1. Speciális relativitáselmélet

Einstein, 1905:

1) Fizikai törvényei invariánsak minden inerciarendszerben.

2) A vákuumbeli fénysebesség minden megfigyelőre ugyanakkora.

Esemény: téridőpont: minden megfigyelő számára adott helyen és illetőleg időben.

Vonatkoztatási rendszer: anyagi objektum: megfigyelő + koordinátarendszer.

Inerciarendszer: speciális vonatkoztatási rendszer, melyben érvényes Newton I. törvénye.

Lorentz transzformáció: inerciarendszerek közötti: áttérés, mely megőrzi az időtartamot.

Két, azonosan indított Descartes rendszer esetén, ahol a kezdő rendszer „v" sebességgel halad az x irányba:

$$\boxed{\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)} \quad ; \quad \boxed{\Delta x' = \gamma\left(\Delta x - v\Delta t\right)} \quad ; \quad \Delta y' = \Delta y \; ; \; \Delta z' = \Delta z \qquad \Big| \; \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Michelson - Morley kísérlet: 1887, interferenciakísérlet annak az „éternek" kimutatására szolgáló sebességmérő kísérlete kimutatni. Elhalt!

→ nincs éter, nincs kitüntetett rendszer.

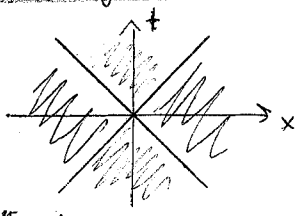
Minkowski tér: a speciális relativitáselmélet matematikai alapja: benne az időben fogva van az inerciarendszertől.

metrikus tenzor: $g^{(0)}_{ij} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$

Időben: a speciális relativitáselmélet invariáns mennyisége:

$$\boxed{\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta \underline{x})^2 = (c\Delta t')^2 - (\Delta \underline{x}')^2 = g_{ij}(\Delta x)^i(\Delta x)^j}$$ inerciarendszertől független

- $\Delta s^2 > 0$: időszerűen elválasztott eseménypár
- $\Delta s^2 = 0$: fényszerűen — " —
- $\Delta s^2 < 0$: térszerűen — " — ↳ kölcsönhatás nem lehet jellemző!



Egyidőjűség relativitása: $K: \Delta t = 0;\ \Delta x \neq 0 \rightarrow K': \Delta t' = \gamma\left(-\frac{v}{c^2}\Delta x\right) \neq 0$

Lorentz kontракció: $K: \Delta t = 0,\ \Delta x = L_0 \rightarrow K': \Delta t' = -\frac{v}{c^2}\gamma L_0 \quad \Delta x' = L_0\gamma$

$$L = \Delta x - (\Delta t \cdot (-v)) = \frac{L_0}{\gamma} < L_0$$

Időkitágulás: $K: \Delta t = \tau,\ \Delta x = 0 \Rightarrow K': \Delta t' = \gamma\tau > \tau \Rightarrow K^3$-ban várva K'-ben gyorsabban telik az idő.

Paradoxon: A feltétel a gyorsulásban (nem inerciarendszer) keresendő.

Sebességek transzformációja: $K: v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t};\ v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t};\ v_z = \frac{\Delta z}{\Delta t}$ (fénysebességre szűkítve)

$$K': \quad v_x' = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2}\cdot v_x} \quad ; \quad v_y' = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c}v_x\right)} \quad ; \quad v_z' = \frac{v_z}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c}v_x\right)}$$

Négyvektor: A térszerű koordinátákkal transzformációs szabály szerint transzformálódó mennyiség.

Relativisztikus mechanika:

- négyes sebesség: $\boxed{u^i := \frac{dx^i}{ds}} = \frac{dx^i}{c\,d\tau} = \frac{dx^i}{c\,dt}\cdot\frac{dt}{d\tau} = \gamma\frac{dx^i}{c\,dt} \rightarrow u^i = \left(\gamma,\ \gamma\frac{\underline{v}}{c}\right) \rightarrow u^i u^j g^{(0)}_{ij} = 1.$
- négyes impulzus: $\boxed{p^i := m\cdot c\cdot u^i} \rightarrow p^i = \left(\frac{E}{c}, \underline{p}\right) \rightarrow \boxed{E^2 - \underline{p}^2c^2 = m^2c^4}$ $\quad i,j = 0,1,2,3$
- legkisebb hatás elve: $\boxed{S = -mc\int_a^b ds = -mc\int\frac{1}{\gamma}\,dt \Rightarrow L = -\frac{mc}{\gamma}}$

2. Általános relativitáselmélet alapjai

Általános kovariancia elve: a természet törvényeit tetszőleges koordinátákban: rendszerben (≈ koordinátarendszerben) egyféleképpen kellene megfogalmazni.

