ÁLTALÁNOS RELATIVITÁSELMÉLET 02.15.

IRODALOM: Landau-Lifsic II.

Hraskó Péter könyvei

Perjés Zoltán: Általános relativitáselmélet

nedumuu.

1.1. Előzmény: speciális relativitáselmélet:

- vonatkoztatási rendszer, inerciarendszer
- esemény → 4 koordináta
- Lorentz transzformáció $x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, $y' = y$, $z' = z$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- klasszikus elektrodinamika egyenletei invariánsak
- fénysebesség minden inerciarendszerben ugyanaz
- nincs kitüntetett inerciarendszer → minden természeti tv. ugyanolyan alakú inerciarendszerekben (relativitás elve)

→ a Lorentz-transzformáció a téridő tulajdonsága

- ívhossz: $s^2 = c^2t^2 - \underline{r}^2 = c^2t'^2 - (\underline{r}')^2$

invariancia:

$$s'^2 = \frac{c^2\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{(x - vt)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - y^2 - z^2 =$$

$$= \frac{c^2t^2 - \cancel{2vxt} + \frac{v^2}{c^2}x^2 - x^2 + \cancel{2xvt} - v^2t^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - y^2 - z^2 =$$

$$= \frac{c^2t^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - x^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - y^2 - z^2 =$$

$$= c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$ valóban invariáns

- ívhossz invarianciája következik a relativitás elvéből és a fénysebesség állandóságából

fényre: $s = 0 \Leftarrow |r| = ct$

$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$

$dt = t_2 - t_1 \rightarrow$ nincs kitüntetett irány

$ds'^2 = a(v^2_{KK'})\, ds^2$ $\quad v \to KK'$ relatív sebessége

$ds''^2 = a(v^2_{KK''})\, ds^2$ $\quad v \to KK''$

$ds''^2 = a(v^2_{K'K''})\, ds'^2$ $\quad v \to K'K''$

$= a(v^2_{K'K''})\, a(v^2_{KK'})\, ds^2$

$a(v^2_{KK''}) = a(v^2_{K'K''})\, a(v^2_{KK'})$

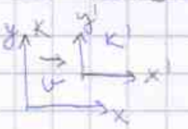
szögtől is függne ⇒ konstansnak kell lenni ⇒ 1

$c^2 dt^2 - dx^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2$

$ch^2\varphi - sh^2\varphi = 1$ felhasználásával

$$\left.\begin{aligned} ct' &= ct\, ch\varphi + x\, sh\varphi \\ x' &= x\, ch\varphi + ct\, sh\varphi \end{aligned}\right\}$$ ez esetben jól kijön $c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$

kis sebességekre vissza kell kapni a Galilei-trafót



$x = vt$ a K' origójának mozgása

$x' = 0 \qquad x\, ch\varphi = -ct\, sh\varphi$

$vt\, ch\varphi = -ct\, sh\varphi$

$\left[th\varphi = -\frac{v}{c}\right] \qquad ch\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - th^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Lorentz-tr. $\qquad sh\varphi = \frac{th\varphi}{\sqrt{1 - th^2\varphi}} = \frac{v/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

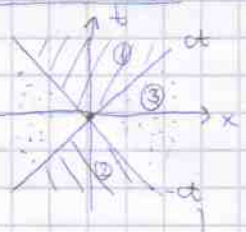
- 4es koordináták: $x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z$

$s^2 = g_{ik} x^i x^k$

↳ metrikus tenzor $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

- sajátidő: $\tau^2 = t^2 - \frac{r^2}{c^2} = \frac{s^2}{c^2}$ invariáns

- Minkowski - tér



① abszolút jövő
② abszolút múlt } $s^2 > 0$

③ térszerűen elválasztott pontok $s^2 < 0$

↳ fényszerű ívhossz $s^2 = 0$

- egyidejűség relatív

$\Delta t' = 0$, $t = \dfrac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ $\rightarrow$ $\Delta t = \dfrac{\frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ nem nulla, ha $\Delta x' \neq 0$

