1. VEKTOREGYENLETEK

$\underline{a}$,$\underline{b}$ adott vektor
α adott skalár
$\underline{y}$ ismeretlen vektor

1.1 $\underline{a}\times\underline{y} = \underline{b}$
$\underline{a}\,\underline{y} = \alpha$

1.2 $\underline{a}\times\underline{y} = \underline{b}$
$\underline{b}\,\underline{y} = \alpha$

1.3 $(\underline{y}+\underline{a})\times(\underline{y}+\underline{b}) = \alpha(\underline{a}\times\underline{b})$

1.4 $(\underline{y}+\underline{a})\times(\underline{y}+\underline{b}) = \alpha(\underline{a}\times\underline{b})\times\underline{y}$

1.5 $(\underline{y}+\underline{a})\times(\underline{y}+\underline{b}) = \alpha\underline{y}$

1.6 $\underline{y} = \underline{a}\times(\underline{y}+\underline{b})$

1.7 $\underline{y} = \underline{a}\times(\underline{y}+\underline{a}\times\underline{y})$

1.8 $\underline{a}\times\underline{y} = \underline{b}$
$\underline{b}\times\underline{y} = \alpha\underline{a}$

Mi a mértani helye a következő vektoregyenletek megoldásvektorai végpontjainak?

1.9 $\underline{y} = [(\underline{a}\times\underline{y})\times\underline{y}]\times(\underline{a}\times\underline{y})$

1.10 $\underline{y}\times\underline{a} = [(\underline{a}\times\underline{y})\times\underline{y}]\times[(\underline{a}\times\underline{y})\times\underline{a}]$

Van-e közös pontja a két mértani helynek?

1.11 $\underline{y} = \underline{a}\times(\underline{y}+\underline{b})+\underline{a}$
$\underline{y}\,\underline{b} = \underline{a}^2$

1.12 $\underline{a}\times\underline{y} = \underline{a}\times(\underline{y}\times\underline{b})$

1.13 $(\underline{y}+\underline{a})\times(\underline{y}-\underline{a}) = (\underline{a}\times\underline{b})\times\underline{y}+(\underline{y}\times\underline{b})$

1.14 $\underline{y} = \underline{b}-\underline{a}\times(\underline{a}\times\underline{y})$

---

2. TÜKRÖZÉSEK, VETÍTÉSEK

2.1 A sík egy **A** pontjának a helyvektora $\underline{r}$
Állítsuk elő:
- az adott **B** pontra vett tükröztjének
- az adott $\underline{a}$ irányvektorú egyenesre vett merőleges tükröztjének
- ez utóbbi 90 fokos elforgatottjának (az origó körül)
- az $\underline{e}$ irányvektorú egyenesre az $\underline{f}$ irányú egyenessel párhuzamosan vett vetületének
- az utóbbi 90 fokos elforgatottjának helyvektorát!

2.2 Két sík hegyesszögben metszi egymást. Határozd meg az egyes síkokra vetítő ill. tükröző $\mathbf{P_1}$,$\mathbf{P_2}$,$\mathbf{T_1}$,$\mathbf{T_2}$ műveletek algebrájának szabályait!
(pl. igaz-e, hogy $\mathbf{P_1T_2 = T_2P_1}$ **)**

2.3 Egy sík normálvekrota $\underline{n}$, egy pontjának helyvektora $\underline{a}$. Tükrözd a **Q** pontot a síkra. Függ-e a tükrözött **Q'** pont helyvektora $\underline{a}$-tól?
Értelmezd a választ algebrailag és geometriailag is!

---

3. KOMPLEX SZÁMOK

3.1 Legyen z = 1-i! Számítsd ki:

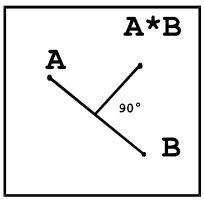
|z|, arc z, z*, zz*, 1/z

$e^{z}_{\delta_{kl}}$, e^{iz} , ln z, $\log_{(1+i)} z$, z^{z}

sin z, sin (iz), $\sqrt{z}$, $\sqrt[4]{z}$

Ábrázold az eredményeket a komplex számsíkon!

3.2 A sík pontjai között értelmezzük a következő műveleteket:



a két pont közti szakaszfelezőből kiinduló merőlegesre felmérjük az **AB** távolság felét. A kapott pontot jelölje **A*B**
- Igazoljuk a komplex számok segítségével, hogy bármely **A**,**B**,**C**,**D** pontra
  (**A*B**)*(**C*D**) = (**A*C**)*(**B*D**)
- Kommutatív, asszociatív-e a művelet?
- Igazoljuk, hogy bármely **A**,**B**,**C** pontra az
  (**A*B**)***C**, (**B*C**)***A**, (**C*A**)***B**

pontok által alkotott háromszög súlypontja egybeesik az eredeti **A**,**B**,**C** pontok által alkotott háromszög súlypontjával!

3.3 Van-e a komplex számok között megoldása a
sin(z) = z egyenletnek?

---

4. ELEMI VEKTORMŰVELETEK

4.1 Fejezd ki a háromszög területét három oldalával!

4.2 Fejezd ki a tetraéder térfogatát hat élével!

4.3 Írd fel egy gömb vektoregyenletét!

4.4 Bizonyítsd be:
($\underline{a}$ $\underline{b}$)($\underline{c}$x$\underline{d}$)-($\underline{b}$ $\underline{c}$)($\underline{a}$ $\underline{d}$) = ($\underline{a}$x$\underline{b}$)($\underline{c}$x$\underline{d}$)

4.5 Igazold:
($\underline{a}$ $\underline{b}$)($\underline{c}$x$\underline{d}$)+($\underline{a}$ $\underline{c}$)($\underline{d}$x$\underline{b}$)+($\underline{a}$ $\underline{d}$)($\underline{b}$x$\underline{c}$) = $\underline{a}$($\underline{b}$ $\underline{c}$ $\underline{d}$)

4.6 a,b,c nem egy síkba eső vektorok közös kezdőponttal. Mutasd meg, hogy a három vektor végpontjára illeszkedő sík merőleges a következő vektorra:
$\underline{N}$ = $\underline{a}$x$\underline{b}$+$\underline{b}$xÐ[][Ð[Ð[]
(Sajnos a sor további része a forrásfileban meghibásodott. Pótold a hiányt!)

