VEKTORANALÍZIS

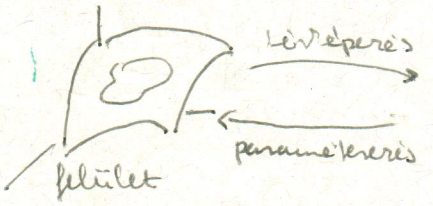
2019. 11. 18.
Hét 34.ea

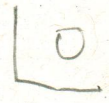
- vektor: algebrai fogalom — összük össze a fizikai
- $\vec{E}T$ v. $\vec{E}K$ egyiránban / minden pontban vektor
  skalár ből függő vektor
  vektorból függő skalár — skalármező
  vektorból függő vektor — vektormező
- jellemezzük a pontokat vektorokkal ← helyvektor!
  skalárból függő pont / pontból függő skalár / pontból függő vektor
- görbe: geometriailag független az időtől
- mező: pontból függő fv
  - elektromágneses mező külön a kettő ← fizikai, egy anyagnak kiterjedése
    mező = helytől függő fv ← matematikai
    a pontot helyvektorral adjuk meg ⇒ helyvektortól függő fv
  - $\begin{cases} \text{hely függvényében számítva} = \underline{\text{skalármező}} & \text{pl. hőm.-térkép} \\ \text{hely függvényében vektor} = \underline{\text{vektormező}} & \text{pl. sebesség-kép} \end{cases}$
  - folytonosság ← adott pontban vett határértéke megegyezik a függvénnyel
    ε sugarú gömb — környezet ← a 2D-ben vett δ és ε definíciós helyett
    ha a függvény közel megy, ε → résztérbeli index
  - differenciálás: különbség: változás
    skalártól függő vektor → vektor különbsége ahhoz skalárnál ~
    vektortól függő skalár — vektorváltozástól függő fv — nem oszthatunk vektorral!
    ⇒ operátorok bevezetése
  - integrálás:
    felosztjuk intervallumokra, görbe alatti terület határértéke
    határértéke független a felosztástól
    görbe integrál / felület int. / térfogati int. ← mérték (measure / nem gauge!)
    ↑ lehet vektor is! ↗ görbe hossza / felület felosztása / rész térfogata
    integrál definíciója ≠ kiszámítási módja

ívhossz

- görbe: 1 dimenziós alakzat
  közvetlenül egyértelmű kapcsolatba hozható egy 1 dimenziós vektortérrel

vektortér: algebrai struktúra
vektormező: vektoranalízishez

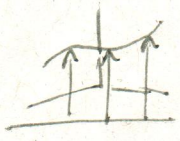




2D vektortér
~ koordinátatér
paramétertér

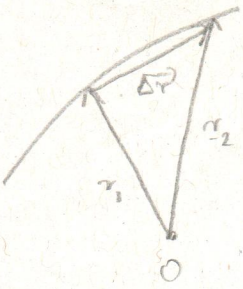
atlasz: térképlapok uniója
a lapok folytonosak
lapok lefedik az egészet
sokaság (manifold)

- a paramétertér 1 dim-s ⇒ egyenes
  szakaszonként intervallumonként folytonos része a görbe



matematikai absztrakció:
görbe és felület is elvonatkoztatható a 3D-s tértől
a felületek belső geometriája ← Gauss
de a 3D-ben használt szemléletes fogalmak kiterjeszthetők több dimenzióra

egyenes görbe: folytonos
a két pont közti távolság = két pont közti vektor hossza



$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$\Delta s = |\Delta\vec{r}|$

Húrelliptikus görbe:

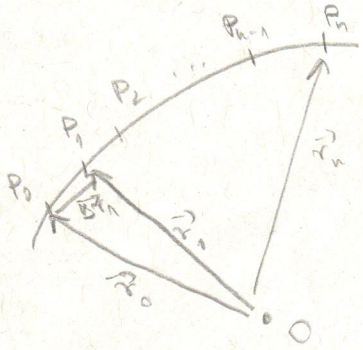


← a görbe hossza nem a húrelliptikus lépcsős görbe hosszainak összege



a finomítással az összegek tartanak valahova → ez a görbe hossza

Jó felosztás:



$\Delta\vec{r}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_{2-1}$

$\Delta\vec{r}$: figyelem az előző kiegészítésre

$\Delta s_2 = |\Delta\vec{r}_2|$ ← meder

$S = \sum_2 \Delta s_2$ ← a görbe hosszának közelítő összege

egyre finomabb felosztás → vajon határértékben konvergens-e S

$\Rightarrow$ $S = \int ds$ a görbe hossza feltéve, ha létezik

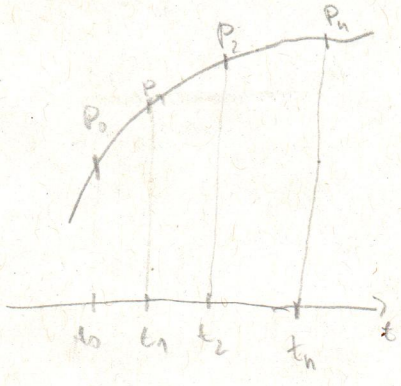
ds : ívelem

felület: alakzat
kiterjedés: szám

2D-s alakzatok területének összege (síklapok)

kiszámolás módszere: paraméterezés

Ki szeretnénk terjeszteni → más terek megadására



a paraméterfüggvényt összuk fel

$\vec{r}(t)$ fv.

$\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$

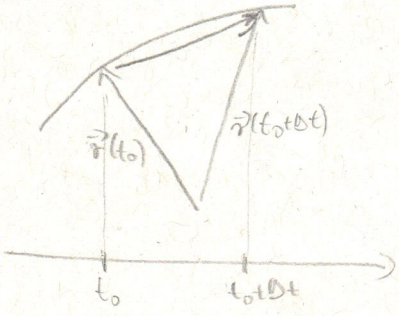
$\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$

$\vdots$

$\Delta\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_{2-1}) = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_{2-1})}{t_2 - t_{2-1}} (t_2 - t_{2-1})$

limesz: $\dot{\vec{r}}(t_2)$ sebességvektor

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0+\Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}(t_0)$$



$f(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = f'(x)\,dx$

hasonló összefüggés vektorokra

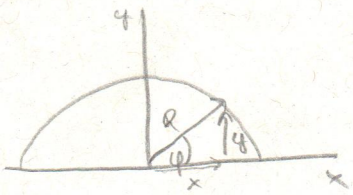
$d\vec{r} = \dot{\vec{r}}(t)\,dt$

$\Delta s_2 = |\Delta\vec{r}_2| = |\dot{\vec{r}}(t)|\,\Delta t$

$\sum \Delta s_2 \to \int_0^T |\dot{\vec{r}}(t)|\,dt$

$ds = |\dot{\vec{r}}(t)|\,dt$ szimbólum

Kör paraméterezése



paraméter: t (ív helyett)

$\vec{r} \to \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ $\quad \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$

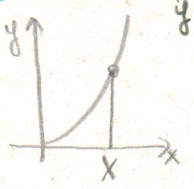
$x = R\cos t$
$y = R\sin t$

$\dot{\underline{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \end{pmatrix}$

mérték: $|\dot{\underline{r}}(t)| = \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2} = R$

ívhossz: $S = \int dt\, |\dot{\underline{r}}(t)| = \int dt\, R = R \int_0^{\pi} dt = R\pi$

parabola



$y = x^2$ a paraméter legyen maga x

$x(t) = t$
$y(t) = t^2$ $\quad \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ $\quad t \in [0, X]$

deriválás:

$\dot{\underline{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$

mérték: $|\dot{\underline{r}}|^2 = 1^2 + (2t)^2 = 1 + 4t^2$

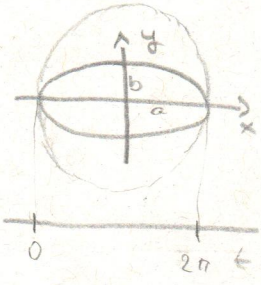
$|\dot{\underline{r}}| = \sqrt{1+4t^2}$

ívhossz: $S = \int_0^X dt\, \sqrt{1+4t^2} = S(X)$

ellipszis

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad$ affintranszformáció: kör összenyomása ellipszisé

$x = a\cos t$
$y = b\sin t$ $\quad t \in [0, 2\pi[$



$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$

$\dot{\underline{r}}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix}$

$\dot{r}^2 = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t$

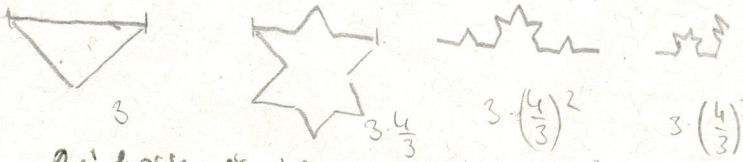
$|\dot{r}| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$

elliptikus integrál!

$\Rightarrow S = \int_0^{2\pi} dt\, \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$

$\varnothing$ zárt alak

Koch-féle-görbe:



$\to \infty$-ször: folyamatosan (sehol sem) deriválható

∞ hosszú

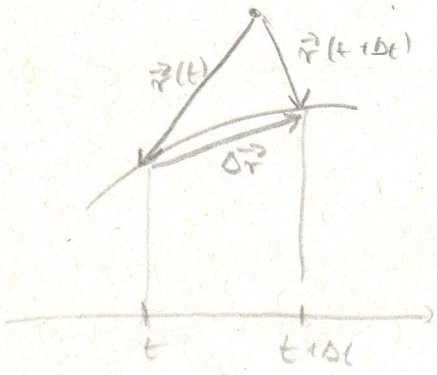
divergens sorozat fraktál (hiraggitra ua)

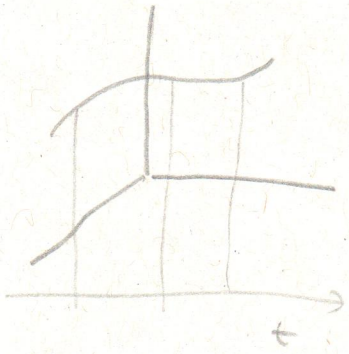
$\forall$ pontban köré és sehol $\not\exists$ érintője pl. Brown-mozgás

$\varnothing$ ívhossz és nem differenciálható, kivéve folytonos integrál, csak ha ismerjük a határértéket

2019.11.19.
Ke 35.ea

görbe: folytonos, közlekedésben egyértelmű
nem az, hogy sorfelelőpp be lehet járni (paraméterezni)





$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \to 0} \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t)$$

érintővektor adja
$v(t) = |\vec{v}|$ meg a pontban, fv

egyenes: konstans érintővektor

speed ↔ velocity
s v

körív esetén határértékét részletekből pl. pattog a labda
⇒ felosztás a középpontból szöti össze = egyenes görbével

az érintővektor hossza nem fix — az irány elderes
pl. legyen mindenhol egységvektor az érintővek. → nem jó
geometriai leírás: egységnyelt.
fizikai leírás: hossz is számít

ívhossz kiszámítása - recap:

$\Delta s_i = |\Delta \vec{r}_i| \to s = \int ds = \Sigma \Delta s = \Sigma |\Delta \vec{r}|$

verifikálható (sűrűségtételek) a görbe ← finomítás határértéke megy a görbe

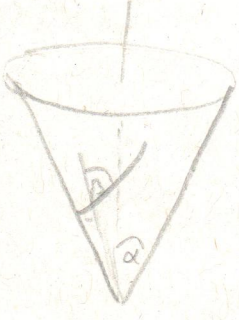
$\Delta\vec{r} = \vec{v}\,\Delta t$
$\Delta s = |\vec{v}|\,\Delta t$

elgázolás:
$\Sigma \Delta s = \Sigma |v| \Delta t \to \int |v|\,dt$

$\vec{r} \to \underline{r}$ $\quad \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$ $\quad |\underline{v}| = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2} = v(t)$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

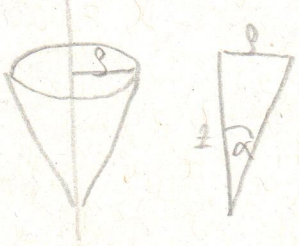


Ⓔ Ripp - a görbe az alkotóval mindenhol β szöget zár be → a görbe hossza

β pont kielégíti a felírt egyenletet

$\frac{s}{z} = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow$ a ripp egyenlete: $x^2+y^2 = z^2\operatorname{tg}^2\alpha$

$x^2+y^2 = s^2 = z^2\operatorname{tg}^2\alpha$



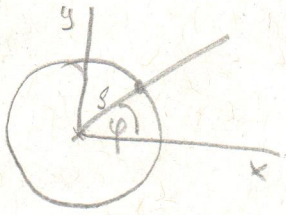
felületet:



paraméter mi legyen?

keressük a z magasságot φ szög függvényében $z = f(\varphi)$

felületelem:

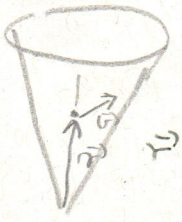


$x = s\cos\varphi \qquad s = z\,\mathrm{tg}\alpha$

$y = s\sin\varphi \qquad z = f(\varphi)$

$$\Rightarrow \underline{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\varphi)\,\mathrm{tg}\alpha\cdot\cos\varphi \\ f(\varphi)\,\mathrm{tg}\alpha\cdot\sin\varphi \\ f(\varphi) \end{pmatrix}$$

megfordítás: β szög



Ell.: $x^2+y^2 = (f\cdot\mathrm{tg}\alpha\cdot\cos\varphi)^2 + (f\cdot\mathrm{tg}\alpha\cdot\sin\varphi)^2 =$
$= f^2\mathrm{tg}^2\alpha = z^2\mathrm{tg}^2\alpha$

$\Rightarrow$ az f függvény függetlenül teljesíti a kúp egyenletét

$\vec{r}$ és $\vec{v}$ β szöget zárnak be

$\vec{r}\,\vec{v} = |\vec{r}|\,|\vec{v}|\cos\beta$

$\underline{r}\,\underline{v} = |\underline{r}|\,|\underline{v}|\cos\beta$

$\underline{r}\,\underline{\dot{r}} = |\underline{r}|\,|\underline{\dot{r}}|\cos\beta$

$$\dot{\underline{r}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \mathrm{tg}\alpha\,(f'(\varphi)\cos\varphi - f(\varphi)\sin\varphi) \\ \mathrm{tg}\alpha\,(f'(\varphi)\sin\varphi + f(\varphi)\cos\varphi) \\ f'(\varphi) \end{pmatrix}$$

$\dot{\underline{r}}\,\underline{r} = \mathrm{tg}^2\alpha\,(f'\cos\varphi - f\sin\varphi)\,f\cos\varphi + \mathrm{tg}^2\alpha\,(f'\sin\varphi + f\cos\varphi)\,f\sin\varphi + f'f =$

$= \mathrm{tg}^2\alpha\,[f f'\cos^2\varphi - f^2\sin\varphi\cos\varphi + f'f\sin^2\varphi + f^2\cos\varphi\sin\varphi] + f'f =$

$= \mathrm{tg}^2\alpha\,ff' + ff' = (1+\mathrm{tg}^2\alpha)\,ff' = \dfrac{ff'}{\cos^2\alpha} = \dot{\underline{r}}\,\underline{r}$

$|\underline{r}| = \sqrt{\underline{r}\,\underline{r}}$

$\underline{r}\,\underline{r} = f^2\mathrm{tg}^2\alpha\cos^2\varphi + f^2\mathrm{tg}^2\alpha\sin^2\varphi + f^2 = f^2\mathrm{tg}^2\alpha + f^2 = (1+\mathrm{tg}^2\alpha)f^2 = \dfrac{f^2}{\cos^2\alpha}$

$|\underline{r}| = \sqrt{\underline{r}\,\underline{r}} = \dfrac{f}{\cos\alpha} = |\underline{r}|$

$|\dot{\underline{r}}| = \sqrt{\dot{\underline{r}}\,\dot{\underline{r}}}$

$\dot{\underline{r}}\,\dot{\underline{r}} = \mathrm{tg}^2\alpha\,(f'^2\cos^2\varphi - 2f'f\cos\varphi\sin\varphi + f^2\sin^2\varphi) +$
$+ \mathrm{tg}^2\alpha\,(f'^2\sin^2\varphi + 2f'f\sin\varphi\cos\varphi + f^2\cos^2\varphi) + f'^2 =$

$= \mathrm{tg}^2\alpha\,(f'^2 + f^2) + f'^2 = f'^2(1+\mathrm{tg}^2\alpha) + f^2\mathrm{tg}^2\alpha =$

$= \dfrac{f'^2}{\cos^2\alpha} + f^2\mathrm{tg}^2\alpha$

$$|\dot{\underline{r}}| = \sqrt{\frac{f'^2}{\cos^2\alpha} + f^2\mathrm{tg}^2\alpha}$$

e) összegezve

$$|\underline{r}| = \frac{f(\varphi)}{\cos\alpha} \qquad |\dot{\underline{r}}| = \sqrt{\frac{f'^2}{\cos^2\alpha} + f^2\mathrm{tg}^2\alpha} \qquad \underline{r}\,\dot{\underline{r}} = \frac{ff'}{\cos^2\alpha}$$

behelyettesítve: $|\underline{r}|\,|\dot{\underline{r}}|\cos\beta = \underline{r}\,\dot{\underline{r}}$

$$\frac{f(\varphi)}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{f'^2(\varphi)}{\cos^2\alpha} + f^2(\varphi)\mathrm{tg}^2\alpha}\,\cos\beta = \frac{ff'}{\cos^2\alpha}$$

$\Rightarrow$ összegezve: $|\underline{r}| = \frac{f(\varphi)}{\cos\alpha}$ $\quad |\dot{\underline{r}}| = \sqrt{\frac{f'^2(\varphi)}{\cos^2\alpha} + f^2 \operatorname{tg}^2\alpha}$ $\quad \underline{r}\dot{\underline{r}} = \frac{f f'}{\cos^2\alpha}$

behelyettesítve: $|\underline{r}||\dot{\underline{r}}| \cos\beta = \underline{r}\dot{\underline{r}}$

$\frac{f(\varphi)}{\cos\alpha} \sqrt{\frac{f'^2(\varphi)}{\cos^2\alpha} + f^2(\varphi)\operatorname{tg}^2\alpha}\, \cos\beta = \frac{f f'}{\cos^2\alpha} \quad / \cdot \cos^2\alpha$ ← differenciálegyenlet, amely leírja a jelenséget

$f(\varphi) \sqrt{f'^2(\varphi) + f^2 \sin^2\alpha}\, \cos\beta = f f'$

$\cos\beta \sqrt{f'^2 + f^2 \sin^2\alpha} = f'$

$\cos^2\beta \,(f'^2 + f^2 \sin^2\alpha) = f'^2$

$f^2 \cos^2\beta \sin^2\alpha = f'^2(1 - \cos^2\beta) = f'^2 \sin^2\beta$

$f \cos\beta \sin\alpha = f' \sin\beta$ ← integrálandó mint pl.

$f' = f(\operatorname{ctg}\beta \sin\alpha)$ $\quad \leftarrow \xi = \operatorname{ctg}\beta \sin\alpha$ konstans

$\Rightarrow f'(\varphi) = \xi f(\varphi)$

$\frac{df}{d\varphi} = \xi f \quad \Rightarrow \frac{df}{f} = \xi\, d\varphi \quad \Rightarrow \int \frac{1}{f}\, df = \xi \int d\varphi$

$\Rightarrow \ln f = \xi\varphi + C$

$f(\varphi) = e^{\xi\varphi + C} = e^C e^{\xi\varphi} = A e^{\xi\varphi}$

$= e^{\xi(\varphi - \varphi_0)}$

$\xi = 1$ magasságban φ_0 szöggel $\Rightarrow$ zérus időpillanattal

$\Rightarrow f(\varphi) = e^{\xi\varphi}$ $\quad \xi = \sin\alpha \operatorname{ctg}\beta$

a mozgás: egyenletes

pálya: logaritmikus spirál



$\Rightarrow \underline{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{\xi\varphi}\cos\varphi\, \operatorname{tg}\alpha \\ e^{\xi\varphi}\sin\varphi\, \operatorname{tg}\alpha \\ e^{\xi\varphi} \end{pmatrix}$ $\quad \xi = \sin\alpha \operatorname{ctg}\beta$

az előbbiek alapján: (a görbe deriváltja nem kell az ívhosszhoz)

$|\dot{\underline{r}}|^2 = \frac{f'^2}{\cos^2\alpha} + f^2 \operatorname{tg}^2\alpha$ $\qquad f = e^{\xi\varphi}$ $\quad f' = \xi e^{\xi\varphi}$

$|\dot{\underline{r}}|^2 = \frac{\xi^2 e^{2\xi\varphi}}{\cos^2\alpha} + e^{2\xi\varphi} \operatorname{tg}^2\alpha = e^{2\xi\varphi}\left(\frac{\xi^2}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right) = e^{2\xi\varphi} \frac{1}{\cos^2\alpha}\left(\xi^2 + \sin^2\alpha\right)$

$= e^{2\xi\varphi} \frac{1}{\cos^2\alpha}\left(\sin^2\alpha \operatorname{ctg}^2\beta + \sin^2\alpha\right) = e^{2\xi\varphi} \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\left(\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta} + 1\right) =$

$= e^{2\xi\varphi} \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \frac{1}{\sin^2\beta} \Rightarrow \boxed{|\dot{\underline{r}}| = e^{\xi\varphi} \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\beta}}$

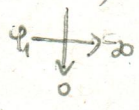
ívhossz:

$s = \int ds = \int \frac{ds}{d\varphi} d\varphi = \int |\dot{\underline{r}}(\varphi)|\, d\varphi = \int e^{\xi\varphi} \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\beta}\, d\varphi = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\beta} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{\xi\varphi}\, d\varphi =$ *

$= \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\beta}\left[\frac{e^{\xi\varphi}}{\xi}\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\beta} \frac{1}{\sin\alpha \operatorname{ctg}\beta}\left[e^{\xi\varphi}\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \underline{\underline{\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}\left(e^{\xi\varphi_2} - e^{\xi\varphi_1}\right) = s}}$

* α szöget bezárós görbe, de véges hossza van

$s = \frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}\left(e^{\xi\varphi_2} - e^{\xi\varphi_1}\right)$



$\downarrow \varphi_1 \to 0$

$s(\varphi) = \frac{e^{\xi\varphi}}{\cos\alpha\cos\beta}$

Ívhossz-paraméter

$\vec{r}(t) \rightarrow s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{r}}(t)|\, dt$

$s(T) = \int_{t_0}^{T} v(t)\, dt$ ← pálya hossza; ↗ nem ua.!; ↙ összegzési index

↑

$T(s)$ invertáljuk a fent [$s(T)$ bijektív]

$s(t) \rightarrow t(s)$

$\vec{r}(t(s)) = \vec{r}(s)$ ← s is lehet paraméter; természetes paraméter egységnyi út mulyan pontba vezetett

az ívhossz a legjobb paraméter ⇒ (de nehéz kiszámolni) v. nem invertálható

s szerinti derivált:

$\vec{r}(s)' = \frac{d\vec{r}}{ds}$

$|\vec{r}'| = \left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \frac{|d\vec{r}|}{ds} = \frac{ds}{ds} = 1$ ⇒ az érintővektorok egységvektorok

jelölés: $\vec{e}$

$\boxed{\vec{e}(s) = \vec{r}'(s)}$ érintő egységvektor $\quad \vec{e} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}$

$|\vec{e}| = 1 \quad \vec{e}\vec{e} = 1$



deriváljuk $\vec{e}$-t s szerint

$\vec{e}'(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{e}(s+\Delta s) - \vec{e}(s)}{\Delta s}$

