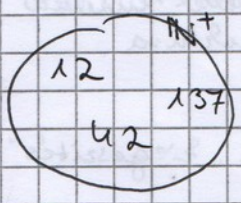
VEKTOR e.

09.09. 1. óra

KOMPLEX SZÁMOK

fizweb $\frac{hc}{e^2} = 137$

algebrai struktúra: halmaz, alaphalmaz, műveletek, algebrai műveletek, reláció, rendszer, vannak értelmezve



+
- $\forall a,b \in \mathbb{N}^+ : \exists c \in \mathbb{N}^+, \quad c = a+b$ — zárt művelet (művelet után „halmazban marad" az eredmény)
- $\forall a,b,c \in \mathbb{N}^+ \to (a+b)+c = a+(b+c)$ **asszociativitás**
- $\forall a,b \in \mathbb{N}^+ : a+b = b+a$ **kommutativitás**

[absztrakt algebrai struktúra: a szabályokat megegyezünk a kiválasztott halmazokon] (pl. összeadás a számokra és természetes számokra)

- **félcsoport** / semigroup: 2 szabály (zárt és asszociatív) pl. összeadás, halmazműveletek, vektorösszeadás
- **kommutatív félcsoport**: zárt, assz., komm.

09.10 ke - 2. óra

$\mathbb{N}^+$ halmaz a szorzással/összeadással kommutatív félcsoportot alkot $(\mathbb{N}^+, +)$ $(\mathbb{N}^+, \cdot)$ — kommutatív félcsoport

$(\mathbb{N}^+, +, \cdot)$ struktúra

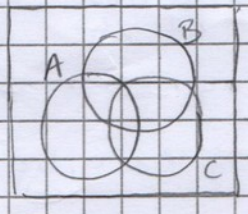
- $\forall a,b \in \mathbb{N}^+ : \exists d \in \mathbb{N}^+ \quad d = a \cdot b$ zárt
- $\forall a,b,c \in \mathbb{N}^+ : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ assz.
- $\forall a,b \in \mathbb{N}^+ : a \cdot b = b \cdot a$ komm.

$\exists 1 \in \mathbb{N}^+ \quad \forall a \in \mathbb{N}^+ \quad 1 \cdot a = a$

1: semleges / neutrális elem / egységelem

$\forall a,b,c \in \mathbb{N}^+ : (a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ **disztributivitás**

NEM! ↑ az összeadásra nézve a szorzás



két irányban disztributív:

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ $\quad A \cap B$ metszet

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $\quad A \cup B$ unió

a halmazt bővítjük, hogy jobban elemi műveletet, inverz is stb.

- $\mathbb{N}^+$ halmaz bővítése 0-val ⇒ $\mathbb{N}$ **nemnegatívak halmaza**
  $(\mathbb{N}^+, +)$ és $(\mathbb{N}, +)$; $(\mathbb{N}^+, \cdot)$ és $(\mathbb{N}, \cdot)$ szabályai megegyeznek
  + összeadásra **semleges elem**: 0 (egységelem)
  $\forall a \in \mathbb{N} \quad \exists 0 \in \mathbb{N} \quad 0 + a = a$
- **egységelemes félcsoportok**: $(\mathbb{N}^+, \cdot, 1)$ és $(\mathbb{N}, +, 0)$ $(\mathbb{N}, \cdot, 1)$ + {zárt, assz., komm., semleges, inverz} (kommutatív) egységes
- $\mathbb{N}$ halmaz bővítése → $\mathbb{Z}$ egész számok negatív számokkal
  eddigi szabályok ezen a halmazon is igazak { + {zárt, assz., komm., semleges} (kommutatív) egységes ; · {zárt, assz., komm., semleges} ; $(+, \cdot)$ disztribut.

$(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$

~~zárt~~, ~~assz.~~, ~~komm.~~, ~~semleges elem~~, ~~inverz elem~~

$+ \forall a \in \mathbb{Z} \quad \exists a' \in \mathbb{Z} : \quad a + a' = 0$ ellentett

$(\mathbb{Z}, +, 0)$ ← csoport – ha kommutatív → kommutatív csoport

~~kommut.~~ zárt, seml. elem, inverz, asszoc.

A 2 egész számok az összeadással és 0 semleges elemmel csoportot alkot

- **gyűrű** R: összeadás és szorzás (diszlztv. összti) ← két kétváltozós művelettel rendelkező struktúra (egészében)
  => $\mathbb{Z}$ halmaza gyűrűt alkot az összeadás és szorzás műveletekkel $\{(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ (egységelemes, kommut. gyűrű)

~~= $\mathbb{Z}$ bővítése~~

– negatív számok: nem alkot struktúrát, csak „kiegészítés"

- $\mathbb{Z}$ bővítése törtekkel ⇔ $\mathbb{Q}$ racionális számok (~ratio)
  kivéve a/0
  => szorzás inverze: reciprok

$(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$

$(\mathbb{Q}, +, 0)$ csoport
$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ csoport
} test K. (field)
=> diszlztv. összekapcsolja őket

test > gyűrű: a szorzás is invertálható

- $\mathbb{Q}$ bővítése $\sqrt{2}$-vel

$s = a + b\sqrt{2}$ $\quad a, b \in \mathbb{Q}$ $\quad \sqrt{2}$: $x \cdot x = 2$ mo.

$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = a \cdot c + (b\sqrt{2})c + a \cdot (d\sqrt{2}) + (b \cdot \sqrt{2})(d \cdot \sqrt{2}) =$

$= (b \cdot c)\sqrt{2} + (a \cdot c)\sqrt{2} + (b \cdot d)(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) =$

$= \underbrace{(a \cdot c) + (b \cdot c)\sqrt{2}}_{A \in \mathbb{Q}} + \underbrace{(b \cdot c + a \cdot d)\sqrt{2}}_{B \in \mathbb{Q}} = A + B \cdot \sqrt{2}$

$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$

$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{1}{a + b\sqrt{2}} \cdot \frac{a - b\sqrt{2}}{a - b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a \cdot a - (b\sqrt{2})(b\sqrt{2})} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} =$

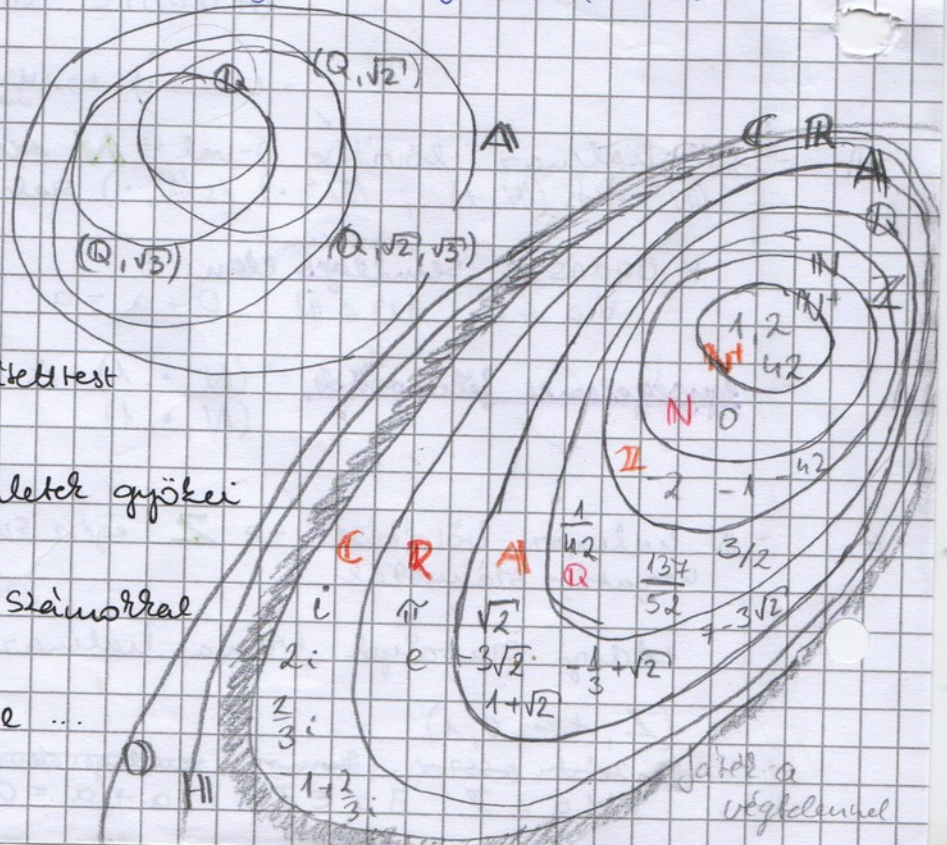
$= \frac{a}{a^2 - 2b^2} + \frac{-b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}$

