$$= -c\,\mathrm{Tr}\, t^a t^b f^{\mu\nu a} f^{b}_{\mu\nu}$$

$\mathrm{Tr}(t^a t^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ $\Rightarrow c \overset{?}{=} \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ át lehet így írni $\mathcal{L}_{gluon}$

ugyan $f^{\mu\nu}$ transzformálódik, de

$$\mathcal{L}_{gluon} \to \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\omega f^{\mu\nu} \underbrace{\omega^{-1}\omega}_{1} f_{\mu\nu}\,\omega^{-1}\right) = \mathcal{L}_{gluon}$$ invariáns

$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{gluon} + \mathcal{L}_{kvark}$ mértékinvariáns elmélet nem-ábeli SU(3)-ra

Erőhatás – szórási hatáskeresztmetszet

03.03.

① QED $Z_1 e, m$

$Z_2 e, \mu$ két részecske → szórási amplitúdó

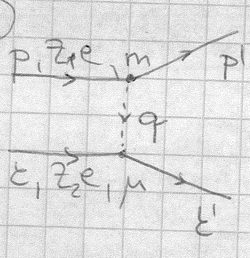
nemrelativisztikus közelítés

② Born-közelítés QM szóráselmélet → Coulomb-tv.

③ gluon-kvark kölcsönhatás általánosítás

Yukawa potenciál pp szórás pion-cserével

①



$$q^2 = (p-p')^2 = (k'-k)^2$$

nemrel. közelítés: $|\mathbf{k}|, |\mathbf{k}'| \ll \mu$, $|\mathbf{p}|, |\mathbf{p}'| \ll m$

$p \simeq (m, \mathbf{p})$ $p' \simeq (m, \mathbf{p}')$

$k \simeq (\mu, \mathbf{k})$ $k' \simeq (\mu, \mathbf{k}')$

$|\mathbf{k}| \simeq |\mathbf{k}'|$ $|\mathbf{p}| \simeq |\mathbf{p}'|$

$$q^2 \approx -\mathbf{q}^2 = -(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2 = -(\mathbf{k}'-\mathbf{k})^2$$

$$S_{fi} = i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+k-p'-k')\,T_{fi}$$

$$j_\mu^{(Dirac)} = \bar{\Psi}\gamma_\mu \Psi Ze$$

$$\langle p', \sigma' | j_\mu^{(Z_1)} | p, \sigma \rangle = Z_1 e\, \bar{u}_{r'}^{(m)}(p')\gamma_\mu u_r^{(m)}(p)$$

$$\langle k', s' | j_\mu^{(Z_2)} | k, s \rangle = Z_2 e\, \bar{u}_{s'}^{(\mu)}(k')\gamma_\mu u_s^{(\mu)}(p)$$

γ-propagátor (Lorentz-mérték $\partial_\mu A^\mu = 0$)

$$\Rightarrow \frac{g^{\mu\nu}}{q^2}$$

$$S_{fi} = i(2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum p_f - \sum p_i\right) Z_1 Z_2 e^2 \,\overline{u}^{(m)}_{r'}(p')\gamma_\mu u^{(m)}_r(p)\, \overline{u}^{(\mu)}_{s'}(k')\gamma^\mu u_s(k) \frac{1}{q^2}$$

$$u^{(m)}_r(p) = \sqrt{p^0+m}\begin{pmatrix} \chi_r \\ \frac{\sigma \underline{p}}{p^0+m}\chi_r \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{nem rel.}} \sqrt{2m}\begin{pmatrix} \chi_r \\ \frac{\sigma \underline{p}}{2m}\chi_r \end{pmatrix} \qquad \chi_r = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ v. } \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\overline{u}^{(m)}_{r'}(p')\gamma^0 u^{(m)}_r(p) = u^{+(m)}_{r'}(p')\underbrace{(\gamma^0)^2}_{1} u^{(m)}_r(p) = 2m\left(\chi^T_{r'},\ \chi^T_{r'}\frac{\sigma \underline{p}'}{2m}\right)\begin{pmatrix}\chi_r \\ \chi_r \frac{\sigma\underline{p}}{2m}\end{pmatrix} = *$$