4.7 A síkbeli vektorok között értelmezhetjük a következő <u>számértékű</u> "vektoriális" szorzatot:
$\underline{a}$*$\underline{b}$ = a_1b_2-a_2b_2
Vizsgáld meg a műveleti szabályokat! (Pl. igaz-e: ($\underline{a}$x$\underline{b}$)$\underline{c}$ = $\underline{a}$($\underline{b}$x$\underline{c}$) ?)
Írd le a műveleteket a kétindexes Levi-Civita szimbólummal! (5.2 feladat) Milyen fizikai feladatokban használhatod a *-gal jelölt műveletet? Mi a * művelet háromdimenziós analogonja? Invariáns-e a kétdimenziós * művelet a koordinátarendszer elforgatására? És tükrözésére?

4.8 Az n-dimenziós térben adott n db lineárisan nem összefüggő $\underline{u}^{k}$ vektor. Határozzuk meg a reciprok vektorrendszer $\underline{v}^{l}$ vektorait! ($\underline{u}^{k}\underline{v}^{l} = \delta_{kl}$)

---

5. INDEXES ÍRÁSMÓD

5.1 $\sum_{k} \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{klm}$ $\qquad \sum_{ik} \varepsilon_{ikl}\, \delta_{ik}$

$\sum_{ik} \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{ilk}$ $\qquad \sum_{i} \delta_{ij}\, \delta_{ik}$

$\sum_{ikl} \varepsilon_{ikl}\, \varepsilon_{ikl}$ $\qquad \sum_{ik} \delta_{ik}\, \delta_{ik}$

$\sum_{ikm} \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{klm}\, \varepsilon_{mni}$

5.2 Értelmezzük a kétdimenziós ε_{ik} Levi-Civita szimbólumot!

$\sum_{j} \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{jk}$ $\qquad \sum_{jk} \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{jk}\, \varepsilon_{kl}$ $\qquad \sum_{ij} \varepsilon_{ij}\, \delta_{ji}$

5.3 Értelmezzük a négydimenziós térben az ε_{ijkl} Levi-Civita szimbólumot!

$\sum_{l} \varepsilon_{ijkl}\, \varepsilon_{lmnp}$ $\qquad \sum_{ij} \varepsilon_{ijkl}\, \varepsilon_{ijpq}$ $\qquad \sum_{ijk} \varepsilon_{ijkl}\, \varepsilon_{ijkm}$

$\sum_{ijkl} \varepsilon_{ijkl}\, \varepsilon_{lkji}$ $\qquad \sum_{ilp} \varepsilon_{ijkl}\, \varepsilon_{lmnp}\, \varepsilon_{pqri}$

5.4 Értelmezd az n-dimenziós térben az m-indexes $\delta_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ általánosított Kronecker-deltát! Dolgozd ki a műveletei szabályokat!

5.5 Igazold a 4.4-4.5 azonosságokat indexes írásmódban!

---

6. DETERMINÁNSOK

6.1
$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} & & & & & \mathbf{b} \\ & \mathbf{a} & & & \mathbf{b} & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & \mathbf{b} & & & \mathbf{a} & \\ \mathbf{b} & & & & & \mathbf{a} \end{vmatrix}$$
a determináns páros (2n) rendű, a ki nem írt helyeken 0 áll.

6.2
$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & . & . & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & . & . & (n-1) \\ 1 & x & 1 & 2 & 3 & . & . & (n-2) \\ 1 & x & x & 1 & 2 & . & . & (n-3) \\ . & x & & & & & & . \\ . & & & & & & & . \\ . & & & & & & 1 & 2 \\ 1 & x & x & x & . & . & x & 1 \end{vmatrix}$$

6.3
$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & . & . & n \\ x & 1 & 2 & 3 & 4 & . & . & (n-1) \\ x & x & 1 & 2 & 3 & . & . & (n-2) \\ x & x & x & 1 & 2 & . & . & (n-3) \\ . & x & & & & & & . \\ . & & & & & & & . \\ . & & & & & & 1 & 2 \\ x & x & x & x & . & . & x & 1 \end{vmatrix}$$

6.2

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & . & . & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & . & . & (n-1) \\ 1 & x & 1 & 2 & 3 & . & . & (n-2) \\ 1 & x & x & 1 & 2 & . & . & (n-3) \\ . & x & & & & & & . \\ . & & & & & & & . \\ . & & & & & & 1 & 2 \\ 1 & x & x & x & . & . & x & 1 \end{vmatrix}$$

6.3

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & . & . & n \\ x & 1 & 2 & 3 & 4 & . & . & (n-1) \\ x & x & 1 & 2 & 3 & . & . & (n-2) \\ x & x & x & 1 & 2 & . & . & (n-3) \\ . & x & & & & & & . \\ . & & & & & & & . \\ . & & & & & & 1 & 2 \\ x & x & x & x & . & . & x & 1 \end{vmatrix}$$

6.4

$$g(x)=\begin{vmatrix} x & 0 & (-1) & 1 & 0 \\ 1 & x & (-1) & 1 & 0 \\ 1 & 0 & (x-1) & 0 & 1 \\ 0 & 1 & (-1) & x & 1 \\ 0 & 1 & (-1) & 0 & x \end{vmatrix}$$

6.5

$$\begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-g) & \cos(g-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+g) & \cos(g+a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+g) & \sin(g+a) \end{vmatrix}$$

6.6

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & . & . & (n-1) & n \\ 1 & 3 & 3 & 4 & . & . & (n-1) & n \\ 1 & 2 & . & 4 & . & . & (n-1) & n \\ 1 & 2 & 3 & 7 & . & . & (n-1) & n \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 2 & 3 & 4 & . & . & (2n-3) & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & . & . & (n-1) & (2n-1) \end{vmatrix}$$

6.7

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & . & . & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & . & . & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & . & . & . & . \\ 2 & . & . & 4 & . & . & . & . \\ . & & & & . & & & \\ . & & & & & (n-2) & & \\ . & & & & & & (n-1) & \\ 2 & 2 & 2 & . & . & . & 2 & n \end{vmatrix}$$