$a^2 - 2b^2 = 0$ ← mucs mo.
$a^2 = 2b^2$
$\frac{a^2}{b^2} = 2$ ↯ ha $a, b \in \mathbb{Q}$

~~$\mathbb{Q}$ bővítése $\mathbb{R}$~~

$(\mathbb{Q}, \sqrt{2})$: testbővítés
$(\mathbb{Q}, \sqrt{3})$: — " —

$(\mathbb{Q}, \sqrt{2}, \sqrt{3})$
↑
$(\mathbb{Q}, \sqrt{2})$ és $(\mathbb{Q}, \sqrt{3})$ által kifeszített test



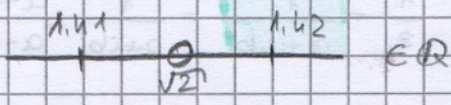
- A egész együtthatós egyenletek gyökei algebrai számok halmaza

- A bővítése transzcendens számokkal
  => $\mathbb{R}$ valós számok

transzcend. számok: π, e ...

- a számok sorbarendezhetőek
  $a<b$, $b<a$, $a=0$
  $\Rightarrow a+c<b+c$

$\Rightarrow$ számegyenes felépítése: $\mathbb{R}$



- bármely két rac. szám között van egy másik rac. szám
  rac. számok mindenütt sűrűn helyezkednek el a számegyenesen
- „lukak": pl. $\sqrt{2}$ — nem algebrai számfogalom-bővítés, mint az eddigiek
  valós számok feltöltik a számegyenest
- sz. egyenes: a valós számok teste
- $\mathbb{R}$-ben minden felülről korlátos részhalmaznak van felső határa

- $\mathbb{R}$ bővítése $\Rightarrow$ $\mathbb{C}$

  $x \cdot x = -3$ nincs $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow i\,i = -1$
  $\mathbb{C}$ körében végzett egyenletek megoldása $\in \mathbb{C}$

- H Hamilton-féle kvaternió
  szorzás kommut.ának elhagyása

- O Oktonió Cayley
  szorzás asszoc. elhagyása

09. 11. 3-4. óra

09. 11 sze - 3-4. óra

Komplex számok

- $i\,i = -1$ $\quad z = a + bi$ alakú $\quad z \in \mathbb{C}$

- $\mathbb{C}$ számok körében végzett egyenletek eredménye nem vezet ki $\mathbb{C}$-ből

$z = a + bi$ $\quad a = \mathrm{Re}\ z$ valós rész $\quad a, b \in \mathbb{R}$
$b = \mathrm{Im}\ z$ képzetes rész

- összeadás
  - $z_1 + z_2 = (a_1 + i b_1) + (a_2 + i b_2) = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{a_3 \in \mathbb{R}} + i \underbrace{(b_1 + b_2)}_{b_3 \in \mathbb{R}} = a_3 + i b_3 = z_3 \in \mathbb{C}$
  - $(5 - 3i) + (7 + 2i) = 12 - i$ $\quad i$ ~ paraméterként kezeljük
  - asszociat. és komm., mert visszavezethetők $\mathbb{R}$ számok összeadására

- szorzás
  - $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + i b_1)(a_2 + i b_2) = a_1 a_2 + (i b_1) a_2 + a_1 (i b_2) + (i b_1)(i b_2) =$
    $= a_1 a_2 + i(b_1 a_2) + i \cdot (a_1 b_2) + \underbrace{i \cdot i}_{-1} (b_1 b_2) =$
    $= \underbrace{(a_1 a_2 - b_1 b_2)}_{a_4 \in \mathbb{R}} + i \underbrace{(a_1 b_2 + a_2 b_1)}_{b_4 \in \mathbb{R}} = a_4 + i b_4 = z_4 \in \mathbb{C}$
  - $(5 - 3i) \cdot (7 + 2i) = 35 - 21i + 10i + (-3i)(2i) = 35 - 6i \underset{-1}{i^2} - 11i =$
    $= 41 - 11i$

$i^2 = -1$ $\quad 1/i = -i$ $\quad i \cdot (-i) = 1$ $\quad i^3 = -i$ $\quad i^4 = 1$

- osztás (reciprokkal szorzás)

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{1}{a+ib}\,\frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2-(ib)^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \underbrace{\frac{a}{a^2+b^2}}_{a'} + i\,\underbrace{\frac{-b}{a^2+b^2}}_{b'} = a' + ib'$$

(valós rész, képletes rész)

mindig értelmes, mert $a^2+b^2 \neq 0$ ← ha a^2 és $b^2 = 0 \Rightarrow z = 0+0i = 0$

- $\mathbb{C}$ { zárt, kommut., asszoc. ; semleges elem: $0+i0$ } testet alkotnak

(f) $\frac{5-3i}{7+2i} = \frac{5-3i}{7+2i}\,\frac{7-2i}{7-2i} = \frac{35-21i-10i-6}{49-(-4)} = \frac{29-31i}{53} = \frac{29}{53} + i\,\frac{-31}{53}$

(f) $x^3+10x^2+26x = 0$

$x(x^2+10x+26) = 0$

$x_1 = 0$

$x^2+10x+26 = 0$

$x_{2,3} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2-4\cdot 26}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-10 \pm 2i}{2} = -5 \pm i$

- **algebra alaptétele**

$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0 \quad \Rightarrow a_k \in \mathbb{C}$ ← $z_1, z_2, \dots$ így jönnek

$p(z)$ polinom $= (z-z_1)(a_n z^{n-1} \dots) \cdot (z-z_2)(a_n z^{n-2}) \dots =$

$= a_n (z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)$

Ötödfoktól ø megoldóképlet (Abel)

Normálalakú egyenlet gyöktényezős alakja:

$a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = 0$

n-ed fokú polinomnak n gyöke van

$(z-z_1)^5 (z-z_2)(z-z_3)^7 = z^{13} \dots$ ← gyökök multiplicitása

5-ös, 7-es multiplicitás

„hányszor szerepel a mo. zérushelyek közt, ha többször egy gyök megegyezik"

gyökök egybeesnek ↳ szimmetria ↳ véletlen ← perturbáció (kicsiny megváltoztatás)

fizikai feladatok: megpertubáljuk, majd a végén a pertubáció $\to 0$

„ha kicsi egy a testen → tömegű"