$\vec{e}' \perp \vec{e}$

$\vec{e}(s)\,\vec{e}(s) = 1$

$\left[\underline{a}(t)\,\underline{b}(t) = \sum_i a_i(t)\,b_i(t) \Rightarrow (\underline{a}\,\underline{b})' = \sum_i (\dot{a}_i b_i + a_i \dot{b}_i) = \dot{\underline{a}}\,\underline{b} + \underline{a}\,\dot{\underline{b}}\right.$

$\left.\text{Leibniz-féle szorzatszabály igaz skalár / vektor, diadikus / tenzorra is}\right]$

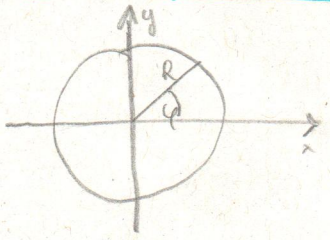
$\frac{d}{ds}\vec{e}(s)\vec{e}(s) = \vec{e}'\vec{e} + \vec{e}\vec{e}' = 2\vec{e}'\vec{e} = 0$

↑ merőlegesek

$\boxed{G(s) = |\vec{e}'(s)|}$ görbület

egyenes: $G = 0$

köre - görbületi sugár



$x = R\cos\varphi$

$y = R\sin\varphi$

$\underline{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \end{pmatrix}$

$\dot{\underline{r}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad |\dot{\underline{r}}| = R$

de görbe ívhosszparaméteres eddállítása:

$s = \int |\dot{r}|\, d\varphi = \int R\, d\varphi = R\varphi$

$\underline{r}(s) = \begin{pmatrix} R\cos\frac{s}{R} \\ R\sin\frac{s}{R} \end{pmatrix}$

$\underline{r}'(s) = \begin{pmatrix} R\left(-\sin\frac{s}{R}\right)\frac{1}{R} \\ R\left(\cos\frac{s}{R}\right)\frac{1}{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\frac{s}{R} \\ \cos\frac{s}{R} \end{pmatrix} = \underline{e}(s)$

$\underline{e}'(s) = \begin{pmatrix} -\cos\frac{s}{R}\frac{1}{R} \\ -\sin\frac{s}{R}\frac{1}{R} \end{pmatrix} = -\frac{1}{R}\begin{pmatrix} \cos\frac{s}{R} \\ \sin\frac{s}{R} \end{pmatrix} \perp \underline{e}$

görbület:

$\boxed{G = |e'| = \frac{1}{R}}$

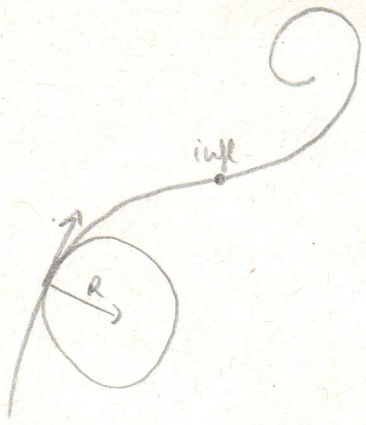
görbületi sugár

$\boxed{R = \frac{1}{G}}$



görbületi sugár

$R = \frac{1}{G}$



belső mozgás: simuló síkban simuló kör
görbületi kör

inflexiós pont: a görbület 0
simuló kör sugara ∞
$\emptyset$ simuló sík

a görbe **evolutája**
a simuló körök középpontja által alkotott görbe

$\vec{r}(s)$ → angolul: $\vec{t}$ (tangent)

$\vec{r}'(s) = \vec{e}(s)$ $|\vec{e}| = 1$

$\vec{e}'(s) \perp \vec{e}$

$\vec{e}' = G(s)\,\vec{n}(s)$

$G = |\vec{e}'|$

$\vec{n} = \frac{\vec{e}'}{G} = \frac{\vec{e}'}{|\vec{e}'|}$

$\vec{n}(s)$: **főnormális**

$\vec{n}(s)$ és $\vec{e}(s)$: egymásra $\perp$ egységvektorok a simuló síkban

$\vec{b}(s) = \vec{e} \times \vec{n}$

$\vec{b}$: **binormális**
simuló síkra $\perp$

ha a binormális konstans
⇒ síkgörbe

repülő orra: $\vec{e}$
szárnya: $\vec{n}$
hasa: $\vec{b}$

$\vec{e}, \vec{n}, \vec{b}$: **ONB bázis**

$\vec{b}$ változása: mennyire tér el a görbe az egyenestől

$|\vec{b}|$: mennyire nemsíkgörbe (torzgörbe)

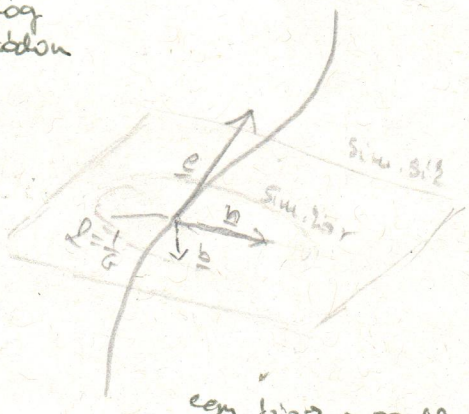
$T(s) = |\vec{b}'|$ **torzió**

alaptétel: ha ismerjük $G(s)$-t és $T(s)$-t ⇒ reprodukálható a görbe (5D-ben)
(differenciálgeometria: geometriai alakzatok leírása differenciálással)

2019.11.20.
Sze 36-37.ea.

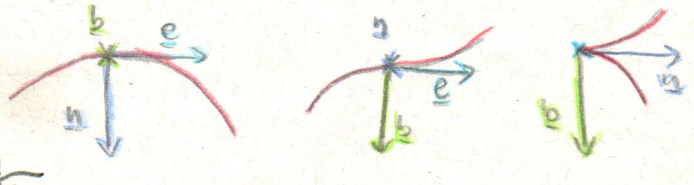
a kiszámítás lépései

- $\underline{r}(t)$
- $\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t)$ } mellékutakon
- $s = \int dt\, |\dot{\underline{r}}(t)| = s(t)$
- $\underline{r}(s)$
- $\underline{e}(s) = \underline{r}'(s)$ $|\underline{e}| = 1$
- $\underline{e}'(s)$
- $G(s) = |\underline{e}'(s)|$
- $\underline{n}(s) = \frac{\underline{e}'(s)}{G(s)}$
- $\underline{b} = \underline{e} \times \underline{n}$
- $T(s) = |\underline{b}'(s)|$ torzió



kísérő triéder:
$\underline{e}, \underline{n}, \underline{b}$
ONB

egy térgörbe pontban
$\underline{b}$ irányából: $\underline{n}$ irányából: $\underline{e}$ irányából:



a 3 standard nézete a görbének

sűrűségfüggvény komponensei függetlenek a görbülettől és torziótól

Darboux-vektor

nem tudjuk alt. a vektorokat megszámolni

- S-re nincs zárt alak (integrál) } a gyakorlatban alk. nem lehet
- R nem invertálható } vele számolni

⇒ ívhossz paraméter helyett maradjunk t paraméterrel

Görbület és torzió számítása

$\underline{r}(t)$ — kiszámolandó vektor -jelölése

$\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t)$ $\quad v = |\underline{v}|$ $\quad \underline{e} = \frac{\underline{v}}{v}$

$\underline{a}(t) = \dot{\underline{v}}(t) = \ddot{\underline{r}}(t)$

$\underline{z}(t) = \dot{\underline{a}}(t) = \dddot{\underline{r}}(t)$ (időfüggést hagyjuk el jelölésben)

$\underline{c}(t) = \underline{v}(t) \times \underline{a}(t)$

összetett fv deriválása: $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$

a) görbület

$$\underline{e}' = \frac{d\underline{e}}{ds} = \frac{d\underline{e}}{dt}\frac{dt}{ds} = * \qquad \underline{e}(t(s))$$

$$\left[\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{\left|\frac{d\underline{r}}{dt}\right|} = \frac{1}{|\underline{v}|} = \frac{1}{v} = \frac{dt}{ds}\right]$$

$$\underline{e}' = * = \frac{d\underline{e}}{ds} = \frac{d\underline{e}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{1}{v}\frac{d}{dt}\left(\overbrace{\frac{\underline{v}}{v}}^{\underline{e}}\right) = \frac{1}{v}\frac{d}{dt}\left(\underline{v}\cdot\frac{1}{v}\right) =$$

$\frac{d}{dt}v$: a sebesség alak változását adja vált NEM a gyorsulás

$$= \frac{1}{v}\left[\underbrace{\frac{d\underline{v}}{dt}}_{\underline{a}}\frac{1}{v} + \underline{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{v}\right)\right] = \frac{1}{v}\left[\underline{a}\frac{1}{v} + \underline{v}\left(-\frac{1}{v^2}\right)\frac{d}{dt}v\right] =$$

$$\left[\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{v^2} = \frac{d}{dt}\sqrt{\underline{v}\cdot\underline{v}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\underline{v}\cdot\underline{v}}}\frac{d}{dt}(\underline{v}\cdot\underline{v}) = \frac{1}{2v}\left(\frac{d\underline{v}}{dt}\underline{v} + \underline{v}\frac{d\underline{v}}{dt}\right) = \frac{\underline{a}\,\underline{v}}{|\underline{v}|}\right]$$

$$= \frac{1}{v}\left[\underline{a}\frac{1}{v} - \underline{v}\frac{1}{v^2}\frac{\underline{a}\,\underline{v}}{v}\right] = \frac{1}{v^2}\left[\underline{a} - \frac{1}{v^2}\underline{v}(\underline{v}\underline{a})\right] = (*)$$

$(\underline{e}\circ\underline{e})$: projekció $\underline{e}$ egyenesére vetít

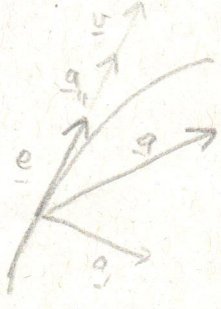
$(\underline{\underline{I}} - \underline{e}\circ\underline{e})$: proj. $\underline{e}$ egyenesére $\perp$-esen vetít

$$= \frac{1}{v^2}(\underline{a} - \underline{e}(\underline{e}\underline{a})) = \frac{1}{v^2}[\underline{a} - (\underline{e}\circ\underline{e})\underline{a}] = \frac{1}{v^2}\underbrace{(\underline{\underline{I}} - \underline{e}\circ\underline{e})\underline{a}}_{\underline{a}_\perp}$$

$$|\underline{e}'| = G = \frac{1}{R} = \frac{1}{v^2}|\underline{a}_\perp|$$

$$\Rightarrow \boxed{|\underline{a}_\perp| = \frac{v^2}{R}}$$

$\forall$ mozgásra igaz, csak pontról pontra változik v és R is



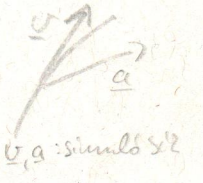
$$(*)\quad \underline{e}' = \frac{1}{v^4}\left[v^2\underline{a} - \underline{v}(\underline{v}\underline{a})\right] = \frac{1}{v^4}\left((\underline{v}\underline{v})\underline{a} - \underline{v}(\underline{v}\underline{a})\right) =$$

$$= \frac{1}{v^4}\underline{v}\times(\overbrace{\underline{a}\times\underline{v}}^{-\underline{c}}) =$$

← vektoros vektorszorzat: $\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) = \underline{b}(\underline{a}\underline{c}) - \underline{c}(\underline{a}\underline{b})$

$$= \boxed{\frac{1}{v^4}\underline{c}\times\underline{v} = \underline{e}'}$$

$\underline{a}\times\underline{v}$: binormális irányú vektor



$\underline{v},\underline{a}$: simuló sík

$$G = |\underline{e}'| = \frac{1}{v^4}|\underline{c}\times\underline{v}| \qquad \underline{c} : \perp \text{a simuló síkra} \Rightarrow \underline{c} \perp \underline{v}$$

$$|\underline{c}\times\underline{v}| = |\underline{c}|\,|\underline{v}|\cdot 1$$

$$\Rightarrow G = \frac{1}{v^4}|\underline{c}|\,|\underline{v}| =$$

$$= \frac{|\underline{c}|}{v^3} = \boxed{\frac{|\underline{v}\times\underline{a}|}{v^3} = \frac{|\dot{\underline{r}}\times\ddot{\underline{r}}|}{|\dot{\underline{r}}|^3} = G}$$

kész: 12.09

12/A

b) korzib

$\underline{n}(s) = \frac{\underline{e}'}{G} = \frac{\frac{1}{v^4}\underline{\dot{v}} \times \underline{v}}{\frac{1}{v^3}|\underline{\dot{v}}|} = \boxed{\frac{\underline{\dot{v}} \times \underline{v}}{v\dot{v}} = \underline{n}}$ ← egyszerűsítés, ami csak akkor lehet, ha $\underline{\dot{v}} \perp \underline{v}$

$\underline{b} = \underline{e} \times \underline{n} = \frac{1}{v}\underline{v} \times \frac{1}{v\dot{v}}(\underline{\dot{v}} \times \underline{v}) = \frac{1}{v^2\dot{v}}\underline{v} \times (\underline{\dot{v}} \times \underline{v}) = \frac{1}{v^2\dot{v}}\left((\underline{v}\underline{\dot{v}})\underline{\dot{v}} - (\underline{\dot{v}}\underline{\dot{v}})\underline{v}\right) =$

$= \frac{1}{v^2\dot{v}} \cdot \underline{\dot{v}}\, v^2 = \boxed{\frac{\underline{\dot{v}}}{\dot{v}} = \underline{b}}$

$\underline{b}' = \frac{d}{ds}\underline{b} = \frac{dt}{ds}\frac{d\underline{b}}{dt} = \frac{1}{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{\underline{\dot{v}}}{\dot{v}}\right) = \frac{1}{v}\frac{d}{dt}\left(\underline{\dot{v}} \cdot \frac{1}{\dot{v}}\right) = \frac{1}{v}\left[\frac{d\underline{\dot{v}}}{dt} \cdot \frac{1}{\dot{v}} + \underline{\dot{v}}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\dot{v}}\right)\right] =$

$\frac{d}{dt}\underline{\dot{v}} = \frac{d}{dt}(\underline{v} \times \underline{a}) = \frac{d\underline{v}}{dt} \times \underline{a} + \underline{v} \times \frac{d\underline{a}}{dt} = \underbrace{\underline{a} \times \underline{a}}_{0} + \underline{v} \times \underline{\dot{a}} = \boxed{\underline{\dot{v}} = \underline{v} \times \underline{\dot{a}}}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\dot{v}}\right) = -\frac{1}{\dot{v}^2}\frac{d}{dt}\dot{v} = -\frac{1}{\dot{v}^2}\frac{d}{dt}\sqrt{\underline{\dot{v}}\underline{\dot{v}}} = -\frac{1}{\dot{v}^2}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\underline{\dot{v}}\underline{\dot{v}}}}\frac{d}{dt}(\underline{\dot{v}}\underline{\dot{v}}) =$

$= -\frac{1}{2\dot{v}^3} 2\,\underline{\dot{v}}\underline{\ddot{v}} = -\frac{\underline{\dot{v}}\underline{\ddot{v}}}{\dot{v}^3}$

$= \frac{1}{v}\left[(\underline{v} \times \underline{\dot{a}})\frac{1}{\dot{v}} + \underline{\dot{v}}\left(-\frac{\underline{\dot{v}}\underline{\ddot{v}}}{\dot{v}^3}\right)\right] =^{*}$

$\underline{\dot{v}}\underline{\ddot{v}} = \underline{\dot{v}} \cdot (\underline{\dot{v}} \times \underline{a}) = (\underline{\ddot{v}} \times \underline{\dot{v}}) \cdot \underline{a} = (\underline{\dot{a}} \times \underline{v}) \cdot \underline{a} = (\underline{v}\underline{a}\underline{\dot{a}}) = (\underline{a}\underline{\dot{a}}\underline{v}) = \underline{v}(\underline{\dot{a}} \times \underline{n}) =$

$= \left[(\underline{v} \times \underline{\dot{a}}) \times \underline{n}\right]\underline{b} = \left[\underline{\dot{a}}(\underline{v}\underline{n}) - \underline{v}(\underline{\dot{a}}\underline{n})\right]\underline{b} = (\underline{\dot{a}}\underline{n})(\underline{v}\underline{b}) - v^2(\underline{\dot{a}}\underline{b})$

$= \frac{1}{cv}\left[(\underline{v} \times \underline{\dot{a}}) - \frac{1}{\dot{v}^2}\underline{\dot{v}}\left((\underline{\dot{a}}\underline{n})v^2 - (\underline{v}\underline{n})(\underline{\dot{a}}\underline{b})\right)\right]$

$\underline{\dot{v}} = \underline{\dot{a}} \times \underline{v} = (\underline{\dot{a}} \times \underline{v}) \times \underline{n}\,\underline{n} = (\underline{v} \times \underline{n})\underline{\dot{v}} = (\underline{\dot{a}} \times \underline{n})(\underline{v}\underline{\dot{v}}) = (\underline{n} \times \underline{\dot{a}})\underline{v}(\underline{v}\underline{\dot{v}}) =$

$= \underline{v}(\underline{v}\underline{\dot{v}})(\underline{n}\underline{\dot{a}}) - \underline{\dot{a}}(\underline{v}\underline{\dot{v}})(\underline{n}\underline{v}) = (\underline{v}\underline{\dot{v}})\left[(\underline{v}\underline{\dot{v}})\underline{a} - (\underline{v}\underline{a})\underline{\dot{v}}\right] = (\underline{v}\underline{\dot{v}})^2\underline{a} - (\underline{v}\underline{\dot{v}})(\underline{v}\underline{a})\underline{\dot{v}}$

$= \frac{1}{cv}\left[(\underline{v} \times \underline{\dot{a}}) - \frac{1}{c^2}\underline{\dot{v}}(\underline{\dot{a}}\underline{a})v^2 + \frac{1}{c^2}\underline{\dot{v}}(\underline{v}\underline{a})(\underline{v}\underline{\dot{a}})\right] =^{*}$

$= \frac{1}{cv}\left[(\underline{v} \times \underline{\dot{a}}) - \frac{1}{c^2}\underline{\dot{v}}(\underline{\dot{a}}\underline{a})v^2 + \frac{1}{c^2}\underline{\dot{v}}(\underline{v}\underline{a})(\underline{v}\underline{\dot{a}})\right] =^{*} \frac{1}{cv}\left[(\underline{\dot{v}} \times \underline{a}) - \underline{b}(\underline{\dot{v}}\underline{a})\right] = \frac{1}{cv}\left[(\underline{\dot{v}}\underline{a})\underline{a} - \underline{b}(\underline{\dot{v}}\underline{a})\right] =^{**} \frac{1}{cv}(\underline{a}\underline{a} - \underline{\underline{I}})\underline{\dot{v}}$

$= \boxed{\frac{1}{cv}\underline{\dot{v}}_{\perp} = \underline{b}'}$ ← a mindegyik hasonlóan

$|\underline{b}'|^2 = \frac{1}{v^2c^2}|\underline{\dot{v}}_{\perp}|^2 \Rightarrow$ $|\underline{\dot{v}}_{\perp}|^2 = |\underline{\dot{v}}|^2 - |\underline{\dot{v}}_{\parallel}|^2$

$\underline{\dot{v}} = \underline{v} \times \underline{\dot{a}}$ $\underline{\dot{v}}_{\parallel} = (\underline{\dot{v}}\underline{a})\underline{a} = (\underline{a}\underline{a})\underline{\dot{v}} = \underline{\dot{v}}(\underline{a}\underline{a})$ $\Rightarrow |\underline{\dot{v}}_{\parallel}|^2 = (\underline{\dot{v}}\underline{a})^2$

$|\underline{b}'|^2 = \frac{1}{v^2c^2}\left[|\underline{\dot{v}}|^2 - (\underline{\dot{v}}\underline{a})^2\right] = \frac{1}{v^2c^2}\underline{\dot{v}}\left((\underline{\dot{v}}\underline{\dot{v}})\underline{a} - (\underline{\dot{v}}\underline{a})\underline{\dot{v}}\right) = \frac{1}{v^2c^2}\underline{\dot{v}}\left((\underline{\dot{v}}\underline{a})\underline{a} - (\underline{\dot{v}}\underline{\dot{v}})\underline{\dot{v}}\right)$

$\underline{\dot{a}}_{\perp} = (\underline{\dot{a}} \times \underline{\dot{v}}) \times \underline{a} = \frac{1}{cv}\left[(\underline{\dot{v}}\underline{a})\underline{a} - \underbrace{(\underline{a}\underline{a})}_{1,\text{mert } |\underline{a}|=1}\underline{\dot{v}}\right] = \frac{1}{cv}\left[(\underline{\dot{v}}\underline{a})\underline{a} - \underline{\dot{v}}\right] =^{**} \underline{b}'$

$|\underline{b}'| = \frac{1}{cv}|\underline{\dot{a}}| = \frac{1}{cv}|\underline{a} \times \underline{\dot{v}}| = \frac{1}{cv}|\underline{a} \times (\underline{\dot{v}} \times \underline{n})| = \frac{1}{cv}\left|(\underline{a}\underline{n})\underline{\dot{v}} - (\underline{a}\underline{\dot{v}})\underline{n}\right| =$ $\underline{a} = \underline{a}\underline{n}\,\underline{n}$

$= \frac{1}{cv}|\underline{a}|\,|\underline{\dot{v}}| = \frac{1}{cv}|\underline{a} \times \underline{\dot{v}}| = \frac{1}{cv}|\underline{\dot{v}} \times \underline{a}| = |\underline{b}'|$

$= \frac{(\underline{a}\underline{\dot{v}})}{cv} = \frac{\underline{a}\underline{\dot{v}}}{c} = \frac{\underline{\dot{v}} \cdot \underline{\dot{v}}}{c^2} = \frac{(\underline{v} \times \underline{\dot{a}})}{c^2} = \boxed{\frac{(\underline{\dot{v}}\underline{\dot{v}}\underline{a})}{c^2} = |\underline{b}'| = T}$

$G = \frac{|\underline{v} \times \underline{a}|}{v^3} = \frac{|\underline{\dot{x}} \times \underline{\ddot{x}}|}{\dot{x}^3}$

$T = \frac{(\underline{v}\underline{a}\underline{\dot{a}})}{c^2} = \frac{(\underline{\dot{x}}\underline{\ddot{x}}\dddot{\underline{x}})}{|\underline{\dot{x}} \times \underline{\ddot{x}}|^2}$ ← vegyesszorzat : determinánsos ívet a mx cellásában

#F: legnagyobb görbe érintő

Vektortól függő mennyiségek (MEZŐK)

- mező: a tér (geometriai tér) pontjaitól függő fv
  pontok — helyvektorok ⇒ vektortól függő fv

jelölés: helyvektor: $\underline{r}$ $\quad r = |\underline{r}|$
Komponensei: x, y, z

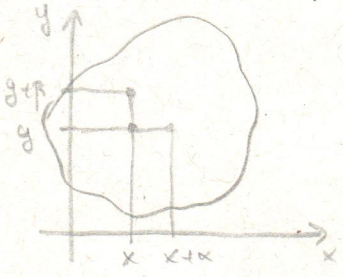
⇒ 3 változós fv (a 3 komponenstől függ)
a célmennyiség is lehet vektor ← ekkor 3db 3 változós fv

2 változós fveket célszerű a cumpx síkon ábrázolni
pl. cumpx dinamika, elektrosztatika

