés infinitezimális generátorait egy lineáris transzformáció kapcsolja össze, csak a Lie-algebra az, ami paraméterezéstől független.

Lássunk néhány példát a fentiek illusztrálására. A valós számok $(\mathbb{R}, +)$ additív csoportja realizálható a valós számegyenes eltolásainak csoportjaként: ekkor egy x koordinátánk és egy α paraméterünk van, és $x^{'} = A(\alpha)\, x = x + \alpha$. Az x koordináta egy tetszőleges $F(x)$ függvénye esetén

$$F\left(x^{'}\right) = F(x + \alpha) = F(x) + \alpha \frac{d}{dx} F(x) + \ldots$$

amiből leolvasható az infinitezimális generátor:

$$I = \frac{d}{dx} \,.$$

Nyilván $[I, I] = 0$, ez már az antiszimmetriából is következik, ún. egydimenziós ábeli Lie-algebrát kapunk.

Tekintsük most a sík forgáscsoportját, azaz az $SO(2)$ csoportot. Ekkor megint

egy α paraméterünk van, a forgatás szöge, és az x, y koordináták az alábbiak szerint változnak :

$$\begin{aligned} x^{'} &= \cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y\,, \\ y^{'} &= \sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y\,. \end{aligned}$$

Egy tetszőleges $F(x,y)$ függvény megváltozása

$$F\left(x^{'}, y^{'}\right) = F(x,y) + \alpha\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right)F(x,y) + \ldots\,,$$

vagyis az infinitezimális generátor $I = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$. Megint csak egydimenziós ábeli Lie-algebrát kapunk, ami mutatja a fent vizsgált két csoport lokális izomorfiáját.

Végül tekintsük az alábbi Lie-csoportot – az ún. egydimenziós affin csoportot –, amely a valós számegyenesen hat:

$$x^{'} = A(a,b)\,x = ax + b\,.$$

Mivel két paraméterünk van, ezért két infinitezimális generátor lesz. Vegyük észre, hogy a fenti paraméterezésben az egységelem $A(1,0)$, vagyis amikor az a paraméterhez tartozó infinitezimális generátort keressük, akkor az infinitezimális transzformáció paramétere $a = 1 + \epsilon$ lesz. Ebből

$$F\left(A(1+\epsilon,0)\,x\right) = F(x+\epsilon x) = F(x) + \epsilon x\frac{d}{dx}F(x) + \ldots\,,$$

azaz $I_1 = x\frac{d}{dx}$, míg

$$F\left(A(1,\epsilon)\,x\right) = F(x+\epsilon) = F(x) + \epsilon\frac{d}{dx}F(x) + \ldots\,,$$

azaz $I_2 = \frac{d}{dx}$. A két inifinitezimális generátor kommutátora

$$[I_1, I_2] = -\frac{d}{dx} = -I_2\,,$$

vagyis a nem zérus struktúraállandók:

$$c_{21}^2 = -c_{12}^2 = 1 .$$

A következő alfejezetben az infinitezimális generátorok módszerét fogjuk használni a forgáscsoport Lie-algebrájának meghatározására, illetve az $SU(2)$ csoporttal való lokális izomorfizmusának belátására.

Az infinitezimális generátorok egy másik fontos alkalmazása a transzformációcsoport invariánsainak meghatározása. Ezek a koordinátáknak olyan függvényei, amelyek a csoport transzformációi során nem változtatják meg értéküket, azaz

$$F\left(x_1', \ldots, x_s'\right) = F\left(x_1, \ldots, x_s\right) . \tag{5.8}$$

Mivel a fenti invarianciafeltételnek infinitezimális transzformációk során is fenn kell állnia, ezért a csoport invariánsai kielégítik az $I_i F = 0$ elsőrendű parciális differenciálegyenlet-rendszert. Például az $SO(2)$ csoportra az

$$x\frac{\partial F}{\partial y} = y\frac{\partial F}{\partial x}$$

egyenlet adódik, aminek általános megoldása $F(x,y) = F^{(1)}\left(x^2+y^2\right)$ alakú, vagyis az invariánsok csak az origótól mért távolságtól függnek.

Visszatérve a csoport Lie-algebrájának tárgyalására, fontos megemlíteni, hogy a Lie-algebra egydimenziós alterei egy-egyértelmű kapcsolatban állnak a csoport egyparaméteres részcsoportjaival, és ez a kapcsolat explicit megadható az infinitezimális generátorok ismeretében. A már korábban említett globális topológiai tulajdonságoktól eltekintve a Lie-algebra tartalmazza az összes lényegi információt a csoportról, másfelől sokkal könyebben vizsgálható linearitása miatt. Például a véges dimenziós egyszerű Lie-csoportok viszonylag könnyen osztályozhatók Lie-algebrai technikák segítségével. Az osztályozás eredménye az, hogy a már korábban ismertetett mátrixcsoportok, azaz az $SU(n)$, $SO(n)$ és $Sp(2n)$, néhány triviális kivételtől eltekintve egyszerű Lie-csoportok végtelen sorozatait adják, és ezeken kívül mindössze öt, ún. exceptionális egyszerű Lie-csoport létezik. Az osztályozási tételnek fontos alkalmazásai vannak a részecskefizikában. Az osztályozás egyik érdekessége, hogy speciális típusú ún. Coxeter-gráfok osztályozására vezethető

vissza, ami a matematikának és a fizikának olyan látszólag független területein bukkan fel, mint a szingularitások elmélete, a konform térelmélet, sőt az $SU(2)$ csoport véges részcsoportjainak az osztályozása – ami mellékesen a szabályos testek osztályozásával is kapcsolatos.