- komplex-számbeli kiterjesztések: $x \neq 0$ ha $\log_x a = b$ $x \neq 0$

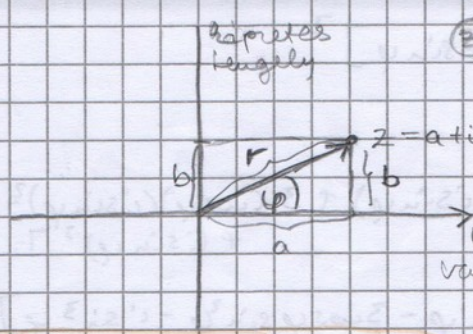
- **komplex konjugált z^***

- $\mathbb{C} \ni z = a+ib \to a-ib = z^* = \bar{z}$
- $\mathrm{Re}\, z^* = \mathrm{Re}\, z$ $\quad \mathrm{Im}\, z^* = -\mathrm{Im}\, z$
- $z z^* = a^2+b^2 = |z|^2 \in \mathbb{R}$
- $z + z^* = 2a \in \mathbb{R}$
- $z - z^* = 2ib \in \mathbb{C}$
- $i(z-z^*) = -2b \in \mathbb{R}$

} z és z^* $\mathbb{R}$ számot alkot

ha $\mathrm{Im}\, z = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = z^*$

ha $\mathrm{Re}\, z = 0 \Leftrightarrow$ tiszta képzetes $\Leftrightarrow z = -z^*$



(z) valós a komplex szám ← komplex szám

bicsúrú: sokszög-úrszám egyértelmű leképezés

$r^2 = a^2 + b^2$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = r \geq 0$

↑ abszolút - távolság az origótól

$|z| = z\,z^*$

algebrai alak:
$z = a + ib \Rightarrow$
$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
trigonometriai alak

$\cos\varphi = \frac{a}{r}$ $\quad \sin\varphi = \frac{b}{r}$

$a = r\cos\varphi$ $\quad b = r\sin\varphi$

$r = \sqrt{a^2+b^2}$

$\varphi = \operatorname{arctg} b/a$

szorzás trig. alakban:

$z_1 z_2 = [r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)]\,[r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)] =$

$= r_1 r_2 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$

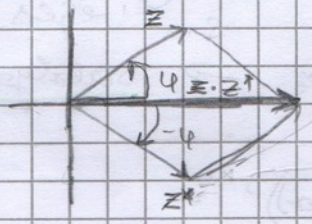
$= r_1 r_2 (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2) =$

$= r_1 r_2 [(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)] =$

$= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)] = R\cdot\cos\phi_1 + i\cdot\sin\phi_2$

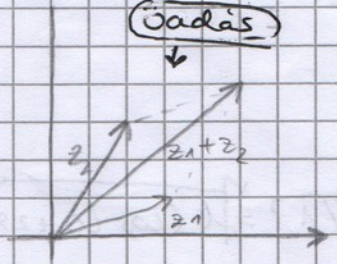
$R = r_1 \cdot r_2$
$\phi = \varphi_1 + \varphi_2$

$z_1 z_2 = R\cos\phi_1 + i\sin\phi_2$ ← $R = r_1 r_2$, $\phi = \varphi_1 + \varphi_2$

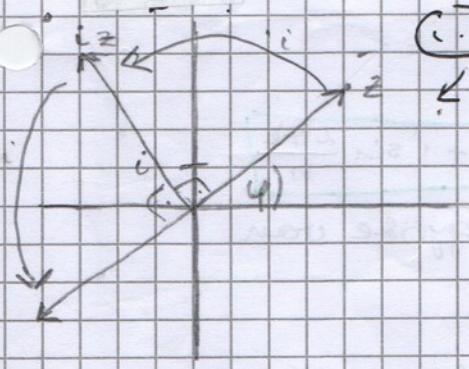


← $(z + z^*)$

összeadás



$i \cdot z = ?$



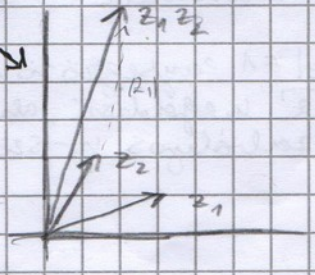
$(i \cdot z)$

$|i| = 1$

$|iz| = |z|$

i-vel szorzás: 90°-os forgatás CCW

$(z_1 \cdot z_2)$



$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) \quad n \in \mathbb{N}^+$

Moivre - képlet

$\cos(3\varphi) = \cos(2\varphi + \varphi)$

$\parallel$

$\mathrm{Re}(\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi)) = \mathrm{Re}[\cos\varphi + i\sin\varphi]^3$

sin: páratlan fv
$\sin(-x) = -\sin x$

cos: páros fv
$\cos(-x) = \cos x$

$\cos 3\varphi$: $\mathrm{Re}\left(\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi)\right) = \mathrm{Re}\left[\cos\varphi + \sin\varphi\right]^3$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$\mathrm{Re}\left[(\cos\varphi)^3 + 3(\cos\varphi)^2(i\sin\varphi) + 3(\cos\varphi)(i\sin\varphi)^2 + (i\sin\varphi)^3\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\left[\cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\left[\underbrace{(\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi)}_{\cos 3\varphi} + i\underbrace{(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi)}_{\sin 3\varphi}\right]$$

$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\underbrace{\sin^2\varphi}_{1-\cos^2\varphi} = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$

$\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$

$z = r\left[\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)\right] \quad k \in \mathbb{Z}$

$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = r^{1/n}\left[\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right] \Rightarrow$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right]$

$k \in \{0, 1, 2, \ldots n-1\}$

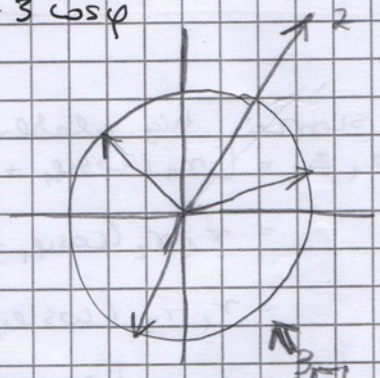


Fig 1

Fig 1: $\sqrt[3]{z}$: eredményei $\sqrt[3]{|z|}$ sugarú körön helyezkednek el $\frac{360°}{3} = 120°$ forgatással

⇓ véges sok (3) eredmény

$\sqrt[5]{z}$ ⇒ szabályos 5-szög → szabályos Δ-et írjunk rá

ü. n-szöget

$$\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{1\left(\cos(0 + 2k\pi) + i\sin(0 + 2k\pi)\right)} =$$

$$= \sqrt[n]{1}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

n-edik egységgyökök $\varepsilon_n^k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$

(egy komplex számnak n db n-edik gyöke van

~~tetszőleges~~ $|z| = 1$ egységkörön lévő számok

$\sqrt[n]{z}$ megoldásai, ahol $z = 1$

szabályos n-szöget írnak le

$r := 1 \qquad z = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad \varphi \in \mathbb{R}$

$\mathbb{C}_0$ $c^2\mathbb{C}$ körlemez

$f(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}_0$

$\varphi \mapsto \cos\varphi + i\sin\varphi$

$f(\alpha) f(\beta) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) =$
$= f(\alpha+\beta)$

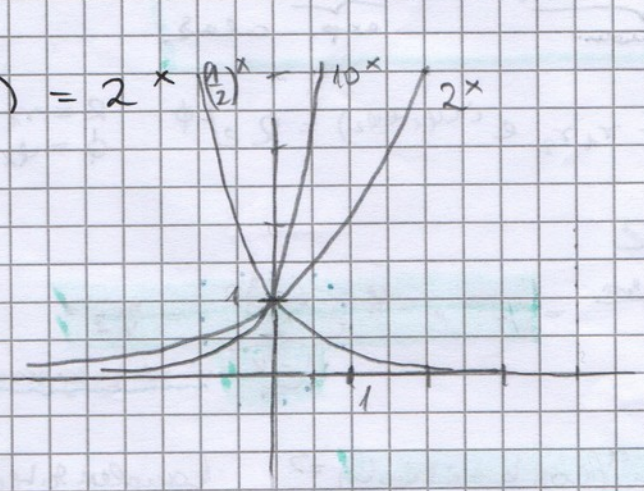
$\Rightarrow \boxed{f(\alpha) f(\beta) = f(\alpha+\beta)} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