Ekvivalencia elve: tömegek ekvivalenciája $\Leftrightarrow$ lokálisan: gravi mező = gyorsuló koordinátarendszer.

Eötvös kísérlet: 1885, „súlyos" és „tehetetlen" tömeg ekvivalenciája. Torziós inga: centrifugális (tehetetlen) vs. nehézségi (súlyos) erő

Forgó koordinátarendszer:

inerciarendszer: K: $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2d\varphi^2 - dz^2 \rightarrow g_{ik} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ vagy $\mathrm{diag}(1,-1,-r^2,-1)$

forgó KR, K': $\varphi' = \varphi - \omega t'$, tölli vagyunk. $(r\omega \ll c)$

$$\rightarrow ds'^2 = (c^2 - r'^2\omega^2)\,dt'^2 - dr'^2 - r'^2 d\varphi'^2 - dz'^2 - 2r'^2\omega\, d\varphi' dt' = g'_{ij}\,dx'^i dx'^j \qquad i=0,1,2,3$$

$$\rightarrow g'_{00} = 1 - \frac{r'^2\omega^2}{c^2}\ ;\quad g'_{11} = g'_{33} = -1\ ;\quad g'_{22} = -r'^2\ ;\quad g'_{02} = g'_{20} = -\frac{r'^2\omega}{c}$$

Ha egy mátrixban a SÉ-i nem 3 vagyis a 1 pozitív $\Rightarrow$ nem lehető lok. Minkowski alakra $\Rightarrow$ nem lehet fizikai tér-idő.

Nem-euklideszi geometria: pl: forgó korong megfigyelőinek tere: nem euklideszi axiómákkal fűl meg pl: párhuzamosok metszhetnek.

Görbevonalú koordináták: cél: tetszőleges KR kezelése

Minkowski: $ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = \overset{(0)}{g}_{ij}\,dx^i dx^j$

tetszőleges: $x'^i = x'^i(x^0, x^1, x^2, x^3) \rightarrow \boxed{dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\,dx^j}$

mivel: $ds^2 = ds'^2 \Rightarrow \boxed{g'_{ik} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^k}\,\overset{(0)}{g}_{lm}} \approx \frac{\partial x}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x}{\partial x'}$ megj: vektorok helyett helyre.

Állítás: gyorsuló KR megfelelő transzformáció a tér-idő $\forall$ pontjában egyidejűleg Minkowski-ra lokálisan.
De: ez tömegek által keltett mezőre nem igaz!

Metrikus tenzor: a tér-idő jellemző mennyiség, leírása, a skalárszorzat hasonlóan bevezethető, távolságok, szögek értelmezésére jó.

Görbült tér-idő: nem szétválasztható tulajdonsága a tér-időnek: tömegek által keltett gravi. mezőre jellemző.

3. Vektorok, tenzorok ...

Kontravariáns vektor: a koordinátadifferenciálok homogén lin. transzformációja, szabálya szerint transzformálódik.

pl: $$\boxed{dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\, dx^j}$$ Felső indexen szerepelnek

Kovariáns vektor: a skalármező gradiensének hom. lin. trafó szabálya szerint transzformálódik: $\Phi(x) = \Phi(x')$

pl: $$\boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial \Phi}{\partial x^j}}$$ Alsó indexen szerepelnek

Skalár: minden KR-ben ugyanazt az adatot kifejező mennyiség, nem transzformálódik:

pl: $ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j$ egy ko- és kontravariáns vektor indexét összegzve skalárt kapunk: $A'^i B'_i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} A^k \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} B_l = A^k B_k$

Tenzor: olyan többindexes mennyiség ami megfelelő számú kontra- és kovariáns vektortulajdonsággal szerintiekben transzformálódik

Fel/Lehúzás: A metrikus tenzorral (g_{ij}) vagy inverzével (g^{ij}) az indexek pozícióját váltogatni lehet:

pl: $A_i = g_{ij} A^j$ ill. $A^i = g^{ij} A_j$ $\quad (g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k)$

Metrikus tényezőkre:

Fazol

állítás: $$\sqrt{|g|}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \sqrt{|g'|}\, dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3$$ ahol: $g = \det(g_{ij})$ ehhez: $g_{ij} \sim \mathcal{F}\cdot\mathcal{F}$