6.8

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$$

6.9

$$\begin{vmatrix} (a+b) & (ab) & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 1 & (a+b) & (ab) & & & & & 0 \\ 0 & 1 & (a+b) & . & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & & . & . & . & & . \\ . & & & & . & . & (ab) & . \\ . & & & & & 1 & (a+b) & (ab) \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 1 & (a+b) \end{vmatrix}$$

6.10 Bizonyítsuk be:

$$\mathbf{f}_n(a,b,c)=\begin{vmatrix} b & a & & & & & \\ c & b & a & & & & \\ & c & b & . & & & \\ & & . & . & . & & \\ & & & . & . & . & \\ & & & & . & . & a \\ & & & & & c & b & a \\ & & & & & & c & b \end{vmatrix}=\frac{\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}}{2^{n+1}D},$$

ahol $\lambda_1 \rangle \lambda_2$ az $ax^2+bx+c=0$ másodfokú egyenlet két gyöke, **D** pedig az egyenlet diszkriminánsa. Vizsgáljuk meg a $D \longrightarrow 0$ határesetet!

6.11

$$\mathbf{f}_n(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ (-n) & (x-2) & 2 & & & & & . \\ 0 & (-n+1) & (x-4) & 3 & & & & . \\ . & & (-n+2) & (x-6) & 4 & & & . \\ . & & & . & . & . & & . \\ . & & & & . & . & . & . \\ . & & & & & . & . & (n-1) \\ 0 & . & . & . & . & . & (-1) & (x-2n-1) \end{vmatrix}$$

6.12

$$\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix}$$

6.14

$$\mathbf{A}_n(\alpha)=\begin{vmatrix} 2\cos\alpha & -1 & & & \\ -1 & 2\cos\alpha & . & & \\ & . & . & . & \\ & & . & . & -1 \\ & & & -1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$$

Vezessük vissza $\mathbf{A}_{n-1}(\alpha)$-ra!

6.15

$$\mathbf{B}_n(\alpha)=\begin{vmatrix} (2\cos\alpha-1) & -1 & & & \\ -1 & 2\cos\alpha & . & & \\ & . & . & . & \\ & & . & . & -1 \\ & & & -1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$$

Vezessük vissza $\mathbf{A}_n(\alpha)$-ra!

6.16

$$\mathbf{C_n}(\alpha)=\begin{vmatrix} (2\cos\alpha-1) & -1 & & & & \\ -1 & 2\cos\alpha & -1 & & & \\ & -1 & . & . & & \\ & & . & . & . & \\ & & & . & 2\cos\alpha & -1 \\ & & & & -1 & (2\cos\alpha-1) \end{vmatrix}$$

Vezessük vissza $\mathbf{A_n}(\alpha)$ -ra!

6.17

$$\mathbf{D_n}(\alpha)=\begin{vmatrix} 2\cos\alpha & -1 & 0 & . & . & 0 & -1 \\ -1 & 2\cos\alpha & -1 & & & & 0 \\ 0 & -1 & . & . & & & . \\ . & & . & . & . & & . \\ . & & & . & . & -1 & 0 \\ 0 & & & & -1 & 2\cos\alpha & -1 \\ -1 & 0 & . & . & 0 & -1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$$

Vezessük vissza $\mathbf{A_n}(\alpha)$ -ra!

6.18

Vizsgáljuk meg a fenti (6.14-6.17) feladatokat, a $\cos(\alpha)\to\mathrm{ch}(\alpha)$ cserével! Végezzük el az $\alpha\to 0$ határátmenetet is! Keressük meg a determinánsokkal definiált $\mathbf{A_n}(\alpha),\mathbf{B_n}(\alpha),\mathbf{C_n}(\alpha),\mathbf{D_n}(\alpha)$ függvények zérushelyeit!

---

7. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

Javaslat: Használjuk a Gauss-eliminációs módszert! (Ha lehet.)

7.1
$$\begin{aligned} 6x_1+3x_2+4x_3&=3\\ 3x_1-x_2+2x_3&=5 \end{aligned}$$

7.2
$$\begin{aligned} 2x_1-3x_2-x_3&=2\\ 3x_1+4x_2+x_3&=7\\ 7x_1-2x_2+x_3&=0 \end{aligned}$$

7.3
$$\begin{aligned} 5x_1+8x_2+3x_3&=11\\ x_1+3x_2+2x_3&=5\\ 3x_1+2x_2-x_3&=1\\ x_1+x_2&=1 \end{aligned}$$

7.4
$$\begin{aligned} x_1+x_2+2x_3+x_4&=1\\ x_1-2x_2-x_4&=-2 \end{aligned}$$

7.5
$$\begin{aligned} x_1-x_2+x_3-3x_4&=7\\ x_1-2x_2+x_3-4x_4&=19\\ 3x_1+4x_2-x_3+2x_4&=-9\\ -2x_1+3x_2+2x_3+x_4&=-2 \end{aligned}$$

7.6
$$\begin{aligned} x_1+3x_2+x_3-x_4&=7\\ 2x_1+5x_2-x_3+2x_4&=22\\ 3x_1+8x_2+x_3-x_4&=24 \end{aligned}$$

7.7
$$\begin{aligned} x_1-2x_2+3x_3-x_4+2x_5&=2\\ 3x_1-x_2+5x_3-3x_4-x_5&=6\\ 2x_1+x_2+2x_3-2x_4-3x_5&=8 \end{aligned}$$

7.8
$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2-3x_3+4x_4&=1\\ 2x_1+3x_2-2x_3+3x_4&=2\\ 4x_1+2x_2-3x_3+2x_4&=3 \end{aligned}$$

7.9
$$\begin{aligned} ay+bx&=c\\ cx+az&=b\\ bz+cy&=a \end{aligned}$$

Diszkutáljuk az a,b,c paraméterek szerint!

7.10
$$\begin{aligned} x+ay+a^2z&=a^3\\ x+by+b^2z&=b^3\\ x+cy+c^2z&=c^3 \end{aligned}$$
Diszkutáljuk az a,b,c paraméterek szerint!