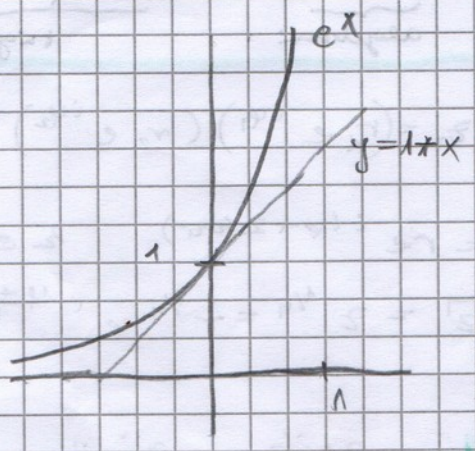
$\Updownarrow$

$a^x a^y = a^{x+y}$

$f(x) = a^x$ exp. fv. $\Rightarrow f(x) f(y) = f(x+y)$

$f(x) = 2^x$





$|x| << 1 \Rightarrow e^x \approx 1 + x$

exp. fv., melynek $x = 0$-ban az y tengellyel bezárt szöge 45°

$a^x = (e^c)^x = e^{cx} \approx 1 + cx \qquad \Rightarrow 10^x$ érintőjének meredeksége 0-ban $1 + \ln 10$?

$a = e^c$

$c = \log_e a = \ln a$ e alapú logaritmus

$f(\alpha) = e^{c\alpha} \quad \longleftrightarrow \quad f(\alpha) = \cos\alpha + i\sin\alpha$

$e^{c\alpha} e^{c\beta} = e^{c(\alpha+\beta)}$ $\Updownarrow$

ha $|\alpha| << 1 \qquad e^{c\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$

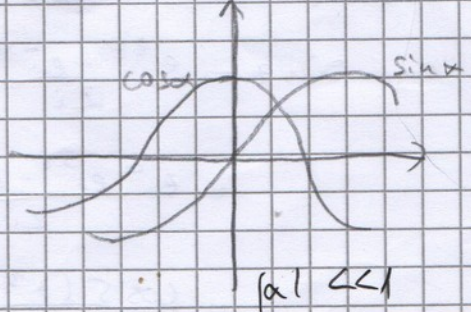
$\sim 1 + c\alpha = \cos 1 + i\alpha$

$c = i$

$\Downarrow$

$\boxed{\cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}}$

Euler-formula



$|\alpha| << 1$

$\cos\alpha \approx 1$

$\sin\alpha \approx \alpha$

Euler-formula

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$$

Speciális esetek

$\alpha = 2\pi$: $e^{i2\pi} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1 + i0 = 1 = e^{i1\pi}$

$\Rightarrow$ komplex terben az exp. fv. periodikus

$\alpha = \pi$: $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 \Rightarrow e^{i\pi} = -1$

$$z = \underbrace{a + ib}_{\text{algebrai}} = r\underbrace{(\cos\varphi + i\sin\varphi)}_{\text{trigonom.}} = \underbrace{re^{i\varphi}}_{\text{exp. alak}}$$

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{i\varphi_1})(r_2 e^{i\varphi_2}) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = Re^{i\Phi} \qquad R = r_1 r_2,\ \Phi = \varphi_1 + \varphi_2$$

$$z = re^{i(\varphi + 2k\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = r^{1/n} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi}{n}} \underbrace{e^{i\frac{2k\pi}{n}}}_{\varepsilon_n^k} = \sqrt[n]{z}$$

n-edik egységgyök

$$e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i\sin b) \Rightarrow \text{komplex szám}$$

$$e^z = (e^a\cos b) + i(e^a\sin b) \in \mathbb{C}$$

$e^{-x} = \cos x - i\sin x$ ✓

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \qquad \cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$$

$$e^{-i\alpha} = e^{i(-\alpha)} = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha) = \cos\alpha - i\sin\alpha = e^{-i\alpha}$$

kompatibilis

$$e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2} \qquad \operatorname{ch}\alpha = \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}$$

$$e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i} \qquad \operatorname{sh}\alpha = \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

$z = (5 - 3i)$ $\quad \sin z = ?$

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(5-3i)}-e^{-i(5-3i)}}{2i} = \frac{e^{3+5i}-e^{-3-5i}}{2i} =$$

$$= \frac{e^3 e^{5i} - e^{-3}e^{-5i}}{2i} = \frac{e^3(\cos 5 + i\sin 5) - e^{-3}(\cos 5 - i\sin 5)}{2i} =$$

$$= \frac{\cos 5\,(e^3 - e^{-3})}{2i} + \frac{i\sin 5\,(e^3 + e^{-3})}{2i} =$$

$$= \left(\sin 5\,\frac{e^3+e^{-3}}{2}\right) - i\left(\cos 5\,\frac{e^3-e^{-3}}{2}\right)$$

Logfv

$a = e^b \Rightarrow b = \ln a$

$\ln z$?

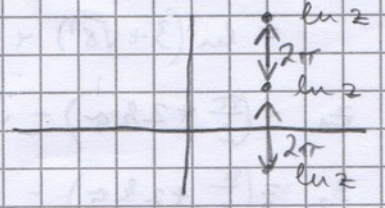
$$\left[\begin{array}{l} z = re^{i\varphi} \\ \ln z = \ln(re^{i\varphi}) = \ln r + \ln e^{i\varphi} = \underbrace{\ln r}_{\text{valós rész}} + \underbrace{i\varphi}_{\text{képzetes rész}} \end{array}\right]$$

$$z = re^{i(\varphi+2k\pi)}$$
$$\ln z = \ln\left(re^{i(\varphi+2k\pi)}\right) = \ln r + i(\varphi+2k\pi)$$

$\ln(1) = i\pi$

$\ln(i) = \frac{i\pi}{2}$

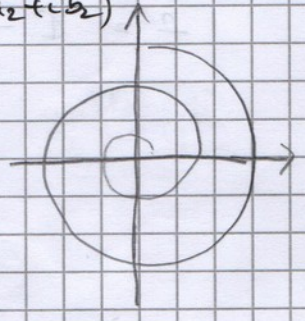
$\Rightarrow$ egy $\mathbb{C}$ számnak ∞ sok logaritmusa (ln) van $i(2k\pi)$ különbséggel



$$\ln(-100000) = \ln(100000\, e^{i(\pi+2k\pi)}) =$$
$$= \ln 100000 + i(\pi + 2k\pi) = 6 \cdot \ln 10 + i(\pi + 2k\pi)$$

$$z_1^{z_2} = \left[r_1 e^{i(\varphi_1+2k\pi)}\right]^{(a_2+ib_2)} = \left(e^{[\ln r_1 + i(\varphi+2k\pi)]}\right)^{(a_2+ib_2)}$$

$z_1^{z_2}$ logaritmizálás spirált ír már le a $\mathbb{R}^2$-ben



$(\ln z)^* = \ln(z^*)$

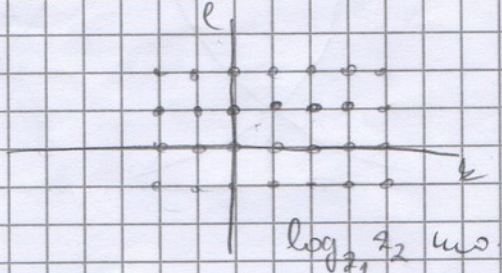
$\log_{z_1} z_2 = ?$

$$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a} = \frac{\ln b}{\ln a} = \log_a b$$

$$\log_{z_1} z_2 = \frac{\ln z_2}{\ln z_1} = \frac{\ln\left[r_2 e^{i(\varphi+2k\pi)}\right]}{\ln\left[r_1 e^{i(\varphi+2l\pi)}\right]} \qquad k, l \in \mathbb{Z}$$

$$= \frac{\ln r_2 + i(\varphi_2 + 2k\pi)}{\ln r_1 + i(\varphi_1 + 2l\pi)}$$

} "$2\times\infty$" számú mo.