Valódi időtávolságok: (adott pontban) áttérünk a pontban egyszerre inerciarendszerre és ebben dolgozunk

inercia: K: $ds^2 = c^2 d\tau^2$ mert: $dx^\alpha = 0$

áttérés: K': $ds'^2 = g'_{00}(dx'^0)^2$ mert $dx'^\alpha = 0$

$$\boxed{d\tau = \frac{\sqrt{g'_{00}}}{c}\, dx'^0}$$

Valódi térbeli távolságok: adott pontban áttérünk inerciarendszerre: kontinuus eltolás-és hom. lin. trafóval.

elvárás: egyszerre megy $\Leftrightarrow$ dx^α nem függ dx'^0-tól $\Rightarrow$ $dx^\alpha = 0 \Leftrightarrow dx'^\alpha = 0$: ami K-ban nőgyűlt az K'-ben is és fordítva.

így: $$\left.\begin{aligned} dx^0 &= A^0_j\, dx'^j \\ dx^\alpha &= A^\alpha_\beta\, dx'^\beta \end{aligned}\right\}$$

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j = (dx^0)^2 - (dx^\alpha)^2 = A^0_j A^0_l\, dx'^j dx'^l - A^\alpha_\beta A^\alpha_\nu\, dx'^\beta dx'^\nu = ds'^2 = g'_{ij}\, dx'^i dx'^j$$

$\rightarrow$
$$g_{00} = (A^0_0)^2$$
$$g_{0\alpha} = A^0_0 A^0_\alpha$$
$$g_{\alpha\nu} = A^0_\beta A^0_\nu - A^\alpha_\beta A^\alpha_\nu$$

Egyidejűség feltétele:

távolságmérésnél: egyidejű pontok helyenek: $dx^0 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow 0 = A^0_j\, dx'^j \Rightarrow$ $$\boxed{dx'^0 = -\frac{A^0_\alpha}{A^0_0}\, dx'^\alpha = -\frac{g'_{0\alpha}}{g'_{00}}\, dx'^\alpha}$$

így: $$ds^2 = -(dl)^2 = ds'^2 = g'_{00}(dx'^0)^2 + 2 g'_{0\alpha}\, dx'^0 dx'^\alpha + g'_{\alpha\beta}\, dx'^\alpha dx'^\beta$$

egyidejűség feltétele $\rightarrow$ $$\boxed{dl^2 = \left(\frac{g'_{0\alpha} g'_{0\beta}}{g'_{00}} - g'_{\alpha\beta}\right) dx'^\alpha dx'^\beta =: \gamma_{\alpha\beta}\, dx'^\alpha dx'^\beta}$$ Áll: $-g'^{\alpha\beta}\gamma_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma$

Órák szinkronizálása:

egyidejűség feltétele: $$\boxed{dx'^0 = -\frac{g'_{0\alpha}}{g'_{00}}\, dx'^\alpha}$$ ezzel egy görbe mentén megadható az egyidejűség.

$\rightarrow$ de: nem jól definiált: függ a görbétől.

pl: $\Delta x'^0 = -\oint \frac{g'_{0\alpha}}{g'_{00}}\, dx'^\alpha$ áttérésben nem nulla!

Ha igaz: $g_{0\alpha} = 0$ és $g_{00} = 1 \Rightarrow x^0$ az idő koordináta (valódi időkülönbséget reprezentál)

$\rightarrow$ szinkronizált óraállás: rendben.

4. Párhuzamos áthelyezés

Metrikus tenzor tulajdonságai:

g_{ij} : 4×4-es, szimmetrikus mátrix ⇒ 10 független komponens. Lok. Minkowski alakba hozható ha 1 pozitív és 3 negatív SÉ-je van.

Párhuzamos áthelyezés:

K' áthelyezése KR-ben adott szabad pont: A' és B'. Adott A'-ban egy vektor-amit el akarunk tolni B'-be pl. differenciálás miatt.
Ötlet hasonlóan egy K inerciarendszer használata. (ehhez az áthelyezés triviális)

Tehát: $v'|_{A'} \xrightarrow{\text{trafó}} v|_A = v|_B \xrightarrow{\text{trafó}} v'|_{B'}$

Egyszerűsítés: $B' = 0'$; $B = 0$; $A' = -x'$; $A = -x$.