Parciális derivált

fv: egyik halmaz elemeihez hozzárendeli egy másik halmaz elemeit
többváltozós fv: Descartes-koordinátákat rendel egymásikhoz
2 térbeli dolgok helyzetének definiálása 3D-ben: távolság, szög
akkor van határérték, ha minden irányból közelítve ua az értéke
részlegesen változtatott fveknek: csak egy változót tűnik

kétváltozós fv: $f(x,y)$



$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{f(x+\alpha, y) - f(x,y)}{\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \partial_x f$$

y paraméter

egy kétváltozós fv parciálisát deriválhatja
is kétváltozós fv (valamelyik változója)

parciális ∂-nál nem szabad szorozni!!

$$\lim_{\beta \to 0} \frac{f(x, y+\beta) - f(x,y)}{\beta} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \partial_y f$$

x paraméter

pl. $f(x,y) = e^{\sin(x^2 y)}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\sin(x^2y)} \cdot \cos(x^2 y) \cdot 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{\sin(x^2y)} \cdot \cos(x^2 y) \cdot x^2$$

jelölés:
$f(x_1, x_2, x_3)$
$\partial_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1}$
$\partial_2 f = \frac{\partial f}{\partial x_2}$
$\vdots$
} $\partial_k f$

a parc deriváltak is lehet tovább deriválni
2 változó esetén — 1. dériv: 2db
2. dériv: 4db ...
3. dériv: 8db

↑ 2. deriváltak:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

vegyes parc deriváltak
$\partial_x \partial_y f$ „belülről kifelé"
először x. radír, majd a
szerint derivált
felcserélhető, ha mindkettő
szimm. mx!!

szimm. mx ⇒ mindegy, hogy
milyen sorrendben deriválok x & y szerint

$f(x,y) = \sin\left(x^3 y + \ln\frac{x}{y}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(x^3 y + \ln\frac{x}{y}\right)\left(3x^2 y + \frac{1}{x}\right) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos\left(x^3 y + \ln\frac{x}{y}\right)\left(x^3 - \frac{1}{y}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin\left(x^3 y + \ln\frac{x}{y}\right)\left(x^3 - \frac{1}{y}\right)\left(3x^2 y + \frac{1}{x}\right) + \cos\left(x^3 y + \ln\frac{x}{y}\right)(3x^2) \quad \text{))}$$

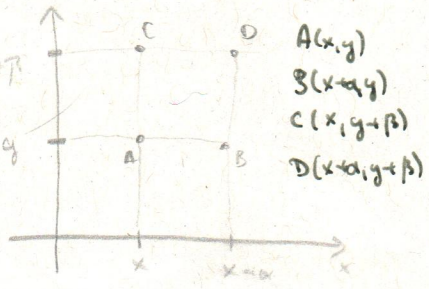
$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin\left(x^3 y + \ln\frac{x}{y}\right)\left(3x^2 y + \frac{1}{x}\right)\left(x^3 - \frac{1}{y}\right) + \cos\left(x^3 y + \ln\frac{x}{y}\right)(3x^2)$$

Young-tétel

A vegyes parciálisak megegyeznek (feltéve, ha szimmetrikus a fv)

általános parciális:

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta, y) - f(x,y)}{\delta}$$



$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(A)\right) = \lim_{\beta \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(C) - \frac{\partial f}{\partial x}(A)}{\beta} = *$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(A)\right) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(B) - \frac{\partial f}{\partial y}(A)}{\alpha} = **$$

$$* = \lim_{\beta \to 0} \frac{\lim_{\alpha \to 0} \frac{f(D)-f(C)}{\alpha} - \lim_{\alpha \to 0} \frac{f(B)-f(A)}{\alpha}}{\beta}$$

$$** = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\lim_{\beta \to 0} \frac{f(D)-f(B)}{\beta} - \lim_{\beta \to 0} \frac{f(C)-f(A)}{\beta}}{\alpha}$$

$$= \lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \beta \to 0}} \frac{f(D)-f(C)-f(B)+f(A)}{\alpha\beta}$$

probléma: a limeszek sorrendje nem közömbös
de a limeszek alt.-ban felcserélhetőek
pl. ha $\mathcal{O}$ értelmezve + fv egy tartományon

magasabb deriváltakra is igaz

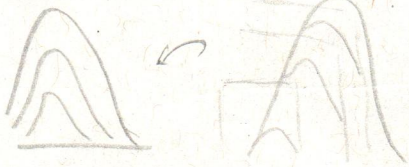
Mezők

mező: a tér pontjaitól függő fv ~ helyvektor koordinátái
→ 3 változós fv
rendeljünk a tér pontjaihoz számokat = skalármező

ábrázolás:

- szintvonalak: a függőleges síkok mentén
  nem metsző egymást ← de önmagát metszheti
  folytonosak (kivétel: szakadék) ugyanegy értékkel
  számítják, ami helytől függ = skalármező
  3D-ben felületek (szintfelületek)
- színezés - a függőleges extra infó a térképen
- másik lehetőség: metszetek => sok metszet esetén szemléletes kép
  visszavezetés egyváltozós fvre





többváltozós fv esetén a derivált:

$\phi : M \to \mathbb{R}^3$ skalármező

$P \downarrow \vec{r} \to \phi(\vec{r})$

gond: nem lehet vektorral osztani

$$\frac{\phi(\vec{r}+\vec{\delta}) - \phi(\vec{r})}{\vec{\delta}}$$

=> változtassuk meg a def-t!

$$f(x+\delta) - f(x) \approx f'(x)\,\delta$$

$$\phi(\vec{r}+\vec{\delta}) - \phi(\vec{r}) \approx \left(\vec{g}(\vec{r})\right)\vec{\delta}$$

$\vec{g}(\vec{r})$: a skalármező deriváltja ← vektorral reel számot: $\vec{r}-6$, hogy skalárt kapjunk
gradiens

kérdés: létezik-e ilyen g

Gradiens

$\phi(\vec{r}+\vec{\delta}) - \phi(\vec{r}) \approx (\vec{g}(\vec{r}))\vec{\delta}$ $\quad \vec{g}(\vec{r})$ – gradiens

gradiens játssa el a fv deriváltját

skalármező gradiense vektormező (pontho vektort rendel)

jelölés: $\operatorname{grad}\phi$

$\vec{\nabla}\phi$ ← Nabla

$\frac{\partial\phi}{\partial\vec{r}}$ ← nem irányhatós

stacionárius : derivált 0

$(\vec{g}(\vec{r}))\vec{\delta}$: skaláris mennyiség ← nem csak akkor 0, ha a derivált 0!

a gradiens $\perp$ pontban $\perp$ a szintvonalra

a legnagyobb felfelé mutat

dimenzióban $\Rightarrow$ vektorok nem metszhetik egymást

legyenek ha bármilyen $\vec{\delta}$-val $(\vec{g}(\vec{r}))\vec{\delta} = 0$

$\rightarrow$ a grad $= 0$

d. legyen minden mozduljon el ékkel 2 lépést ← irány és hossz adott



$\Rightarrow$ közös elmozdulásvektor

$\vec{\delta} = \vec{n}\cdot\alpha$

$\vec{g}(\vec{r})\cdot\vec{u}$: $\vec{g}(\vec{r})$ vektorlet $\vec{u}$-re

$$\phi(\vec{r}+\alpha\vec{n}) - \phi(\vec{r}) \approx \vec{g}(\vec{r})\,\vec{u}\,\alpha$$

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\phi(\vec{r}+\alpha\vec{u}) - \phi(\vec{r})}{\alpha} = \vec{g}(\vec{r})\vec{u}$$

iránymenti derivált $\left(\frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}}\right)$

$\vec{n}\,\vec{\nabla}\phi$

reprezentáció:

$$\phi(\underline{r}+\alpha\underline{n}) - \phi(\underline{r}) \approx \underline{g}(\underline{r})\,\underline{\delta}$$

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\phi(\underline{r}+\alpha\underline{n}) - \phi(\underline{r})}{\alpha} = \underline{g}(\underline{r})\,\underline{n}$$

2D: $\phi(r) \to \phi(x,y)$ 2 dim.-ban

spec. eset: $\underline{n} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ← csak az x tengely mentén

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\phi(\underline{r}+\alpha\underline{n}) - \phi(\underline{r})}{\alpha} = \underline{n}\,\underline{g}(\underline{r})$$

$$g_x = \frac{\partial\phi}{\partial x_x}$$

$$\underline{r}+\alpha\underline{n} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+\alpha\\y\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ a gradiens komponensei az adott komp. parciálisai

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\phi(x+\alpha,y) - \phi(x,y)}{\alpha} = (1,0)\,\underline{g} = (1,0)\begin{pmatrix}g_1\\g_2\end{pmatrix} = g_1$$

$\vec{g} = \vec{\nabla}\phi$

$\underline{g} = \underline{\nabla}\phi$

$g_x = \partial_x\phi$

∇: egyben diffoperátor és vektor

nabla x-adik komponense a x-adik szerinti parciálist

nablát lehet skalárisan, vektoriálisan, diadikusan,...

és lehet szorozni egy vektorral

egy vektormező akt. nem gradiense egy skalármezőnek

erős (konzervatív) : vektormező, ami gradiként felírható

2019. 11. 25.
hét 38. e

grad - összefoglalás

$\phi(P) \to \phi(\vec{r}) \to \phi(x) \to \phi(x,y,z)$ pont → helyvektor → reprezentáció → komponensek

$$f'(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}$$ helyettesítés $\Rightarrow$ $f(x+\delta) \approx f(x) + \delta f'(x)$

$$\phi'(\vec{r}) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\phi(\vec{r}+\vec{\delta}) - \phi(\vec{r})}{\vec{\delta}}$$ $\Rightarrow$ $\phi(\vec{r}+\vec{\delta}) \approx \phi(\vec{r}) + \vec{\delta}\,\vec{g}(\vec{r})$

$\vec{g} = \text{grad}\,\phi = \vec{\nabla}\phi$

Taylor-sor:

$$f(x+\delta) = f(x) + f'(x)\cdot\delta + \frac{1}{2} f''(x)\cdot\delta^2 + \frac{1}{6} f'''(x)\cdot\delta^3 + \dots$$

$\phi(\underline{r}+\underline{\delta}) \approx \phi(\underline{r}) + \underline{\delta}\,\underline{g}(\underline{r})$ ← grad def ↗ elsőrendű közelítés

$$\phi(x+\delta_1, y+\delta_2, z+\delta_3) \approx \phi(x,y,z) + \delta_1 g_1 + \delta_2 g_2 + \delta_3 g_3$$

$g_k = \frac{\partial \phi}{\partial x_k} = \partial_k \phi$ ⟶ $\phi(\underline{r}+\underline{\delta}) \approx \phi(\underline{r}) + \sum_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k}\delta_k$ 1 dimenzió

← grad. vizsgálat miatt

$$\phi(\underline{r}+\underline{\delta}) = \phi(\underline{r}) + \sum_k (\partial_k \phi)\delta_k + \frac{1}{2}\sum_k\sum_\ell (\partial_k \partial_\ell \phi)\delta_k \delta_\ell + \frac{1}{3!}\sum_k\sum_\ell\sum_m (\partial_k \partial_\ell \partial_m \phi)\delta_k\delta_\ell\delta_m + \dots$$

a kölcsönös fuel Taylor-sora ← 1. lépés: gradiens

két vektor nem rendezhető egymás ← ellenőrizd az alkalmazási tartományt
minden pontban a lehetséges vektorok vektorterét alkotják
⇒ két pontbeli vektor más helyen lévőnek

vektor lehetséges mennyiségekre a vektormezőnek: elővonalak
pl. esetében jól működik (pl. mágneses mező), de más esetben meglévő

Vonalmenti integrál

Newton-Leibniz formula:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(a,b)$$ adjunk hozzá még egy kis Δb-t

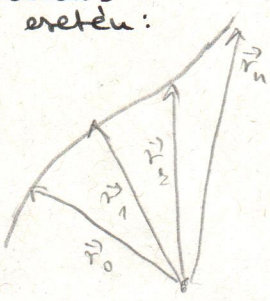
$$\frac{F(a,b+\Delta b) - F(a,b)}{\Delta b} = \frac{\int_a^{b+\Delta b} f(x)dx - \int_a^b f(x)dx}{\Delta b} =$$

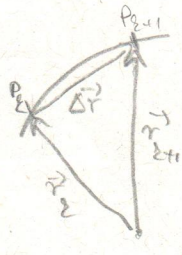


$$= \frac{1}{\Delta b}\int_b^{b+\Delta b} f(x)dx \approx f(b)$$

de ez vektormező deriválásánál nem mindig van így
$\vec{g}$ ismeretében visszaállítható-e ϕ?

- gradiens esetén:





$\Delta\vec{r} = \vec{r}_{k+1} - \vec{r}_k$

$\phi(P_{k+1}) - \phi(P_k) \approx \Delta\vec{r}\cdot\vec{g}(P_k)$

$\phi(\vec{r}_{k+1}) - \phi(\vec{r}_k) \approx \Delta\vec{r}\cdot\vec{g}(\vec{r}_k)$

ilyen jel ez összes kis darabra:

$\phi(\vec{r}_1) - \phi(\vec{r}_0) = \Delta\vec{r}_1 \cdot \vec{g}(\vec{r}_0)$

$\phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1) = \Delta\vec{r}_2 \cdot \vec{g}(\vec{r}_1)$

$\vdots$

$\phi(\vec{r}_n) - \phi(\vec{r}_{n-1}) = \Delta\vec{r}_n \vec{g}(\vec{r}_{n-1})$ } összeadva

$$\phi(\vec{r}_n) - \phi(\vec{r}_0) = \sum_k \vec{g}(\vec{r}_k) = \int_{P_{kezd}}^{P_{veg}} \vec{g}(\vec{r})\,d\vec{r}$$

Newton-Leibniz formula!

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\int \vec{g}(\vec{r})\,d\vec{r} = \phi(\text{veg}) - \phi(\text{kezd})$$

vonalmenti integrál

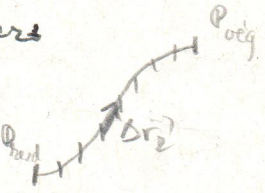
- előadáson:

tanultunk fel erőtérből hús munkavégzés és ahhoz mértéket rendeltünk

mérték: $\Delta \vec{r}_2$ => vektormennyiség rendelése munkához
vektoriális mérték

$\Delta \vec{r}$ elég kicsi => arra belül konstannal közelíthető a vektormező
=> mindegy, hogy a bal vagy jobb végén nézzük

$\sum \vec{F}(\vec{r}_2) \cdot \Delta \vec{r}_2$



ha keverik az a közös határátmenet.

$\int_G \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{r}$ ← vonal-integrál

$\int_G$: görbe menti integrál

+ a gradiens vonal-integrálja

$\int \vec{\nabla}\phi \, d\vec{r} = \phi(\text{vég}) - \phi(\text{kezd})$ ~ Newton-Leibniz
1. gradiens-tétel

nem függ, csak a kezdő- és végpontoktól

vonalintegrál pl. görbe mentén végzett és abból vegyett munka
ha a vektormező gradiens
=> zárt görbe mentén 0

mivel két pont között, ellentétes irányban (-1)-ször annyi munka

Rotáció

Young: $\partial_k \partial_\ell \phi = \partial_\ell \partial_k \phi$ ↖ miért igaz, hogy a vektormezőnek létezik potenciál?

$\vec{v}(\vec{r})$ vektormező $\vec{v}(\vec{r}) \rightsquigarrow v(r)$

$v_k(r) = \partial_k \phi$ ← ha v_k gradiens, és ϕ gradiense

$\partial_\ell v_k = \partial_\ell \partial_k \phi = \partial_k \partial_\ell \phi = \partial_k v_\ell$ ha gradiens!!

(ha a vektormező gradiens (⇐) ez az összefüggés fennáll)

pl. $v_x = 3x^2y^2 + yz \sin z + xz$

$v_y = 2x^3y + xz \sin z$

$\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$ esetén
$v_z = ?$ és $\phi = ?$

- $\partial_y v_x = \partial_x v_y$ igaz?

$6x^2y + z \sin z = 6x^2y + z \sin z$ => igen, lehet grad

- $v_z(x,y,z)$ keresése

$\partial_x v_z = \partial_z v_x = y(\sin z + z\cos z) + x$ z-ről ez az x szerinti deriváltja => integráljuk

$v_z = xy(\sin z + z\cos z) + \frac{x^2}{2} + f(y,z)$ ← konstans függvényre van

$\partial_y v_z = \partial_z v_y =$

$\partial_y v_z = x(\sin z + z\cos z) + \frac{\partial f(y,z)}{\partial y}$

$\partial_z v_y = x(\sin z + z\cos z)$ ⇒ $\frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = 0 \to f(z)$ y-tól független

=> $v_z = xy(\sin z + z\cos z) + \frac{x^2}{2} + f(z)$

- a potenciál ϕ keresése $\phi(x,y,z)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = v_x = 3x^2y^2 + yz\sin z + xz$$

$\Rightarrow$ integrál:

$$\phi(x,y,z) = x^3y^2 + xyz\sin z + \frac{x^2}{2}z + F(y,z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2x^3y + xz\sin z + \frac{\partial F}{\partial y} \overset{!}{=} v_y \Rightarrow \phi(x,y,z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = v_z = \dots$$

Spec. eset:

3D-ben:

$$\underline{v}(x) = \nabla \phi$$

$$\partial_x v_y = \partial_y v_x$$
$$\partial_x v_z = \partial_z v_x$$
$$\partial_y v_z = \partial_z v_y$$

0-ra redezve $\rightarrow$

$$\partial_y v_z - \partial_z v_y = 0$$
$$\partial_z v_x - \partial_x v_z = 0$$
$$\partial_x v_y - \partial_y v_x = 0$$

ha a vektormező gradiens:

$$\partial_\ell v_k = \partial_\ell \partial_k \phi = \partial_k \partial_\ell \phi = \partial_k v_\ell$$

vektoriális szorzat:

$$(a\times b)_x = a_y b_z - a_z b_y$$
$$(a\times b)_y = a_z b_x - a_x b_z$$
$$(a\times b)_z = a_x b_y - a_y b_x$$

$$\Rightarrow \nabla \times \underline{v} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\underline{v}(x) = \underline{\omega}(x) = \nabla \times \underline{v}$$

$\mathrm{rot}\,\underline{v}(x)$: a vektormező rotációja

$$\omega_k = \varepsilon_{klm}\partial_\ell v_m$$

$\Leftarrow$ (vektormező rotációja 0 $\rightsquigarrow$ gradiens)

$$\mathrm{rot}\,\underline{v} = 0 \Leftrightarrow \exists \phi \;\; \underline{v} = \nabla \phi$$

II. gradiensével

a gradiensnél megváltoztatjuk a kezdőpontot $\Rightarrow$ csak egy konstans adódik hozzá

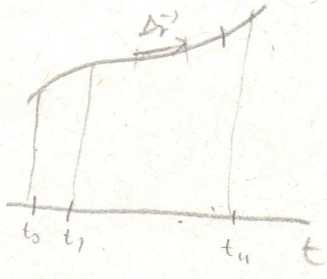
milyen vonal mentén számoljuk a vonalmenti integrált!

paraméterezés: vonalmenti integrál kiszámítása

$$\sum \vec{v}(\vec{r})\,\Delta\vec{r} \rightarrow \int \vec{v}(\vec{r})\,d\vec{r}$$

az integrálás tartománya paraméterezzük

jelentése: görbe $\Rightarrow$ 1 paraméter



$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \rightarrow \dot{\vec{r}}(t) \Rightarrow \Delta\vec{r} = \dot{\vec{r}}(t)\,\Delta t$$

$$d\vec{r} = \dot{\vec{r}}(t)\,dt$$

$$\vec{v}(\vec{r}(t)) = \vec{v}(t)$$

szimbólumok feloldása

$$\int \vec{v}(\vec{r})\,d\vec{r} = \int \underbrace{\vec{v}(\vec{r}(t))\,\dot{\vec{r}}(t)}_{f(t)}\,dt = \int_{t_0}^{t_n} f(t)\,dt$$

$\leftarrow$ behelyettesítés

a rotáció kölcsönösségeinek elhelyezhető

a gradiens vonalintegrálja független a görbétől

2019. 11. 26.
Ke 39. ea

$\underline{v}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} 3x - 2y + 5z - 4 \\ x + y \\ x - y + 7z \end{pmatrix}$

vektormező

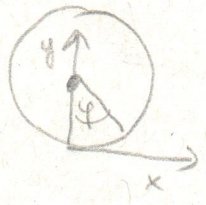
görbe: hengerre csavarodó spirál

henger sugara $R = 3$

magassága $m = 8$

$\int_G \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} = ?$

felül:



oldal:



0) Hány dimenziós a feladat?
mi mentén integrálunk ← ha görbe, akkor 1

1) paraméterválasztás - önkényes
legyen a körbemenő szög φ

2a) paraméterezés - $\underline{r}(t)$ fv előállítása ← gondolkodható lépés

2b) határok megválasztása

$\varphi \in [0, 2\pi[$

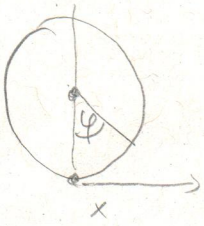
ha lefejtenénk a henger palástját



$z = \frac{8}{2\pi}\varphi$

$\underline{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3\sin\varphi \\ 3 - 3\cos\varphi \\ \frac{4}{\pi}\varphi \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x = 3\sin\varphi \\ y = 3 - 3\cos\varphi \end{cases}$



⇒ gömbi tekercs, korrig lehetséges lenne ebből

3) szimbólum feloldása

5 szimbólum lehet: $ds, d\underline{r}, dA, d\underline{E}, dV$

$d\underline{r} = \dot{\underline{r}}(t)\, dt$ vonalmenti integrál

$ds = |\dot{\underline{r}}(t)|\, dt$

4) differenciálás

$\dot{\underline{r}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3\cos\varphi \\ 3\sin\varphi \\ 4/\pi \end{pmatrix}$

= eddig csak az integrálás tartományával törődtünk!