$\sin x = 3$

$\sin z = 3$

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 3$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = 6i$$

$y := e^{iz}$

$\frac{1}{y} = e^{-iz}$

$$y - \frac{1}{y} = 6i$$
$$y^2 - 1 = 6iy$$
$$y^2 - 6iy - 1 = 0$$
$$y_{1,2} = \frac{6i \pm \sqrt{(6i)^2 + 4}}{2} = \frac{6i \pm \sqrt{-36+4}}{2} = \frac{6i \pm \sqrt{-32}}{2} =$$
$$= \frac{6i \pm \sqrt{4(-8)}}{2} = 3i \pm \sqrt{-8} = i(3 \pm \sqrt{8})$$

Viète-formulái

Viète-formulák: $y_{1,2} = i(3 \pm \sqrt{8})$

$i(3+\sqrt{8}) \cdot i(3-\sqrt{8}) = -(3+\sqrt{8})(3-\sqrt{8}) = -(3^2 - \sqrt{8}^2) = -1$ ✓ $\left[= \frac{c}{a}\right]$

$y_1 = i(3+\sqrt{8}) = e^{iz}$

$\ln[i(3+\sqrt{8})] = iz$

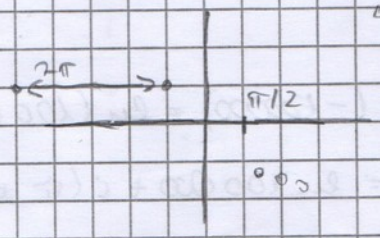
$iz = \ln[i(3+\sqrt{8})] = \ln(3+\sqrt{8}) + \ln i = \ln(3+\sqrt{8}) + \ln$

$= \ln(3+\sqrt{8}) + \ln\left[1 \cdot e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}\right] =$

$= \ln(3+\sqrt{8}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \Rightarrow$

$z_1 = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - i \ln(3+\sqrt{8})$

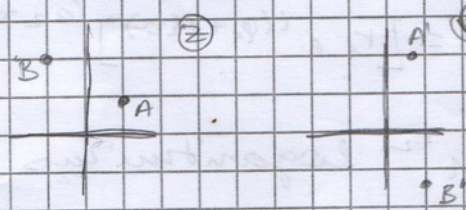
$z_2 = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - i \ln(3-\sqrt{8})$



Komplex függvények

$f = \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad w = f(z)$

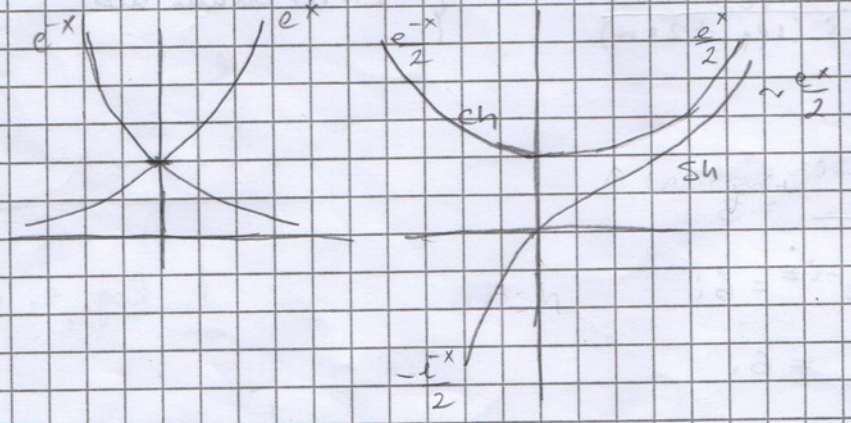
Kétdimenziós



$\cos ix \qquad x \in \mathbb{R} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$\cos ix = \frac{e^{i(ix)} + e^{-i(ix)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$ $\quad \cosh x$ — cosinus hiperbolicus

$\sin ix = \frac{e^{i(ix)} - e^{-i(ix)}}{2i} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2i} = i\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = i \operatorname{sh} x$ $\quad \sinh x$ — sinus hiperb.



$\operatorname{th} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$\operatorname{cth} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

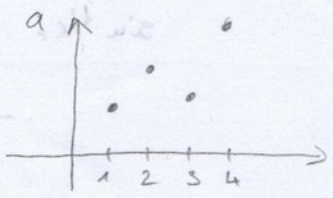
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

Diff. számítás

09.16. hét, 5. óra

- sorozatok: fvek $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (sorszám → érték)
  $a_1, a_2, a_3 \dots$



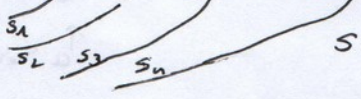
- monotonitás: (↙ nő, szigorúan nő)
  $n > m \Rightarrow a_n \geq a_m$ v.
  $n \gneq m \Rightarrow a_n \leq a_m$

- korlátosság → felülről / alulról
  ↳ ha mindkettő: korlátos
  (↙ legkisebb felső korlát, legnagyobb alsó)
  (egyéb.ként ∞ sok korlát!)

- konvergencia $a_n \xrightarrow[\infty]{n} A$ $\quad \lim_{n\to\infty} a_n = A$

  ha konvergens minden ε-hoz van N, ahonnan nem lép ki ebből a határból → határértéke van

- sor: végtelen összeg $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$



  ha $s \to S$ létezik a végtelen összeg

  S – eddigi számok összege

  $s_1, s_2, \dots s_n$ sorozatot alkot

  sornál nem érvényes az asszoc., komm., ...

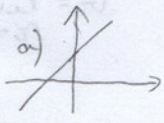
- fvek határértéke
  - folytonosság

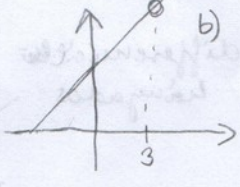
a) $x + 3$ $\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos

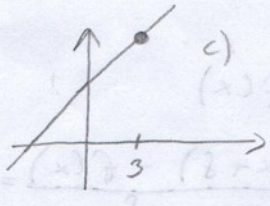
b) $\dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ $\quad D_f : \mathbb{R} \setminus \{3\}$

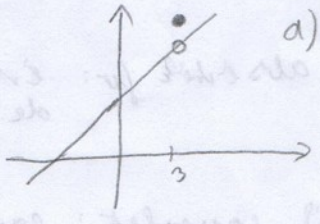
c) $\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & x \neq 3 \\ 6 & x = 3 \end{cases}$ $\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos

d) $\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & x \neq 3 \\ 7 & x = 3 \end{cases}$ $\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



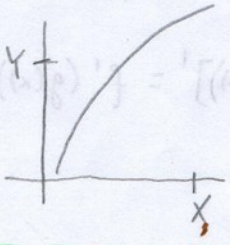






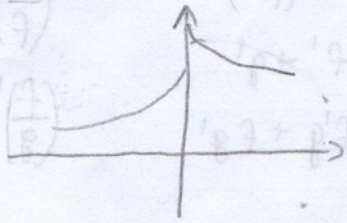
- nem ábrázolható fv:
  Dirichlet-fv $\quad D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