5.4 Lie-csoportok ábrázolásai, Haar-mérték

Mint azt az előző részben tárgyaltuk, a Lie-csoportok vizsgálatának alapvető módszere a linearizálás, azaz a megfelelő Lie-algebrára történő áttérés. Ez a helyzet az ábrázoláselméletben is, ugyanis egy Lie-csoport minden ábrázolásának megfelel Lie-algebrájának egy ábrázolása, vagyis egy olyan $R : g \to End(V)$ lineáris leképezés a g Lie-algebrából a V lineáris tér operátorainak $End(V)$ halmazába, amely teljesíti az

$$R([x,y]) = R(x)R(y) - R(y)R(x)$$

feltételt minden $x, y \in g$-re. Ez a kapcsolat nem egy-egyértelmű, hiszen lokálisan izomorf Lie-csoportok Lie-algebrái megegyeznek, így valójában a Lie-algebra ábrázolásai az univerzális fedőcsoport ábrázolásainak felelnek meg, más szóval a Lie-algebra ábrázolások a vizsgált csoportnak általában projektív ábrázolásait szolgáltatják.

A Lie-csoportok ábrázoláselméletében jelentős a *Haar-mérték* fogalma. Emlékezzünk vissza a véges csoportok esetére, ahol fontos szerepet játszott a csoportelemek halmazára történő összegzés, például a karakterek skalárszorzatában, illetve a projekciós operátorok meghatározásában. Mivel egy Lie-csoportnak kontinuum sok eleme van, ezért ebben az esetben a csoportelemekre vett összegeket egy megfelelő mérték-, illetve integrálfogalommal kell helyettesíteni. Vagyis ha adott egy $f : G \to \mathbb{C}$ komplex értékű függvény a csoporton, értelmezni akarjuk ennek $\int_G f(g)dg$ integrálját. Az integrálnak, illetve a megfelelő mértéknek *transzlációinvariánsnak* kell lennie, azaz teljesülnie kell a

$$\int_G f(gh)dg = \int_G f(hg)dg = \int_G f(g)dg$$

feltételnek tetszőleges $h \in G$-re, ekkor a mértéket Haar-mértéknek nevezzük. Nem minden Lie-csoporton létezik Haar-mérték, de például minden kompakt csoporton

létezik olyan, amelyre

$$\int_G dg = 1\,,$$

ez az ún. *normalizált Haar-mérték*, amely egyértelmű. Természetesen a csoportnak egy konkrét paraméterezése esetén a Haar-integrál egy véges dimenziós integrálra redukálódik. Például az $SU(2)$ csoport esetén egy tetszőleges f osztályfüggvény csak a $g \in SU(2)$ mátrix $t := Tr(g)$ spurjától függ, és a megfelelő Haar-integrál

$$\int_{SU(2)} f(g)dg = \int_{-2}^{2} \frac{1}{\pi}\sqrt{1-\left(\frac{t}{2}\right)^2}\, f(t)dt\,.$$

5.5 A forgáscsoport

Az alkalmazások szempontjából legfontosabb Lie-csoport a háromdimenziós tér forgásainak $SO\,(3)$ csoportja. A csoport három paraméteres, hiszen egy forgás megadásához tudni kell a forgatás szögét és a forgástengely irányát, ez utóbbit pedig két valós paraméterrel jellemezhetjük. Tetszőleges forgás felbontható három egymásra merőleges tengely – például a Descartes–koordináta-rendszer x, y, z tengelyei – körüli forgások szorzatára, ezért az infinitezimális generátorok meghatározásánál elég rögzített tengely körüli forgásokat vizsgálni, de ezek generátora már ismert az $SO\,(2)$ csoport példájából. Konkrétan, egy x tengely körüli α szögű forgás az alábbiak szerint transzformálja a koordinátákat:

$$\begin{aligned} x' &= x\,, \\ y' &= \cos(\alpha)y - \sin(\alpha)z\,, \\ z' &= \sin(\alpha)y + \cos(\alpha)z\,, \end{aligned}$$

és az ennek megfelelő L_1 infinitezimális generátor

$$L_1 = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\,.$$

Teljesen hasonlóan számítható a két másik generátor, az eredmény:

$$\begin{aligned} L_2 &= z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\,, \\ L_3 &= x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\,. \end{aligned}$$

Számoljuk ki a fenti generátorok kommutátorait! Legyen $F(x,y,z)$ egy tetszőleges (differenciálható) függvény, ekkor

$$\begin{aligned} [L_1,L_2]\,F &= \left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(z\frac{\partial F}{\partial x} - x\frac{\partial F}{\partial z}\right) - \left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(y\frac{\partial F}{\partial z} - z\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \\ &= yz\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial x} - xy\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - z^2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} + xz\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z} - \\ &\quad -zy\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z} + z^2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} + xy\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z} - xz\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial y} - x\frac{\partial F}{\partial y} = \\ &= -L_3 F\,. \end{aligned}$$

Az antiszimmetriát figyelembe véve elég az $[L_1,L_2]$, $[L_1,L_3]$ és az $[L_2,L_3]$ kommutátorokat kiszámítani. A számítás hasonló a másik két kommutátor esetén, az eredményt az alábbi táblázat összegzi:

$$\begin{aligned} [L_1,L_2] &= -L_3\,, \\ [L_1,L_3] &= L_2\,, \\ [L_2,L_3] &= -L_1\,. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Innen már könnyen leolvashatók az $SO(3)$ csoport struktúraállandói. A Lie-algebrát szokás egy kicsit más alakban felírni, a fenti generátorok helyett a $J_i = -\imath L_i$ generátorok segítségével. Ennek az az oka, hogy a négyzetesen integrálható $F(x,y,z)$ függvények terén a J_i operátorok önadjungáltak, vagyis a kvantummechanika szerint fizikai mennyiségeket írhatnak le. Persze eddigi tárgyalásunk szerint ez az átírás nem lenne megengedhető, hiszen végig ragaszkodtunk az előforduló mennyiségek valós voltához, de formálisan az új mennyiségek ugyanazt az információt hordozzák, és létezik a Lie-algebrák komplexesítésének precíz elmélete, ahol a fenti átírás teljesen jogos. Az önadjungált generátorok segítségével a Lie-

algebrát definiáló kommutátorok az alábbi alakot veszik fel:

$$[J_i, J_j] = \imath \epsilon_{ijk} J_k \,, \tag{5.10}$$

ahol ϵ_{ijk} a Levi–Civita-tenzor, ami antiszimmetrikus minden indexében, és $\epsilon_{123} = 1$. Ezek pont az impulzusmomentum-operátor komponenseinek kommutátorai ($\hbar = 1$ egységrendszerben), ahogy azt a kvantummechanikából ismerjük. Ez nem véletlen, általában egy szimmetriacsoport (önadjungált) infinitezimális generátorai a szimmetriához a Noether-tétel szerint hozzátartozó megmaradó mennyiségeket ábrázoló operátorok.