Az origó egy környezetére:

$$x^i = A^i_j x'^j + \frac{1}{2} B^i_{jl} x'^j x'^l + O(x'^3)$$

a pozíció transzformálása. Ahol: $B^i_{jl} = B^i_{lj}$

A vektorokra:

$$dx^i\Big|_x = A^i_j dx'^j\Big|_{x'} + B^i_{jl} x'^j dx'^l\Big|_{x'} + O(x'^2) \qquad (1)$$

Kérdés: mit tudunk mondani A^i_j-ről és B^i_{jl}-ről? Az ívelemegyenlőségből:

$$ds^2\Big|_x = g^{(0)}_{jl}(x)\, dx^j\Big|_x dx^l\Big|_x = \left(dx^0\Big|_x\right)^2 - \left(dx^\alpha\Big|_x\right)^2 \overset{(1)}{=} \left(A^0_j A^0_l + A^0_j B^0_{nl} x'^n + A^0_l B^0_{nj} x'^n\right) dx'^j\Big|_{x'} dx'^l\Big|_{x'} +$$
$$- \left(A^\alpha_j A^\alpha_l + A^\alpha_j B^\alpha_{nl} x'^n + A^\alpha_l B^\alpha_{nj} x'^n\right) dx'^j\Big|_{x'} dx'^l\Big|_{x'} + O(x'^2)$$

$$\Updownarrow$$

$$ds'^2\Big|_{x'} = g'_{jl}(x')\, dx'^j\Big|_{x'} dx'^l\Big|_{x'} = \left[g'_{jl}(0') + \frac{\partial g'_{jl}}{\partial x'^n}\Big|_{0'} x'^n \right] dx'^j\Big|_{x'} dx'^l\Big|_{x'}$$

így:

$$g'_{jl}(0') = A^0_j A^0_l - A^\alpha_j A^\alpha_l \qquad (2)$$

$$\frac{\partial g'_{jl}}{\partial x'^n}\Big|_{0'} = A^0_j B^0_{nl} + A^0_l B^0_{nj} - A^\alpha_j B^\alpha_{nl} - A^\alpha_l B^\alpha_{nj} \Longrightarrow b_{jnl} := A^0_j B^0_{nl} - A^\alpha_j B^\alpha_{nl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g'_{jl}}{\partial x^n}\Big|_{0'} + \frac{\partial g'_{jn}}{\partial x^l}\Big|_{0'} - \frac{\partial g'_{nl}}{\partial x^j}\right.$$

Az áthelyezés folyamata:

ez eredmény: $dx^i\Big|_0 = A^i_j dx'^j\Big|_{0'}$ $\qquad dx'^j\Big|_{0'} = ?$ ezt keressük

(2)-ből: $$dx'^j\Big|_0 = g'^{jl}(0')\left(A^0_l dx^0\Big|_0 - A^\alpha_l dx^\alpha\Big|_0\right)$$

(1)-ből: $$\overset{dx}{dx'^j}\Big|_0 = \overset{dx}{dx'^j}\Big|_{-x} = A^i_j dx'^j\Big|_{-x'} - B^i_{jl} x'^j dx'^l\Big|_{-x'} + O(x'^2)$$

végül:

$$dx'^j\Big|_{0'} = dx'^j\Big|_{-x} - \frac{1}{2} g'^{jl}(0')\left(\frac{\partial g'_{ln}}{\partial x^l}\Big|_{0'} + \frac{\partial g'_{ll}}{\partial x^n}\Big|_{0'} - \frac{\partial g'_{nl}}{\partial x^l}\Big|_{0'}\right) x'^n dx'^l\Big|_{-x}$$

így általánosan:

$$\boxed{v^i\Big|_{x+\delta x} = v^i\Big|_x - \Gamma^i_{nl}\Big|_x v^l\Big|_x \delta x^n}$$

ill.:

$$\boxed{v^j\Big|_{x+\delta x} = v^j\Big|_x + \Gamma^j_{nl}\Big|_x v^l\Big|_x \delta x^n}$$

ahol: $$\Gamma^j_{nl} = \frac{1}{2} g^{jl}\left(\frac{\partial g_{ln}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ll}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{nl}}{\partial x^l}\right)$$

pontról pontra más lett!
Nem tenzor! (pl: Minkowski-ban: $\Gamma^j_{nl} = 0$)

Kovariáns deriválás:

Adott $A^i(x)$ vektormező. Az x pontban a δx irányban a kovariáns differenciál:

$$\boxed{DA^i} = A^i(x+\delta x) - A^i(x)\Big|_{x+\delta x} = A^i(x+\delta x) - A^i(x) + \Gamma^i_{\cdot l}(x)\, A^l(x)\, \delta x^i \approx \frac{\partial A^i}{\partial x^i}\Big|_x \delta x^i + \Gamma^i_{\cdot l}(x) A^l(x) \delta x$$

ez egy vektor.