7.11
$$\begin{aligned} \alpha x+\alpha y+(\alpha+1)z&=\alpha\\ \alpha x+\alpha y+(\alpha-1)z&=\alpha\\ (\alpha+1)x+\alpha y+(2\alpha+3)z&=1 \end{aligned}$$
Diszkutáljuk α szerint!

7.12
$$\begin{aligned} (2\alpha+1)x-\alpha y+(\alpha+1)z&=\alpha-1\\ (\alpha-2)x+(\alpha-1)y+(\alpha-2)z&=\alpha\\ (2\alpha-1)x+(\alpha-1)y+(2\alpha-1)z&=\alpha \end{aligned}$$
Diszkutáljuk α szerint!

7.13
$$\begin{aligned} (5\alpha-1)x+2\alpha y+(4\alpha+1)z&=\alpha+1\\ (4\alpha-1)x+(\alpha-1)y+(4\alpha-1)z&=-1\\ (6\alpha+2)x+2\alpha y+(5\alpha+2)z&=2-\alpha \end{aligned}$$
Diszkutáljuk α szerint!

7.14
$$\begin{aligned} 3x+5y-z&=1\\ x+ay+2z&=2\\ x+9y-5z&=b \end{aligned}$$
Diszkutáljuk a,b szerint!

7.15
$$\begin{aligned} (3\alpha-1)x+2\alpha y+(3\alpha+1)z&=1\\ 2\alpha x+2\alpha y+(3\alpha+1)z&=\alpha\\ (\alpha+1)+(\alpha+1)y+(2\alpha+2)z&=\alpha^2 \end{aligned}$$

7.16 Diszkutáljuk α,β szerint!

---

8. HOMOGÉN LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

8.1
$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5&=0\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5&=0\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5&=0\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5&=0 \end{aligned}$$

Adjuk meg a megoldások egy alrendszerét!

8.2
$$\begin{aligned} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4&=0\\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4&=0\\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4&=0\\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4&=0 \end{aligned}$$

8.3
$$\begin{aligned} x_1+x_2-x_3+x_4-x_5&=0\\ 2x_1+x_2-3x_3-x_4+x_5&=0\\ -2x_1+x_2-x_3+x_4-x_5&=0 \end{aligned}$$

8.4
$$\begin{aligned} x_1-2x_2-4x_3+x_4-3x_5&=0\\ -x_1+x_2-2x_3-2x_4+x_5&=0\\ 2x_1-5x_2-14x_3+x_4-11x_5&=0 \end{aligned}$$

8.5
$$\begin{aligned} 3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5&=0\\ 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5&=0\\ x_1+11x_2-12x_3+34x_4-5x_5&=0\\ x_1-5x_2+2x_3-16x_4+3x_5&=0 \end{aligned}$$

8.6
$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2+x_3&=0\\ x_1-x_2+x_3&=0\\ 5x_1+5x_2-x_3&=0 \end{aligned}$$

8.7
$$\begin{aligned} x_1+x_2-3x_3+x_4&=0\\ x_1-x_2+5x_3+4x_4&=0 \end{aligned}$$

8.8
$$\begin{aligned} x-z+y&=0\\ x+\alpha z-3z&=0\\ x-3y-\alpha z&=0 \end{aligned}$$

Diszkutáljuk α szerint!

8.9

$$ax+by=\lambda x$$

$$\frac{15}{b}x-2y-\frac{2a}{b}x-ay=\lambda y+\frac{a^2}{b}x$$

---

9. MÁTRIXSZORZÁS

9.1 Számítsd ki az **AB**, **BA** szorzatokat, az [**A**,**B**]=**AB**-**BA** kommutátort és az {**A**,**B**}=**AB**+**BA** antikommutátort, ha a megfelelő szorzatok léteznek! Ha nem, magyarázd meg, miért!

a. $\underline{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1\\ 4 & 6 & -1\\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ $\underline{\mathbf{B}}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1\\ 4 & 7 & -3\\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b. $\underline{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1\\ 5 & 9 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ $\underline{\mathbf{B}}=\begin{pmatrix} 2 & 3\\ 5 & 9\\ 4 & 1\\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

c. $\underline{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 7 & -1\\ 1 & 2 & 0 & 5 & 9\\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\underline{\mathbf{B}}=\begin{pmatrix} 2 & 3\\ 5 & 7\\ 9 & 1\\ 0 & 7\\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

d. $\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\underline{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

e. $\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ $\underline{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix}$

f. $\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ $\underline{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

g. $\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ $\underline{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

h. $\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{7} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ $\underline{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{-14} & \mathbf{11} \\ \mathbf{2} & \mathbf{9} & \mathbf{-10} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{7} & \mathbf{15} \end{pmatrix}$

i. $\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ $\underline{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

9.2 $\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix}$

Van-e olyan $\underline{\mathbf{X}}$ 2x2-es mátrix, amelyre teljesül:

a. $\underline{\mathbf{X}}\underline{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$

b. $\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$ itt $\underline{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

c. $\underline{\mathbf{X}}\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$

---

10. MÁTRIXSTRUKTÚRÁK

10.1 Mutassuk meg, hogy az

$$\underline{\mathbf{A}}(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \alpha \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

típusú mátrixok a szorzásra nézve zárt halmazt alkotnak! Melyik ismert struktúrával izomorf a rendszer?

10.2 Bizonyítsuk be, hogy a

$$\underline{\mathbf{C}}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{-b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{a} \end{pmatrix}$$

tĺpusú mátrixok az összeadásra, a skalárral való szorzásra és a mátrixszorzásra nézve zárt halmazt alkotnak! Melyik ismert struktúrát kaptuk? Hány dimenziós lineáris tér ez? Keressük benne lineárisan független

Értelmezhető-e az osztás a struktúrában? Milyen részstruktúrákat kapunk, ha $a^2 + b^2 = 1$?

A fentiekben **a** és **b** valós paraméter volt. Ismételjük meg a vizsgálatokat, ha **a** és **b** komplex számok! Mi változik?