Az impulzusmomentum kvantummechanikai elméletéből ismert, hogy jelentős szerepe van a $J^2 = \sum_i J_i^2$ operátornak, mivel az felcserélhető az összes generátorral. Vegyük észre, hogy J^2 *nem* eleme az $SO(3)$ Lie-algebrájának, hiszen az utóbbi a J_i-k lineáris kombinációiból áll. J^2 valójában egy bővebb asszociatív algebrának az eleme, amit a Lie-algebra *univerzális fedőalgebrájának* nevezünk, és amelyet a generátorok formális szorzatainak lineáris kombinációi alkotnak, azzal a feltétellel, hogy $J_i J_j - J_j J_i = [J_i, J_j]$ teljesül. Az univerzális fedőalgebra azon elemeit, amelyek az összes generátorral kommutálnak, *Casimir-operátoroknak* nevezzük, ezek kitüntetett jelentőségűek az ábrázoláselméletben. Belátható, hogy $SO(3)$ minden Casimir-operátora a J^2 polinomja.

Tekintsük most az $SU(2)$ csoportot, azaz a 2×2-es unitér mátrixok csoportját. Az egységelemtől infinitezimális mennyiségben különböző mátrix alakja

$$U = 1 + \imath \epsilon A \,.$$

Az unitaritás miatt $UU^+ = 1 + \imath\epsilon (A - A^+) = 1$, vagyis $A^+ = A$, míg

$$\det(1 + \imath \epsilon A) = 1 + \imath \epsilon Tr(A) = 1$$

miatt $Tr(A) = 0$. A fenti két feltételt kielégítő mátrixok lineáris teret alkotnak, ennek egy bázisát adják a σ_i Pauli-mátrixok:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \imath \\ -\imath & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

Megjegyezzük, hogy itt megint egy önadjungált bázisát választottuk az algebrának. Könnyű ellenőrizni, hogy

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2\imath\varepsilon_{ijk}\sigma_k \,,$$

vagyis a $\frac{1}{2}\sigma_i$ mátrixok kommutátorai megegyeznek a J_i-k kommutátoraival, más szóval az $SU(2)$ Lie-algebrája megegyezik az $SO(3)$ Lie-algebrájával, azaz a két csoport lokálisan izomorf. Ennek a jelentősége abban rejlik, hogy $SU(2)$ egyszeresen összefüggő, ellentétben a forgáscsoporttal. Általában, tetszőleges g Lie-algebrához tartozik egyetlen olyan G_u Lie-csoport, amely egyszeresen összefüggő és Lie-algebrája g, és minden olyan G összefüggő Lie-csoport, amelynek Lie-algebrája g, előáll G_u/Z faktorcsoportként, ahol Z a G_u-nak egy véges centrális részcsoportja (ami izomorf a G fundamentális csoportjával). Topológiai szóhasználattal, G_u a G csoport univerzális fedőcsoportja. Például $SU(2)$ centruma

$$Z\left(SU(2)\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} ,$$

ezért a fentiek alapján $SO(3) \cong SU(2)/Z$, és csak ez a két összefüggő Lie-csoport rendelkezik a fentebb tárgyalt Lie-algebrával. Más szóval $SU(2)$ a forgáscsoport fedőcsoportja, összhangban a projektív ábrázolások elméletében megismert terminológiával.

Mint azt a Lie-csoportok ábrázoláselméletében láttuk, a forgáscsoport véges dimenziós (projektív) ábrázolásai egy-egyértelmű kapcsolatban állnak az 5.10 Lie-algebra ábrázolásaival. Ezeket viszont jól ismerjük az impulzusmomentum kvantumelméletéből ($\hbar = 1$ egységrendszerben). Eszerint a véges dimenziós irreducibilis ábrázolásokat egy nemnegatív, egész vagy félegész értékeket felvevő paraméter jellemzi, az ábrázolás spinje. Egy s spinű ábrázolás dimenziója $2s + 1$, és rajta a J^2 Casimir-operátor az $s(s + 1)$ értéket veszi fel. Az egész spinű ábrázolások – a tenzorábrázolások – felelnek meg a forgáscsoport valódi ábrázolásainak, míg a félegész spinűek a nemtriviális kociklushoz tartozó projektív ábrázolások. Az alacsony spinű ábrázolások szokásos elnevezései : $s = 0$ a skalár, $s = \frac{1}{2}$ a spinor, míg $s = 1$ a vektor. A kétdimenziós spinor ábrázolásban az infinitezimális generátorok alakja $\frac{1}{2}\sigma_i$, ahol σ_i a Pauli-mátrixokat jelöli. Az N_{pq}^r fúziós együttható értéke 1, ha $|p - q| \leq r \leq p+q$, és 0 egyébként, ami pont az impulzusmomentumok

kvantummechanikából jól ismert kompozíciós szabályát adja vissza.

Fejezet 6

Kombinatorikus csoportelmélet

Az eddigiek során több olyan módszert vizsgáltunk csoportok tanulmányozására, amelyek lényege az adott csoport részcsoportként való beágyazása egy jól kezelhető csoportba, például egy szimmetrikus vagy egy általános lineáris csoportba. Sok fontos esetben ez az út nem járható, hiszen a permutációcsoportként való tárgyalhatóság feltétele a csoport végessége, míg a mátrixcsoportként való kezeléshez léteznie kell egy hű véges dimenziós ábrázolásnak. A kombinatorikus csoportelmélet alapötlete az, hogy a vizsgált csoportot ne részcsoportként, hanem valamely jól kezelhető csoport homomorf képeként tekintsük. E megközelítés sikerének kulcsa a szabad csoportok létezése, amelyek homomorf képeként bármely csoport előáll, illetve ezen előállítások, az ún. prezentációk kezelhetősége.