A kovariáns derivált:

$$\boxed{\frac{DA^i}{dx^i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{il} A^l} = A^i{}_{;i}$$ pontról pontra változhat! Ez egy vegyes tenzor!

Hasonlóan kovariáns esetre:

$$\boxed{\frac{DA_i}{dx^i} = \frac{\partial A_i}{\partial x^i} - \Gamma^l_{ij} A_l} = A_{j;i}$$

Másodrendű tenzor:

$$\boxed{\frac{DT^i{}_j}{dx^i} = \frac{\partial T^i{}_j}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ll} T^l{}_j - \Gamma^l_{jl} T^i{}_l}$$

Jelölés:

$$T^i_{j;l} = \frac{\partial T^i{}_j}{\partial x^l} \quad ; \quad T^i_{j;l} = \frac{DT^i{}_j}{dx^l}$$

Példák:

Négyesvektor divergenciája:

$$A^j{}_{;j} = \frac{DA^j}{dx^j} = \frac{\partial A^j}{\partial x^j} + \Gamma^j_{jl} A^l \qquad A_{j;j} = \frac{DA_j}{dx^j} = \frac{\partial A_j}{\partial x^j} - \Gamma^l_{jj} A_l$$

Antiszimmetrikus tenzor divergenciája:

$$T^{ij}{}_{;j} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} + \underbrace{\Gamma^i_{jl} T^{lj}}_{=0} + \Gamma^j_{jl} T^{il} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} + \Gamma^j_{jl} T^{il}$$

A metrikus tenzor kovariáns deriváltja:

$$Dg_{;l} = 0$$

Tovább:

$$A^i{}_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \partial_{x^i}\left(\sqrt{-g}\, A^i\right) \qquad \text{mert: } \Gamma^i_{li} = (\dots) = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^l} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^l}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x^l} = g\, g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}$$

5. Mozgás görbült térben

Szabad részecske mozgása:
Szabadon mozgó részecske geodetikusan (két pont közötti időben a legrövidebb úton) fog mozgni. (Minkowski: áll v. egy mozgást végez)

Stacionárius hatás elve:

$$\delta S \overset{!}{=} 0 = \delta \int ds = \int \delta\left(\sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda}}\right) d\lambda$$

affin paraméter

A mozgásegyenlet:

$$Du^i = 0 \iff$$ a paraméterezésben adott u^i legyen egy az adott pályához u^i!

Geodetikus egyenlet:

Lánszabályból: $$\boxed{\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0}$$ + KF.

ez csak affin paraméterre igaz, ds pont ilyen.

megj: $ma^i = -m\Gamma^i_{kl}u^k u^l$ ≠ alakú!

Hamilton - Jacobi egyenlet:

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

ahol: $H \approx E$ → „$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$" → $\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 = m^2c^4 + p^2c^2$

→ $m^2c^2 = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \vec{p} = g^{ij}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^j}$

$$\boxed{g^{ij}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^j} - m^2c^2 = 0}$$

megj: $\frac{\partial S}{\partial q} = p$

Fény terjedése: a hullámszámvektor: $k^i = \frac{dx^i}{d\lambda}$ ahol λ egy pályamenti affin paraméter.

elvárás: $Dk^i = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dk^i}{d\lambda} + \Gamma^i_{kl}k^k k^l = 0}$ 5 egyenlet: k^i-re és λ-ra.

továbbá: $\boxed{k^i k_i = 0}$

Gyenge gravitációs tér: ↔ kis sebesség

↳ klasszikus hatásnak: $L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\varphi$ ahol φ: grav. potenciál és ált. $\varphi < 0$.

mivel: $S = \int L\,dt = -mc\int ds \Longrightarrow ds^2 = (c^2 + 2\varphi)dt^2 - dx^2 + O\left(\frac{1}{c^2}\right) \rightarrow \boxed{g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}}$

megj: $g_{\alpha\beta}$ és $g_{0\alpha}$ ebből nem számolható de azzal is hogyan kapcsolódik.