- sorozatok határértéke ⇒ fvek határértéke



$\lim_{x\to\infty} x_n = X$

(van határértéke és helyettesítési értéke = folytonos az adott pontban)



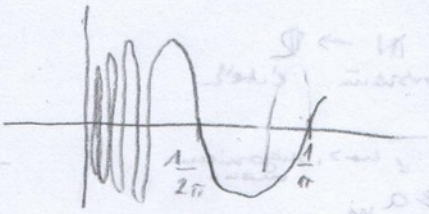
$\lim_{x \to X-0} = Y_1$

bal- és jobboldali határérték

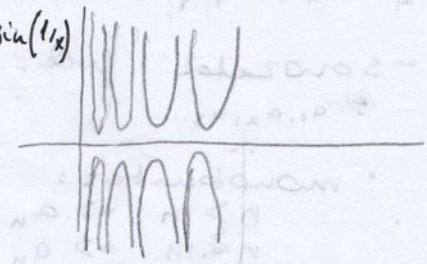
pl. sgn fv

nagy a határértéke, de nem ∞

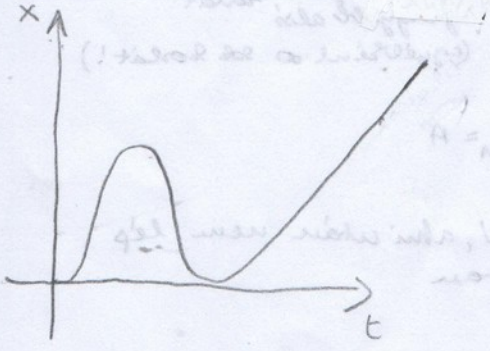
pl. $\frac{1}{\sin \frac{1}{x}}$ $\quad \sin 1/x$:

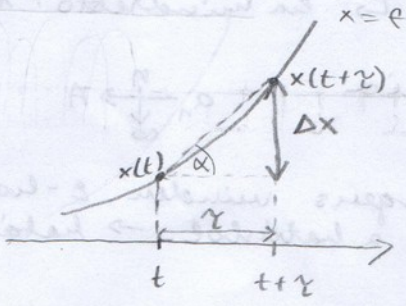


$1/\sin(1/x)$



Deriválás





$\Delta x = x(t+\tau) - x(t)$

$\Delta t = \tau$

$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} =$

$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\tau)-x(t)}{\tau} = \operatorname{tg} \alpha$

↑ a két pontot összötő húr meredeksége

minden pontban az oda húzott érintő meredeksége

‖

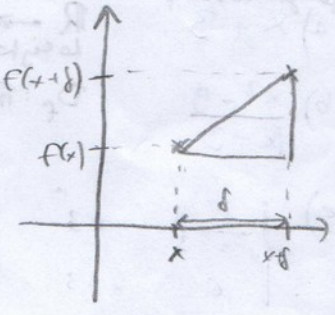
új fv : $v(t)$

$\tau = 0$-ban $\not\exists$ értéke, de határértéke igen a húr határértéke: érintő meredeksége

$$v = \lim_{\tau \to 0} \frac{x(t+\tau) - x(t)}{\tau}$$

$y = f(x)$

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} = f'(x)$$ differenciálhányados



abszolútérték fv: értelmezve van de 0-ban $\not\exists$ deriváltja

- diff. egyenlet: egy keresett fv-t és annak deriváltjait köti össze
  pl. $f'' = -f$ mindig ∞ sok mo. (ha van)

fizika: ált. diff. egyenletek, mert időben zajló folyamatok

diff. szabályok

$(\alpha f)' = \alpha (f')$

$(f+g)' = f' + g'$

$(fg)' = f'g + fg'$

$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$(f^{-1})' = 1/f'$

$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

nevezetes fvek deriváltjai

1) $f(x)=x^n \to f'(x)=n x^{n-1}$

$$f'(x)=\lim_{\delta\to 0}\frac{(x+\delta)^n-x^n}{\delta}=\lim_{\delta\to 0}\frac{\left[x^n+nx^{n-1}\delta+\binom{n}{2}x^{n-2}\delta^2+\dots\right]-x^n}{\delta}=$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\frac{nx^{n-1}\delta+\binom{n}{2}x^{n-2}\delta^2+\dots\delta^n}{\delta}=$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\left(nx^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-2}\delta+\dots\delta^{n-1}\right)=nx^{n-1}$$

2) $f(x)=\sin x \to f'(x)=\cos x$

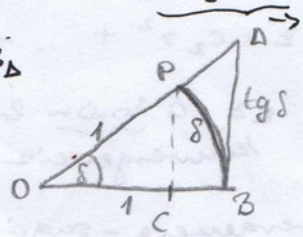
$$f'(x)=\lim_{\delta\to 0}\frac{\sin(x+\delta)-\sin x}{\delta}=\lim_{\delta\to 0}\frac{\sin x\cdot\cos\delta+\cos x\cdot\sin\delta-\sin x}{\delta}=$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\left[\sin x\left(\frac{\cos\delta-1}{\delta}\right)+\cos x\left(\frac{\sin\delta}{\delta}\right)\right]=\sin x\underbrace{\left(\lim_{\delta\to 0}\left[\frac{\cos\delta-1}{\delta}\right]\right)}_{\to 0}+\cos x\underbrace{\left(\lim_{\delta\to 0}\left[\frac{\sin\delta}{\delta}\right]\right)}_{\to 1}=$$

$$\dots=\cos x$$

$\operatorname{tg}\delta > \delta > \sin\delta$

$OAB_\Delta > OBP_\Delta > OPB_\Delta$



$\frac{\sin\delta}{\cos\delta} > \delta \Rightarrow \frac{\sin\delta}{\delta} > \cos\delta$

$\frac{1\cdot\operatorname{tg}\delta}{2} > \frac{\delta}{2} > \frac{\sin\delta\cdot 1}{2}$

$\frac{\sin\delta}{\delta} > \cos\delta$

$1 > \frac{\sin\delta}{\delta} > \cos\delta$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$1 \quad 1 \quad 1$ rendőr-elv

$(\sin^5 x)' = 5\sin^4 x\cdot\cos x$

3) $f(x)=e^x \to f'(x)=e^x$

érintő meredeksége 0-ban: $y=1+x$ egyenes meredeksége $f'(0)=1$

$$f'(x)=\lim_{\delta\to 0}\frac{e^{x+\delta}-e^x}{\delta}=\lim_{\delta\to 0}\frac{e^x e^\delta-e^x}{\delta}=\lim_{\delta\to 0}\frac{e^x(e^\delta-1)}{\delta}=$$

$$=e^x\left[\lim_{\delta\to 0}\frac{e^\delta-1}{\delta}\right]=e^x\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{e^\delta\cdot e^0-e^0}{\delta}\right)=e^x\underbrace{\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{e^{0+\delta}-e^0}{\delta}\right)}_{f'(0)=1}=e^x$$