$$2m\,\chi^T_{r'}\underbrace{\sigma_i\sigma_j}_{\delta_{ij}+i\varepsilon_{ijk}\sigma_k}\chi_r \frac{p'_i p_j}{(2m)^2}$$

$$* = 2m\left[\delta_{rr'}\left(1+\frac{\underline{p}'\underline{p}}{(2m)^2}\right) + i\,\chi^T_{r'}\underline{\sigma}\chi_r\,(\underline{p}'\times\underline{p})\frac{1}{(2m)^2}\right] \approx 2m\,\delta_{rr'}$$

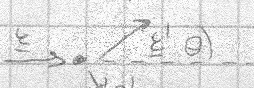
nagyságrendileg kicsi tagok az 1-hez képest

$$S_{fi} = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p+k-p'-k')\; i Z_1 Z_2 e^2\; 2m\, 2\mu\, \delta_{rr'}\delta_{ss'}\left(-\frac{1}{q^2}\right)$$

$$T_{fi} = -Z_1Z_2e^2\; 4m\mu\; \delta_{rr'}\delta_{ss'}\frac{1}{q^2}$$

végállapoti fázistérfogat

$$d^2\sigma = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p+k-p'-k')(Z_1Z_2e^2)^2(4m\mu)^2\delta_{ss'}\delta_{rr'}\left(\frac{1}{q^2}\right)^2 \underbrace{\frac{1}{2m\; 2|\underline{k}|}}_{\text{leosztás árammal}} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2p'_0}\frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2k'_0}$$



$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2}\delta(p^0+k^0-p'^0-k'^0)(Z_1Z_2e^2)^2(4m\mu)^2\left(\frac{1}{q^2}\right)^2\delta_{rr'}\delta_{ss'}\frac{1}{2m\,2|\underline{k}|}\frac{1}{4m\mu}\,d\Omega_{\underline{k}}\,\frac{k'^2dk'}{k'_0\,dk'_0}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\underline{k}}} = \frac{1}{4\pi^2}\,\cancel{16m^2}\mu^2(Z_1Z_2e^2)^2\frac{1}{\cancel{16m^2\mu}}\frac{1}{(q^2)^2} =$$

$$= \frac{\mu^2}{4\pi^2}(Z_1Z_2e^2)^2\frac{1}{(q^2)^2}$$

(2)

Born-közelítés

$$E = \frac{\hbar^2}{2\mu}k^2$$

$\Psi(\underline{x}) = e^{i\underline{k}\underline{x}} + \Psi_{\text{szórt}}$ alakban keresett m.o.-a

a Schrödinger-egyenletnek

$$(\Delta + k^2)\Psi(\underline{x}) = \frac{2\mu}{\hbar^2}V(\underline{x})\Psi(\underline{x})$$

↑ Helmholtz-egyenlet

retardált Green-fv: $G_+(\underline{x}-\underline{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\underline{k}(\underline{x}-\underline{x}')}}{|\underline{x}-\underline{x}'|}$

$$\Psi(\underline{x}) = \Psi_{hom}(\underline{x}) + \int d^3\underline{x}'\, G_+(\underline{x}-\underline{x}') \frac{2\mu}{\hbar^2} V(\underline{x}')\Psi(\underline{x}')$$

$e^{i\underline{k}\hat{\underline{x}}}$ bejövő síkhullám

iterációs megoldás $\rightarrow$ 1. közelítés szórt hullámra

$$\Psi_{szórt}(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3x'\, \frac{e^{ik|\underline{x}-\underline{x}'|}}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \frac{2\mu}{\hbar^2} V(\underline{x}')\, e^{i\underline{k}\underline{x}'}$$

nagy távolságon nézzük $|\underline{x}-\underline{x}'| \approx r - \underline{n}\,\underline{x}'$