5) vektorműveletek *

6) behelyettesítés

a vektormező az egész térben értelmezett
a görbe csak a tér bizonyos pontjaiban
→ a vektormező paraméterezésén úgy is csak a görbe mentén lesz alkalmazva
a görbe szöveges megadásából állítható elő a vektormezőt

$\underline{v}(\underline{r}(\varphi)) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3\sin\varphi - 2(3 - 3\cos\varphi) + 5 \cdot \frac{4}{\pi}\varphi - 4 \\ 3\sin\varphi + 3 - 3\cos\varphi \\ 3\sin\varphi - 3 + 3\cos\varphi + 7 \cdot \frac{4}{\pi}\varphi \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 9\sin\varphi + 6\cos\varphi + \frac{20}{\pi}\varphi - 10 \\ 3\sin\varphi - 3\cos\varphi + 3 \\ 3\sin\varphi + 3\cos\varphi + \frac{28}{\pi}\varphi - 3 \end{pmatrix} = \underline{v}(\varphi)$

* vektorműveletek: ha nem vonalintegrál
elvégzendő műveletek

7) szorzás

$$\int \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = \int \underline{v}(\underline{r}(t))\,\dot{\underline{r}}(t)\,dt$$

$$\underline{v}(\varphi)\,\dot{\underline{r}}(\varphi) = 27\sin\varphi\cos\varphi + 18\cos^2\varphi + \frac{60}{\pi}\varphi\cos\varphi - 30\cos\varphi + 9\sin^2\varphi -$$
$$- 9\sin\varphi\cos\varphi + 9\sin\varphi + \frac{12}{\pi}\sin\varphi + \frac{12}{\pi}\cos\varphi - \frac{12}{\pi} + \frac{112}{\pi^2}\varphi$$

$$= 9\cos^2\varphi + 18\sin\varphi\cos\varphi + \frac{60}{\pi}\varphi\cos\varphi + \frac{112}{\pi^2}\varphi +$$
$$+ \left(\frac{12}{\pi} - 30\right)\cos\varphi + \left(9 + \frac{12}{\pi}\right)\sin\varphi + \left(9 - \frac{12}{\pi}\right)$$

8) integrálás

$$\underline{I} = \int_G \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = \int_0^{2\pi} d\varphi\,(\ \downarrow\ ) =$$

$$\left[\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi = 0 \quad \text{és} \quad \int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi = 0 \quad \text{és} \quad \int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi = 0\right]$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi\left[9\cos^2\varphi + \frac{60}{\pi}\varphi\cos\varphi + \frac{112}{\pi^2}\varphi + \left(9 - \frac{12}{\pi}\right)\right] =$$

$$\left[\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{1}{2}\left[\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi\right.$$
$$\left.\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi = \pi\right]$$

$$= 9\pi + \frac{60}{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\varphi\cos\varphi\,d\varphi\right) + \frac{112}{\pi^2}(2\pi)^2 + \left(9 - \frac{12}{\pi}\right)2\pi =$$

$$\left[\int x\cos x = x\sin x + \cos x \leftarrow \text{parc. integrál}\right.$$
$$\left.\int_0^{2\pi} x\cos x\,dx = \left[x\sin x + \cos x\right]_0^{2\pi} = 0\right]$$

$$= 9\pi + 448 + 18\pi - 24 = \underline{\underline{27\pi + 424}}$$

0) hány dimenziós?
1) paraméterezhetőség
2) paraméterezés $\underline{r}(t)$ fv
3) határok
4) szinduluma feloldása
5) differenciálás
6) vektorműveletek
7) behelyettesítés
8) szorzás
9) integrálás

$\underline{v}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}$ z irányban álló drótkeret körül örvény mágneses tér z tengelyen $\not\exists$ értelmezve $(x^2+y^2=0)$



görbe: kör:

számítsuk ki a mező rotációját

$$\operatorname{rot}\underline{v} = \nabla \times \underline{v} = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$v_3 = 0$, $\partial_3 \to 0$

$$\partial_1 v_2 = \partial_x v_y = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{x'(x^2+y^2) - x(x^2+y^2)'}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

tört deriválás: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$$\partial_2 v_1 = \partial_y v_x = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{(-y)'(x^2+y^2) - (-y)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{-(x^2+y^2) + y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

egyenlőek $\Rightarrow$ különbségük 0

a rotáció 0 $\Leftarrow$ speciális örvény = forgatag

rotációmentes körbemenés

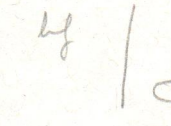
rotáció 0 $\Rightarrow$ gradiens $\Rightarrow$ zárt görbe mentén 0 $\Rightarrow$ baj! ↙ $\oint$ körintegrál

zárt görbe menti integrál:

paraméterezés:

$$\underline{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\underline{r}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\varphi \in [0, 2\pi[$



drótkeresztmetszet ellipszis $\Rightarrow$ 0 fell legyen

behelyettesítés:

$$\underline{v}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} \frac{-R\sin\varphi}{(R\cos\varphi)^2 + (R\sin\varphi)^2} \\ \frac{R\cos\varphi}{(R\cos\varphi)^2 + (R\sin\varphi)^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin\varphi}{R} \\ \frac{\cos\varphi}{R} \\ 0 \end{pmatrix}$$

szorzás:

$$\underline{v}(\underline{r}(\varphi))\,\dot{\underline{r}}(\varphi) = \left(-\frac{\sin\varphi}{R}\right)(-R\sin\varphi) + \frac{\cos\varphi}{R} R\cos\varphi + 0\cdot 0 = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

integrál:

$$I = \oint \underline{v}\, d\underline{r} = \int_0^{2\pi} 1\, d\varphi = 2\pi \quad \Leftarrow \text{nem } 0!!$$

csak arról szól, hogy rotáció $=0$ $\Rightarrow$ zárt görbe mentén nem 0 a körintegrál!



ha a zárt görbe megvesz egy singularitást, nem teljesül

a görbe által határolt területet mentén $\forall$ mindenhol értelmezve

koncentrikus körök esetén mindkét körön ugyanaz a körintegrál

rotáció fizikai jelentése

$\underline{v}(\underline{r}) = \underline{\omega} \times \underline{r}$ ← $\underline{\omega}$ szögsebességvektorral forgó merev test adott pontjainak sebessége

$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$ z tengely körüli forgás $\qquad \underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$



$$\underline{v}(\underline{r}) = \underline{\omega} \times \underline{r} = \begin{pmatrix} \omega_2 r_3 - \omega_3 r_2 \\ \omega_3 r_1 - \omega_1 r_3 \\ \omega_1 r_2 - \omega_2 r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{w} = \mathrm{rot}\, \underline{v} = \underline{\nabla} \times \underline{v} = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\omega \end{pmatrix} = 2\underline{\omega}$$

$$w_3 = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 = \partial_x v_y - \partial_y v_x = \frac{\partial}{\partial x}(\omega x) - \frac{\partial}{\partial y}(-\omega y) = \omega - (-\omega) = 2\omega$$

pl. folyóban lévő jégtáblák



pontról pontra párhuzamosan változik az áramlás sebessége

⇒ a közepén lévő tábla nem fordul, de a többi igen

rotáció: helyi szögsebesség-érintő

indexes deriválás

$\phi(\underline{r}) \qquad \underline{g} = \mathrm{grad}\, \phi = \underline{\nabla}\phi$

$g_k = \frac{\partial \phi}{\partial x_k} = \partial_k \phi \qquad (\underline{\nabla})_k = \partial_k$

$\underline{w} = \mathrm{rot}\, \underline{v} = \underline{\nabla} \times \underline{v}$

$(a \times b)_k = \sum_\ell \sum_m \varepsilon_{k\ell m} a_\ell b_m$

$\Rightarrow w_k = (\nabla \times v)_k = \sum_\ell \sum_m \varepsilon_{k\ell m} \partial_\ell v_m$

egyszer előforduló index: tuléll
kétszer előforduló összegez
háromszor nem fordulhat elő!

$\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r} \Rightarrow v_k = \sum_\ell \sum_m \varepsilon_{k\ell m} \omega_\ell x_m$

$\underline{w} = \underline{\nabla} \times \underline{v}$

$$w_k = \sum_\ell \sum_m \varepsilon_{k\ell m} \partial_\ell v_m = \sum_\ell \sum_m \varepsilon_{k\ell m} \partial_\ell \Big(\underbrace{\sum_p \sum_q \varepsilon_{mpq} \omega_p x_q}_{a \times r} \Big) =$$

nem írjuk ki a Σ-kat

$$= \varepsilon_{k\ell m} \partial_\ell (\varepsilon_{mpq} \omega_p x_q) = \varepsilon_{k\ell m} \varepsilon_{mpq} \omega_p (\partial_\ell x_q) =$$

$$= (\delta_{kp}\delta_{\ell q} - \delta_{kq}\delta_{\ell p}) \omega_p (\partial_\ell x_q) = \quad \leftarrow \boxed{\partial_\ell x_q = \delta_{\ell q}} \text{ Kronecker!}$$

$$= (\delta_{kp}\delta_{\ell q} - \delta_{kq}\delta_{\ell p}) \omega_p \delta_{\ell q} = \quad \leftarrow q\text{-ra összegzünk}$$

$$= (\delta_{kp}\delta_{\ell\ell} - \delta_{k\ell}\delta_{\ell p}) \omega_p = \quad \leftarrow \boxed{\delta_{\ell\ell} = 3} = \text{mert } \Sigma \text{ van! egységmátrix spórolás}$$

$$= (3\delta_{kp} - \delta_{kp}) \omega_p = 2\omega_k \quad \text{és } \ell\text{-re összegzünk}$$

2019.11.27.
szerda 4. óra

nabla, mint vektor

$\phi(\vec{r})$ vektormező

$\phi(\vec{r}+\vec{\delta}) \approx \phi(\vec{r}) + \vec{g}(\vec{r})\vec{\delta}$

$\underline{g} = \nabla\phi = \text{grad}\,\phi$

$g_2 = \partial_2 \phi$

$\underline{\omega} = \text{rot}\,\underline{v} = \nabla \times \underline{v}$

$v_2 = \partial_2 \phi$

$\underline{\omega} = \text{rot}\,\underline{v} = \nabla \times \underline{v}$

$\omega_2 = \varepsilon_{2\ell m}\,\partial_\ell v_m$

$\omega_2 = \varepsilon_{2\ell m}\,\partial_\ell \partial_m \phi = 0$

a vektormező egy $v_m = \partial_m \phi$ skalármező gradiense ⇔ rotáció 0

egyenlő (-1)-szeresei ⇒ 0!

$\omega_1 = \varepsilon_{123}\,\partial_2\partial_3\phi + \varepsilon_{132}\,\partial_3\partial_2\phi = 0$ szimmetrikus

- bázistranszf.

$v_2' = \sum_\ell R_{2\ell} v_\ell$

$x_2' = \sum_\ell R_{2\ell} x_\ell$ →

$x_\ell = \sum_m (R^{-1})_{\ell m} x_m' = \sum_m \tilde{R}_{\ell m} x_m' = \sum_m R_{m\ell} x_m' = \sum_m x_m' R_{m\ell} = x_\ell$

$R^{-1} = \tilde{R}$ mert ONB

$\phi(\vec{r}) = \phi(x) = \phi(x_2)$

$\phi(x_2')$ transf.

$x_\ell = \sum_2 x_2' R_{2\ell}$ ← összet. fv. deriváltja:

$\frac{\partial x_\ell}{\partial x_2'} = R_{2\ell}$

$dx_\ell = \sum_2 \frac{\partial x_\ell}{\partial x_2'} dx_2'$

$g_2' = \frac{\partial \phi(x(x'))}{\partial x_2'} = \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell}\frac{\partial x_\ell}{\partial x_2'}$ ← x itt x' fv, összet. fv deriválás

$\phi(\underline{r}+\underline{\delta}) - \phi(r) = g\,\delta \to \sum_2 g_2\,dx_2$

~~$d\phi = \sum_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} dx_2 \Rightarrow \sum_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_2'}$~~

összet. fv deriváltja: $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$

bázistranszf. során úgy transzformálódik, mint egy vektor!

$\Rightarrow g_2' = \frac{\partial \phi(x(x'))}{\partial x_2'} = \sum_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell}\frac{\partial x_\ell}{\partial x_2'} = \sum_\ell g_\ell \cdot R_{\ell 2} = \sum_\ell R_{2\ell} g_\ell$ ⇒ tetszőleg szerelhető vektorrá ∇

Divergencia

← mi a feltétele annak hogy a vektormező rotációja legyen?

ha $\underline{\omega} = \text{rot}\,\underline{v}$

$\omega_x = \partial_y v_z - \partial_z v_y$

$\omega_y = \partial_z v_x - \partial_x v_z$

$\omega_z = \partial_x v_y - \partial_y v_x$

↓ vezessük be!

divergencia

$\text{div}\,\underline{\omega} = \nabla\underline{\omega} = \sum_\ell \partial_\ell \omega_\ell$

$\partial_x\omega_x + \partial_y\omega_y + \partial_z\omega_z = \partial_x\partial_y v_z - \partial_x\partial_z v_y + \partial_y\partial_z v_x - \partial_y\partial_x v_z + \partial_z\partial_x v_y - \partial_z\partial_y v_x = 0$!

indexesen:

$\omega_2 = \varepsilon_{2\ell m}\partial_\ell v_m = \text{rot}\,v$

$\partial_2\omega_2 = \partial_2(\varepsilon_{2\ell m}\partial_\ell v_m) =$ ← 2-ftagú összeg ∅ szabad index

$= \varepsilon_{2\ell m}\partial_2\partial_\ell v_m = 0$

szimm. · összeg ⇒ szimmetrikus

egy rotáció ⇔ divergencia 0

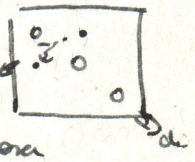
nablával inv.: ∇ - grad

divergencia = forrásszám

$\nabla \times \nabla\phi = 0$ ~ $a \times a = 0$

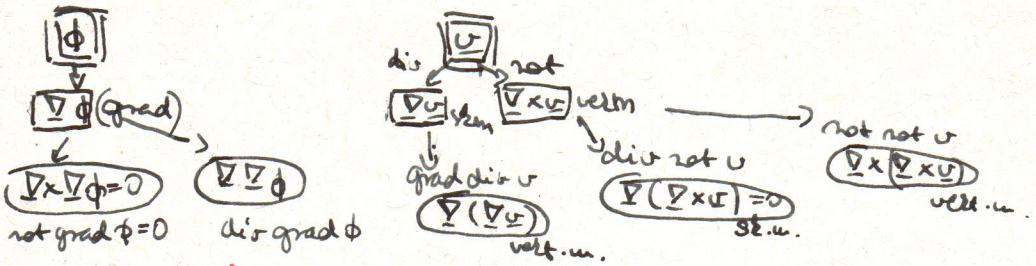
$\nabla(\nabla \times v) = 0$ $a(a \times b) = 0$

$\phi(x)$ skalármező	$\underline{v}(x)$	
$\text{grad}\,\phi = \nabla\phi$	$\nabla \times \underline{v} = \text{rot}\,\underline{v} = \underline{\omega}$ vektorm.	$\nabla\underline{v} = \psi(x)$ skalárm.
$\partial_2\phi$		$\nabla \circ \underline{v}$ tenzormező $(\nabla \circ \underline{v})_{\ell 2} = \partial_2 v_\ell$



a vektormező deriváltjának tenzora annak a divergenciája

nem főátlóbeli elemek különbsége ⇒ rotáció kül.-komponense



div(grad ϕ)

$(\text{grad}\,\phi)_k = \partial_k\phi$

$\text{div}(\text{grad}\,\phi)_k = \partial_k(\text{grad}\,\phi)_k = \partial_k\partial_k\phi =$

$= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \Delta\phi$

$\Delta\phi$: Laplace-operátor!

← harmonikus fv.: Laplace-vektorok 0 kielégítik a Laplace-egyenletet

pl. $w=z^2=(x+iy)^2 = (x^2-y^2)+i\,2xy$

grad(div $\underline{v}$)

$\underline{u} = \nabla(\nabla\underline{v}) = (\nabla\circ\nabla)\,\underline{v} = \Delta(\nabla\underline{v}) = \text{grad}(\text{div}\,\underline{v})$

$u_k = \partial_k(\nabla\underline{v}) = \partial_k\partial_\ell v_\ell$

egy vektormező Laplace-a egy újabb vektormező

$\underline{u} = (\Delta\underline{v})$

$u_k = \Delta(v_k) = \partial_\ell\partial_\ell v_k$

(rot csak 3D-ben!)

rot(rot $\underline{v}$)

$\underline{u} = \text{rot rot}\,\underline{v} = \nabla\times(\nabla\times\underline{v})$

$u_k = \varepsilon_{k\ell m}\partial_\ell(\nabla\times\underline{v})_m = \varepsilon_{k\ell m}\partial_\ell(\varepsilon_{mpq}\partial_p v_q) = \varepsilon_{k\ell m}\varepsilon_{mpq}\partial_\ell\partial_p v_q =$

← 3 alk. pl. vegyi összeg

$= (\delta_{kp}\delta_{\ell q} - \delta_{kq}\delta_{\ell p})\partial_\ell\partial_p v_q = \delta_{kp}\partial_\ell\partial_p v_\ell - \delta_{\ell p}\partial_\ell\partial_p v_k =$

$= \partial_\ell\partial_k v_\ell - \partial_\ell\partial_\ell v_k = \underbrace{\partial_k(\partial_\ell v_\ell)}_{(\text{grad div}\,\underline{v})_k} - \underbrace{\partial_\ell\partial_\ell v_k}_{(\Delta\underline{v})_k}$

$\text{rot rot}\,\underline{v} = \text{grad div}\,\underline{v} - \Delta\underline{v}$

⇑

∇ nem mellett hatnak, mert operátor

rotnál ez harmonikusabbal: $\nabla\times(\nabla\times\underline{v}) = \nabla(\nabla\underline{v}) - \underline{v}(\nabla\nabla)$

$\nabla(\nabla\underline{v}) - (\nabla\nabla)\underline{v}$ ✓

$\vec{v} \to \underline{v} \to \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \to v_k$

$(\underline{u}+\underline{v})_k = u_k + v_k$

$(\alpha\underline{v})_k = \alpha v_k$

$\underline{u}\,\underline{v} = u_k v_k$ ONB-ban

$(\underline{u}\times\underline{v})_k = \varepsilon_{k\ell m}u_\ell v_m$

$(\underline{\underline{A}}\underline{v})_k = A_{k\ell}v_\ell$ ←|=□|

$(\underline{v}\,\underline{\underline{A}})_k = v_\ell A_{\ell k}$ ←-□

$(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})_{k\ell} = A_{km}B_{m\ell}$

$(\underline{u}\circ\underline{v})_{k\ell} = u_k v_\ell$

$(\nabla)_k = \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$

$(\nabla\phi)_k = \partial_k\phi$

$\nabla\underline{v} = \partial_k v_k$ div

$(\nabla\times\underline{v})_k = \varepsilon_{k\ell m}\partial_\ell v_m$ rot

$(\nabla\circ\underline{v})_{k\ell} = \partial_k v_\ell$

$\partial_k x_\ell = \delta_{k\ell}$

$\underline{e} = \frac{\underline{r}}{r}$ $|\underline{e}|=1$

$e_k = \frac{x_k}{r}$

$\partial_k r = e_k$

$\partial_k e_\ell = \frac{\delta_{k\ell} - e_k e_\ell}{r}$

$\varepsilon_{k\ell m}\partial_\ell\partial_m = 0$

$\partial_k(\underline{a}\,\underline{r}) = a_k$

indexes írásmód: be az egyenleteket koordinátásra

pl. $\phi = \sin((\underline{a}\,\underline{r})^2)$ ← ϕ külön komponensei x, y, z-ben (vektorral ϕ sínusa)

← skalármező

$\pm$-helyvektor, függő változó

$(\underline{v})_k = (\nabla\phi)_k = \partial_k\phi = \partial_k(\sin(\underline{a}\,\underline{r})^2) = (\cos(\underline{a}\,\underline{r})^2)\,\partial_k(\underline{a}\,\underline{r})^2 = (\cos(\underline{a}\,\underline{r})^2)\,2(\underline{a}\,\underline{r})\,\partial_k(\underline{a}\,\underline{r}) =$

$= \cos(\underline{a}\,\underline{r})^2 \cdot 2(\underline{a}\,\underline{r})\,\partial_k(a_\ell x_\ell) = (\cos(\underline{a}\,\underline{r})^2)\cdot 2(\underline{a}\,\underline{r})\,a_\ell\underbrace{(\partial_k x_\ell)}_{\delta_{k\ell}} =$

$= \cos(\underline{a}\,\underline{r})^2 \cdot 2(\underline{a}\,\underline{r})\,\underbrace{a_\ell\delta_{k\ell}}_{a_k} = a_k\cos(\underline{a}\,\underline{r})^2\cdot 2(\underline{a}\,\underline{r})$

a szabad indexek mindig maradnak

$\underline{v} = \nabla\phi = \underline{a}\,2(\underline{a}\,\underline{r})\cos(\underline{a}\,\underline{r})^2$

← csak akkor kell indexeket beírni, ha tömbök és a diffop. lineáris helyettük

$$\partial_2 r = \partial_2 \sqrt{r^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{r^2}}\partial_2(r^2) = \frac{1}{2r}\partial_2(r\,r) = \frac{1}{2r}\partial_2(x_\ell x_\ell) = \frac{1}{2r}2x_\ell(\partial_2 x_\ell) = \frac{1}{r}x_\ell\delta_{\ell 2} = \frac{1}{r}x_2 = e_2$$

$$\partial_2 e_\ell = \partial_2\left(\frac{x_\ell}{r}\right) = \partial_2\left(x_\ell\cdot\frac{1}{r}\right) = (\partial_2 x_\ell)\frac{1}{r} + x_\ell\,\partial_2\left(\frac{1}{r}\right) = \delta_{\ell 2}\frac{1}{r} + x_\ell\left(-\frac{1}{r^2}\right)\partial_2 r = \delta_{\ell 2}\frac{1}{r} - \frac{x_\ell}{r^2}\frac{x_2}{r} =$$

összellenőrzés ↔ csak valamelyik indexű tagokat lehet összeadni, másképpen

$$= \frac{\delta_{\ell 2} - e_2 e_\ell}{r}$$

$$e_2\partial_2 e_\ell = e_2\frac{\delta_{\ell 2} - e_2 e_\ell}{r} = \frac{1}{r}(e_2\delta_{\ell 2} - e_2 e_2 e_\ell) = \frac{1}{r}(e_\ell - e_\ell) = 0$$

$$e_\ell\partial_2 e_\ell = e_\ell\frac{\delta_{\ell 2} - e_2 e_\ell}{r} = \frac{1}{r}(e_\ell\delta_{\ell 2} - e_\ell e_2 e_\ell) = 0$$

$$\partial_2\left(\frac{e^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\partial_2(e_\ell e_\ell) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot e_\ell\partial_2 e_\ell$$

Vektormező menti derivált

$\underline{\delta} = u\cdot\delta$

$\phi(r+\delta) - \phi(r) = \text{grad}\,\phi\cdot\underline{\delta} = (u\,\text{grad}\,\phi)\delta \leftarrow (\underline{u}\nabla)\phi \to u_2\partial_2\phi$ } iránymenti derivált

~ keressen olyan eltérést és minden másfelé lép

$(\underline{v}\nabla)\phi = v_2\partial_2\phi$

$[(\underline{u}\nabla)\underline{u}]_2 = v_\ell\partial_\ell u_2$ } vektormező menti derivált, $(\cdot\nabla)$ áramlási derivált

$[(\underline{e}\nabla)\underline{e}]_2 = e_\ell\partial_\ell e_2 = 0$ mindig 0

f) $\text{rot}\left(\frac{\underline{a}\times\underline{r}}{(\underline{b}\underline{r})^2}\right) = \underline{v} = \text{rot}\left(\frac{(\underline{b}\nabla)(\underline{a}\times\underline{r})}{(\underline{b}\underline{r})^2}\right)$ $\quad \underline{b}\nabla$: b grad - skalároperátor

1) van-e örvény? ← vektorok: $\underline{r}$ és $\underline{e} = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}$