- a deriválási szabályok $\mathbb{C}$-ben is érvényesek!
- $(e^{cx})'=c\,e^{cx}$

$$\boxed{f'=cf \quad \Leftarrow \quad f(x)=ke^{cx}}$$



09.17. kedd. 6. óra

- $\mathbb{C}$ sugarú környeret komplex síkban: $\mathbb{C}$ sugarú kör
- ha a fv egyszer differenciálható, ∞-szer is (mindegy, hogy milyen mintázatban)

függvénysorok

- $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$ $\quad x \in \mathbb{R}$ $\quad$ fr. sor $\quad$ sor = ∞ összeg
- konvergencia függ → fixtől
  ↳ hétköznapi
- trigonometrikus sorok: pl. Fourier-analízis
- hatványsorok:
  - a polinomok ∞-re vett kiterjesztése
  - $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots + c_n x^n + \dots$
  - $1 + q + q^2 + \dots q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad q \neq 1$
    ↑ véges összeg ⇒ ennek ∞-ben vett határértéke
    ha $|q| < 1$ $\quad q^{n+1} \to 0$
    konvergens $\quad \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \to \frac{1}{1-q}$
  - $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots \quad z \in \mathbb{C}$

    ha z a körön belül van, konvergens a hatványsor
    konvergencia-kör

    konvergencia-sugár ← ezen belül konvergens, kívül divergens a hatványsor
    ↳ 1, ha $c_0 = c_n = 1$
    ↳ 0, ha mindig divergens pl. $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$
    ↳ ∞, ha mindig konvergens pl. e^z
  - mindig konvergens: exp. fv ⇒ trigon. fvek
- exp. fv. hatványsora:

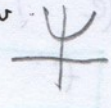
$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

- exp. fv. h. sora differenciálva:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$(e^x)' = 0 + 1 + \frac{2x}{2} + \frac{3x^2}{6} + \frac{4x^3}{24} + \dots = 1 + x + \frac{2x^2}{2} + \frac{x^3}{6} = e^x \quad \Rightarrow (e^x)' = e^x$$

- $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + \dots$
- $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + 0 + \frac{x^2}{2} + 0 + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$ ← ch x páros fv



$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 + x + 0 + \frac{x^3}{6} + 0 + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$ ← sh x páratlan fv



$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$ $\qquad (e^x)' = e^x$

$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$ $\qquad (e^{-x})' = -e^{-x}$

$e^{ix} = e^{ix} =$

$\otimes e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots$

$i^0 = 1 \quad i^1 = i \quad i^2 = -1 \quad i^3 = -i \quad i^4 = i \dots$



$e^{ix} = e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} + \dots \Rightarrow$

$e^{ix} = e^{ix} = \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots\right)}_{\cos x} + i\underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots\right)}_{\sin x}$

Euler-formula miatt

$\otimes \sin(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$

$(\sin(x))' = (\sin x)' = 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{6!} \dots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots = \cos x$

- algebra: algebrai struktúra
  - lehet egymással szorozni
  - számmal szorozni
  - összeadni

- exp. fv. hatványsora:
  $f' = f$ ha $f = c \cdot e^x$

  $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$

  $f'(x) = 0 + c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots$

  $\left.\begin{matrix} c_1 = c_0 \\ 2c_2 = c_1 \\ 3c_3 = c_2 \end{matrix}\right\} \; n c_n = c_{n-1} \Rightarrow c_n = \frac{c_0}{n!} \Rightarrow$ exp. fv. hatványsora

- $f'' = -f$ és $x = 0$-ban 1 a meredeksége
  $\Rightarrow$ sin fv

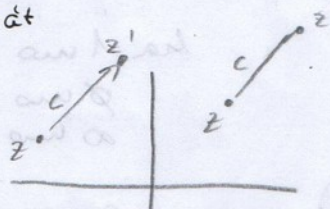
- geometriai transzformációk komplex számokkal

- fv: a sík egyik pontjához hozzárendel egy másik pontot $P \mapsto P'$

- egybevágósági tr.-ek: egybevágó alakzatba visznek át
  eltolás, forgatás, tükrözés

eltolás

$z' = z + c$ $\quad z$ – konstans cmplx szám, z' – futó cmplx szám



forgatás – origó körül:

$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

$\downarrow$

$z \cdot \varepsilon(\alpha)$ $\quad \varepsilon(\alpha)$ – egységvektor

egységnyi abszolútértékű cmplx szám: $e^{i\alpha}$

$\downarrow$

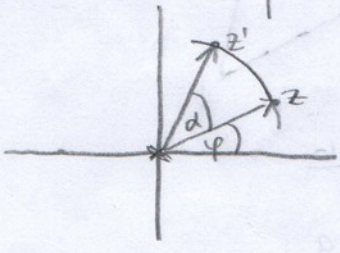
$(re^{i\varphi}) e^{i\alpha} = re^{i(\varphi+\alpha)}$

$\downarrow$

$(x + iy)(\cos\alpha + i\sin\alpha) = x' + iy'$

$(x\cos\alpha - y\sin\alpha) + i(x\sin\alpha + y\cos\alpha)$

$x' \qquad\qquad y'$



tükrözés

- valós tengely körül: forgatás
- ~~ha a tengely nem visszrides~~ forgatás - nem origó körül
  eltolás az origóba → elforgatás → visszatolás
  1) $z \mapsto z' = z - p$ origóba tolás
  2) $z' \mapsto z'' = z' e^{i\alpha}$ forgatás α-val
  3) $z'' \mapsto z''' = z'' + p = w$

$$w = z'' + p = z' e^{i\alpha} + p = (z - p) e^{i\alpha} + p$$

- ha a tengely nem visszrides, de átmegy az origón
  1) $z \mapsto z' = z e^{-i\alpha}$
  2) $z' \mapsto z'' = (z')^*$
  3) $z'' \mapsto z''' = z'' e^{i\alpha} = w$

$$w = z'' e^{i\alpha} = (z')^* e^{i\alpha} = (z e^{-i\alpha})^* e^{i\alpha} = (z^* e^{i\alpha}) e^{i\alpha} = z^* e^{2i\alpha}$$

- tükrözés, ha a tengely nem megy át az origón
  1) $z \mapsto z' = z - p$ eltolás
  2) $z' \mapsto z'' = z' e^{-i\alpha}$ forgatás
  3) $z'' \mapsto z''' = (z'')^*$ tükr.
  4) $z''' \mapsto z'''' = z''' e^{i\alpha}$ forg.
  5) $z'''' \mapsto w = z'''' + p$ elt.

  $w = \dots$

Összegzés: geometriai transzformációk

- $z = x + iy$

  elt.: $z' = x' + iy' = z + c = (x + iy) + (a + ib)$
  forg.: $z' = z e^{i\alpha} = (x + iy)(\cos\alpha + i \sin\alpha)$ — α-forgatás szöge ha az origó a $2p$
  tükr.: $z' = z^* = x - iy$ — ha a tengely a valós tengely

  } $x'+iy'$ alakú

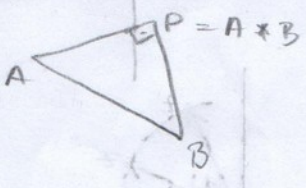
$$X = (\ )x + (\ )y + (\ )$$
$$Y = (\ )x + (\ )y + (\ )$$

ha $X = x$ és $Y = y$ ⇒ fixpont

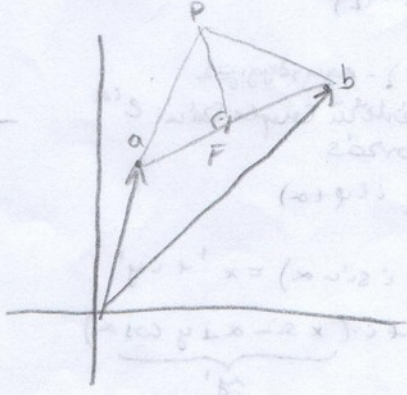
$$X = (\ )x + (\ )y + (\ ) = x$$
$$Y = (\ )x + (\ )y + (\ ) = y$$

ha 1 nő → forgatás
∅ nő → eltolás
∞ nő → tükrözés

(f)



biz. be: $(A * B) * (C * D) = (A * C) * (B * D)$



$f = \frac{a+b}{2}$

$\overrightarrow{AB} = b - a$

$\overrightarrow{FB} = \frac{b-a}{2}$

$\overrightarrow{FP} = i\frac{b-a}{2}$

$$P = \frac{a+b}{2} + i\frac{b-a}{2} = \frac{1-i}{2}a + \frac{1+i}{2}b$$

$$Q = \frac{1-i}{2}c + \frac{1+i}{2}d$$

$$X = P * Q = \frac{1-i}{2}p + \frac{1+i}{2}q =$$
$$= \frac{1-i}{2}\left(\frac{1-i}{2}a + \frac{1+i}{2}b\right) + \frac{1+i}{2}\left(\frac{1-i}{2}c + \frac{1+i}{2}d\right) =$$
$$= \left(\frac{1-i}{2}\right)^2 a + \frac{1-i}{2}\frac{1+i}{2}b + \frac{1+i}{2}\frac{1-i}{2}c + \left(\frac{1+i}{2}\right)^2 d$$