A kombinatorikus csoportelmélet feladata a prezentációkkal megadott csoportok vizsgálata. Külön érdekessége e témakörnek, hogy a legtöbb alapproblémára bizonyíthatóan nem létezik általános algoritmikus megoldás, amely tetszőleges prezentációra működne. Sőt, léteznek olyan konkrét csoportok, amelyekre egyáltalán nincs megoldási módszer. Ezen elvi nehézségek ellenére a kombinatorikus csoportelmélet az egyik legjobban algoritmizált területe a matematikának, és mint látni fogjuk, igen sok esetben rendkívül mély információk nyerhetők a vizsgált csoportról egy konkrét prezentáció alapján. E tény igen fontos annak tükrében, hogy a topológiában és a homológikus algebrában előforduló csoportok többsége csak egy prezentáció révén ismert.

Bantai_-_Csoportelmelet_szoveges-79.psd

6.1 Szabad csoportok

Tekintsük szimbólumok egy X halmazát, illetve az $\hat{X} = X \times \{\pm 1\}$ Descartes-szorzatot, melynek elemei (x, ε) alakú párok, ahol $x \in X$ és $\varepsilon \in \{+1, -1\}$ – ezeket nevezzük betűknek. Az $\hat{X}$ halmaz elemeire értelmezzük az inverzképzés műveletét az alábbi módon: $(x, \varepsilon)^{-1} = (x, -\varepsilon)$. Ezek után tekintsük az $\hat{X}$ halmaz elemeiből alkotott azon véges hosszúságú sorozatokat – szavakat –, beleértve a 0 hosszúságú üres sorozatot is, amelyekben egyetlen egyszer sem fordul elő xx^{-1} alakú részszó. Ezen *redukált szavak* halmazán egy csoportművelet vezethető be az alábbi módon: az $x_1 \dots x_n$ és az $y_1 \dots y_m$ redukált szavak szorzatát úgy kapjuk, hogy tekintjük az $x_1 \dots x_n y_1 \dots y_m$ *sorozatot. Ez nem feltétlenül redukált, ugyanis előfordulhat* $y_1 = x_n^{-1}$, ebben az esetben ezt a párt elhagyjuk, és az $x_1 \dots x_{n-1} y_2 \dots y_m$ sorozatot tekintjük. Amennyiben ez sem redukált, elhagyjuk az $x_{n-1} y_2$ párt, és így folytatjuk az eljárást, amíg csak véges sok lépésben nem jutunk egy redukált szóra, ez utóbbi lesz a szorzat. Belátható, hogy így egy asszociatív műveletet kapunk a redukált szavak halmazán, amelynek egységeleme az üres szó, és ahol egy $x_1 \dots x_n$ sorozat inverze $x_n^{-1} \dots x_1^{-1}$. Az így kapott csoportot nevezzük az X halmaz feletti F_X *szabad csoportnak*. Világos, hogy F_X végtelen rendű, még akkor is, ha az X halmaz véges.

A szabad csoportok legfontosabb tulajdonsága az alábbi.

Univerzalitási tulajdonság : Legyen G egy tetszőleges csoport és $\phi : X \to G$ egy leképezés. Ekkor létezik egy $\hat{\phi} : F_X \to G$ homomorfizmus, amely a ϕ kiterjesztése, azaz $\hat{\phi}(x) = \phi(x)$ minden $x \in X$-re. A $\hat{\phi}$ kiterjesztés egyértelmű.

E tulajdonságból már következik az alábbi állítás.

Tétel : Jelölje F_X, ill. F_Y az X, ill. Y halmaz felett értelmezett két szabad csoportot. $F_X \cong F_Y$ akkor és csak akkor, ha X és Y számossága megegyezik, azaz $|X| = |Y|$. Az $|X|$ számosságot nevezzük F_X *rangjának:*

$$\operatorname{rank} F_X = |X| \, .$$

Az univerzalitási tulajdonság mellett a szabad csoportokra vonatkozó legfontosabb állítás, hogy minden részcsoportjuk megint csak szabad csoport – vagyis izomorf egy megfelelő Y halmaz feletti F_Y szabad csoporttal.

Nielsen–Schreier-tétel : Szabad csoport minden részcsoportja szabad. Ha $H < F$ és F szabad, akkor

$$\operatorname{rank} H - 1 = [F : H](\operatorname{rank} F - 1) .$$

A fenti tétel bizonyítása konstruktív abban az értelemben, hogy eljárást ad egy olyan $Y \subset F_X$ részhalmaz meghatározására, amelyre $H \cong F_Y$.

6.2 Prezentációk és Tietze-transzformációk

A szabad csoportok gyakorlati jelentősége az alábbi állításon alapszik.

Tétel: Minden csoport egy megfelelő szabad csoport homomorf képe.

Ezt könnyű belátni a következő módon. Legyen G a vizsgált csoport, X annak egy generátorrendszere – ilyen nyilván mindig létezik, például az összes csoportelem halmaza –, és F_X az X feletti szabad csoport. Ekkor a $\phi : X \to G$ leképezés, amely minden X-beli elemet önmagába képez, egyértelműen kiterjeszthető egy $\widehat{\phi} : F_X \to G$ homomorfizmussá, amely szürjektív, mivel X generálja G-t. A $\widehat{\phi}$ homomorfizmus magjának elemeit nevezzük az X generátorrendszer *relátorainak*, magát a magot pedig *relátorrészcsoportnak*, és $R(G, X)$-szel jelöljük. A homomorfizmus-tétel alapján

$$G \cong F_X / R(G, X) .$$

Természetesen a fenti reprezentáció nem egyértelmű, hiszen sok különböző generátorrendszere létezhet egy csoportnak, és a megfelelő szabad csoportok, illetve relátorrészcsoportok jelentősen eltérhetnek egymástól. Az, hogy mégis rendkívül hasznos egy csoportnak egy szabad csoport homomorf képeként való reprezentálása, a Nielsen–Schreier-tételre vezethető vissza, amely szerint egy adott X generátorrendszerhez tartozó relátorrészcsoport maga is szabad. Persze a relátorrészcsoport általában nem lesz véges rangú, csak akkor, ha G véges csoport, hiszen az indexe megegyezik G rendjével. Ha viszont figyelembe vesszük, hogy a relátorrészcsoport normális, hiszen egy homomorfizmus magja, tovább egyszerűsíthetjük a leírást. Ehhez kapcsolódik az alábbi definició.