$\underline{a}$ - forgástengely
$\underline{a}\times\underline{e}$ - vektormező
$(\underline{b}\underline{r})^2$ - skalár

$$v_\ell = \varepsilon_{\ell km}\partial_k(\;)_m = \varepsilon_{\ell km}\partial_k\left[\frac{1}{(\underline{b}\underline{r})^2}(\underline{b}\nabla)(\underline{a}\times\underline{e})_m\right] =$$

$$= \varepsilon_{\ell km}\left[\left(\partial_k\frac{1}{(\underline{b}\underline{r})^2}\right)(\underline{b}\nabla)(\underline{a}\times\underline{e})_m + \frac{1}{(\underline{b}\underline{r})^2}\partial_k\left((\underline{b}\nabla)(\underline{a}\times\underline{e})_m\right)\right] =$$

$$= \varepsilon_{\ell km}\left[-\frac{2}{(\underline{b}\underline{r})^3}\partial_k(\underline{b}\underline{r})\left((\underline{b}\nabla)(a\times e)_m\right) + \frac{1}{(\underline{b}\underline{r})^2}\partial_k(\;)\right] =$$

$$(\underline{b}\nabla)(\underline{a}\times\underline{e})_m = (\underline{b}\nabla)\varepsilon_{mpq}a_p e_q = b_t\partial_t(\varepsilon_{mpq}a_p e_q) = b_t\varepsilon_{mpq}a_p(\partial_t e_q) =$$

$$= \varepsilon_{mpq}b_t a_p\frac{\delta_{tq} - e_t e_q}{r} = \frac{1}{r}\varepsilon_{mpq}b_t a_p(\delta_{tq} - e_t e_q) = \frac{1}{r}\varepsilon_{mpq}a_p(b_q - (\underline{b}\underline{e})e_q) =$$

$$= \frac{1}{r}\left[(a\times b)_m - (\underline{b}\underline{e})(a\times e)_m\right]$$

$$= \varepsilon_{\ell km}\left[-\frac{2}{(\underline{b}\underline{r})^3}(\partial_\ell(b_p x_p))\frac{(\underline{a}\times\underline{b})_m - (\underline{b}\underline{e})(\underline{a}\times\underline{e})_m}{r} + \frac{1}{(\underline{b}\underline{r})^2}\partial_\ell\left(\frac{(a\times b)_m - (\underline{b}\underline{e})(a\times e)_m}{r}\right)\right] =$$

$$= \frac{\varepsilon_{\ell km}}{(\underline{b}\underline{r})^3}\left[-2b_p\underbrace{(\partial_\ell x_p)}_{\delta_{\ell p}}\frac{(a\times b)_m - (\underline{b}\underline{e})(a\times e)_m}{r} + (\underline{b}\underline{r})\left(\partial_\ell\underbrace{\left((a\times b)_m - (\underline{b}\underline{e})(a\times e)_m\right)}_{\text{const}\Rightarrow\text{deriált }0}\frac{1}{r} + \left((a\times b)_m - (\underline{b}\underline{e})(a\times e)_m\right)\cdot\partial_\ell\frac{1}{r}\right)\right]$$

$$= \frac{\varepsilon_{\ell km}}{(\underline{b}\underline{r})^3}\left[-2b_\ell\frac{(a\times b)_m - (\underline{b}\underline{e})(a\times e)_m}{r} + \frac{\underline{b}\underline{r}}{r}\left(-\partial_\ell(b\underline{e})(\underline{a}\times\underline{e})_m - (\underline{b}\underline{e})\partial_\ell(a\times e)_m\right) +\right.$$

$$\left. + (\underline{b}\underline{r})\left((a\times b)_m - (\underline{b}\underline{e})(\underline{a}\times\underline{e})_m\right)\left(\frac{1}{r^2}\right)\partial_\ell r\right] =$$

$$= \frac{\varepsilon_{rlm}}{(\underline{b}\underline{r})^3 r}\left[-2b_l\left((\underline{a}\times\underline{b})_m-(\underline{b}\underline{e})(\underline{a}\times\underline{e})_m\right)+(\underline{b}\underline{r})\left(-b_p(\partial_l e_p)(\underline{a}\times\underline{e})_m-(\underline{b}\underline{e})\partial_l(\varepsilon_{mpq}a_p e_q)\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{(\underline{b}\underline{r})}{r}\left((\underline{a}\times\underline{b})_m-(\underline{b}\underline{e})(\underline{a}\times\underline{e})_m\right)e_l\right]=$$

$$= \frac{\varepsilon_{rlm}}{(\underline{b}\underline{r})^3 r}\left[-2b_l(\underline{a}\times\underline{b})_m+2(\underline{b}\underline{e})b_l(\underline{a}\times\underline{e})_m+(\underline{b}\underline{r})\left(-b_p\frac{\delta_{lp}-e_l e_p}{r}(\underline{a}\times\underline{e})_m-(\underline{b}\underline{e})\varepsilon_{mpq}a_p\frac{\delta_{lq}-e_l e_q}{r}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-(\underline{b}\underline{e})\left((\underline{a}\times\underline{b})_m-(\underline{b}\underline{e})(\underline{a}\times\underline{e})_m\right)e_l\right]=$$

← hippi: mivel invariáns $\underline{e}$ → harmadfokú $\underline{r}$ hatvány

$$= \frac{\varepsilon_{rlm}}{(\underline{b}\underline{r})^3 r}\left[-2b_l(\underline{a}\times\underline{b})_m+2(\underline{b}\underline{e})b_l(\underline{a}\times\underline{e})_m+(\underline{b}\underline{e})\left(-b_l+(\underline{b}\underline{e})e_l\right)(\underline{a}\times\underline{e})_m-\right.$$

$$\left.-(\underline{b}\underline{e})^2\varepsilon_{mpl}a_p+(\underline{b}\underline{e})^2\varepsilon_{mpq}a_p e_q e_l-(\underline{b}\underline{e})(\underline{a}\times\underline{b})_m e_l+(\underline{b}\underline{e})^2(\underline{a}\times\underline{e})_m e_l\right]=$$

$$= \frac{\varepsilon_{rlm}}{(\underline{b}\underline{r})^3 r}\left[-2b_l(\underline{a}\times\underline{b})_m+(\underline{b}\underline{e})b_l(\underline{a}\times\underline{e})_m-(\underline{b}\underline{e})(\underline{a}\times\underline{b})_m e_l+\right.$$

$$\left.+(\underline{b}\underline{e})^2\left(2e_l(\underline{a}\times\underline{e})_m-\varepsilon_{mpl}a_p+\underbrace{\varepsilon_{mpq}a_p e_q}_{(\underline{a}\times\underline{e})_m}e_l\right)\right]=$$

1/vektorszorzás nem szerepelhet

$[\underline{e}\times(\underline{a}\times\underline{b})]_l = -(\underline{a}\times\underline{b})_m e_l$??

$$= \frac{1}{(\underline{b}\underline{r})^3 r}\left[-2[\underline{b}\times(\underline{a}\times\underline{b})]_l+(\underline{b}\underline{e})[\underline{b}\times(\underline{a}\times\underline{e})]_l-(\underline{b}\underline{e})[\underline{e}\times(\underline{a}\times\underline{b})]_l+\right.$$

$$\left.+(\underline{b}\underline{e})^2\left(3[\underline{e}\times(\underline{a}\times\underline{e})]_l-\varepsilon_{klm}\varepsilon_{mpl}a_p\right)\right]=$$

$$= \frac{1}{(\underline{b}\underline{r})^3 r}\left[-2\left(\underline{a}\underline{b}^2-\underline{b}(\underline{a}\underline{b})\right)_l+(\underline{b}\underline{e})\left[\underline{a}(\underline{b}\underline{e})-\underline{e}(\underline{a}\underline{b})\right]_l-(\underline{b}\underline{e})\left[\underline{a}(\underline{e}\underline{b})-\underline{b}(\underline{a}\underline{e})\right]_l+\right.$$

$$\left.+(\underline{b}\underline{e})^2\left[3[\underline{a}(\underline{e}\underline{e})-\underline{e}(\underline{a}\underline{e})]_l-(\delta_{lp}\underbrace{\delta_{ll}}_{3}-\delta_{kl}\delta_{lp})a_p\right]\right]=$$

$$= \frac{1}{(\underline{b}\underline{r})^3}\frac{1}{r}\left[-2b^2a_l+2(\underline{a}\underline{b})b_l-(\underline{b}\underline{e})(\underline{a}\underline{b})e_l+(\underline{b}\underline{e})(\underline{a}\underline{e})b_l+(\underline{b}\underline{e})^2\left[3a_l-3(\underline{a}\underline{e})e_l\right]-(\underline{b}\underline{e})^2 2a_l=\right.$$

$$\underline{v} = \text{not (:)} = \frac{1}{(\underline{b}\underline{r})^3 r}\left[-2b^2\underline{a}+2(\underline{a}\underline{b})\underline{b}+(\underline{b}\underline{e})(\underline{a}\underline{e})\underline{b}-(\underline{b}\underline{e})(\underline{a}\underline{b})\underline{e}+(\underline{b}\underline{e})^2\underline{a}-3(\underline{b}\underline{e})^2(\underline{a}\underline{e})\underline{e}\right]$$

⑥ $\Delta\left(\frac{(\underline{a}\underline{e})}{(\underline{b}\underline{e})}\right)$ (skalármező) $= \partial_k\partial_k\left(\frac{\underline{a}\underline{e}}{\underline{b}\underline{e}}\right) = \partial_k\left[\partial_k\left[(\underline{a}\underline{r})\frac{1}{(\underline{b}\underline{r})}\right]\right] = \partial_k\left[\partial_k(\underline{a}\underline{r})\cdot\frac{1}{(\underline{b}\underline{r})}+(\underline{a}\underline{r})\partial_k\frac{1}{(\underline{b}\underline{r})}\right]=$

$\underline{a}\underline{r}/\underline{b}\underline{r}$ ← deriválásához jobbar $\underline{r}$ inverz

$$= \partial_k\left[a_k\frac{1}{(\underline{b}\underline{r})}+(\underline{a}\underline{r})\left(\frac{-1}{(\underline{b}\underline{r})^2}\right)\partial_k(\underline{b}\underline{r})\right] = \partial_k\left[a_k\frac{1}{(\underline{b}\underline{r})}-\frac{(\underline{a}\underline{r})}{(\underline{b}\underline{r})^2}b_k\right]=$$

$$= \partial_k\left(\frac{1}{(\underline{b}\underline{r})^2}\left[a_k(\underline{b}\underline{r})-b_k(\underline{a}\underline{r})\right]\right) = \partial_k\left(\frac{\underline{r}\times(\underline{a}\times\underline{b})}{(\underline{b}\underline{r})^2}\right)_k = \partial_k\left(\frac{(\underline{r}\times\underline{c})_k}{(\underline{b}\underline{r})^2}\right) = \partial_k\left(\frac{\varepsilon_{klm}x_l c_m}{(\underline{b}\underline{r})^2}\right)=$$

$\underline{r}\times(\underline{a}\times\underline{b})$ jobb oldali vektorszorzat

$$= \varepsilon_{klm}c_m\partial_k\left(\frac{x_l}{(\underline{b}\underline{r})^2}\right) = \varepsilon_{klm}c_m\left[(\partial_k x_l)\frac{1}{(\underline{b}\underline{r})^2}+x_l\partial_k\frac{1}{(\underline{b}\underline{r})^2}\right]=$$

$$= \underbrace{\varepsilon_{klm}c_m\delta_{kl}}_{0!}\frac{1}{(\underline{b}\underline{r})^2}+\varepsilon_{klm}c_m x_l\left(\frac{-2}{(\underline{b}\underline{r})^3}\right)\partial_k(\underline{b}\underline{r}) = -\frac{2}{(\underline{b}\underline{r})^3}\varepsilon_{klm}c_m x_l b_k =$$

$\varepsilon_{klm}c_m x_l b_k$ vektorszorzat

$$= -\frac{2}{(\underline{b}\underline{r})^3}(\underbrace{\underline{b}\underline{r}}_{=\underline{r}\underline{b}}\underline{c}) = -\frac{2}{(\underline{b}\underline{r})^3}\underline{r}(\underline{c}\times\underline{b}) = -\frac{2}{(\underline{b}\underline{r})^3}\underline{r}(\underline{a}\times\underline{b})\times\underline{b}) =$$

$$= -\frac{2}{(\underline{b}\underline{r})^3}\underline{r}\left[\underline{b}(\underline{a}\underline{b})-\underline{a}\underline{b}^2\right] = 2\frac{(\underline{r}\underline{a})\underline{b}^2-(\underline{r}\underline{b})(\underline{a}\underline{b})}{(\underline{b}\underline{r})^3}$$

b) $\underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n\times r)_x \frac{1}{x^2+y^2} \\ (n\times r)_y \frac{1}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{(\underline{n}\times\underline{r})}{x^2+y^2} = \left(\frac{\underline{n}\times\underline{r}}{f(r)}\right)$

verenxiz be: $\underline{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\underline{n}\times\underline{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$

$(\mathrm{rot}\,\underline{v})_z = \varepsilon_{zlm}\partial_l v_m = \varepsilon_{zlm}\partial_l\left(\frac{(\underline{n}\times\underline{r})_m}{f(r)}\right) = \varepsilon_{zlm}\partial_l\left(\frac{\varepsilon_{mpq}n_p x_q}{f(r)}\right) =$

$= \varepsilon_{zlm}\varepsilon_{mpq}n_p\partial_l\left(\frac{x_q}{f(r)}\right) = (\delta_{zp}\delta_{lq}-\delta_{zq}\delta_{lp})\partial_l\left(x_q\frac{1}{f(r)}\right) =$

$= (\delta_{zp}\delta_{lq}-\delta_{zq}\delta_{lp})n_p\left(\partial_l x_q\frac{1}{f(r)} + x_q\left(-\frac{1}{f^2(r)}\partial_l f(r)\right)\right) =$

$= (\delta_{zp}\delta_{lq}-\delta_{zq}\delta_{lp})n_p\left(\delta_{lp}\frac{1}{f(r)} - \frac{x_q}{f(r)^2}\partial_l f(r)\right) =$

$= \delta_{zp}\delta_{lq}\delta_{lq}\frac{n_p}{f(r)} - \delta_{zq}\delta_{lp}\delta_{lq}\frac{n_p}{f(r)} - \frac{\delta_{zp}\delta_{lq}x_q n_p\partial_l f(r)}{f^2(r)} + \frac{\delta_{zq}\delta_{lp}x_q\partial_l f(r)n_p}{f^2(r)} =$

$= \delta_{zp}\delta_{ll}\frac{1}{f(r)}n_p - \frac{\delta_{zl}\delta_{lp}n_p}{f(r)} - \frac{\delta_{zp}x_l n_p\partial_l f(r)}{f^2(r)} + \frac{x_z\delta_{lp}n_p\partial_l f(r)}{f^2(r)} =$

$= \frac{3n_z}{f(r)} - \frac{n_z}{f(r)} - \frac{n_z x_l\partial_l f(r)}{f^2(r)} + \frac{x_z n_l\partial_l f(r)}{f^2(r)} =$

$= \frac{2n_z}{f(r)} - \frac{n_z(\underline{r}\nabla)f(r)}{f^2(r)} + \frac{x_z(\underline{n}\nabla)f(r)}{f^2(r)} =$ ← $\underline{n}\nabla$ (n grad): z meriti pericolarità ← z komp. mast 0, ostat 0

$= \frac{n_z}{f(r)}\left(2 - \frac{(\underline{r}\nabla)f(r)}{f(r)}\right) = \frac{n_z}{f^2(r)}\left(2f(r) - (\underline{r}\nabla)f\right)$ ← $f(r) = x^2+y^2$

← $\underline{r}\nabla = x_z\partial_z = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$

$(\underline{r}\nabla)(x^2+y^2) = x\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}_{2x} + y\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) + z\underbrace{\frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2)}_{0} = 2(x^2+y^2) = 2f$

2018.12.02.
hét 12.ca.

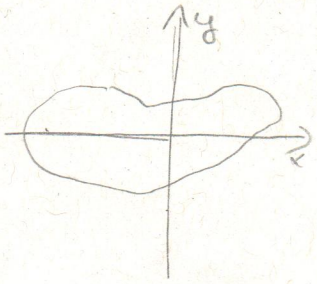
INTEGRÁLOK

- pl. ívhossz - vonalmenti integrál
- kettős integrál bevezetése
- pl. az ország kiszámolása

legyen sűrűségfv. (a hely függvényében) $\varrho(x,y)$

ossuk fel a tartományunkat kis területelemekre

- egymást nem metsző négyzetekre, melyek
  - vagy nincs rajta az országon
  - vagy rajta van az egészen ← pixelezés



rendeljünk hozzá mennyiséget: területet (ΔA)

$\Delta b = \varrho(x,y)\,\Delta A$

$b = \Sigma \Delta b \approx \Sigma \varrho(x,y)\,\Delta A = \leftarrow$

$= \int \varrho(x,y)\,dA$

$\iint \leftarrow$ tartomány szerinti integrál

felosztás finomítása, ha nem változik, az integrál közelít

de nem lehet akárhogy tartani a 0-hoz (finomítani a felosztást)

problémája: melyik végén vegyük a kis területet?
pl. „nadrágszíj - szelet"
nagyobb lehet a sáv végén, mint elején
⇒ a felosztás legyen egyenletesebb
az átmérővel tartunk 0-hoz
de akárhogy osztjuk fel, mindig úgy tartani
pl. valós felosztás $\Delta A = \Delta x \cdot \Delta y$



valós felosztás esetén (koordinátatengelyekkel párhuzamos):

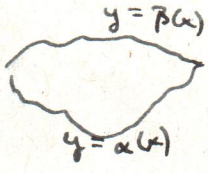
$$b = \iint \varrho(x,y)\,dx\,dy$$

először rögzítjük x-et és y szerint összegzünk
$\Sigma f(y)\Delta y \to \int f(y)\,dy$
hasonló a parciális deriválthoz

$$\int\int dx\,dy\,\varrho(x,y) = \int dx \left(\int dy\,\varrho(x,y) \right)$$

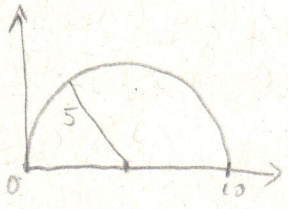
problémák: integrálandó terület nem négyszögletes,
felső és alsó ív megadása egyenletekkel

⇒ $\int_{y=\alpha(x)}^{y=\beta(x)} dy\,\varrho(x,y)$ és x szerint a két érték között



gyakorlatban: ált. nem írható le fv-nyel a görbe
⇒ numerikus integrálás

(#) $3(x+y)y = f(x,y)$ integrálja kiszámítása ↗ r=5 sugarú



$(x-5)^2 + y^2 = 25$ és $y \geq 0$

$x^2 - 10x + 25 + y^2 = 25 \Rightarrow y^2 = 10x - x^2$

alsó határ: $y = \alpha(x) = 0$

felső határ: $y = \beta(x) = \sqrt{10x - x^2}$

$$I = \int dA\,f(x,y) = \int_{x=0}^{x=10} dx \left(\int_{y=0}^{\sqrt{10x-x^2}} dy\,f(x,y) \right) = \int_0^{10} dx \int_{y=0}^{\sqrt{10x-x^2}} dy\,(3xy + 3y^2) =$$

$$= \int_0^{10} dx \left[\frac{3}{2}xy^2 + y^3 \right]_{y=0}^{y=\sqrt{10x-x^2}} = \int_0^{10} dx \left(\frac{3}{2}x(10x-x^2) + (10x-x^2)^{3/2} \right) = \dots$$

helyettesítéses integrál

ha négyzetlap alakú ⇒ a határ nem függ a változóktól, ezzel egyszerűbb a helyettesítés

ha téglalap alakú tartomány és $f(x,y) = g(x)\,h(y)$
(szeparált változós)

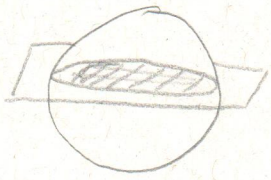
$$\int_{\square} dx\,dy\, f(x,y) = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} dy\, g(x)\,h(y) = \int_{a_1}^{a_2} dx\, g(x) \int_{b_1}^{b_2} dy\, h(y) = \left(\int_{a_1}^{a_2} dx\, g(x)\right)\left(\int_{b_1}^{b_2} dy\, h(y)\right)$$

↑ ha visszavezethető ilyen alakra, örülünk

ugyanez a gondolatmenet analóg több dimenzióban is

pl. gömb mentén:

$$I = \int_{z_1}^{z_2} dz \left(\int_{\beta(z)}^{\delta(z)} dy \left(\int_{\alpha(y,z)}^{\beta(y,z)} dx\; f(x,y,z) \right) \right)$$



pl. elforgatott ellipszoid ⇒ forgassuk el a sajátosakba így a tartomány szebb lesz

tartományintegrál: területre / térfogatra vett integrál

Felszíni integrál

egy felülethez van felszíne (↔ egy görbéhez van hossza)

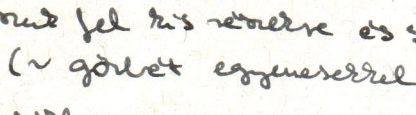
véges felület ← a felület peremé egy görbe $\partial F = G$ (perem jelölése)

zárt felület: ∅ peremű zárt görbe!