$\frac{\underline{x}}{|\underline{x}|} = \frac{\underline{x}}{r}$

$\underline{k}_s = k\underline{n}$

$$\Psi_{szórt}(\underline{x}) \approx -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3\underline{x}'\, \frac{2\mu}{\hbar^2} V(\underline{x}')\, e^{i\underline{x}'(\underline{k}-\underline{k}_s)}$$

$$|f(\vartheta)|^2 = \frac{d\sigma}{d\Omega_k}$$

Fourier-transzformált

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_k} = \frac{1}{(4\pi)^2}(2\mu)^2 |\tilde{V}(\underline{k}-\underline{k}_s)|^2 = \frac{\mu^2}{4\pi^2}|\tilde{V}(\underline{k}-\underline{k}_s)|^2$$

① - ② $\Rightarrow \tilde{V}(\underline{k}-\underline{k}_s) = -Z_1 Z_2 e^2 \frac{1}{q^2}$

$\Rightarrow V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$ egy foton csere potenciál

a Coulomb potenciál

③ kvark-gluon kölcsönhatás nem-relativisztikusan

gluonpropagátor: $a, b = 1 \ldots 8$

$$G^{ab}_{\mu\nu}(q) = \frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\delta^{ab}$$

kvark $\rightarrow$ színáram

$$j^a_\mu = g\, \bar{q}_i \gamma_\mu t^a_{ii'} q_{i'}$$ q_i = Dirac bispinor $\otimes$ 3 színkomp.

$$\| $$

$$\bar{u}_r(p') \otimes \chi_i^\dagger \gamma_\mu t^a_{ii'} u_r(p) \otimes \chi_{i'}$$

$t^a_{j'j}$

$$S_{fi} = i g^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+k-p'-k') \frac{1}{(p-p')^2} \delta_{rr'}\delta_{ss'}\, 2m\, 2\mu\, \underbrace{\delta^{ab}\, t^a_{ii'}\, t^b_{jj'}}_{\sum_{a=1}^{8}}$$

bejövő színre (spinre) átlagolunk, a kimenőre összegezünk

$$d\sigma = \frac{1}{3}\sum_{ii'}\frac{1}{3}\sum_{jj'}\cancel{\frac{1}{2}\sum_{ss'}}\ \cancel{\frac{1}{2}\sum_{rr'}}\left(\frac{g^2}{(p-p')^2}\right)^2 (4m\mu)^2\, \cancel{\delta_{rr'}}\,\cancel{\delta_{ss'}}\ t^a_{i'i}\, t^a_{j'j}\, t^{b*}_{i'i}\, t^{b*}_{j'j}$$

$$\frac{1}{3}\sum_{ii'} t^a_{i'i}\, t^{b*}_{i'i} = \frac{1}{3}\sum_{ii'} t^a_{i'i}\, t^b_{ii'} = \frac{1}{3}\,\mathrm{Tr}\, t^a t^b = \frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\,\delta_{ab}$$

$$d\sigma = \frac{1}{36}\underbrace{\delta^{ab}\delta^{ab}}_{\underbrace{\delta^{aa}}_{=8}}\left(\frac{g^2}{q^2}\right)^2 (4m\mu)^2 = \frac{2}{9}\left(\frac{g^2}{q^2}\right)^2 (4m\mu)^2$$

$V_{qq'_{12}}(q) = -\frac{2}{9}\, g^2\, \frac{1}{q^2}$ ebből is Coulomb jön ki

de $\frac{2}{9}$-es színfaktorral

ha figyelembe vesszük, hogy színszinglett jön be és megy ki, akkor más jön ki a potenciálra

$$\psi_{Q_1Q_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\psi_1^{Q_1}\psi_1^{*Q_2} + \psi_2^{Q_1}\psi_2^{*Q_2} + \psi_3^{Q_1}\psi_3^{*Q_2}\right)$$

kezdőállapot nem olyan egyszerű

$t^a_{i'i}\, t^a_{j'j}$ kombinációban kvark-antikvarkra

$$\frac{1}{3}\, t^a_{i'i}\, t^{a*}_{i'i} = \frac{1}{3}\,\mathrm{Tr}\, t^a t^a = \frac{1}{6}\,\delta^{aa} = \frac{4}{3}$$

$$V_{Q_1\bar{Q}_2}(q) = \frac{4}{3}\, g^2\, \frac{1}{q^2}$$