Definíció : Legyen G egy csoport és $X \subseteq G$. Az X részhalmaz $NC_G(X)$ *normális lezárása* a G legkisebb normális részcsoportja, amely még tartalmazza az X részhalmazt, azaz az összes X-et tartalmazó normális részcsoport metszete:

$$NC_G(X) = \bigcap_{X \subseteq N \lhd G} N .$$

Definíció : Legyen $X \subseteq G$ egy generátorrendszer, $R(G, X)$ a megfelelő relátorrészcsoport, és $R \subseteq F_X$ egy olyan részhalmaz, amelyre

$$NC_{F_X}(R) = R(G, X) .$$

Ekkor az $\langle X|R\rangle$ párt a G csoport egy *prezentációjának* nevezzük, az R elemeit pedig a prezentáció relátorainak. Szokás az R relátorhalmaz elemeit $u = v$ alakú egyenlőségekként írni, amelyek jelentése $u^{-1}v \in R$, hiszen a faktorcsoport képzés eredményeként az u és a v szavak ugyanannak a G-beli csoportelemnek fognak megfelelni.

Az eddigiek alapján világos, hogy tetszőleges csoportnak létezik prezentációja: X-nek vehetjük a csoport egy generátorrendszerét, R-nek pedig a megfelelő relátorrészcsoport alaphalmazát. A lényeg az, hogy általában sokkal kevesebb relátor is elég, hiszen a relátorrészcsoportnak csak a prezentáció relátorhalmaza normális lezárásával kell megegyeznie. Az is világos, hogy bár egy adott prezentáció egyértelműen meghatároz egy csoportot – izomorfia erejéig –, a fordított állítás nem igaz, ugyanannak a csoportnak több különböző, mint nemsokára látni fogjuk, végtelen sok prezentációja létezik.

Egy prezentáció generátor- és relátorhalmazának a számossága tetszőleges lehet, de nyilván csak olyan prezentációk esetén vizsgálhatunk algoritmikus kérdéseket, amikor ez a két számosság véges, ekkor *véges prezentációról* beszélünk. Egy csoport végesen prezentált, amennyiben létezik véges prezentációja, a továbbiakban csak ilyenekkel fogunk foglalkozni.

Mielőtt nekilátnánk a véges prezentációk és az általuk prezentált csoportok vizsgálatának, lássunk néhány egyszerű példát.

Példák:

1. $\langle \{x\} | \emptyset \rangle = Z$, a végtelen ciklikus csoport, amely egyben az 1 rangú szabad

csoport. Általában az X halmaz feletti F_X szabad csoport egy prezentációja $\langle X|\emptyset\rangle$.

2. $\Gamma_g^+ = \left\langle a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g | \prod_{j=1}^{g} [a_j, b_j] \right\rangle$, ahol $g \geq 1$ egész szám és $[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab$ jelöli a csoportelemek kommutátorát. A fenti prezentáció adja meg egy irányítható, g génuszú felület fundamentális csoportját.

3. $\Gamma_g^- = \left\langle a_1, \ldots, a_g | \prod_{j=1}^{g} a_j^2 \right\rangle$ prezentálja a g génuszú nem-irányítható felület fundamentális csoportját.

4. $\langle S, T | (ST)^3 = S^2, S^4 = 1 \rangle$ az $SL(2,Z)$ csoport – az ún. moduláris csoport – egy prezentációja.

5. $\langle s_1, \ldots, s_n | s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, s_i s_j = s_j s_i$, ha $|i-j| > 1 \rangle$ az ún. fonat-csoport egy prezentációja. Ha ehhez a prezentációhoz hozzávesszük az összes s_i^2 alakú relátort, akkor az n-edfokú szimmetrikus csoport egy prezentációját kapjuk.

Az első felmerülő kérdés, hogy két prezentációról megállapítható-e, hogy mikor prezentálják ugyanazt a csoportot. A választ Tietze híres tétele adja meg, amelynek megfogalmazása előtt be kell vezetnünk néhány új fogalmat.

Legyen $\langle X|R\rangle$ egy prezentáció. Egy w szó az R relátorhalmaz következménye, amennyiben $w \in NC_{F_X}(R)$.

Definíció : Legyen $\langle X|R\rangle$ egy prezentáció. Az alábbi műveleteket *Tietze-transzformációknak* nevezzük :

1. $\langle X|R\rangle \mapsto \langle X|R \cup \{w\}\rangle$, ha w következménye R-nek (redundáns relátor bevezetése);

2. $\langle X|R\rangle \mapsto \langle X|R \setminus \{w\}\rangle$, ha w következménye $R \setminus \{w\}$-nek (redundáns relátor elhagyása);

3. $\langle X|R\rangle \mapsto \langle X \cup \{A\} | R \cup \{wA^{-1}\}\rangle$, tetszőleges w szóra, feltéve hogy A nem eleme X-nek (új generátor bevezetése);

4. A harmadik pontbeli lépés ellentetje, azaz redundáns generátor elhagyása.

A definícióból világos, hogy a Tietze-transzformációk eredményeként kapott új prezentáció ugyanazt a csoportot prezentálja, mint az eredeti. Ennek fordítottját mondja ki

Tietze tétele : Két véges prezentáció akkor és csak akkor prezentálja ugyanazt a csoportot, ha az egyik megkapható a másikból véges sok Tietze-transzformáció alkalmazásával.

6.3 Dehn-problémák és eldönthetőség

Természetesen a csoportprezentációk vizsgálata nem öncélú, lényege a prezentált csoportról minél több strukturális információ meghatározása. E kérdéskör alapproblémáit Max Dehn fogalmazta meg a század elején.

1. Szóprobléma: adjunk algoritmust annak eldöntésére, hogy egy adott szó mikor prezentálja a csoport egységelemét.

2. Konjugációs probléma: adjunk algoritmust annak eldöntésére, hogy két szó mikor prezentál egymással konjugált csoportelemeket.