- Lorentz kontrakció

K-ban $(0,0)$ és $(0,L)$ méterrúd végei

K'-ben $(0,0)$ és (t',L_0)

$L_0 = \dfrac{L}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ $L = L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

- idődilatáció : mozgó óra $K \rightarrow (0,0) \rightarrow (t,x)$

együttmozgó $K' \rightarrow (0,0) \rightarrow (\tau,0)$

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

- ikerparadoxon

- sebességek transzformációja : $v_x = \dfrac{v_x' + V}{1 + \frac{v_x' V}{c^2}}$

inverz Lorentz - trafóból

$t = \dfrac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ $x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ $\Rightarrow$ $v_x = \dfrac{x' + Vt'}{t' + \frac{V}{c^2}x'} = \dfrac{v_x' + V}{1 + \frac{v_x' V}{c^2}}$

$y = y'$ $\Rightarrow$ $v_y = \dfrac{v_y'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_x' V}{c^2}}$

$z = z'$ $\Rightarrow$ $v_z = \dfrac{v_z'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_x' V}{c^2}}$

megváltozik a sebesség iránya

- 4es vektorok : (t, x, y, z) Lorentz - transzformálódnak
(E, p_x, p_y, p_z)
(Φ, A_x, A_y, A_z)

- 4es sebesség : $u^i = \dfrac{dx^i}{d\tau}$ $u = \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \dfrac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$

- 4es impulzus: $p^i = mu^i$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$ időszerű komponens az energia

- legkisebb hatás elve

$$S = -mc\int_a^b ds \rightarrow S = \int_a^b L\,dt \rightarrow L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$
$$= -mc\frac{ds}{dt}$$

mozgásegyenletet $\frac{dp^i}{ds} = 0$

$\frac{v}{c} \ll 1$ esetén visszakapjuk a klasszikust

1.2. Gyorsuló koordinátarendszeret

- Forgó koordinátarendszerben megmérve a mérőrúddal a korong kerületét $\rightarrow \frac{\text{sugár}}{\text{kerület}} = \frac{1}{2\pi}$ lenne, de nem jön ki $\Rightarrow$ gyorsuló koordinátarendszerben nem euklideszi a geometria
- ívelemnégyzet:

$$ds^2 = [c^2 - \omega^2 x'^2 - y'^2]dt^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + 2\omega y' dx' dt - 2\omega x' dy' dt$$

- ívelemnégyzet invariáns (skalár), de a koordinátadifferenciálokkal kifejezett alak más és más
- metrikus tenzor általánosan

$$ds^2 = g_{ik}\,dx^i dx^k$$

- ekvivalencia elve: tehetetlen és súlyos tömeg egyforma
- görbevonalú koordináták
- gravitációs térben is ugyanúgy, mint gyorsuló rendszerben változik a metrikus tenzor
- kis távolságokon nem tudjuk, hogy gyorsuló rendszerben v. gravitációs térben vagyunk

- görbevonalú koordináták: $x^i = f^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k \qquad (\Sigma_k)$$

homogén lineáris összefüggés

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k$$ kontravariáns 4esvektor

kontravariáns metrikus tenzor: g^{ik}

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^{\,j}$$ Kroenecker - delta

- kovariáns 4esvektor úgy transzformálódik, mint egy skalár deriváltja: $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}$

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k$$

$$A_i B^i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} B'^j = \delta_j^{\,k} A'_k B'^j = A'_k B'^k \Rightarrow \text{skalár}$$

$$\frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} = \frac{\partial x'^k}{\partial x'^j} = \delta^k_{\,j}$$

- négyestenzor → úgy transzformálódik, mint két négyes-vektor szorzata

$$A_i B_j = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k \frac{\partial x'^l}{\partial x^j} B'_l = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial x'^l}{\partial x^j} A'_k B'_l$$

$$g_{ij} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial x'^l}{\partial x^j} g'_{kl}$$

$$g_{ij}\, dx^i dx^j = ds^2 = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial x'^l}{\partial x^j} g'_{kl} \frac{\partial x^i}{\partial x'^p} dx'^p \frac{\partial x^j}{\partial x'^q} dx'^q =$$

$$= \delta^k_p \delta^l_q g'_{kl}\, dx'^p dx'^q = g'_{kl}\, dx'^l dx'^k$$ valóban jó