és zárt görbe peremű 0

⇒ perem peremű 0 (Poincaré-lemma) ⇒ $\partial(\partial F) = 0$



felületeket (felület: terület általánosítása)

osszuk fel kis négyzetekre és síklapú idomokkal pótoljuk ⇒ poliéder

(~ görbét egyenesekkel ↗) síklapokkal határolt test

a síklapdarabkáknak van ΔA területe

$\Sigma \Delta A \to A$ felszínhez tart finomítással (átmérővel tartunk 0-hoz)

⇒ általánosítsuk ki a felszíni integrált

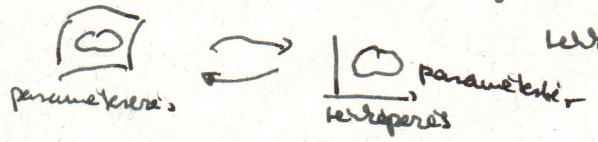
$$\Sigma f(P)\,\Delta A \to \int_A f(\vec{r})\,dA$$

← felszíni integrál

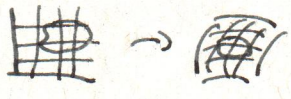
ha $f(\vec{r}) = 1$ ⇒ felszín kiszámítása

de itt nem lehet dx-szel és dy-nal variálni, mert görbe

⇒ körülvonásos egyszerűen, folytonos leképerés;



legyen a felosztás, a paraméterekben vízszintes leképeri a vizsgált tartományra



ált.: parallelogramma alakú kicsi tartományon növ

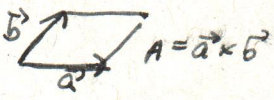


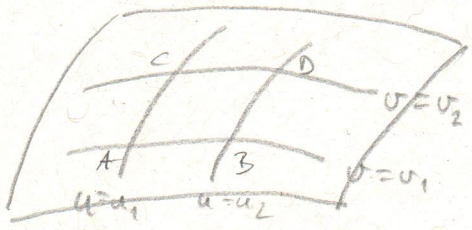
ortogonális görbevonalú koordináta:

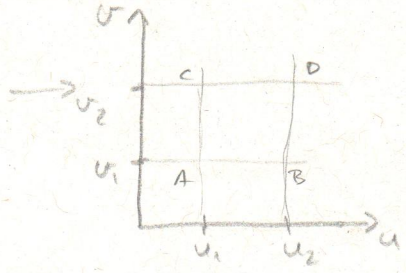
a koordinátavonalak merőlegesen metszik egymást

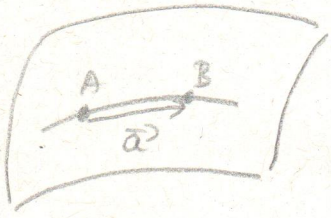
emlékeztető korrát mondatot, ha megvan a felosztás

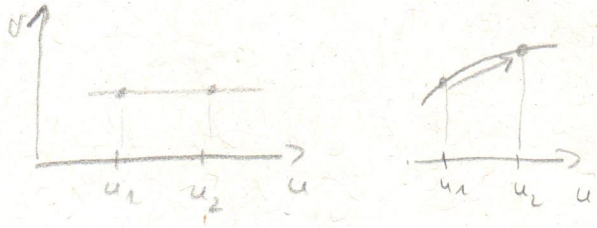
paralelogramma területének kiszámítása vektorszorzattal











$\vec{r}(t)$ paraméterezés $\Rightarrow \Delta\vec{r} = \dot{\vec{r}}(t)\,\Delta t$



$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial u}\Delta u$$ ← rasztáros u mentén

$$\vec{c} = \frac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial v}\Delta v$$ ← rasztáros v mentén

$$\Delta A = |\vec{a}\times\vec{c}| = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|\Delta u\Delta v = \Delta A$$

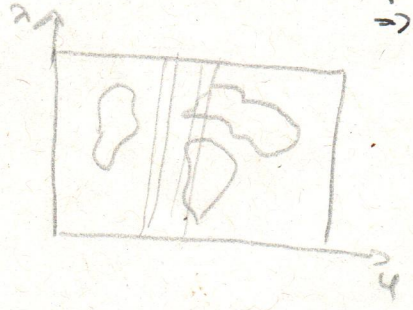
a közepén oszlunk fel egyenletesen

$\Rightarrow \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|$: területtorzítási tényező! $J(u,v)$ Jacobi-tényező

Egyenlítőn nagy, pólusok felé egyre kisebb

pólusokon 0 → error

⇒ nem hűségesen egyenletes, pólusok összenyomása



pl. 1" × 1" terület

⇒ de nem változik le a terület maga

$$J(u,v) = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|$$

Szimbolikus feloldása:

$$dA = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| du\,dv$$

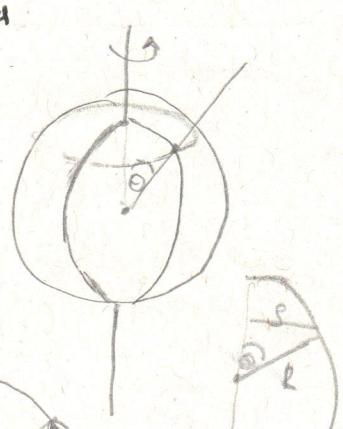
← eddigi:
$dr = \dot{r}(t)\,dt$
$ds = |\dot{\vec{r}}(t)|\,dt$

vektorműveletek, majd a paraméteres tartományban integrálunk

gömbi paraméterezés, felszín

paraméterezés: ötletes, de a gömbre létezik standard
rautsur el a szimmetriát egy pont kitüntetésével

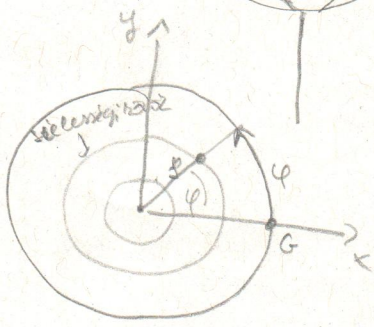
pl. Föld esetén forgástengely legyen z tengely
északi sark: $\theta = 0 \Rightarrow$ Egyenlítő: $\theta = 90° \Rightarrow$ déli sark: $\theta = 180°$
azonos θ-jú pontok → szélességi körök
délkör kivalasztása ← Greenwich



$$\left.\begin{aligned} x &= R\sin\theta\cos\varphi \\ y &= R\sin\theta\sin\varphi \\ z &= R\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix}\text{a gömb helyvektor-}\\ \text{koordinátázása}\end{matrix}$$

$$\underline{r}(\theta,\varphi)$$

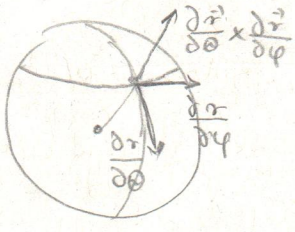
$\theta \in [0,\pi]$
$\varphi \in [0,2\pi[$



az egyes koordinátát körüljárás irányával

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$ ↑ elmozdulás délre mutat

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}$ keletre mutat



vektoriális szorzatuk felfelé mutat
Jacobi-torzításfényező csak θ-tól függ, φ-től nem ← $\sin\theta$

2019.12.03.
Ke 13:22

két szomszéd vonal nemmetsi egymást,
mert akkor nem kölcsönösen egyértelmű a leképezés
ellenpl. északi és déli sarkon hosszúsági körök



$$\underline{b} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}(u,v)$$

$$\underline{a} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u}(u,v)$$

$$dA = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right| du\,dv$$

a gömb standard paraméterezése:

$$\underline{r}(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}\theta \in [0,\pi] \\ \varphi \in [0,2\pi[\end{matrix}$$

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\cos\theta\sin\varphi \\ -R\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -R\sin\theta\sin\varphi \\ R\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

vegyük fel úgy, hogy a vektoriális szorzat felfelé mutasson
⇒ θ: 1-es koord
φ: 2-es koord

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta} = R\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} = R\sin\theta\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$ ← egységvektor

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} = R^2\sin\theta\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} =$$

determinánssal:

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & a_1 & b_1 \\ \underline{j} & a_2 & b_2 \\ \underline{k} & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= R^2\sin\theta\underbrace{\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{egységvektor}}$$

$\vec{r}(\theta,\varphi)/R$! ← a sugár megfelelő elforgatása a felületre kell ahhoz, hogy a felületnormális egységvektor

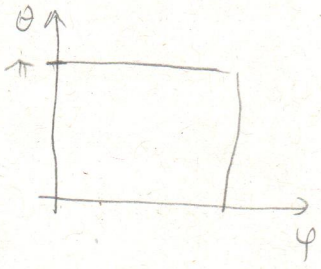
$$\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi}\right| = R^2\sin\theta = J(\theta,\varphi)$$

⇒ Jacobi-féle koordinátás tétel

$$\left|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right| = R^2 \sin\Theta = \mathcal{J}(\Theta,\varphi)$$ ← csak Θ sin-ától függ ez a Jacobi-tényező

$dA = \mathcal{J}(\Theta,\varphi)\cdot du\,dv$ mennyi területi dimenziót adjon!

levetítettük téglalapra
⇒ konstans határok



a gömb felszíne:

$$A = \int_0^{\pi} d\Theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \mathcal{J}(\Theta,\varphi) = \int_0^{\pi} d\Theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, R^2 \sin\Theta =$$

$$= R^2 \int_0^{\pi} d\Theta \sin\Theta \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} = 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \sin\Theta\, d\Theta =$$

$$= 2\pi R^2 \left[-\cos\Theta\right]_0^{\pi} = \underline{4\pi R^2}$$

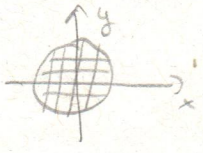
a paraméterezés csak görbe felületeknél működik;
de hasznos lehet síkban is, ha a görbe határa nem egyenes

kör paraméterezése

$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow x = \sqrt{R^2 - y^2}$

$$\int_{-R}^{R} dx \begin{pmatrix} \sqrt{R^2-y^2} \\ \sqrt{dy} \\ -\sqrt{R^2-y^2} \end{pmatrix}$$ ← nem egyszerű

képezzük le téglalap alakra a kört
⇒ polárkoordinátákat!

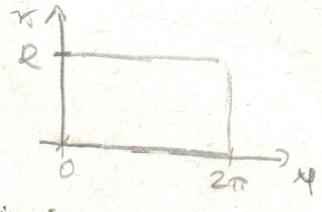


paraméterezés polárkoordinátákban:

$$\underline{r}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = 0 \end{pmatrix}$$

$r \in [0, R]$
$\varphi \in [0, 2\pi[$



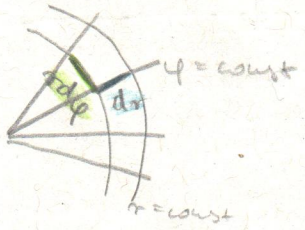


$$\frac{\partial r}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial r}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$ ← például ki a z komponenst 0-val, hogy vekt. narat értelmes legyen

$$\frac{\partial r}{\partial r} \times \frac{\partial r}{\partial \varphi} = r\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ ← normális felfelé mutat a síkból

$$\left|\frac{\partial r}{\partial r} \times \frac{\partial r}{\partial \varphi}\right| = r$$

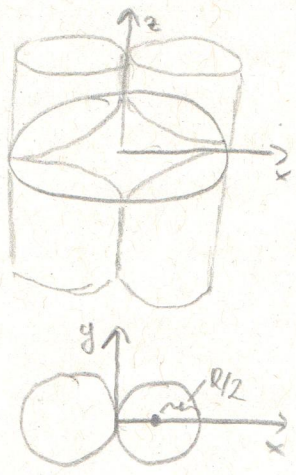
$dA = r\,dr\,d\varphi$



$$A = \int dA = \int r\,dr\,d\varphi = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi\, r =$$

$$= \int_0^R dr\, r \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int_0^R dr\, r = 2\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = \underline{\pi R^2}$$

Viviani-felület



két hengerrel elvágjuk a gömbfelületet
⇐ a gömbfelület paraméterezésre menjen át, úgy a határok adottak

gömb egyenlete: $x^2+y^2+z^2=R^2$

henger egyenlete: $\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{R}{2}\right)^2$

$x^2-Rx+\left(\frac{R}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{R}{2}\right)^2$

⇒ gömb: $x^2+y^2+z^2=R^2$

henger: $x^2+y^2=Rx$

a paraméterezéssel fogalkozjuk a gömb egyenletét

gömb:

$x=R\sin\Theta\cos\varphi$
$y=R\sin\Theta\sin\varphi$
$z=R\cos\Theta$

⇐ alk. esetben nem teljesíti a henger egyenletét

henger egyenletébe behelyettesítve:

$(R\sin\Theta\cos\varphi)^2+(R\sin\Theta\sin\varphi)^2=R\,R\sin\Theta\cos\varphi$

$R^2\sin^2\Theta\cos^2\varphi+R^2\sin^2\Theta\sin^2\varphi=R^2\sin\Theta\cos\varphi$

$\Rightarrow \sin^2\Theta=\sin\Theta\cos\varphi$ ⇐ határoló görbe egyenlete

$\sin\Theta=\cos\varphi$ ⇐ $\sin\Theta=0$ triviális ⇒ összes

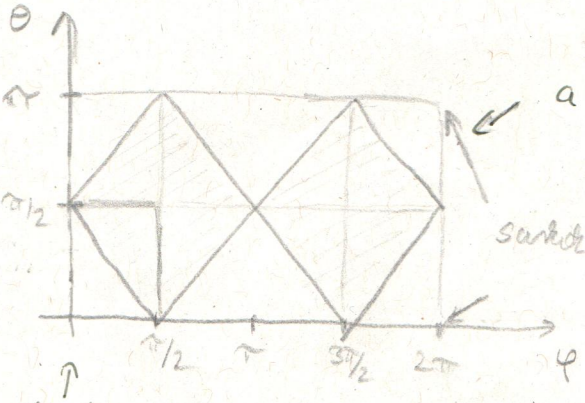
$\Rightarrow \cos\varphi=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$

$\sin\Theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$

↳ $\Theta=\frac{\pi}{2}-\varphi+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

↳ $\Theta=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)+2k\pi \Rightarrow \Theta=\frac{\pi}{2}+\varphi+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

$\Theta=\frac{\pi}{2}-\varphi+2k\pi$
$\Theta=\frac{\pi}{2}+\varphi+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$



a rajzolt felület, ha ráterjesztjük a gömbre

sarkok

⇐ területet számítjuk:
8 db egybevágó Δ ⇒ elég 1 db területét kiszámolni

ezzel alsó Δ-et integrálgyuk ⇒ határok: $\Theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$ $\Theta=\frac{\pi}{2}$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$

$$A=\int dA=8\int_{\Delta}dA=8\int_0^{\pi/2}d\varphi\left(\int_{\frac{\pi}{2}-\varphi}^{\pi/2}d\Theta\,\mathcal{F}(\Theta,\varphi)\right)=8\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_{\frac{\pi}{2}-\varphi}^{\pi/2}d\Theta\,R^2\sin\Theta=$$

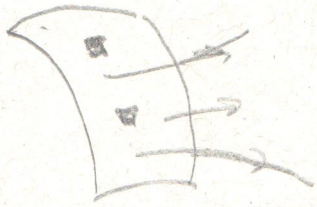
$$=8R^2\int_0^{\pi/2}d\varphi\,[-\cos\Theta]_{\Theta=\frac{\pi}{2}-\varphi}^{\Theta=\pi/2}=8R^2\int_0^{\pi/2}d\varphi\left(\underbrace{-\cos\tfrac{\pi}{2}}_{0}+\underbrace{\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\varphi\right)}_{\sin\varphi}\right)=$$

$$=8R^2\int_0^{\pi/2}d\varphi\sin\varphi=8R^2\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi/2}=8R^2\left(\underbrace{-\cos\tfrac{\pi}{2}}_{0}+\underbrace{\cos 0}_{1}\right)=\underline{8R^2}$$

Felületi integrál

↙ mennyi folyik át a felületen időegység alatt?

pl víz folyása ← vektormező - áramlás sebességével leírása



↙ áramvonalak — átfolyt vízmennyiség: fluxus

osszuk fel a felületet kis felületekre

kis felület ⇒ az integrandus ill. konstans

egy vízmolekula $\vec{v}\cdot\Delta t$ utat tesz meg



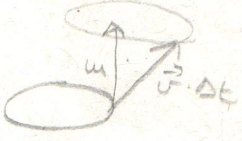
↙ ferde henger — időegység alatt átfolyt víz: a henger térfogata

a henger térfogata:

$$\Delta V = \Delta A \cdot u = \Delta A \cdot \vec{n}\,\vec{v}\,\Delta t$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \Delta A\,\vec{n}\,\vec{v}$$

↖ $\vec{n}$: helyi felületi normális



osszuk fel a felületet ilyen kis darabkákra, majd Σ-zuk

$$\frac{\Delta V_{teljes}}{\Delta t} = \sum \Delta A\,\vec{n}\,\vec{v}$$

↙ $\vec{n}\cdot\Delta A$: nagysága ΔA és merőleges a felületre

$$\Rightarrow \vec{n}\cdot\Delta A = \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}$$

felületelem-vektor: $\Delta\vec{F} = \vec{n}\cdot\Delta A$

merőző: felületelem

a normális mindig egy irányba mutasson ↙ zárt felületnél kifelé

$$\Rightarrow \frac{\Delta V_{teljes}}{\Delta t} = \sum \Delta A\,\vec{n}\,\vec{v} = \sum \vec{v}\,\Delta\vec{F} = \int \vec{v}\,d\vec{F}$$

Számításmegoldás: $d\vec{F} = \left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right) du\,dv$

$d\vec{F} = \underline{n}\,dA$ ← $dA = |d\vec{F}|$

$d\vec{F}$: felületi integrál

dA: felszín

↑ számításadat

(+) gömbön vektormező $\underline{v}(x) = \begin{pmatrix} 3x^2y \\ x^2+y^2+5z^2 \\ xz \end{pmatrix}$ ⇒ $I = \int \underline{v}\,d\underline{F} = ?$ a gömbre

gömb: gömbfelszín ↔ gömbtest (golyó)

0) 2 Dimenzió

1) Paraméterezés ← standard gömbi paraméter

2) szimbólum feloldása $d\underline{F} = \frac{\partial r}{\partial\theta} \times \frac{\partial r}{\partial\varphi}\,d\theta\,d\varphi$

3) deriváltak kiszámítása $\frac{\partial r}{\partial\theta} = \dots$ $\frac{\partial r}{\partial\varphi} = \dots$

$$\frac{\partial r}{\partial\theta} \times \frac{\partial r}{\partial\varphi} = R^2 \sin\theta \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{d\underline{F}}{d\theta\,d\varphi} = \frac{\partial r}{\partial\theta} \times \frac{\partial r}{\partial\varphi}$$

4) behelyettesítés

$$\underline{v}(\underline{r}(\theta,\varphi)) = \begin{pmatrix} 3R^2\sin^2\theta\cos^2\varphi - R\sin\theta\cos\varphi \\ R^2\sin^2\theta + 5R^2\cos^2\theta \\ R^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix}$$

5) végrehajtjuk $I = \int \underline{v}\, d\underline{F} = \int \underline{v}\, \frac{d\underline{F}}{d\theta d\varphi}\, d\theta d\varphi$

$$\Rightarrow \underline{v}\frac{d\underline{F}}{d\theta d\varphi} = \underline{v}\cdot R^2\sin\theta \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$= R^2\sin\theta\,(3R^2\sin^3\theta\cos^3\varphi - R^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi + R^2\sin^3\theta\sin\varphi +$$
$$+ 5R^2\cos^2\theta\sin\theta\sin\varphi + R^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi) = f(\theta,\varphi)$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\underline{v}\frac{d\underline{F}}{d\theta d\varphi}\right) = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\; 3R^4\sin^4\theta\cos^3\varphi =$$

(csak az első tag integrálja nem 0)

$$= 3R^4 \int_0^{\pi} d\theta \sin^4\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^3\varphi$$

ha pl. nem vízt kérdezi azt, hanem gázt és ρ nem const.
→ egy ρ skalármező is jelenik meg — átfolyó tömeg

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \vec{v}\,\Delta\vec{F} \Rightarrow \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho(\vec{r})\vec{v}(r)\Delta\vec{F} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta m}{\Delta t} = \int \rho\vec{v}\, d\vec{F}}$$

eddig: ívhossz szerinti, felületi, felszíni integrál
nem mindig paraméterezni: egyenes és sík
térfogatot nem mindig, de jól jöhet

2019.12.04.
Sze 44-45.ea.

Térfogati integrál

térfogat → 3 paramétert kell megadni
hs térfogatokra felosztás



standard paraméterezések:
pl. gömb – két polárszög kiegészül a sugárral (r is változó)
felület esetén: 3 db retardálódás fv $\underline{r}(u,v)$ – mind3 komponense
most a paraméterek is 3 dimenziós → 3 db 3 változós fv

gömb
polárszög, $\pm$ változó: sugár → gömbhéjak (r is változó)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} = \underline{r}(r,\theta,\varphi)$$



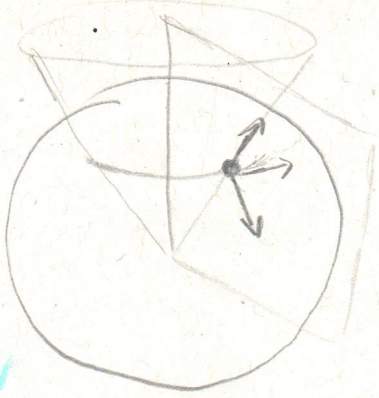
koord.-felületek 1 rögzítésével
- adott θ-jú pont: kúpon helyezkednek el
- φ konstans: környi-lapát

koordináta-vonalak 2 rögzítésével
- ha mindkettő konstans → erre merőleges sugárirányú kör (csak φ változik)
- csak θ változik: hasonlósági kör

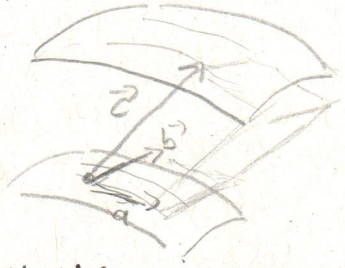


Mind3 rögzítés → pont

egy adott pontban orthogonális bázist alkotnak a vektorok



ferde parallelepip.
$\subset$ pllpip. kifogata: vegyesszorzat



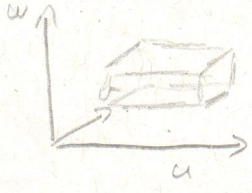
$\underline{r}(u,v,w)$

$\underline{a} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} du \quad \underline{b} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \quad \underline{c} \frac{\partial \underline{r}}{\partial w} dw$

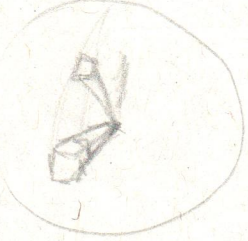
paralelepipedon térfogata

$$dV = \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}, \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}, \frac{\partial \underline{r}}{\partial w}\right) du\,dv\,dw$$

jacobi – korzitási tényező (függvény)
determináns!



$$\underline{r}(u,v,w) = \begin{cases} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \\ z(u,v,w) \end{cases} \Rightarrow J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = J(u,v,w)$$



$\subset$ nem egyszerű térfogatok
$\Rightarrow$ korzitási tényező

a szimbólumok feladása:

1 dim $\underline{r}(t)$	$d\underline{r} = \dot{\underline{r}}(t)\,dt$	$\subset$ ezekre lehet integrálni
	$ds = \lvert\dot{\underline{r}}(t)\rvert dt$	
2 dim $\underline{r}(u,v)$	$d\underline{E} = \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right) du\,dv$	
	$dA = \left\lvert \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \right\rvert du\,dv$	
3 dim $\underline{r}(u,v,w)$	$dV = \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}, \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}, \frac{\partial \underline{r}}{\partial w}\right) du\,dv\,dw$	

gömb koordináta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \quad x(r,\theta,\varphi) \qquad \begin{matrix} r \in [0,R] \\ \theta \in [0,\pi] \\ \varphi \in [0,2\pi[\end{matrix}$$

térfog. elem: $dV = \left(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial x}{\partial \varphi}\right) dr\, d\theta\, d\varphi$

deriválás: mindig a paramétereket !!