3. Izomorfia-probléma: adjunk algoritmust annak eldöntésére, hogy két prezentáció mikor prezentál izomorf csoportokat.

Az izomorfia-problémával kapcsolatban meg kell említeni, hogy bár Tietze tétele szükséges és elégséges feltételt ad arra vonatkozóan, hogy két prezentáció mikor prezentál izomorf csoportokat, ez semmiképp sem egyenértékű olyan algoritmus létezésével, amely véges sok lépésben eldönti az izomorfia kérdését.

Jegyezzük meg, hogy a szóprobléma megoldása választ ad arra a kérdésre is, hogy két szó (w_1 és w_2) mikor prezentálja ugyanazt a csoportelemet – akkor és csak akkor, ha $w_1^{-1}w_2$ az egységelemet prezentálja. Másrészt a konjugációs probléma megoldása tartalmazza a szóproblémáét is, hiszen egy szó akkor prezentálja az egységelemet, ha vele egy konjugált osztályba esik.

A kombinatorikus csoportelmélet egyik legmélyebb eredménye, amely alapvető logikai eredményekre vezethető vissza, hogy a Dehn-problémáknak általában nincs megoldása. Ki kell hangsúlyozni, hogy ez nem csak azt jelenti, hogy nincs olyan általános algoritmus, amely tetszőleges prezentáció esetén megoldaná például a

szóproblémát, ennél sokkal többről van szó. Explicit megadható olyan véges prezentáció, amelyre a szóproblémának nincs megoldása! Természetesen ez nem jelenti azt, hogy speciális tulajdonságú prezentációkra ne lenne megoldás, például zárt felületek fundamentális csoportjainak szóproblémáját maga Dehn oldotta meg.

Általában elmondható, hogy a legtöbb csoportelméleti tulajdonság nem dönthető el egy prezentáció ismeretében, például a

- trivialitás (a prezentáció az egyelemű csoportot prezentálja-e);
- végesség;
- kommutativitás;
- szóprobléma megoldhatósága (van-e megoldás az adott prezentációra);
- egyszerűség;
- szabadság (vagyis a csoport izomorf-e egy szabad csoporttal).

Újfent hangsúlyozni szeretnénk, hogy a fenti megállapítások nem zárják ki speciális prezentációkra vagy prezentációosztályokra a problémák eldönthetőségét, csak általános algoritmus létét tagadják.

Az előzőekhez hasonlóan, konkrét csoportelemek tulajdonságai is általában eldönthetetlenek, például a

- trivialitás (ez pont a szóprobléma);
- centralitás (vagyis az összes többi elemmel való felcserélhetőség);
- adott elemmel való felcserélhetőség;
- adott részcsoporthoz való tartozás;
- véges rendűség.

6.4 Kombinatorikus algoritmusok

Miután láttuk, hogy a csoportprezentációkkal kapcsolatos legtöbb algoritmikus kérdés megoldhatatlan, tekintsük át azt a három alapvető algoritmust, amelyek választ próbálnak adni a fenti kérdések némelyikére. Természetesen ezek nem mindig fognak sikerrel járni véges sok lépésben, de pragmatikus szempontból amúgy sincs túl nagy különbség egy olyan eljáráshoz viszonyítva, amely garantáltan megadja a helyes választ véges sok lépésben, csakhogy futási ideje a világegyetem életkorát is meghaladja.

A *Knuth–Bendix-algoritmus* célja, hogy egy adott prezentációban a relátorrészcsoport minden cosetjéhez (mellékosztályához) – vagyis a prezentált csoport minden eleméhez – egyértelműen hozzárendeljen egy szót, az adott coset ún. *normálformáját*. Amennyiben ez elérhető, a szóprobléma megoldása azonnal adódik, hiszen nyilvánvaló, hogy két szó akkor és csak akkor fogja ugyanazt a csoportelemet prezentálni, ha normálformáik megegyeznek. Emellett olyan kérdések is megválaszolhatóak lesznek, mint a csoport végessége, trivialitása, stb.

A normálformák megkonstruálása az alábbi ötleten alapszik. Tekintsünk az $\langle X|\mathcal{R}\rangle$ prezentáció X generátorhalmaza feletti szavak X^* halmazán egy ún. *redukciós rendezést*, vagyis egy olyan $\prec$ binér relációt, amely

1. trichotom, azaz tetszőleges $u, v \in X^*$ esetén $u = v$ vagy $u \prec v$ vagy $v \prec u$;
2. jólrendezés, vagyis tetszőleges $u \in X^*$-ra csak véges sok nála kisebb szó van;
3. transzláció-invariáns, vagyis $a, b, u, v \in X^*$ és $u \prec v$ esetén $aub \prec avb$.

Egy ilyen redukciós rendezés segítségével egy szó normálformája nem más, mint a vele egy cosetbe tartozó szavak közül a legkisebb. Megmutatható, hogy léteznek redukciós rendezések, például az ún. súlyozott lexikografikus rendezés.

A redukciós rendezés kiválasztása után a prezentáció relációit írjuk fel szavakra vonatkozó egyenlőségekként, vagyis $P_i \approx Q_i$ alakban, ahol i a relátorok indexhalmazán fut. Természetesen mindig megválaszthatjuk úgy a fenti szópárokat, hogy $Q_i \prec P_i$ legyen, egy ilyen párt *átírási szabálynak* fogunk nevezni. Az átírási szabályok ismeretében a következőképpen adhatunk algoritmust egy adott szó normálformájának meghatározására. Vizsgáljuk meg, hogy az adott szóban előfordul-e olyan részszó, amely egy átírási szabály bal oldala: ha van ilyen, akkor cseréljük

ki ezt a részt az átírási szabály jobb oldalára, és kezdjük újra az eljárást; ha nincs, akkor álljunk le. Láthatóan ez az algoritmus véges sok lépésben olyan szóhoz fog vezetni, amely tovább már nem egyszerűsíthető, más szóval *irreducibilis*. Sajnos előfordulhat, hogy ugyanahhoz a szóhoz több irreducibilis szó tartozik, attól függően hogy milyen sorrendben alkalmazzuk az átírási szabályokat. Átírási szabályok egy rendszerét *konfluensnek* nevezzük, ha tetszőleges szóhoz egyetlen irreducibilis szót rendel hozzá a fenti algoritmus, ebben az esetben ez lesz az adott szó normálformája. Mivel a redukciós rendezés jólrendezés, ezért egy véges konfluens rendszer segítségével tetszőleges szónak véges sok lépésben meghatározható a normálformája, és ezáltal megoldható a szóprobléma.