Állandó gravitációs tér: ↔ ∃ KR melyben g_{ij}-ja nem függ x^0-tól. (ez nem egyértelmű)

síkhullám: $f = ae^{i(-k_i x^i + \phi)} =: ae^{i\psi}$ ahol: ψ: eikonál; $k_i = \left(\frac{\omega_0}{c}, -\underline{k}\right)$. $\Rightarrow k_i = -\frac{\partial\psi}{\partial x^i}$

itt: „ω_0": a KR-ben a síkhullámot jellemző állandó. Állítás: $Dk_i = 0 \Rightarrow \omega_0$ állandó.

adott pontban értelmezhető „ω": adott pont sajátidejében mért frekvencia:

$$\omega = -\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = -\frac{\partial\psi}{\partial x^0}\frac{\partial x^0}{\partial\tau} = \frac{\omega_0}{c}\cdot\frac{c}{\sqrt{g_{00}}} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{g_{00}}}}$$

Gravitációs vöröseltolódás: gyenge térben:

$$\omega \approx \omega_0\left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right) \rightarrow \boxed{\Delta\omega \approx \frac{\varphi_{\text{kő}} - \varphi_{\text{vé}}}{c^2}\omega}$$

megj: ált: $\varphi < 0$

pl.: Nap felszíne v. Földön: $\varphi_{\text{Nap}} < \varphi_{\text{F}} \rightarrow \Delta\omega < 0$

$\rightarrow \omega_{\text{F}} < \omega_{\text{Nap}}$

vöröseltolódás!

Elektromágnesség gravitáció terében:

megj: $A^i = \begin{pmatrix} \phi \\ \underline{A} \end{pmatrix}$

$\underline{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\partial_t \underline{A}$

$\underline{B} = \mathrm{rot}\,\underline{A}$

Az EM tenzor átalakítása: $F_{;ik} = A_{k;i} - A_{i;k} \Rightarrow \boxed{F_{;ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i}$

Az áramsűrűség: de: töltés~~sűrűség~~ mennyiség skalár; ϱ: egyidejű térben mért töltéssűrűség:

$$de = \varrho\sqrt{\gamma}\,dV = \varrho\sqrt{\gamma}\,dx^1dx^2dx^3$$

ahol: $\gamma = \det(\gamma_{\alpha\beta})$ egyidejű 3D metrikus tenzor

felvétt: $\gamma^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta} \rightarrow g = \det(g_{ik}) = -\underset{\text{szétválla}}{g_{00}}\,\gamma$

$$\underset{\text{skalár}}{de}\,\underset{\text{vektor}}{dx^i} = \frac{\varrho}{\sqrt{g_{00}}}\frac{dx^i}{dx^0}\underbrace{\sqrt{-g}\,dx^0dx^1dx^2dx^3}_{\text{inv térfogatelem}} \Rightarrow \boxed{j^i = \frac{\varrho c}{\sqrt{g_{00}}}\frac{dx^i}{dx^0}}$$

Négyes áramsűrűség.

megj: $j^i = (c\varrho; \underline{j})$

A Maxwell-egyenletek:

homogén: $\mathrm{div}\,\underline{B} = 0$ és $\mathrm{rot}\,\underline{E} = -\partial_t \underline{B} \Rightarrow$

inhomogén: $\mathrm{div}\,\underline{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$ és $\mathrm{rot}\,\underline{B} = \mu_0\underline{j} + \frac{1}{c^2}\partial_t\underline{E} \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{gathered} \partial_l F_{;ik} + \partial_k F_{li} + \partial_i F_{kl} = 0 \\ F^{;ik}_{;k} = -\frac{j^i}{\varepsilon_0 c^2} \end{gathered}}$$

Töltött részek mozgása EM és gravi terében:

$$\boxed{m\left(\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{kl}u^k u^l\right) = q F^{;ik} u_k}$$

6. Görbület: tenzor

<u>Görbület: tenzor:</u> lokálisan jellemzi a teljes görbületet.

párhuzamos eltolás zárt görbe mentén: $\Delta_l A_k = \oint \delta A_k = \oint \Gamma^i_{lk} A_i \, \delta x^l$

A Stokes tétel alkalmazása: $\oint A_i \, dx^i = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^l} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) df^{ik}$

$\left(\oint_\Gamma \underline{F} \, d\underline{r} = \iint_S \nabla \times \underline{F} \, d\underline{S} \right)$

ahol: $df^{ik} = dx^{(1)i} \, dx^{(2)k} - dx^{(1)k} \, dx^{(2)i} \sim dx^{(1)} \times dx^{(2)}$ antisimmetrikus! ; parallelogramma.

így:

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} \int \frac{\partial (\Gamma^i_{lm} A_i)}{\partial x^l} - \partial \Gamma$$