Matematika szintfelmérő 2015. szeptember matematika, fizika és … tanárszak MO

1. Legyen az A halmaz a 30-nál nem nagyobb pozitív egész számok halmaza. Legyen a B halmaz az 1-nél nagyobb, de 34-nél kisebb páratlan számok halmaza, végül legyen a C halmaz a prímszámok halmaza. Hány elemből állnak az alábbi halmazok? 10 pont

a) $(A \setminus B) \cap C$ b) $(B \cap C) \setminus A$ c) $(A \cup B) \cap C$

Megoldás

a) Az $A \setminus B$ halmaz elemei a 30-nál nem nagyobb páros számok halmaza. Mivel az egyetlen páros prímszám a 2, ezért az $(A \setminus B) \cap C$ halmaznak egyetlen eleme van: a 2.

b) A $(B \cap C)$ halmaz elemei a 34-nél kisebb páratlan prímszámok: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31. Ezek szerint a $(B \cap C) \setminus A$ halmaznak egyetlen eleme van: a 31.

c) Az $A \cup B$ halmaz elemei: 1-től 30-ig a pozitív egész számok, valamint a 31 és a 33. Így az $(A \cup B) \cap C$ halmaz elemei**:** a 31-nél nem nagyobb prímszámok: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, tehát e halmaznak 11 eleme van.

2. Határozza meg az $x^2-(p-2)x+\frac{p^2}{4}+p+2=0$ egyenletben szereplő p paraméter értékét úgy, hogy az egyenletnek pontosan egy valós megoldása legyen. 12 pont

Megoldás

A másodfokú egyenletnek akkor van pontosan egy valós megoldása, ha 0 a diszkriminánsa:

$$(p-2)^2-4\cdot\left(\frac{p^2}{4}+p+2\right)=0.$$

Elvégezzük a műveleteket: $p^2-4p+4-p^2-4p-8=0.$

Rendezzük: $8p=-4$, azaz $p=-\frac{1}{2}$.

Az egyenlet ekkor $\left(x+\frac{5}{4}\right)^2=0$ alakú, a magoldása $x=-\frac{5}{4}$.

3. Határozza meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a kifejezések értelmezhetők: 12 pont

a) $\lg\left(5-|x|\right)$ *5 pont*

Megoldás

a) $5-|x|>0$, azaz $|x|<5$, ahonnan $-5<x<5$.

b) $\log_3(x^2+x-12)$ *7 pont*

Megoldás

A logaritmusfüggvény pozitív valós számokra van értelmezve, ezért $x^2+x-12>0$. Az x^2+x-12 másodfokú kifejezés zérushelyi: $x_1=-4$ és $x_2=3$, a közbülső intervallumon negatív, a kiegészítő félegyeneseken pozitív.

A kifejezés tehát akkor van értelmezve, ha $x<-4$ vagy $x>3$.

4. Oldja meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán: 12 pont

$$\sqrt{x^2+3(x+y)-3xy}=3, \qquad x^2-2xy=0$$

Megoldás

Az egyenletrendszer második egyenletéből $x(x-2y)=0$, ami akkor teljesül, ha $x=0$ vagy ha $x=2y$.

Ha $x=0$, akkor az első egyenlet: $\sqrt{3y}=3$, azaz $3y=9$, ahonnan $y=3$.

Ha $x=2y$, akkor az első egyenlet: $\sqrt{4y^2+9y-6y^2}=3$, ahonnan $9y-2y^2=9$,

azaz $2y^2-9y+9=0$. Ennek a gyökei $y_{1,2}=\dfrac{9\pm\sqrt{81-72}}{4}=\dfrac{9\pm3}{4}$,

azaz $y_1=3$ és $y_2=\dfrac{3}{2}$.

Tehát az eredeti egyenletrendszernek három számpár a megoldása:

$x_1=6$ és $y_1=3$, $x_2=3$ és $y_2=\dfrac{3}{2}$, valamint $x_3=0$ és $y_3=3$.