10.3 A $\underline{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}+\mathbf{ib} & \mathbf{c}+\mathbf{id} \\ -\mathbf{c}+\mathbf{id} & \mathbf{a}-\mathbf{ib} \end{pmatrix}$ alakú mártixok esetén ismételjük meg a fenti vizsgálatokat! Miben tér el a bázismátrixok algebrája az előző esettől? Mi van, ha **a**,**b**,**c**,**d** komplex?

10.4 Az $\mathbf{a}+\mathbf{bi}$ $\left(\mathbf{i}^2=-1\right)$ alakú komplex syámok egy általánosítását kapjuk, ha az új képzetes egységre másféle műveleti szabályt kötünk ki:
$\mathbf{a}+\mathbf{bF}$ $\left(\mathbf{F}^2=+1\right)$ (hiperbolikus komplex számok)
$\mathbf{a}+\mathbf{b}\Omega$ $\left(\Omega^2=0\right)$ (Study-féle számok)
(Részletesen lásd: Kantor-Szolotovnyikov: Hiperkomplex számok, Gondolat, 1985)
Keressünk olyan 2x2-es mátrixokból álló struktúrát, amely izomorf az így definiált algebrával! Milyen ismert tulajdonságokkal találkozunk?

---

11. LINEÁRIS OPERÁTOROK

11.1 Írjuk fel az $\underline{\underline{\mathbf{n}}}$ normálisú, origón átmenő síkra vetítő, illetve tükröző $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ operátorokat és $\underline{\mathbf{P}}$, $\underline{\mathbf{T}}$ mátrixokat!
$\left(\left|\underline{\underline{\mathbf{n}}}\right|=1\right)$
Számítsd ki a mátrixok adjungáltját és inverzét (ha van)!

11.2 Ugyanez ferde vetítés esetén.

11.3 Legyen $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$ projektor. Mit tudsz a $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}=\underline{\underline{\mathbf{E}}}-\underline{\underline{\mathbf{P}}}$, és a $\underline{\underline{\mathbf{T}}}=\underline{\underline{\mathbf{E}}}-2\underline{\underline{\mathbf{P}}}$ operátorokról?

11.4 Legyen $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ tükröző operátor. Mit tudsz a $\underline{\underline{\mathbf{P}}}=\dfrac{\underline{\underline{\mathbf{E}}}-\underline{\underline{\mathbf{T}}}}{2}$, $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}=\dfrac{\underline{\underline{\mathbf{E}}}+\underline{\underline{\mathbf{T}}}}{2}$ operátorokról.

11.5 Keresd meg az <u>összes</u> 2x2-es valós projektormátrixot!

11.6 Keresd meg az <u>összes</u> 2x2-es tükrözőmátrixot!

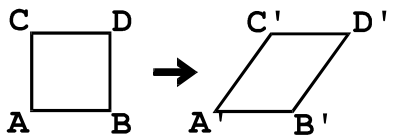
11.7 Ha $\underline{\underline{\mathbf{ab}}}=\mathbf{0}$, akkor az $\underline{\underline{\mathbf{N}}}=\underline{\mathbf{a}}\circ\underline{\mathbf{b}}$ operátorra igaz: $\underline{\underline{\mathbf{N}}}^2=\underline{\underline{\mathbf{0}}}$. Igaz-e az állítás megfordítása?

11.8 Ha $\underline{\underline{\mathbf{ab}}}=\mathbf{2}$, akkor a $\underline{\underline{\mathbf{T}}}=\underline{\mathbf{a}}\circ\underline{\mathbf{b}}-\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ operátor tükröző $(\underline{\underline{\mathbf{T}}}^2=\underline{\underline{\mathbf{E}}})$. Igaz-e az állítás megfordítása?

11.9 Mikor tükröző mátrixok?

$$\mathbf{A(a,b)}=\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \dfrac{\mathbf{1}-\mathbf{a}^2}{\mathbf{b}} & -\mathbf{a} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}(\alpha)=\begin{pmatrix} \mathbf{ch}\alpha & \mathbf{sh}\alpha \\ -\mathbf{sh}\alpha & -\mathbf{ch}\alpha \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C}(\beta)=\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}$$

11.10



Írjuk fel a síkbeli <u>nyírás</u> operátorát: A művelet az $ABCD$ négyzetet az $A'B'C'D'$ paralelogrammába viszi, $\overline{A©B©}=\overline{D©C©}=\overline{AB}=\overline{DC}$. Írjuk fel az operátort, ha a nyírás nem az x-tengely, hanem az $\underline{\mathbf{n}}$ egységvektor irányában történik!

11.11 Írjuk fel annak a lineáris operátornak a mátrixát, amely a fenti $\underline{\mathbf{n}}$ irányú nyírás után még 90°-kal jobbra is forgat! Van-e olyan vektor, amely a művelet során megőrzi irányát? Felcserélhető-e a két részművelet?

---

12. OPERÁTORALGEBRÁK

12.1 Legyenek $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{k}}$ $(\mathbf{k}=\mathbf{1}\ldots\mathbf{n})$ lineáris operátorok: Az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{k}}$ és $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{l}}$ operátorokhoz rendeljük hozzá a <u>kommutátorukat</u>, azaz az $\left\lfloor \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{k}}, \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{l}} \right\rfloor = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{k}}\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{l}} - \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{l}}\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{k}}$ operátort. Operátorhalmazunk a <u>kommutálásra nézve zárt</u>, ha a kapott operátor kifejezhető az eredeti operátorok lineáris kombinációjaként, azaz vannak olyan $\mathbf{c}_{\mathbf{klm}}$ számok (általában komplexek), hogy $\left\lfloor \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{k}}, \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{l}} \right\rfloor = \sum_{\mathbf{m}} \mathbf{c}_{\mathbf{klm}} \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{m}}$. Ha halmazunk nem zárt a kommutálásra nézve, vegyük hozzá (n+1)-ik elemként a most kapott kommutátort, és vizsgáljuk meg újra a zártságot. Az operátorhalmazt így bővítve végül vagy zárt halmazhoz jutunk vagy ... (gondold végig!).