A Knuth–Bendix-algoritmus célja egy véges konfluens átírási szabályrendszer meghatározása a csoport prezentációjából. Ezt úgy éri el, hogy a prezentációból adódó eredeti átírási szabályokat addig bővíti új szabályok bevezetésével, amíg egy konfluens rendszer adódik. Természetesen a bővítés során csak olyan új szabályok jelenhetnek meg, amelyek az eredeti csoportot prezentálják.

Az algoritmus általában nem ér véget véges sok lépésben – ellenkező esetben a szóprobléma mindig megoldható lenne –, de sok fontos esetben eredményre vezet. Megjegyezzük, hogy az algoritmus futásideje nagyban függ a kezdeti átírási szabályoktól és a redukciós rendezéstől is, eredménytelenség esetén célszerű ezeken változtatni. Véges konfluens rendszer ismeretében nemcsak a szóprobléma oldható meg, de eldönthető a vizsgált csoport végessége, sőt, véges csoport esetén az egyes elemeket reprezentáló normálformák explicit felsorolhatók.

A kombinatorikus csoportelmélet másik fontos problémája a következő: legyen adva egy csoport egy véges prezentációval, és egy részcsoport egy véges generátorrendszerrel, ahol a részcsoport generátorait az eredeti csoport generátorhalmazán definiált szavakként adjuk meg. Határozzuk meg a csoport permutációs hatását a részcsoport szerinti jobb oldali cosetek (mellékosztályok) halmazán! A fenti probléma megoldására született a kombinatorikus csoportelmélet egyik legelső átfogó algoritmusa, az ún. *Todd–Coxeter-algoritmus*, másnéven *coset-enumeráció*. Jelenleg sok különféle implementációja létezik, amelyek futásidőben, memóriaigényben stb. különböznek. Legfontosabb alkalmazásai a következők: ha részcsoportnak a triviális részcsoportot választjuk, és a csoport véges rendű, akkor a coset-enumerációval meghatározható a rendje, sőt egy vele izomorf permutációcsoport is (ennek jelentősége az, hogy permutációcsoportok vizsgálatára

igen hatékony algoritmusok állnak rendelkezésre, amint azt már többször hangsúlyoztuk). Tetszőleges részcsoport esetén a részcsoport indexe határozható meg coset-enumerációval, amennyiben az véges. Ilyen esetben az algoritmus véges sok lépésben véget ér, különben vég nélkül folytatódik.

Bizonyos értelemben a coset-enumerációs probléma ellentetjének tekinthető az alábbi feladat: adott a G csoportnak egy véges $\langle X \mid \mathcal{R} \rangle$ prezentációja és egy $\phi : G \to S_n$ tranzitív permutációs hatása a $\Sigma = \{1, \ldots, n\}$ halmazon. Egy ilyen tulajdonságú permutációs hatás meghatározza a G csoport egy n indexű részcsoportját, valamely Σ-beli elem stabilizátorát, konjugáció erejéig egyértelműen. Határozzuk meg ezen részcsoport egy prezentációját, vagyis egy generátorrendszerét és a generátorok által kielégített relációkat! A megoldást a *Reidemeister–Schreier-algoritmus* szolgáltatja. Először is, mivel ϕ képe tranzitív, minden $i \in \Sigma$-hoz található egy olyan w_i szó, hogy $\phi(w_i)$ az 1-et i-be viszi. Ezen szavak $\mathcal{T} = \{w_i \mid i \in \Sigma\}$ összeségét *transzverzálisnak* nevezzük. Ezek után minden $i \in \Sigma$ és $x \in X$ párhoz hozzárendeljük az

$$s_i(x) = w_i x w_{x(i)}^{-1} \tag{6.1}$$

szót, ahol $x(i)$-vel jelöltük $i \in \Sigma$ képét a $\phi(x)$ permutáció hatására. Belátható, hogy ezen szavak összesége generálja a keresett részcsoportot, vagyis az 1 pont stabilizátorát. A fenti típusú részcsoport-generátorokat nevezzük Nielsen-generátoroknak.

Létezik egy egyszerű algoritmus a Nielsen-generátorok által kielégített relációk meghatározására, ezáltal a részcsoport egy prezentációjához juthatunk. Az így kapott prezentáció általában igen redundáns, ezért célszerű megfelelő Tietze-transzformációkkal egyszerűsíteni, a modern algoritmikus implementációk már automatikusan végre is hajtják ezt az egyszerűsítő lépést.

A Reidemeister–Schreier-algoritmusnak sok fontos alkalmazása van, mi most csak egy egyszerű, de annál fontosabb csoportelméleti alkalmazásra hívnánk fel a figyelmet: segítségével meghatározható egy végesen prezentált csoport összes, adott véges indexű részcsoportja. Az állítás világos, hiszen az adott fokú tranzitív permutációs hatások meghatározása egyszerű feladat, ezek ismeretében pedig az algoritmus megadja a megfelelő részcsoportokat.

Irodalomjegyzék

[1] G.G. Hall : *Alkalmazott csoportelmélet*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975.

[2] J.L. Alperin, R.B. Bell : *Groups and Representations*, Springer, 1995.

[3] I.M. Isaacs : *Character Theory of Finite Groups*, Academic Press, 1976.

[4] D.J.S. Robinson : *A Course in the Theory of Groups*, Springer, 1982.

[5] W. Feit : *The Representation Theory of Finite Groups*, North-Holland, 1982.

[6] A.A. Kirillov : *Elements of the Theory of Representations*, Springer, 1975.