5. Egy forgalmas kereszteződésben a jelzőlámpa minden reggel pontban 6 órakor vált először zöldre, majd 2 perc 30 másodpercenként újra és újra. 14 pont

a) Mikor fog a lámpa 101. alkalommal is zöldre váltani? *4* pont

Megoldás

10 óra 10 perckor

b) Hányszor fog zöldre váltani a lámpa 7 óra 12 percig? *5* pont

Megoldás

29 alkalommal

c) Mennyi idő telik el a 14. és a 28. zöldre váltás között? *5* pont

Megoldás

35 perc

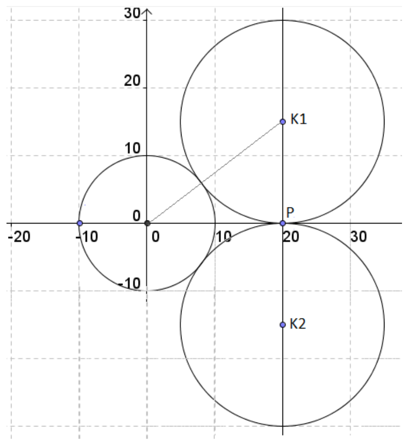
6. Adott egy kör a koordináta-rendszer síkjában, amelynek a középpontja az origóban van és a sugara 10 egység. Határozza meg azoknak a köröknek az egyenletét, amelyek érintik ezt a kört, valamint érintik az x tengelyt a (20; 0) pontban. 12 pont

Megoldás

A feladat szimmetriájából következik, hogy egy kör és annak az x tengelyre vonatkozó tükörképe is megoldás.

A kör középpontjának koordinátái $(20;\pm r)$, mivel érinti az x tengelyt.

Az érintkező körök középpontja és az érintési pont egy egyenesen van és mivel a (20;0) pont külső pont az adott körre nézve, és az adott körnek az x tengely által alkotott mindkét félsíkban van pontja, csak a sugarak összege lehet a centrális.



A Pitagorasz-tétel alapján: $20^2 + r^2 = (r + 10)^2$, amiből $r = 15$.

A két kör egyenlete:

$(x - 20)^2 + (y - 15)^2 = 225$ és $(x - 20)^2 + (y + 15)^2 = 225$.

7. Egy papírszalagból két párhuzamos vágással egy rombuszt vágtunk ki. A rombusz átlóinak hossza 5 cm és 12 cm. Milyen széles volt a papírszalag? 13 pont

Megoldás

A kivágott rombusz területét felírjuk az átlókkal, valamint az oldal és a hozzá tartozó magasság szorzataként is. (Mindenütt a centiméterben megadott hosszúságokkal számolunk.)

A terület az átlókból számolva: $T = \dfrac{5 \cdot 12}{2} = 30$.

A papírszalag x szélessége a rombusz magassága. A rombusz oldalait Pitagorasz-tétellel számítjuk ki, hiszen az átlók merőlegesen felezik egymást:

$$a = \sqrt{2{,}5^2 + 6^2} = 6{,}5.$$

A paralelogramma területe: $T = 6{,}5x$.

Mivel $6{,}5x = 30$, ezért $x \approx 4{,}62$. A papírszalag szélessége kb. 4,62 cm.

8. Egy játékbábu áll a számegyenesen a 0 pontban. Minden lépésben egy szabályos pénzérme feldobásával döntünk a sorsáról: fej esetén 2-t lép pozitív irányba, míg írás esetén 1-et negatív irányba. Ötször feldobjuk a pénzérmét és az eredménynek megfelelően lépünk. Milyen valószínűséggel lesz a bábu ez után az 5 lépés után a [-10;10] intervallum egyes pontjaiban? 15 pont

Megoldás

2^5= 32 féle 5 dobásból álló sorozat létezik.

Fejek száma	Írások száma	Sorozatok száma	Mennyit lép összesen?	Mennyi a valószínűsége?
5	0	1	10	$P(10) = 1/32$
4	1	5	7	$P(7) = 5/32$
3	2	10	4	$P(4) = 10/32$
2	3	10	1	$P(1) = 10/32$
1	4	5	-2	$P(-2) = 5/32$
0	5	1	-5	$P(-5) = 1/32$

$P(-5) = P(10) = \frac{1}{32}$, $P(-2) = P(7) = \frac{5}{32}$, $P(1) = P(4) = \frac{10}{32}$ *és az intervallum többi pontjára érkezés valószínűsége 0.*