Tegyük zárttá a kommutálásra nézve a következő halmazkezdeményeket:

a. $\underline{\mathbf{A}}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{\mathbf{A}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b. $\underline{\mathbf{A}}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{\mathbf{A}}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c. $\underline{\mathbf{A}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{\mathbf{A}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

d. $\underline{\mathbf{A}}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{\mathbf{A}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

12.2 A fentieket egy adott intervallumon értelmezett differenciálható függvényekre ható lineáris operátorokra is el lehet mondani. Vizsgáljuk meg a következő rendszereket:

a. $A_1 f = \frac{d}{dx} f(x)$ $\quad A_2 f = x \cdot f(x)$

b. $A_1 f = \frac{d}{dx} f(x)$ $\quad A_2 f = x^3 \cdot f(x)$

c. $A_1 f = \frac{d}{dx} f(x)$ $\quad A_2 f = \frac{1}{x} f(x)$

---

13. MÁTRIX ADJUNGÁLTJA ÉS INVERZE

13.1 Mely mátrixoknak lehetne/van adjungáltja/inverze a 9.1 feladatban szereplők közül?

13.2 a. Egy mátrix elemei egész számok. Mi a feltétele annak, hogy az inverz elemei is inverzek legyenek?
b. Ugyanez pozitív egészekkel.

13.3 Számítsuk ki a mátrixok adjungáltját/inverzét!

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

13.4 A paraméterek mely értékénél létezik inverze a következő mátrixoknak? Hogy függ a mátrix rangja a paramétertől?

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 8 & 12 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 8 & 16 & 24 \\ \alpha & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & \alpha & -2 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

13.5 Számítsuk ki a következő paraméteres mátrixok inverzét!

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1+\alpha & 9 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} 1 & \beta-5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

13.6 Mi a feltétele annak, hogy az $(\underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{A}})$ mátrixok önmaguk inverzei legyenek? Adjuk meg a feltételt kielégítő összes 2x2-es $\underline{\mathbf{A}}$ mátrixot!

13.7 $\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{e}} \circ \underline{\mathbf{f}}$, $\underline{\mathbf{e}}$ és $\underline{\mathbf{f}}$ adott vektorok. Számítsuk ki az $\underline{\mathbf{A}}$ mátrix adjungáltját és inverzét!

13.8 Egy mátrix <u>unitér</u>, ha inverze megegyezik transzponáltjának komplex konjugáltjával (ezt is adjungáltnak hívják). Adjuk meg az <u>összes</u> 2x2-es unitér mátrixot! Mit kapunk, ha a mátrix elemei csak valós számok lehetnek? Milyen geometriai transzformációkat írnak le ezek a mátrixok?

13.9 Van-e olyan 2x2-es/3x3-as mátrix, amelyre a (szerencsétlen módon) egyaránt adjungáltnak nevezett hétféle mátrix megegyezik?

13.10 Invertáljuk a következő komplex elemű mátrixot!

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{3+i}{2\sqrt{15}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{4+3i}{2\sqrt{15}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{}{\sqrt{15}} \end{pmatrix}$$

---

14. MÁTRIXEGYENLETEK

14.1 Határozzuk meg azt az $\underline{\mathbf{X}}$ mátrixot, amelyre:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

14.2 $$\underline{\mathbf{X}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

14.3 $$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{X}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

19. KÚPSZELETEK, MÁSODRENDŰ FELÜLETEK, KVADRATIKUS ALAKOK

19.1 Az $\underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{x}}+\underline{\mathbf{b}}\underline{\mathbf{x}}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$ másodrendű felületet elmetsszük az $\underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{n}}=\mathbf{d}$ egyenletű síkkal. ($\underline{\mathbf{A}}=\underline{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}$ 3x3-as szimmetrikus mátrix, $\underline{\mathbf{b}}$ adott vektor, $\underline{\mathbf{n}}$ adott egységvektor, c,d adott skalárok)

Írjuk fel a metszetgörbe egyenletét jól megválasztott koordinátarendszerben!

19.2 Legyen $\underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{x}}=\mathbf{c}$ egy görbesereg egyenlete a c paraméter függvényében. Írjuk fel egy görbe $\underline{\mathbf{x}}$ helyvektorú pontjában a görbe érintőjére merőleges $\underline{\mathbf{n}}$ normálvektort! Mely pontokban párhuzamos a normálvektor az $\underline{\mathbf{x}}$ helyvektorral?

19.3 Bizonyítsuk be, hogy az

$\mathbf{r}=\mathbf{p}+\varepsilon\mathbf{x}$ egyenlet egy kúpszelet egyenlete! ($\mathbf{r}=\sqrt{\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2}$, $\mathbf{p}$ adott hosszúságdimenziójú mennyiség, ε adott szám) Hol helyezkedik el a görbe? Hozzuk az egyenletet kanonikus alakra!

19.4 Az előző feldat alapján mutassuk meg, hogy a kúpszeletek polárkoordinátás egyenlete:

$$\mathbf{r}=\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{1}-\varepsilon\cos\varphi}$$

Mi $\mathbf{p}$ és ε geometriai jelentése? Diszkutáljuk az eseteket ε szerint!

19.5 Milyen felület:

$2x^2+4y^2+3z^2+4xz-4zy+4x+4y+4z=0$?

Mesd el a $z+z=\alpha$ síkkal! $\alpha\in(-\infty,+\infty)$

Milyen görbéket kapsz?

A következő feladatokban határozzuk meg a görbe illetve felület fajtáját, jellemző adatait, elhelyezkedését a szereplő paraméterek minden lehetséges értékére!

19.6 $-6716x^2-5376xy+1716y^2-2800x+9600y+\alpha=0$

19.7 $3x^2+12xy+\alpha y^2+4x+3y-7=0$

19.8 $-4x^2+4xy-y^2+x+\alpha y-3=0$

19.9 $4y^2+4xz+x+y+\alpha z=c$

19.10 $6x^2+12y^2+9z^2+12xz-12yz+12(x+y+z)=c$

19.11 $2x^2+y^2+3xy-x-y=c$

19.12 $x^2+6xy+9y^2+2x+2\alpha y=c$

19.13 $17x^2-12xy+8y^2-\alpha x+40y+80=0$

19.14 $5x^2+24xy-5y^2+6\sqrt{13}x+4\sqrt{13}y=c$

19.15 $9x^2+20y^2+20z^2-40yz-36x-4\sqrt{2}**4\sqrt{2}z=c$

19.16 $2x^2+4y^2+3z^2+4xz-4yz+4x+4y+*z=0$

19.17 Messük el a

$3x^2+4xy+2y^2+4xz+4z^2-\alpha x=0$ felületet a

$2x-y+2z=0$ és a $-3x+4y+3z=0$

síkokkal! Milyen görbék a metszésvonalak?