- távolságot és időtartamot

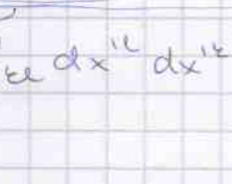
órán eltelt idő dx^0

$dx^{1,2,3} = 0$

valódi eltelt idő $d\tau = \frac{ds}{c} = \frac{\sqrt{g_{00}(dx^0)^2}}{c} = \frac{\sqrt{g_{00}}}{c} dx^0$

ezt lehet integrálni

két pont távolsága:



$$ds^2 = 0 = g_{00}(dx^0)^2 + 2 g_{0\alpha} dx^0 dx^\alpha + g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3$$

↳ fénysugár

$$(dx^0)_{1,2} = \frac{-g_{0\alpha}\,dx^\alpha \pm \sqrt{(g_{0\alpha}dx^\alpha)^2 - g_{00}\,g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta}}{g_{00}}$$

$$\Delta x^0 = (dx^0)_2 - (dx^0)_1 = \frac{2\sqrt{}}{g_{00}}$$

$$dl = \frac{\sqrt{(g_{0\alpha}dx^\alpha)^2 - g_{00}\,g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta}}{c\sqrt{g_{00}}}$$

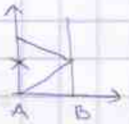
$$\frac{g_{0\alpha}\,g_{0\beta}}{g_{00}} - g_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}$$ térbeli metrika

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta$$

02.22.

- <u>egyidejűség</u>, órák szinkronizálása

átlagot vesszük $\Delta x^0 = -\frac{g_{0\alpha}dx^\alpha}{g_{00}}$



- $\gamma_{\alpha\beta} = \frac{g_{0\alpha}\,g_{0\beta}}{g_{00}} - g_{\alpha\beta}$ $\qquad \gamma^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta}$

$$\gamma_{\alpha\beta}\,\gamma^{\beta\delta} = \delta_\alpha^{\ \delta}$$

↑ inverz def. szerint

$$= \underbrace{(-g_{\alpha\beta})(-g^{\beta\delta})}_{g_{\alpha\beta}g^{\beta\delta}} + \underbrace{\frac{g_{0\alpha}\,g_{0\beta}}{g_{00}}(-g^{\beta\delta})}_{g_{0\alpha}\,g^{0\delta}} = g_{\alpha i}\,g^{i\delta} = \delta_\alpha^{\ \delta}$$

$$g_{0\alpha} = g_{\alpha 0}$$

$$\delta_i^{\ k} = g_{ij}\,g^{jk}$$

$$0 = g_{0j}\,g^{j\delta} = g_{00}\,g^{0\delta} + g_{0\beta}\,g^{\beta\delta} \Rightarrow g^{0\delta} = -\frac{g_{0\beta}\,g^{\beta\delta}}{g_{00}}$$

- $\det(g_{ij}) = g =$

$$= g_{00}\det(-\gamma_{\alpha\beta}) = g_{00}\cdot(-\gamma)$$

$$\boxed{-g = g_{00}\,\gamma}$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \end{matrix}$$

$$\underbrace{g_{\alpha\beta} - \frac{g_{\alpha 0}}{g_{00}}\,g_{0\beta}}_{-\gamma_{\alpha\beta}}$$

- <u>invariáns térfogatelem</u>:

$dx'^0\,dx'^1\,dx'^2\,dx'^3 = d\Omega'$ térfogatelem Minkowski térben

áttérünk görbe vonalú koordinátákra

$$d\Omega' = \underbrace{\det\left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right)}_{J} \underbrace{dx^0 dx^1 dx^2 dx^3}_{d\Omega}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}$$

görbevonalú

$$g'_{ij} = g_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x^l}{\partial x'^j} \qquad g_{kl} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l}\, g'_{ij}$$

lokálisan Minkowski rendszer

$$M^i{}_k \quad M^j{}_l$$

$$g_{kl} = (M^T)_k{}^i\, g'_{ij}\, M^j{}_l \qquad \underline{\underline{g}} = \underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{g}}' \underline{\underline{M}}$$

vegyük a determinánst : $g = J(-1)J$

$$\boxed{J = \sqrt{-g}}$$

invariáns térfogatelem $= \sqrt{-g}\,d\Omega$

2.2. **Példa**: $ds^2 = (c^2-\omega^2r^2)dt^2 - 2\omega r^2 d\varphi\, dt - dz^2 - r^2 d\varphi^2 - dr^2$

metrika determinánsa negatív → valódi téridő

időtartam : $\tau = \sqrt{1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}}\; t$ adott r-re

↑ sajátidő korongon ↑ inerciarendszerben mért idő

korongról jövő fény vöröseltolódást szenved, ha inerciarendszerből nézzük

$ct = x^0,\ r = x^1,\ \varphi = x^2,\ z = x^3$

$g_{00} = 1-\frac{\omega^2r^2}{c^2},\ g_{11}=-1,\ g_{22}=-r^2,\ g_{33}=-1,\ g_{02} = -\frac{\omega r^2}{c}$

$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}$

$\gamma_{11} = 1,\ \gamma_{33} = 1,\ \gamma_{22} = +r^2 + \frac{\omega^2r^4/c^2}{1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}} = \frac{r^2}{1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}}\left(1-\cancel{\frac{\omega^2r^2}{c^2}}+\cancel{\frac{\omega^2r^2}{c^2}}\right)$

$dl^2 = dr^2 + dz^2 + \frac{r^2 d\varphi^2}{1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}}$

kerület $= \frac{2\pi R}{\sqrt{1-\frac{R^2\omega^2}{c^2}}}$ $\qquad \frac{\text{kerület}}{\text{sugár}} > 2\pi$

szinkronizálás zárt görbe mentén nem lehetséges

$\Delta t = -\frac{1}{c}\oint\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}dx^\alpha = \frac{1}{c^2}\oint\frac{\omega r^2 d\varphi}{1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}} \approx \frac{\omega}{c^2}\oint r^2 d\varphi = \pm\frac{2\omega}{c^2}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{terület}}}{S}$

2.3 Mozgás görbült téridőben

- a metrikus tenzor → szimmetrikus
  → 10 független komponens
  → ± szignatúra
- görbült téridő: a metrikus tenzor nem hozható mindenütt Minkowski alakúra
- kovariáns differenciálás

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k \quad \text{vektor transzformációja}$$

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k\, d\frac{\partial x'^k}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l} dx^l$$

dA_i nem vektorként transzformálódik, mivel nem minden pontban ugyanaz a transzformáció

párhuzamos eltolás:

$$DA^i = (A^i + dA^i) - (A^i + \delta A^i) = dA^i - \delta A^i$$

vektor függ a koordinátáktól; párhuzamos eltolásból következő megváltozás

infinitezimális eltolás δA^i lineáris f-e a vektorkomponenseknek és az eltolásnak

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{kl} A^k dx^l$$

$$dA^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} dx^j$$

Γ^i_{kl} = Christoffel-szimbólumok (v. affin kapcsolat)
↳ nem alkotnak tenzort

pl. Minkowski-térben $\emptyset$-t, de görbült téridőben ≠0

$$\delta(B^i A_i) = 0$$

$$\underbrace{\delta B^i}_{-\Gamma^i_{kl} B^k dx^l} A_i + B^i \delta A_i = 0$$

$$-\Gamma^k_{il} B^i dx^l A_k - B^i \delta A_i = 0$$

$$B^i(\delta A_i - \Gamma^k_{il} A_k dx^l) = 0$$

tetszőleges B^i-re

$$\delta A_i = \Gamma^k_{il} A_k dx^l$$