[7] W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar : *Combinatorial group theory*, Wiley-Interscience, 1966.

[8] J.-P. Serre : *Linear Representations of Finite Groups*, Springer, 1977.

Bantai_-_Csoportelmelet_szoveges-89.psd

Tárgymutató

ábrázolás dimenziója, 38
ábrázolás magja, 38
ábrázolási karakter, 45
ábrázolások direkt összege, 40
ábrázolások ekvivalenciája, 38
ábrázolások tenzorszorzata, 43
általános lineáris csoport, 10, 65
átírási szabály, 86

Abel-csoport, 8
algebrai függetlenség, 59
alternáló csoport, 10
automorfizmus, 12

belső automorfizmus, 15
Birkhoff tétele, 20
Burnside-gyűrű, 32
Burnside-tábla, 34
Burnside-tétel, 47

Casimir-operátor, 76
Cauchy–Frobenius-lemma, 29
Cayley tétele, 28
centrális elemek, 21
centralizátor, 21
centrum, 21
ciklikus részcsoport, 14
Clebsch–Gordan-sor, 44
coset, 15
coset-enumeráció, 87
csoport rendje, 8
csoportaxiómák, 5
csoportbővítés, 20
csoportelemek kommutátora, 23

Dehn-problémák, 84
derivált lánc, 23
derivált részcsoport, 22
diéder csoport, 11
direkt szorzat, 18

egyparaméteres részcsoport, 67
egységábrázolás, 38
egyszerű csoport, 16
elágazási szabályok, 44
elem rendje, 14
elemi szimmetrikus polinom, 58

féldirekt szorzat, 19
fúziós együttható, 44
fúziós gyűrű, 43
faktorcsoport, 16
feloldható csoport, 23
fixpont, 27

Bantai_-_Csoportelmelet_szoveges-90.psd

forgáscsoport, 66, 74
Frobenius–Schur-indikátor, 54
Frobenius–Stickelberger-tétel, 18
fundamentális invariáns, 59

generátor, 13

hű ábrázolás, 38
Haar-mérték, 73
Hall tétele, 23
hatványösszeg, 58
Hilbert *syzygy-tétele*, 61
Hilbert–Poincaré-sor, 60
homogén komponens, 49
homomorfizmus, 12
homomorfizmus képe, 17
homomorfizmus magja, 17
homomorfizmus-tétel, 17

indukált ábrázolás, 55
indukált ábrázolás karaktere, 56
infinitezimális generátor, 70
invariánselmélet alaptétele, 44
invariánsgyűrű, 58
invariáns polinom, 58
irreducibilis ábrázolás, 41
irreducibilis szó, 87
izomorfizmus, 12
izomorfizmus-tételek, 17

Jacobi-azonosság, 68, 69
Jordan–Hölder-tétel, 24

karaktertábla, 46
kiscsoportok módszere, 57
Knuth–Bendix-algoritmus, 86
kociklus, 50
kohomológia, 51
kohomológiacsoport, 51
kommutátor-részcsoport, 22
kompaktság, 64
komplex ábrázolás, 53
komplexusszorzás, 14
kompozíciófaktor, 24
kompozíciólánc, 24
konfluens rendszer, 87
kongruenciareláció, 16
konjugálás, 15
konjugált ábrázolás, 43
konjugált osztály, 20
konjugált részcsoport, 16
korrespondencia-tétel, 17

Lagrange tétele, 15
Lie tételei, 67
Lie-algebra, 69
Lie-algebra ábrázolása, 73
Lie-csoport, 64
lineáris ábrázolás, 38
lineáris karakter, 48

Maschke tétele, 41
Mathieu-csoportok, 30
mellékosztály, 15
moduláris tulajdonság, 24

Newton-formulák, 59
Nielsen–Schreier-tétel, 81
normális lezárás, 82
normális részcsoport, 16
normálforma, coseté, 86

Bantai_-_Csoportelmelet_szoveges-91.psd

normalizátor, 21

orbit, 27
orbit–stabilizátor-tétel, 28
ortogonális csoport, 65
ortogonalitási relációk, 47
osztályfüggvény, 45
osztályfüggvények skalárszorzata, 47

pálya, 27
permutáció paritása, 10
permutációs ábrázolás, 40
permutációs hatás, 25
permutációs hatás fixpontfüggvénye, 33
permutációs hatás megszorítása, 32
permutációs hatások összege, 28
permutációs hatások ekvivalenciája, 26
permutációs hatások szorzata, 31
Poincaré tétele, 15
prezentáció, 82
prezentáció, véges, 82
primitív permutációs hatás, 31
projekciós operátor, 50
projektív ábrázolás, 50
pszeudo-valós ábrázolás, 53

részcsoport, 13
részcsoport indexe, 15
részcsoportháló, 14
rang, szabad csoporté, 80
reciprocitási tétel, 56
reducibilis ábrázolás, 41
redukált szó, 80
redukciós rendezés, 86
reguláris permutációs hatás, 27
Reidemeister–Schreier-algoritmus, 88
relátor, 81
Reynolds-operátor, 59

Schur-lemma, 41
Schur-multiplikátor, 51
speciális lineáris csoport, 65
stabilizátor, 27
struktúraállandók, 67
syzygy, 61
szóprobléma, 84
szabad csoport, 80
szimmetrikus csoport, 10, 12
szimmetrikus polinom, 58
szimmetrikus polinomok alaptétele, 58
szimmetrizált négyzetek, 53
szimplektikus csoport, 66
szubnormál lánc, 24

többszörös tranzitivitás, 29
teljes reducibilitás, 41
természetes homomorfizmus, 17
Tietze tétele, 84
Tietze-transzformációk, 83
Todd–Coxeter-algoritmus, 87
transzlációinvariáns mérték, 73
transzpozíció, 10
transzverzális, 88
tranzitív permutációs hatás, 27
triviális részcsoport, 13

unitér csoport, 66
univerzális fedőcsoport, 52

Bantai_-_Csoportelmelet_szoveges-92.psd

univerzalitási tulajdonság, 80

valós ábrázolás, 53
varietás, 20

Bantai_-_Csoportelmelet_szoveges-93.psd