19.18 $2xy-6x+4y=c$

19.19 $6x^2-2y^2+6z^2+4xz+8x-4y-8z=c$

19.20 $x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz-14x+14z-4y=c$

19.21 Keressük meg a következő <u>négydimenziós</u> másodrendű hiperfelület egyenletének harmonikus alakját!

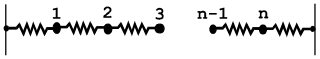
$\underline{r}(x,y,z,t)$

$2xy+2zt-3x-4y-5z+6t+16=0$

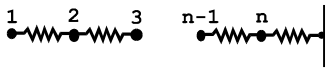
20. LINEÁRIS REZGŐ RENDSZEREK

20.1 n db egyforma m tömegű tömegpontot egyforma k rugóállandójú rugókkal lineáris lánccá fűzünk össze. A végek lehetnek rögzítettek, szabadok, elletve ciklikusan összekapcsoltak. Számítsuk ki a sajátfrekvenciákat! Útmutató: 15.14, illetve 6.14-18 feladatok

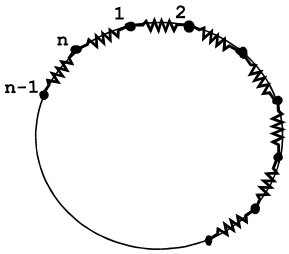
a)



b)



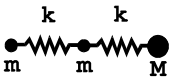
c)



d)

Melyik esetben van zérusmódus?

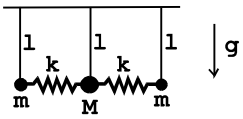
20.2



$\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \omega_3 / n$

Számítsuk ki a $c = \dfrac{M}{m}$ arányt a sajátfrekvenciák n arányából!

20.3

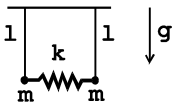


Rugóval csatolt ingák kis rezgései.

$\omega_2 / \omega_1 = n$ adott.

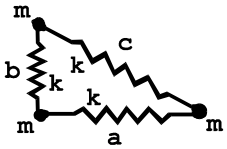
Mi az összefüggés az M,m,l,k,g paraméterek között?

20.4



A $t = 0$ pillanatban az egyik ingát kihúzva, 0 kezdősebességgel elindítjuk a rendszert. Mi a feltétele annak, hogy ez a kezdeti helyzet valamikor a rendszer története során megismétlődjön?

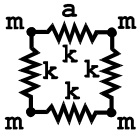
20.5



3 egyforma tömegből és egyforma erős, de különböző nzugalmi hosszú rugóból álló rendszer egyensúlyban *** a,b befogójú derékszögű háromszöget alkot.

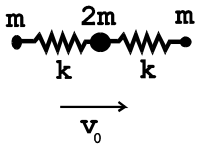
Határozzuk meg a síkbeli normálrezgéseket és sajátfrekvenciákat! Mi a zérusmódusok fizikai jelentése?

20.6



A kezdeti egyensúlyi konfiguráci*** Számítsuk ki a sajátfrekvenciákat, írjuk fel a normálrezgéseket! Hány zérusmódus van?

20.7



A $t = 0$ pillanatban a köyépső testet v_0 sebességgel elindítjuk. Írjuk le az egyes testek mozgását tetszőleges időben. Használjuk a 17.15 feladatot!

20.8 Egyforma tömegekből és rugókból szabályos tetraédert/kockát/oktaédert/.../... építünk. Számítsuk ki a sajátfrekvenciákat! (egzakt megoldás lehetséges!)

20.9 Vizsgáljuk meg a 20.1 feladat lineáris láncát, ha az egyforma rugók felváltva M, illetve m tömegeket kötnek össze. Hogyan változnak a sajátfrekvenciák?

21. VEGYES ALGEBRA FELADATOK HALADOKNAK

21.1 A Pauli-mátrixok:

$$\underline{\sigma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\sigma}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tekintsük őket egy $\underline{\delta}$ "mátrixvektor" három komponensének.

Ekkor közönséges $\underline{\mathbf{a}}$ vektorral képezhető az $\underline{\mathbf{a}}\underline{\delta}$ "skaláris szorzat" (értéke egy 2x2-es mátrix) és az $\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\delta}$ "vektoriális szorzat" (értéke mátrixvektor)

Szamítsd ki:

$$\mathbf{f(a,b) = Sp(e^{i\underline{a}\underline{\delta}} \cdot e^{i\underline{b}\underline{\delta}})}\,!$$

21.2 Mutasd meg, hogy tetszőleges 2x2-es spurtalan (SpM=0) hermitikus mátrix előállítható

$\underline{\mathbf{H}} = \mathbf{x}\underline{\delta}^1 + \mathbf{y}\underline{\delta}^2 + \mathbf{z}\underline{\delta}^3$ alakban, ahol a $\underline{\delta}$-k a Pauli-mátrixok. Ezzel egy-egyértékű kapcsolat létesült az $\underline{\mathbf{r}}\mathbf{(x,y,z)}$ vektorok és a fenti tipusú mátrixok között. Vizsgáld meg a

$$\mathbf{det}\underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}})$$

$$\mathbf{Sp}(\underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{x}}) \cdot \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{y}}))$$

$$\frac{1}{2}\left[\underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{x}}) \cdot \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{y}}) - \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{y}}) \cdot \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{x}})\right]$$

kifejeyéseket! Milyen vektorműveleteknek felelnek meg?