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \text{sugárirányban} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta \end{pmatrix} = \text{del jelé} = r\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \text{szélet jelé} = r\sin\theta\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

determináns:

$$\frac{dV}{dr\,d\theta\,d\varphi} = \mathcal{J} = \left(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial x}{\partial \varphi}\right) = r^2\sin\theta \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathcal{J} = r^2\sin\theta}$$

gömbi koordinátán: $\boxed{V = \int dV = \int \underbrace{r^2\sin\theta}_{\mathcal{J}}\, dr\, d\theta\, d\varphi} \Rightarrow$

↑ jelölés: $\iiint r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$

$$V = \int dV = \iiint r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = \int_0^R dr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, r^2\sin\theta =$$

$$= \int_0^R dr\, r^2 \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int_0^R dr\, r^2 \left(\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\right) =$$

$$= 2\pi \cdot 2 \int_0^R dr\, r^2 = 4\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R = \frac{4\pi}{3}R^3 \qquad \uparrow [-\cos\theta]_0^{\pi} = 2$$

Szükséges görbék paraméterezése

kör ← egy szöggel kpi-vel

$x^2+y^2=R^2$

$\underline{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \end{pmatrix}$ $\quad \varphi \in [0, 2\pi[$

↖ behelyettesítve az eredeti egyenletbe: azonosság

ellipszis

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\quad \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ $\quad t \in [0, 2\pi[$

(t: exc. anomália)

hiperbola

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $\quad \begin{cases} x = a\cosh t \\ y = b\sinh t \end{cases}$ $\quad t \in]-\infty, \infty[$

↙ $-\infty$-ből ∞-ig végigfut, nem periodikus

bal ágához: $x = -a\operatorname{ch} t$, $y = b\operatorname{sh} t$



felületek

gömb

$\underline{r}(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} R\sin\theta\cos\varphi \\ R\sin\theta\sin\varphi \\ R\cos\theta \end{pmatrix}$ $\quad \theta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi[$

$x^2+y^2+z^2=R^2$

↙ felgömb, ha lefelezzük az egyik határt

ellipszoid

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $\quad \begin{cases} x = a\sin\theta\cos\varphi \\ y = b\sin\theta\sin\varphi \\ z = c\cos\theta \end{cases}$

(lehúzópörgés az ellipszoidot egy gömbre)

hiperboloid

$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)-\frac{z^2}{c^2}=1$ egyköpenyű → $\begin{cases} x = a\operatorname{ch}\alpha\cos\beta \\ y = b\operatorname{ch}\alpha\sin\beta \\ z = c\operatorname{sh}\alpha \end{cases}$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ kétköpenyű → $\begin{cases} x = a\operatorname{sh}\alpha\cos\beta \\ y = b\operatorname{sh}\alpha\sin\beta \\ z = c\operatorname{ch}\alpha \end{cases}$

$\beta \in [0, 2\pi]$, $\alpha \in]-\infty, \infty[$

alsó ág: $z = -c\operatorname{ch}\alpha$

kúp

$\begin{cases} x = r\sin\alpha\cos\varphi \\ y = r\sin\alpha\sin\varphi \\ z = r\cos\alpha \end{cases}$ → $\underline{r}(r,\varphi)$

$\alpha = \text{const}$

$\varphi \in [0, 2\pi[$, $r \in [0, R]$

$z = m - r\cos\alpha$









ellipszis

$\begin{cases} x = r\tan\alpha\cos\varphi \\ y = r\tan\alpha\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$

$\varphi \in [0, 2\pi[$

$z \in [0, H]$

parabola

paraméter (maga az x)

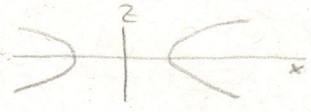
forgásparaboloid

pl. $y = 5x^2$

$z = 5(x^2+y^2)$



lefelé:



$x^2+y^2 = 5z^2+3$

pl. $x = 5z^2+3$

$\left.\begin{aligned} x &= (5z^2+3)\cos\varphi \\ y &= (5z^2+3)\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\} \underline{r}(z,\varphi)$

henger

$x^2+y^2=R^2$

(z irányában áll)

$\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ → $\underline{r}(\varphi, z)$ $\quad \varphi \in [0, 2\pi[$, $z \in [0, H]$

↖ φ és z sorrendje mutatja a forgási irányt

henger: $dA = R\,d\varphi\,dz$

$\frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

$\frac{\partial \underline{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ → $\frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial z} = R\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

testek belseje

kup: változtatsuk $x-t$

ellipszoid: egyenletes deformált ellipszoidok

$$\vec{r}(\theta,\varphi,t)=\begin{pmatrix} x=at\sin\theta\cos\varphi \\ y=bt\sin\theta\sin\varphi \\ z=ct\cos\theta \end{pmatrix} \quad t\in[0,1]$$

1: felület
0: éppen

dlt. trükk: a 3. paraméter legyen <u>tengelyirányú paraméter</u>

① ellipszoid térfogata

$$r(\theta,\varphi,t)=\begin{pmatrix} x=at\sin\theta\cos\varphi \\ y=bt\sin\theta\sin\varphi \\ z=ct\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} t\in[0,1] \\ \theta\in[0,\pi] \\ \varphi\in[0,2\pi[\end{matrix}$$

$$dV=\left(\frac{\partial r}{\partial t},\frac{\partial r}{\partial\theta},\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)dt\,d\theta\,d\varphi$$

nem alapvektorok!

$$\frac{\partial r}{\partial t}=\begin{pmatrix} a\sin\theta\cos\varphi \\ b\sin\theta\sin\varphi \\ c\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial r}{\partial\theta}=\begin{pmatrix} at\cos\theta\cos\varphi \\ bt\cos\theta\sin\varphi \\ -ct\sin\theta \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} a\cos\theta\cos\varphi \\ b\cos\theta\sin\varphi \\ -c\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial r}{\partial\varphi}=\begin{pmatrix} -at\sin\theta\sin\varphi \\ bt\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}=t\sin\theta\begin{pmatrix} -a\sin\varphi \\ b\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{dV}{dt\,d\theta\,d\varphi}=\left(\frac{\partial r}{\partial t},\frac{\partial r}{\partial\theta},\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)=t^2\sin\theta\begin{vmatrix} a\sin\theta\cos\varphi & a\cos\theta\cos\varphi & -a\sin\varphi \\ b\sin\theta\sin\varphi & b\cos\theta\sin\varphi & b\cos\varphi \\ c\cos\theta & -c\sin\theta & 0 \end{vmatrix}=$$

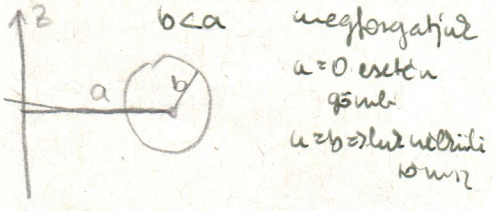
$$=abc\,t^2\sin\theta\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \end{vmatrix}=abc\,t^2\sin\theta$$

csak ennyit számolnod kell! $=1$

$$V=\int dV=\int\frac{dV}{dt\,d\theta\,d\varphi}\,dt\,d\theta\,d\varphi=\int abc\,t^2\sin\theta\,dt\,d\theta\,d\varphi=$$

$$=\int_0^1 dt\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\;abc\,t^2\sin\theta=abc\underbrace{\int_0^1 dt\,t^2}_{1/3}\underbrace{\int_0^{\pi}d\theta\sin\theta}_{2}\underbrace{\int_0^{2\pi}d\varphi}_{2\pi}=\frac{4\pi}{3}abc=V$$

tórusz



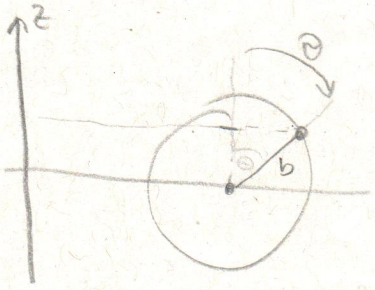
$b<a$

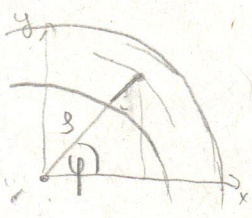
megforgatjuk

$a=0$ esetén gömb

$a=b$ önmagát metszi tórusz







$$z=b\cos\theta$$
$$\varrho=a+b\sin\theta$$
$$x=\varrho\cos\varphi$$
$$y=\varrho\sin\varphi$$

$$\underline{r}(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} (a+b\sin\theta)\cos\varphi \\ (a+b\sin\theta)\sin\varphi \\ b\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \theta \in [0, 2\pi[\quad \varphi \in [0, 2\pi[$$

$$\frac{\partial r}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} b\cos\theta\cos\varphi \\ b\cos\theta\sin\varphi \\ -b\sin\theta \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial r}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} -(a+b\sin\theta)\sin\varphi \\ (a+b\sin\theta)\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = (a+b\sin\theta)\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial r}{\partial\theta} \times \frac{\partial r}{\partial\varphi} = b(a+b\sin\theta)\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\left|\frac{\partial r}{\partial\theta} \times \frac{\partial r}{\partial\varphi}\right| = b(a+b\sin\theta)$$

$$A = \int dA = \int \frac{dA}{d\theta d\varphi}\, d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, b(a+b\sin\theta) = b\int_0^{2\pi} d\theta (a+b\sin\theta)\int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= 2\pi b \int_0^{2\pi} d\theta (a+b\sin\theta) = 2\pi b\left[a\theta - b\cos\theta\right]_0^{2\pi} = 2\pi b \cdot 2\pi a = \underline{\underline{4\pi^2 ab = A}}$$

ha tartunk a-val 0-hoz, er nem adja vissza a gömb felszínét! tartva amegfelelő egyenletbe harapnak a szögek integrálási határok ← visszgeljük kifejtésre, kiszámítjuk belső

$$A = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, b(a+b\cos\theta) = 2\pi b\int_0^{\pi} d\theta (a+b\cos\theta) = 2\pi b\left[a\theta - b\cos\theta\right]_0^{\pi} =$$

$$= 2\pi b(a\pi + 2b) = 2\pi^2 ab + 4\pi b^2$$

tömör (tórusz)

$$r(t,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} (a+bt\sin\theta)\cos\varphi \\ (a+bt\sin\theta)\sin\varphi \\ bt\cos\theta \end{pmatrix}$$ ← nem b-ig megyünk, csak bt-ig

$$\frac{\partial r}{\partial t} = b\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial r}{\partial\theta} = bt\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial r}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} -(a+bt\sin\theta)\sin\varphi \\ (a+bt\sin\theta)\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = (a+bt\sin\theta)\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}, \frac{\partial r}{\partial\theta}, \frac{\partial r}{\partial\varphi}\right) = b^2 t(a+bt\sin\theta) \cdot 1 \rightsquigarrow \text{ez megint a gömbé}$$

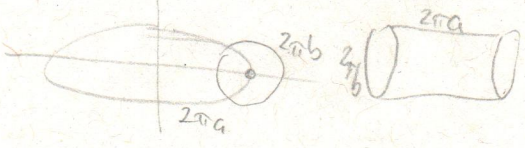
$$V = \int dV = \int_0^{\hat{1}} dt \int_0^{2\pi}\theta \int_0^{2\pi}\varphi\, b^2 t(a+bt\sin\theta) = 2\pi b^2 \underbrace{\int_0^{\hat{1}} dt\, t}_{1/2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta (a+b\sin\theta)}_{2\pi a} = \underline{\underline{2\pi^2 b^2 a = V}}$$

tömzsre:

$$A = 4\pi^2 ab = (2\pi a)(2\pi b)$$

$$V = 2\pi^2 b^2 a = (2\pi a)(\pi b^2)$$

analógia: ugyisszuk ki a tömzset lengend



Guldin-tételek:

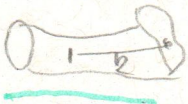
I) forgástest



$A = k 2\pi r$

r - súlypontnak vett sugár

II) zárt görbe



$V = t \cdot 2\pi R$

visszafelé alkalmazva tömzsre, keressük a súlypontot:

$$A = 2\pi^2 ab + 4\pi b^2 = b\pi(\pi + 2\pi)$$

$$\frac{A}{k} = \frac{A}{b\pi} = 2\pi a + 4b = 2\pi r$$

$$\underline{S} = \frac{\sum m\underline{r}}{\sum m} \to \frac{\int \varrho(\underline{r})\,\underline{r}\,dV}{\int \varrho(\underline{r})\,dV}$$

tehetetlenségi tenzor

$$\Theta_{kl} = \sum m_a \left(r_a^2 \delta_{kl} - r_{ak} r_{al} \right) \rightarrow \int_V dV \, \rho(\underline{r}) \left(r^2 \delta_{kl} - r_k r_l \right) = \Theta_{kl}$$

(a.-adik tömegpont)

gömb tehetetlenségi nyomatéka:

$$\underline{\underline{\Theta}} = \frac{1}{2} \underline{\omega} \, \underline{\underline{\Theta}} \, \underline{\omega}$$

$$\omega = \omega \underline{n} = \frac{1}{2} \left(\underline{n} \, \underline{\underline{\Theta}} \, \underline{n} \right) \omega^2$$

spec. eset $\underline{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$(0 \; 0 \; 1) \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Theta_{33} = \int dV \, \rho(\underline{r}) (r^2 - z \cdot z)$$

$x^2+y^2+z^2-z^2 = x^2+y^2$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \Theta_{33} &= \int dV \, \rho (x^2+y^2) \\ \Theta_{11} &= \int dV \, \rho (y^2+z^2) \\ \Theta_{22} &= \int dV \, \rho (x^2+z^2) \end{aligned}}$$

$$\Theta_{11} + \Theta_{22} = \int dV \rho (x^2+y^2+2z^2) \geq \int dV \rho (x^2+y^2) = \Theta_{33}$$

háromszög – egyenlőtlenség!

egyenlőség: $z=0$ esetén ∞ vékony lap

a gömbre (legyen $\rho = 1$)

$x = r \sin\theta \cos\varphi$

$y = r \sin\theta \sin\varphi$

$z = r \cos\theta$

$$dV = J \, dr \, d\theta \, d\varphi = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$\Theta_{33} = \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, \rho(r) r^2 \sin\theta \, (\underbrace{r^2 \sin^2\theta}_{x^2+y^2}) = 2\pi \left(\int_0^R dr \, \rho(r) r^4 \right) \left(\underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin^3\theta}_{4/3} \right) =$$

$$\left[\int_0^\pi d\theta \sin^3\theta = \int_0^\pi d\theta \sin\theta (1 - \cos^2\theta) = \left(-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} \right)_0^\pi = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} \right]$$

$$= \frac{8\pi}{3} \int_0^R dr \, \rho(r) r^4 \overset{\text{áll. sűrűség esetén}}{=} \frac{8\pi}{3} \rho \int_0^R dr \, r^4 = \frac{8\pi}{3} \rho \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^R = \frac{8\pi \rho R^5}{15}$$

$$M = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho \Rightarrow \frac{\Theta_{33}}{M} = \frac{2 \cancel{8\pi} \cancel{\rho} R^{\cancel{5}^2}}{\cancel{15}^5} \cdot \frac{5}{\cancel{4\pi} R^{\cancel{3}} \cancel{\rho}} = \frac{2}{5} R^2$$

$$\Rightarrow \Theta_{33} = \frac{2}{5} M R^2$$

tehetetlenségi ~~tenzor~~ nyomaték differenciális elemei ~~=~~ deriváltjai ~~komponensek~~ nyomaték „súlyozatlan" a forgás körben

	dim=1 görbék $\underline{r}(t)$		dim=2 felületek $\underline{r}(u,v)$		dim=3 testek $\underline{r}(u,v,w)$
mennyiség	skalár: ds ívhossz	vektor: $d\underline{r}$ ívelem	skalár: dA felszíneleem	vektor: $d\underline{F}$ felületelem	dV
kiszámítás formája	$ds = \lvert\dot{\underline{r}}(t)\rvert dt$ $\int_a^b f(x)dx$	$d\underline{r} = \dot{\underline{r}}(t)dt$	$dA = \left\lvert\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right\rvert du dv$ $\iint_T f(x,y)dx dy$ ← T: tartomány	$d\underline{F} = \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right) du dv$	$dV = \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial w}\right) du dv dw$ $\iiint_T f(x,y,z)\,dx dy dz$
	$\int ds$ ívhossz $\int g(s)ds$ ← összsúlyos vektorális (LB) $\int f(\underline{r})ds$ ← $\int f(\underline{r}(s))ds$ ⊛ pörzmező $\int \underline{v}(s)ds$ ← integrálgörbe mentén vett görb. erő $\int \underline{v}(\underline{r})ds$ ⊛ ϕ: adott ív mentén a kezdőpont.	$\int d\underline{r}$ nincs $\int g(s)d\underline{r}$ ← pl. tömeg: $d\underline{r}$ a pont-körüli elemi mikro pot. változás $\int f(\underline{r})d\underline{r}$ $\times\int \underline{v}(\underline{r})d\underline{r}$ ← vonalmenti integrál munkavégzés $\int \underline{v}(\underline{r}) \times d\underline{r}$ ← adott mágneses tér $\int \underline{v}(\underline{r}) \circ d\underline{r}$	$\int dA$ a test felszíne $\int g(\underline{r})dA$ ← összsúlyos (2D) vektorok $\int \underline{v}(\underline{r})dA$ ← ideoplan. szögsebesség által gerj. erő $\int \phi(\underline{r})dA$ ← adott felszín összpot.-ja	$\int d\underline{F}$ nincs adata $\int f(\underline{r})d\underline{F}$ $\times\int \underline{v}(\underline{r})d\underline{F}$ ← fluxus $\int \underline{v}(\underline{r}) \times d\underline{F}$ ← összetett felület áramlásra lehet $\int \underline{v}(\underline{r}) \circ d\underline{F}$	$\int dV$ a test térfogata $\int g(\underline{r})dV$ vektoros tömegsűrűségű test tömege $\int \underline{v}(\underline{r})dV$ ún. térerősségű által gerj. erő $\int f(\underline{r})dV$ ϕ: adott térfogati potenciumfv.-ből pl. $\underline{I}(\underline{r})_{ik} = g(\underline{r})(r^2\delta_{ik} - r_i r_k)$ tehetetlenségi tenzorsűrűség

$f(x) = \phi(x)$ ⊛ mező

a tömegsűrűségeloszlás momentumai: $\int x = \int dV\, g(r)$ skalár

erből vissza lehet számolni a tömegsűrűségeloszlást ~ Fourier

$s_i = \int dV\, r_i\, g(r)$ vektor

$T_{ik} = \int dV\, r_i r_k\, g(r)$

$A_{ikm} = \int dV\, r_i r_k r_m\, g(r)$

⋮

Diff. és integrálás közti kapcsolat

2019.12.09.
Let Cub.ca

Newton - Leibniz: $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$

határok: felület ← zárt görbe
test ← zárt felület
görbe ← két pont

vonalmenti integrál
görbementi integrál $\int_C \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r}$

$$\int_C \underline{\nabla}\phi \, d\underline{r} = \phi(B) - \phi(A)$$

vektormező ~~folyamat görbe~~
felületi integrálja $\int_F \underline{v}\,d\underline{F} = \int_{\partial F} \dots$ Stokes-tétel

térfogati integrál skalármező: $\int_V \phi\,dV = \int_{\partial V} \dots$ Gauss-tétel

Gauss-tétel

vektormező: $\vec{v}(\vec{r})$

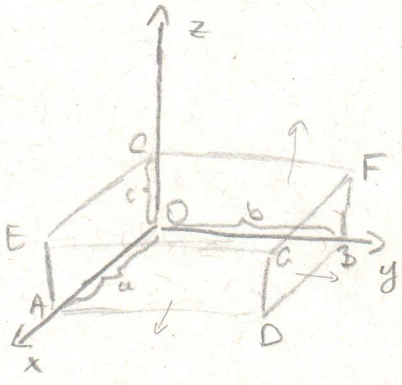
zárt felületre vett integrálja: $\oint_F \vec{v}(\vec{r})\,d\vec{F} = \int_V (\mathrm{div}\,\vec{v}(\vec{r}))\,dV$

(div: div. operátor; $F = \partial V_F$; V_F: F felület a határa a térfogatnak)

$d\vec{F}$: kifelé mutasson

bizo (a tétel alapja)

$\underline{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} v_x(x,y,z) \\ v_y(x,y,z) \\ v_z(x,y,z) \end{pmatrix}$ ← 3db 3változós fv



vegyünk egy kis testet

$I = \oint_{\partial V} \underline{v}\,d\underline{F}$ ← a 6 lapra külön vett integrál összege

felületi normálisok (egységvektorok) 1 lapon belül a normálisok állnak.

$$I = \oint_{\square} \underline{v}\,d\underline{F} = \int_{BFGD} + \int_{OAEC} + \int_{AEGD} + \int_{OBFC} + \int_{CEGF} + \int_{OADB}$$

BFGD	OAEC	AEGD	OBFC	CEGF	OADB
$\underline{n} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$	$\underline{n} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$	$\underline{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$	$\underline{n} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$	$\underline{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$	$\underline{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$
$\underline{v}\underline{n} = v_y$	$\underline{v}\underline{n} = -v_y$	$\underline{v}\underline{n} = v_x$	$\underline{v}\underline{n} = -v_x$	$\underline{v}\underline{n} = v_z$	$\underline{v}\underline{n} = -v_z$
$\Delta A = ac$	$\Delta A = ac$	$\Delta A = cb$	$\Delta A = cb$	$\Delta A = ab$	$\Delta A = ab$
$v_y(x, y=b, z)$	$v_y(x, y=0, z)$				

$\lim \sum \underline{v}\,\Delta\underline{F} = \sum \underline{v}\underline{n}\,\Delta A$

$\underline{v}\underline{n}\,\Delta A$ - a kijelölt egyenlőtlen összegűek 0!
de v_y az első és utolsó lapon nem ua.!

Taylor-sorba fejtés! $f(b) = f(0) + f'(0)b$

$v_y(x, y=b, z) = v_y(x, y=0, z) + \frac{\partial v_y}{\partial y} b$ ← b-vel megyünk odébb

$$\int_{BFGD} + \int_{OAEC} = ac\left(v_y(x,y=0,z) + \frac{\partial v_y}{\partial y} b\right) + ac\left(-v_y(x,0,z)\right) = \frac{\partial v_y}{\partial y} b\,ac$$

$$\int_{AEGD} + \int_{OBFC} = cb\left(v_x(0,y,z) + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot a\right) + cb\left(-v_x(0,y,z)\right) = \frac{\partial v_x}{\partial x} a\,cb$$

$$\int_{CEGF} + \int_{OADB} = ab\left(v_z(x,y,0) + \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot c\right) + ab\left(-v_z(x,y,0)\right) = \frac{\partial v_z}{\partial z} c\,ab$$

$\Rightarrow I = \oint_{\partial V} \underline{v}\, d\underline{F} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) abc = \operatorname{div} \underline{v} \cdot \Delta V$

a divergenciát hol vegyük fel?

kis test esetén mindegy

tegyünk egységnyi élű kis gyufásdobozt!

a vektorral lapos integrálja kicsi $\Rightarrow$ csak a legfelső rész marad



belátható más felosztásokra is, hogy

$$\oint_{F=\partial V} \underline{v}\, d\underline{F} = \int_V \operatorname{div} \underline{v}\, dV$$

pl. $v_x = 3x + y - z$
$v_y = x - 2y + 3z$
$v_z = x - y - z$
$\Big\} \operatorname{div} \underline{v} = 0$

$v_z = x - y$ esetén $\operatorname{div} \underline{v} = 1$ $\leftarrow$ $\int \operatorname{div} \underline{v}\, dV = V$ a test térfogata

ez egyenlő a felületi integrállal $\Rightarrow$ térfogatszámításra alkalmas

pl. gömbre $\underline{v} = -\frac{\underline{r}}{r^3}$ $\leftarrow$ grav. tér / potenciál

$\oint \underline{v}\, d\underline{F}$

paraméterezés: $\underline{r}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} R \sin\vartheta \cos\varphi \\ R \sin\vartheta \sin\varphi \\ R \cos\vartheta \end{pmatrix}$ $\vartheta \in [0, \pi]$, $\varphi = [0, 2\pi[$

szimbólum: $d\underline{F} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi}\, d\vartheta\, d\varphi$

$\underline{v}(\underline{r}(\vartheta,\varphi)) = \underline{v}(\vartheta,\varphi) =$

$= -\frac{R \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}}{R^3}$

deriválás: $\frac{\partial \underline{r}}{\partial \vartheta}$, $\frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi}$

$\Rightarrow \frac{\partial \underline{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} = R^2 \sin\vartheta \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} d\vartheta\, d\varphi$

$\Rightarrow$ skaláris szorzat: $\underline{v}(\underline{r}(\vartheta,\varphi)) \cdot \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi}\right) = \sin\vartheta\, (\ )^2 = \sin\vartheta$

$\Rightarrow \oint \underline{v}\, d\underline{F} = \int \underline{v} \frac{d\underline{F}}{d\vartheta d\varphi}\, d\vartheta d\varphi = \int \underline{v}(\vartheta,\varphi) \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi}\right) d\vartheta\, d\varphi =$

$= -\int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\vartheta = -2\pi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta = -4\pi$

Gauss-tétellel ell.!

karteziusi indexben, vektorműveletekkel eljut első a vektorig $\Rightarrow$ indexesen!

$$\operatorname{div} \underline{v} = \nabla \underline{v} = \partial_2 v_2 = \partial_2 \left(-\frac{x_2}{r^3}\right) = -\partial_2 \left(x_2 \cdot \frac{1}{r^3}\right) = -\left(\partial_2 x_2 \frac{1}{r^3} + x_2 \partial_2 \frac{1}{r^3}\right) =$$

$$= -\left(\delta_{22} \frac{1}{r^3} + x_2 \left(\frac{-3}{r^4}\right) \underbrace{\partial_2 r}_{e_2}\right) = -\left(3\frac{1}{r^3} - \frac{3}{r^4} \underbrace{x_2 e_2}_{\underline{r}}\right) = 0$$

mert $e_2 = \frac{x_2}{r}$

! a Gauss-tétel nem igaz, ha van egy szingularitás az integrálási tartományban

a gömb közepére $\oslash$ elhelyezve a divergencia:

$1/r^3 \to \infty$

hasonló a Dirac-delta$_{(0)}$hoz 0-ban ∞, sehol máshol 0

a felületi integrállal $\checkmark$ gond, mert $\oslash$ benne a tartományban, de a térfogati integrálban igen

pl. kis gömbfelület körüli integrál



$\Rightarrow$ Gauss-tétel akkor igaz, ha minden ilyet kizárunk

Skalármező $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{a}\,\phi(\underline{r})$ ← spec. eset

a vektormező egy konstansvekt. és skalármező szorzata

$$\operatorname{div}\underline{v} = \partial_x v_x = \partial_x(a_x\phi) = a_x\partial_x\phi = (\underline{a}\underline{\nabla})\phi$$ ← iránymenti deriválás

$$\oint \underline{v}\,d\underline{F} = \oint \underline{a}\,\phi(\underline{r})\,d\underline{F} = \underline{a}\left(\oint \phi(\underline{r})\,d\underline{F}\right)$$

$$\int \operatorname{div}\underline{v}\,dV = \int \underline{a}\,\underline{\nabla}\phi\,dV = \underline{a}\int \underline{\nabla}\phi\,dV$$

$$\Big\} \Rightarrow \underline{a}\left(\oint \phi\,d\underline{F} - \int \underline{\nabla}\phi\,dV\right) = 0$$

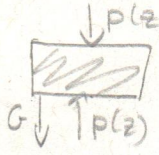
$\underline{a}$ tetszőleges $\Rightarrow$ a zárójelben nullvektor van!

$$\oint \phi\,d\underline{F} = \int \underline{\nabla}\phi\,dV$$ skalárok Gauss-tétele

pl. gáz ötve

$\rho(\vec{r})$ sűrűség - skalármező $\quad \Delta m = \rho(\vec{r})\Delta V$

$p(\vec{r})$ nyomás - skalármező $\quad \vec{G} = \vec{g}\,\rho\,\Delta V$ ← grav. erő, lefelé hívva ellentart a nyomás



nyomás felületről:

$$p(z+\Delta z) = p(z) + \underline{\nabla} p\,\Delta\underline{r}$$

erők összege 0 $\Rightarrow \underline{\nabla} p\,\Delta\underline{r}\,\Delta A = \rho g\,\Delta V \Rightarrow \underline{\nabla} p = \rho g$

hidrosztatikai egyensúly egyenlete

nyomás által kifejtett erő a felületi normális irányába mutat

$$\Delta\vec{N} = -\vec{n}\,p\,\Delta A = -p\,\Delta\vec{F}$$ ← a környező gázból ható erő lat a test felületére

test a gázban



$$\vec{N} = -\oint p(\vec{r})\,d\vec{F} = -\int(\nabla p)\,dV = -\int \rho g\,dV$$ ← ρg: a test súlya

$\Rightarrow$ Arkhimédész tve!!

a nyomás által a folyadékba helyezett test által kifejtett erő a kiszorított anyag súlya

$$\oint v_z\,dF_z = \int \partial_z v_z\,dV$$

$$\oint (v_z u_z)\,dA = \int (\partial_z v_z)\,dV$$ ← $(v_z u_z)$ és $(\partial_z v_z)$ skalármezők

tenzormező: $T_{ez}(r)$

$$\oint T_{ez}(r)\,u_z\,dA = \int (\partial_z T_{ez})\,dV$$

$\partial_z T_{ez}$: a tenzormező divergenciája van skalárindexre (1) $\Rightarrow$ vektormező

tenzorokra vonatkozó Gauss-tétel

általánosított Gauss-tétel: ← a Newton-féle tétel általánosítása

$$\oint (\ldots)_z\,u_z\,dA = \int \partial_z (\ldots)_z\,dV$$ ← akárhány dimenzióra és akárhány indexes tenzorokra

2019.12.11.
47. ea ke

Stokes-tétel

vonalintegrál - zárt görbe

$$\oint_{G=\partial F} \vec{v}(\vec{r})\, d\vec{r} = \int_{F} \operatorname{rot} \vec{v}\, d\vec{F}$$



↳ Görbe: bolyzjelölés

2D-s görbe => a síkot lefedik rá

3D-s görbe => „sapka"

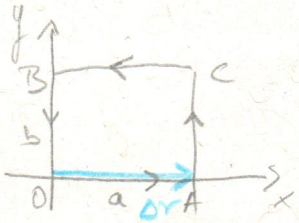
Gauss: analóg

$$\oint_{F=\partial V} \vec{v}\, d\vec{F} = \int_{V} \operatorname{div} \vec{v}\, dV$$

biz - ris téglalap

a görbe és a felület irányítása

jobbkéz-szabály



$$\oint \vec{v}\, d\vec{r} = \oint \underline{v}\, d\underline{r} = \int_{\square} \underline{v}\, d\underline{r} = \int_{OA} \underline{v}\, d\underline{r} + \int_{AC} \underline{v}\, d\underline{r} + \int_{CB} \underline{v}\, d\underline{r} + \int_{BO} \underline{v}\, d\underline{r} =$$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_x(x,y,z) \\ v_y(x,y,z) \\ v_z(x,y,z) \end{pmatrix}$$

$$\Delta r = \underset{a v_x}{a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}} \quad \underset{b v_y}{b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}} \quad \underset{-a v_x}{a\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}} \quad \underset{-b v_y}{b\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}} \Big\} \text{de} \neq 0$$

$$* \int_{OA} + \int_{CB} = a\, v_x(x, y=0, 0) + (-a)\, v_x(x, y=b, 0) = \leftarrow \text{sorfejtés}$$

$$= a\left[v_x(x,0,0) - \left(v_x(x,0,0) + \frac{\partial v_x}{\partial y} b \right) \right] = -ab \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

$$\int_{BO} + \int_{AC} = -b\, v_y(x=0, y, 0) + b\, v_y(x=a, y, 0) =$$

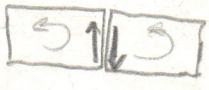
$$= b\left[-v_y(0,y,0) + v_y(0,y,0) + \frac{\partial v_y}{\partial x} a \right] = ba \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \oint \underline{v}\, d\underline{r} = ab \underbrace{\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)}_{(\nabla \times \underline{v})_z = (\operatorname{rot} \underline{v})_z} = (\operatorname{rot} \underline{v})_z\, ab$$

$$\Delta \underline{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ab \quad \leftarrow ab: \text{alapterület}$$

$$\operatorname{rot} \underline{v} \cdot \Delta \underline{F} = (\operatorname{rot} \underline{v})_z\, ab$$

tetszőleges tartomány esetén:



↙ elintegrálással integrálok kiejtik egymást

$$\oint \underline{v}\, d\underline{F} = \sum \oint = \sum \operatorname{rot} \underline{v} \cdot \Delta \underline{F} \to \int \operatorname{rot} \underline{v}\, d\underline{F}$$

~~síkbeli görbére bebizonyítható, általánosítás következik~~

képes görbére bebizonyítható

síkbeli görbéről kilépve: „tányérlap"

=> térbeli görbére is igaz



Körbeli görbék: „milyen magas sapka?"

$$I_0 = \oint_\sigma \underline{v}\, d\underline{r} \qquad I_1 = \int_{\Gamma_1} \mathrm{rot}\, \underline{v}\, d\underline{F} \qquad I_2 = \int_{\Gamma_2} \mathrm{rot}\, \underline{v}\, d\underline{F}$$

ha egyenlőek, megnyugodhatunk



külső kifelé
belső befelé mutat

$$I_2 - I_1 = \left(\int_{\Gamma_2} - \int_{\Gamma_1}\right) \underline{v}\, d\underline{F} = \int_{\Gamma_2} \mathrm{rot}\, \underline{v}\, d\underline{F} + \int_{\Gamma_1} \mathrm{rot}\, \underline{v}\, d\underline{F} = \oint \mathrm{rot}\, \underline{v}\, d\underline{F} = \oint \underline{w}\, d\underline{r} =$$

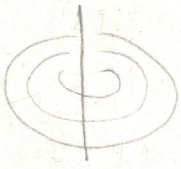
Gauss

$$= \int \mathrm{div}\, \underline{w}\, dV = \int \underbrace{\mathrm{div}\, \mathrm{rot}\, \underline{v}}_{0}\, dV = 0 \quad \Rightarrow$$

mindegy, hogy milyen felületet terítünk rá

kivéve: szinguláris pont belül (v. kívül)
⇒ az egyik integrál nem lejön

szinguláris pont átfektethető egy másik „sapkával"
problémás: szinguláris vonal ← pl. mágneses tér



1. gradiustétel:

$$\int_\sigma \nabla\phi\, d\underline{r} = \phi(B) - \phi(A)$$

= a vektoranalízis integráltételei



$$\int_{\sigma_1} \nabla\phi - \int_{\sigma_2} \nabla\phi = \int + \int = \oint \nabla\phi\, d\underline{r} =$$

σ_1 ⇒ σ_2 ⇐

$$= \int (\underbrace{\mathrm{rot}\, \mathrm{grad}\, \phi}_{0})\, d\underline{F} = 0$$

div és rot definiálása absztrakt módon

$$\mathrm{div}\, \vec{v} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint \vec{v}(\vec{r})\, d\vec{F}$$

a div. absztrakt def

← Gauss-tétel megfordítva
ha létezik a lim
ötletével tartunk a 0-hoz

$$d\vec{F} = \vec{n}\, dA$$

$$\oint \vec{v}(\vec{r})\, d\vec{r} = \int \mathrm{rot}\, \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dA$$

$$\sim \mathrm{rot}\, \vec{v}\, \vec{n}\, \Delta A$$

$$\vec{n}\, \mathrm{rot}\, \vec{v} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{1}{\Delta A} \oint \vec{v}(\vec{r})\, d\vec{r}$$

a rot. absztrakt def

↖ ennek reprezentációja az eddig ismeretes def
átvihető általában dim-s térre
ez már nem csak Descartes-koordinátarendszeres

← ∞ sok $\vec{n}$ lehet, de ha 3 $\overset{\text{dim}}{\text{lin.}}$ függ. $\vec{n}$-re megadjuk rot $\vec{v}$ vetületeit, jöhet vagyunk

Tenzorok rotációja: Stokes-tétel indexes írásmóddal

$$\oint v_k\, dx_k = \int (\varepsilon_{rsm}\, \partial_r v_m)\, dF_s$$

$$\oint T_{sk}\, dx_k = \int (\varepsilon_{rsm}\, \partial_r T_{sm})\, dF_s$$

↑ 27 mennyiség linearizálja

Kontinuitási egyenlet

folyadék áramlásának leírására: időtől és helytől függő vektormező
$\vec{v}(\vec{r},t)$

sűrűség: helytől és időtől függő skalármező
$\rho(\vec{r},t)$

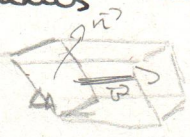
→ mekkora tömeg van ebben?

$\Delta m = \rho(\vec{r},t)\,\Delta V$ finom felosztás ⇒ térfogati integrál, ami függ az időtől

$M(t) = \int_V \rho(\vec{r},t)\,dV$ a térfogat áll., de a ρ függ az időtől

$$\frac{dM(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int \rho(\vec{r},t)\,dV = \int \frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t}\,dV$$

fluxus - lokálisan



$\Delta \vec{F} = \vec{n}\,\Delta A$

$\Delta V = \vec{v}\,\vec{n}\,\Delta A\,\Delta t$

$\Delta m = \rho\,\vec{v}\,\vec{n}\,\Delta A\,\Delta t$ →

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho\,\vec{v}\,\Delta\vec{F}$$

$$\frac{dH}{dt} = \oint \rho(\vec{r},t)\,\vec{v}(\vec{r},t)\,d\vec{F}$$

a zárt felület (∂) -szerese az utóbbi a zárt térből kilépő tömeg előző esetünkben tömeg

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dV = -\oint \rho\,\vec{v}\,d\vec{F}$$ ← tömegmegmaradás tv!! kapcsolat tömeg- és energiamegm.-re

energiamegm. esetén pl. Nap belseje - magfúzió

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dV = -\oint \rho\,\vec{v}\,d\vec{F} + \int q\,dV$$ ← q: forrássűrűség pl. tömegegység által a magból kilépő energia

↑ mérlegegyenlet (integrális mérlegegyenlet)

Gauss-tétel: $\oint \rho\,\vec{v}\,d\vec{F} = \int \mathrm{div}(\rho\vec{v})\,dV$

$$\Rightarrow \int \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dV = -\int \mathrm{div}(\rho\vec{v})\,dV$$

$$\int \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v})\right] dV = 0$$ ← akármilyen térfogatra vett integrálja 0! a dV tetszőleges volt ⇒ 0 kell

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0$$

tömegmegmegm. kontinuitási egyenlet lokális megmaradási egyenlet → az anyag folytonosan mozog

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dV = -\int \mathrm{div}(\rho\vec{v})\,dV + \int q\,dV$$

$$\int \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) - q\right] dV = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = q$$ ← lokális mérlegegyenlet pl. Joule-ból

divergencia = forrás
forrássűrűség!

$\mathrm{div} = 0$ ← akármilyen térfogatra az összfolyás 0
erre áramlásoknál jól működik
pl. vízmunkában elérhető és mágnesesség
a pontbölkek a mező szingularitási pontjai onnan indulnak

mágneses erővonalak: ∞-ből ∞-be vagy önmagába záródó

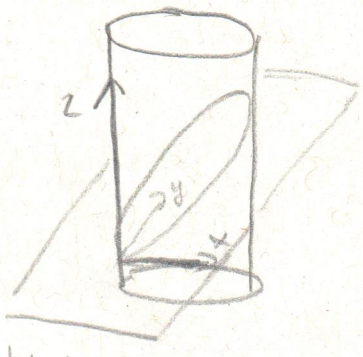
mágneses fluxus, $\oint \underline{B}\,d\underline{F} = 0 \Rightarrow \int \mathrm{div}\,\underline{B}\,dV = 0 \Rightarrow \mathrm{div}\,\underline{B} = 0$

2019.12.11.
ede

Stokes-tétel - gyakorlati pl.

(+) elvágunk egy hengert ferde síkkal
=> ellipszis $R = 5$ $M = 8$ cil. Stokes-tét

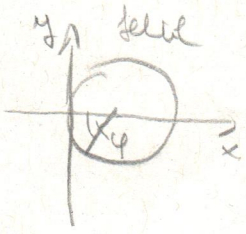
$$\underline{v}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 2xy + yz \\ x^2 - y^2 + zx \\ x^2 + y^2 + z^2 \end{pmatrix} \qquad I = \int_S \underline{v}\, d\underline{r}$$

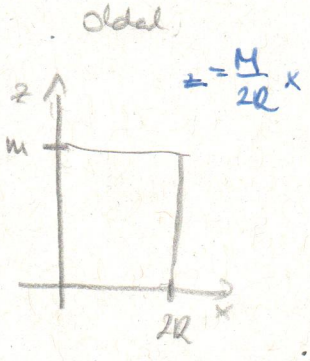


$$I = \int_S \underline{v}\, d\underline{r}$$

paraméter: $\varphi \quad \varphi \in [0, 2\pi[$

$$x = R - R\cos\varphi$$
$$y = -R\sin\varphi$$
$$z = \frac{M}{2R}(R - R\cos\varphi)$$





$$\Rightarrow \underline{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} R(1-\cos\varphi) \\ -R\sin\varphi \\ \frac{M}{2}(1-\cos\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5(1-\cos\varphi) \\ -5\sin\varphi \\ 4(1-\cos\varphi) \end{pmatrix}$$

Sima.: $d\underline{r} = \dot{\underline{r}}(t)\,dt \to \dot{\underline{r}}(\varphi)\,d\varphi$

$$I = \int \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} = \int \underline{v}(\underline{r}(\varphi))\, \dot{\underline{r}}(\varphi)\, d\varphi$$

$$\dot{\underline{r}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 5\sin\varphi \\ -5\cos\varphi \\ 4\sin\varphi \end{pmatrix}$$

behelyettesítés:

$$\underline{v}(\underline{r}(\varphi)) = \begin{pmatrix} 3\cdot 25\cdot(1-\cos\varphi)^2 - 2\cdot 25(1-\cos\varphi)\sin\varphi) - 20(1-\cos\varphi)\sin\varphi \\ 25(1-\cos\varphi)^2 - 25\sin^2\varphi + 20(1-\cos\varphi)^2 \\ 25(1-\cos\varphi)^2 + 25\sin^2\varphi + 16(1-\cos\varphi)^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 75(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) + 30\sin\varphi - 30\sin\varphi\cos\varphi \\ 45(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) - 25\sin^2\varphi \\ 41(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) + 25\sin^2\varphi \end{pmatrix} = \underline{v}(\varphi)$$

now.:

$$\underline{v}(\varphi)\,\dot{\underline{r}}(\varphi) = 375\sin\varphi - 750\sin\varphi\cos\varphi + 375\sin\varphi\cos^2\varphi + 150\sin^2\varphi - 150\sin^2\varphi\cos\varphi$$
$$- 225\cos\varphi + 450\cos^2\varphi - 225\cos^3\varphi + 125\sin^2\varphi\cos^2\varphi +$$
$$+ 164\sin\varphi - 328\sin\varphi\cos\varphi + 164\sin\varphi\cos^2\varphi + 100\sin^3\varphi = \underline{600\pi}$$

integráljuk tagonként

$$\int_0^{2\pi} \sin\varphi = \int_0^{2\pi} \cos\varphi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2\varphi)}{2}\, d\varphi = \pi$$

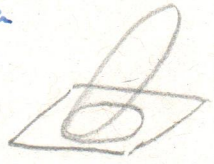
ell. Stokes-tel:

$$\underline{v}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 2xy + yz \\ x^2 - y^2 + zx \\ x^2 + y^2 + z^2 \end{pmatrix}$$

rot v:

$$(\nabla \times v)_x = \partial_y v_z - \partial_z v_y = 2z - 2y$$
$$(\nabla \times v)_y = \partial_z v_x - \partial_x v_z = y - 2x$$
$$(\nabla \times v)_z = \partial_x v_y - \partial_y v_x = 2x + z + 2x - z = 4x$$

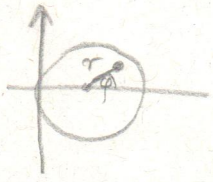
} ezt kell integrálni az ellipszis lapjára



paraméterezzük az ellipszist

paraméterezzünk körlapot, majd vetítsük fel az ellipszisre

$$x = R - r\cos\varphi = 5 - r\cos\varphi$$
$$y = -r\sin\varphi = -r\sin\varphi$$
$$z = \tfrac{4}{5}(5 - r\cos\varphi) \quad \text{vagy} \quad z = \tfrac{4}{20}x$$



$$\underline{r}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} 5 - r\cos\varphi \\ -r\sin\varphi \\ 4 - \tfrac{4}{5}r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

számoljuk: $d\underline{F} = \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi}\right) dr\, d\varphi$

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ -\frac{4}{5}\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} r\sin\varphi \\ -r\cos\varphi \\ \frac{4}{5}r\sin\varphi \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ \frac{4}{5}\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} = r\begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ -\frac{4}{5}\cos\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ \frac{4}{5}\sin\varphi \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ ← konstans irányú vektor, ⊥ a felületre

$$I_2 = \int (\mathrm{rot}\, v)\, d\underline{F} = \int (\mathrm{rot}\, v) \cdot \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi}\right) dr\, d\varphi$$

vagy a hengerfelületre

behelyettesítés:

$$\mathrm{rot}\, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2z - 2y \\ y - 2x \\ 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - \frac{8}{5}r\cos\varphi + 2r\sin\varphi \\ -r\sin\varphi - 10 + 2r\cos\varphi \\ 20 - 4r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

hengerfelszínre r, φ, z

szorzat:

$$\mathrm{rot}\, \underline{v} \cdot \frac{d\underline{F}}{dr\, d\varphi} = r\left(-\frac{32}{5} + \frac{32}{25}r\cos\varphi - \frac{8r}{5}\sin\varphi + 20 - 4r\cos\varphi\right) =$$

$$= r\left(\frac{68}{5} - \frac{68}{5}r\cos\varphi - \frac{8}{5}r\sin\varphi\right)$$

$$I_2 = \int (\ldots)\, dr\, d\varphi = \int_0^5 dr \int_0^{2\pi} d\varphi\, (\ldots) = 2\pi \int_0^5 \frac{68}{5} r\, dr = \frac{136}{5}\pi \int_0^5 r\, dr = \frac{136}{5} \cdot \frac{25}{2}\pi =$$

$$= \underline{340\pi}$$

a hengert egyenlete:

$$(x-5)^2 + y^2 = 25$$

paraméterezés:

$$\underline{r}(\varphi, z) = \begin{cases} x = 5 - 5\cos\varphi \\ y = -5\sin\varphi \\ z \end{cases}$$

minden zárt felületre / zárt görbére Stokes-tétel alkalmazni és paraméterezni

Fizikai alkalmazások

szubstanciális derivált

kétváltozós skalárfv

$T(x,y)$

$$T(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx T(x,y) + \frac{\partial T}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial T}{\partial y}\Delta y$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} \leftarrow \text{grad dot}$$

pl. tóban úszkálban, vízzel a víz, az időjárás függvényében kicsapatjuk a hőmérőt

$$T(t,\underline{r}) = T(t,x,y,z)$$

$$T(t+\Delta t, \underline{r}+\Delta\underline{r}) \approx T(t,\underline{r}) + \frac{\partial T}{\partial t}\Delta t + \underbrace{\frac{\partial T}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial T}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial T}{\partial z}\Delta z}_{\nabla T \cdot \Delta\underline{r}\ \text{grad}\,T\cdot\Delta\underline{r}}$$

$$T(t+\Delta t, \underline{r}+\Delta\underline{r}) \approx T(t,\underline{r}) + \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla T\cdot\Delta\underline{r}$$

de a 2 anyag (szubstancia) víz magával: $\Delta\underline{r} = \underline{v}\Delta t$

$$T(t+\Delta t, \underline{r}+\underline{v}\Delta t) - T(t,\underline{r}) = \frac{\partial T}{\partial t}\Delta t + \nabla T\,\underline{v}\Delta t = \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \underline{v}\nabla T\right)\Delta t$$

$$\frac{dT}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{T(t+\Delta t, \underline{r}+\underline{v}\Delta t) - T(t,\underline{r})}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{v}\nabla T = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{v}\nabla\right)T \quad \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{v}\nabla}$$

$\underline{v}(\underline{r},t) = \frac{\Delta\underline{r}}{\Delta t}$ adott pontban vett sebesség (mérhető)

vízszerű gyorsulás:

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial\underline{v}}{\partial t} + (\underline{v}\nabla)\underline{v} \leftarrow v\,\text{grad}\,v \Rightarrow \text{nemlineáris}$$

pl. hidrodinamika

fluxus

zárt felületen mágneses mező fluxusa

$$\oint \underline{B}(\underline{r})\,d\underline{F} = 0 \leftarrow \text{magnetosztatika alaptétele mindig igaz}$$

átalakítása a Gauss-tétel: megmaradási tétel

$$\oint \underline{B}(\underline{r})\,d\underline{F} \xrightarrow{\text{Gauss}} \int \text{div}\,\underline{B}\,dV$$

$$\boxed{\nabla\underline{B} = 0} \Leftrightarrow \boxed{\oint \underline{B}(\underline{r})\,d\underline{F} = 0}$$ 1. Maxwell-egyenlet