21.3 G. Casanova Vector Algebra című művében láttam a következő képletet:

$$\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{ab}} + \underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}}$$

Itt a és b vektorok, ab skaláris, axb vektoriális szorzás. Zh-ban leírva ezt a sort azonnal egyes. Most mégis próbálj valami értelmet adni a fenti "összeadásnak". Jótanács, a vektort nem feltétlenül számoszloppal kell reprezentálni!

21.4 Bizonyítsd be, hogy tetszőleges 2x2-es hermitikus mátrix előállítható

$$\underline{\mathbf{H}} = \mathbf{t}\underline{\delta}^0 + \mathbf{x}\underline{\delta}^1 + \mathbf{y}\underline{\delta}^2 + \mathbf{z}\underline{\delta}^3$$

alakban, ahol $\underline{\delta}^0 = \underline{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ az egységmátrix, a másik három $\underline{\delta}$ a három Pauli-mátrix. Ezzel egy-egyértelmű kapcsolat létesült az (x,y,z,t) négydimenziós vektorok és a 2x2-es hermitikus mátrixok között. Milyen vektorművelet megfelelőjét kapod, ha kiszámítod a $\mathbf{det}\underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{x}})$ és $\frac{1}{2}\mathbf{Sp}(\underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{x}}) \cdot \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{y}}))$ kifejezéseket?

Definiáljuk két négydimenziós vektor újfajta skaláris szorzatát az utóbbi kifejezéssel. Lehet-e négydimenziós vektoriális szorzást értelmezni a

$\underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{x}}) \cdot \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{y}}) - \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{y}}) \cdot \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{x}})$ kifejezésből kiindulva?

21.5 Fejezzük ki két $\underline{\delta}^i$ és $\underline{\delta}^k$ (i,k=1,2,3) Pauli-mátrix szorzatát a $\underline{\delta}^0$ és $\underline{\delta}^l$ (l=1,2,3) mátrixok lineáris kombinációjaként!

21.6 Definiáljuk két Pauli-mátrix újfajta szprzatát:

$$\underline{\delta}^i * \underline{\delta}^k = \frac{1}{2i}(\underline{\delta}^i \underline{\delta}^k - \underline{\delta}^k \underline{\delta}^i)$$

Ismerős valahonnan a * művelet? Magyarázzuk meg ennek alapján a 21.2 feladat eredményét! (Használjuk fel a 21.5 feladatban kapott képletet!)

21.7 Mutassuk meg, hogy a

$$\underline{\mathbf{J}}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{J}}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{J}}^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixok a $\underline{\mathbf{J}}^i \circ \underline{\mathbf{J}}^k = \underline{\mathbf{J}}^i \underline{\mathbf{J}}^k - \underline{\mathbf{J}}^k \underline{\mathbf{J}}^i$ módon definiált "szorzással" a Pauli-mátrixokhoz hasonlóan viselkednek!

21.8 Vizsgáljuk meg egy adott intervallumon értelmezett, differenciálható függvényekre ható operátorokat. (Ezek függvényhez függvényt rendelnek, pl. a differenciálás D operátora Dsin=cos)

Értelmezzük a sajátvektorok mintájára az operátorok sajátfüggvényeit!

Határozzuk meg a $\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}$, $\mathbf{x}\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}$, $(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}})$ operátor sajátértékeit és sajátfüggvényeit! (Lehet folytatni: $\frac{\mathbf{d}^2}{\mathbf{dx}^2}$ ...)

Szamítsd ki az $\left(x\frac{d}{dx}-\frac{d}{dx}x\right)$ "kommutátort"!

21.9 A legfeljebb (n-1)-ed fokú egyváltozós polinomokat egyértelműen megadhatjuk n db együtthatójukkal, melyeket n-komponensű vektornak foghatunk fel.

pl. n=4 $2x^3 - x^2 + 5x - 7 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

Mutassuk meg, hogy a számmal való szorzás és a polinom összeadása művelettartó módon képződik le a vektorokra. A polinomok differenciálása lineáris operációnak felel meg a vektorokon. (Bizonyítsd be!) Állítsd elő a $\frac{d}{dx}$ differenciáloperátornak megfelelő D mátrixot! Határozd meg a D mátrix inverzét! Milyen művelet ez a polinomok körében? Vizsgáld meg (óvatosan) az $n \to \infty$ határesetet!

22. PERTURBÁCIÓSZÁMÍTÁS

Határozd meg a perturbációszámítás első, illetve (ha kell) másodrendjéig a sajátértékeket és a sajátvektorokat!

$$(\underline{\mathbf{A}} + \varepsilon \underline{\mathbf{C}})\underline{\mathbf{S}} = \lambda \underline{\mathbf{S}}$$

22.1 $\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

22.2 $\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 2-\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 1+\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 2-\mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

22.3 $\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 7 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

22.4 $\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

22.5 $\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -2\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$

22.6 $\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 4 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 3-\mathrm{i} \\ 3+\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}$

Ahol az egzakt megoldást is meg tudjuk határozni, hasonlítsuk össze azt a perturbációszámítással kapottal!

23. ALGORITMUSOK

Írjunk algoritmust blokkdiagram vagy (nem túl precíz) programnyelv formájában, (ajánlott nyelv:Pascal) a következő feladatokra.

23.1 Tetszőleges dimenziójú vektorok skaláris/diadikus szorzása

23.2 Vektorok szögének kiszámítása

23.3 Vektoriális szorzás

23.4 Mátrix és vektor szorzása

23.5 Mátrixok szorzása

23.6 Mátrix (általában nem négyzetes) transzponálása

23.7 Mátrix adjungáltja

23.8 nxn-es determináns

23.9 Gauss-eliminációs módszer lineáris egyenletrendszerekre

23.10 Karakterisztikus egyenlet együtthatóinak kiszámítása (nxn-es mátrixra)

23.11 Mátrix minimálegyenletének meghatározása (a sajátértékeket már ismerjük)

23.12 Polinomok osztása

23.13 Egyszerű, gyors módszer 3x3-as homogén lineáris egyenletrendszer megoldására (sajátvektorok**** használható)

23.14 Teljes program mátrix sajátértékproblémáinak megoldására

A bonyolultabb algoritmusok szubrutinként hivatkozzanak a (már megírt) egyszerűbbekre.