VEKTOROK

2019.09.18. sze 7-8. óra

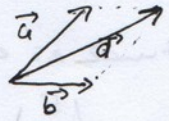
- matematikai vektort nem lehet eltolni
  fizikában nem a vektort, hanem az erőt lehet eltolni
  hatásával helyettesíti
  két ütk. rendszerben lévő vektort nem lehet összeadni

- axiál-/ pszeudovektor : „nem igazi" vektor
  nem vektor tulajdonsága ← tükrözésnél nem tükröződik

- vektor : nagyon sokmindenre használható
  .....

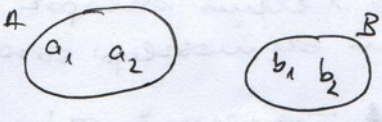
- geometriai vektor : ↗ $\vec{a}$
  irányított szakasz

- összeadás : • paralelogramma-szabály
  • műveleti tulajdonságok
  ↳ az összeadásra nézve zárt $\vec{a}+\vec{b}=\vec{d}$
  ↳ komm.: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
  ↳ asszoc. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
  ↳ semleges elem: nullvektor $\exists\,\vec{0}\quad \vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$
  ↳ inverz: ellentett vektor $\vec{a}+\vec{a}'=\vec{0}$



} kommut. csoport

- Descartes-szorzat:



(a_1, b_1) ← rendezett pár
$a_1 \in A \quad b_1 \in B$
$(a_1, b_1) \in A \times B$

$(\vec{a}, \vec{b}) \in V \times V$ $\quad +: V \times V \to V$
$\quad \cdot: \mathbb{R} \times V \to V \quad \$ \times V \to V$

$\$$ - skalárok halmaza (struktúrája)
skalárok - gyűrűt alkotnak

- skalárral szorzás
$\vec{u} = \alpha \vec{v} \qquad \alpha \in \mathbb{R} \quad \vec{v} \in V \quad \vec{u} \in V$

$\alpha(\beta \vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$ ← nem az asszoc., mert nem ua. a két művelet!
skalár - vektor és skalár - skalár szorzás

$(\alpha+\beta)\vec{v} = (\alpha\vec{v}) + (\beta\vec{v})$ ← disztrib.
$\alpha(\vec{v}+\vec{u}) = (\alpha\vec{v}) + (\alpha\vec{u})$ ← disztrib.

$V_\$$ - skalárok feletti vektor

- $(V_\$, +, \cdot)$
  ↳ $(V, +)$ kommut. csop. az összeadásra nézve
  ↳ $(V, \cdot)$: $\$ \times V \to V$ skalárral szorzás
  $\alpha, \vec{v} \mapsto \alpha\vec{v} - \vec{u} \in V$
  $\alpha(\beta\vec{v}) = \alpha\beta\vec{v}$
  $(\alpha+\beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$
  $\alpha(\vec{v}+\vec{a}) = a\vec{v} + \alpha\vec{u}$
  $1\,\vec{v} = \vec{v}$ egységelem

} **vektortér** (lineáris tér)
vektorhalmaz, ami ezekkel a műveleti szabályokkal rendelkezik
érdemes az elemek összeadása és számmal szorzása

- **fvek** $f \in \tilde{f}$

$f, g \in \tilde{f} \rightarrow f+g \in \tilde{f}$

$0+f=f$

$-f+f=0$

} a fvek az összeadásra nézve kommut. csoportot alkotnak + skalárral szorzás

$\Rightarrow$ a fvek vektorteret alkotnak DE csak bizonyos fvek

- **számoszlopok** $\mathbb{P}$

$$\begin{pmatrix}5\\3\\-8\\42\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}107\\0\\0\\-2\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}112\\3\\-8\\40\\7\end{pmatrix}$$

5 komponensű számoszlop

zárt.
asszoc.
kommut. } mert visszavezethető a számok összeadására
semleges elem: $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$
inverz:

= kommut. csoport

- számok és oszlopok szorzata

$$3\begin{pmatrix}5\\3\\-8\\42\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\9\\-24\\126\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ a számoszlopok vektorteret alkotnak

- ezek általános komponensű oszlopokra igaz-ak
  számok: 1 elemű oszlopok
  ∞ elemű számoszlop: sorozat

- **számsorozatok**: ∞ elemű számoszlopok

$\underline{a} = 5, 3, 6, 8, \dots$

$\underline{b} = -2, 1, 0, 4, \dots$

- összeadás: $\underline{a}+\underline{b}=\underline{c}=3, 4, 6, 12, \dots$ ✓
- $7\cdot\underline{a}=35, 21, 42, 56, \dots$ ✓

} számsorozatok: vektorteret alkotnak

- absztrakt vektorok - nem értelmezhetőek általában

- **lineáris kombináció**

$\alpha\vec{v}+\beta\vec{u} \in V$ $\quad \vec{u}, \vec{v} \in V$ $\alpha, \beta \in \mathbb{S}$

$\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\dots+\alpha_n\vec{v}_n=\vec{w} \in V$

$\mathbb{B}$: vektorok lineáris burka

$\vec{w}=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\dots+\alpha_n\vec{v}_n \in \mathbb{B} \subset V$

$\vec{z}=\beta_1\vec{v}_1+\beta_2\vec{v}_2+\dots+\beta_n\vec{v}_n \in \mathbb{B} \subset V$

$\vec{w}+\vec{z}=\underbrace{(\alpha_1+\beta_1)}_{\gamma_1^*}\vec{v}_1+\underbrace{(\alpha_2+\beta_2)}_{\gamma_2}\vec{v}_2+\dots+\underbrace{(\alpha_n+\beta_n)}_{\gamma_n}\vec{v}_n \in \mathbb{B}$

a vektorok lineárkombinációja benne van a vektorok által rejtett síkban

vektorok lineáris burka: a vektorok által lineáris kombinációval képezhető összes vektor által generált vektortér
(a legszűkebb lineáris altér)

$\vec{t}=\delta\vec{w}=(\delta\alpha_1)v_1+(\delta\alpha_2)v_2+\dots \in \mathbb{B}$

benne van a vektorok lineáris burkában:
- vektorok lineárkombinációi
- vektorok skalárral szorzása
- nullvektor
- ellentett vektor
- ...

(lineáris alterek metszete is lineáris alteret alkot)

(üres halmaz: metszetük csak a $\vec{0}$, de együtt képeznek alteret)

$\Rightarrow$ vektorteret alkot a burok

a vektortér egy altere a lineáris burok
$\mathbb{B} < \mathbb{V}$ de valójában sokkal többet alkot

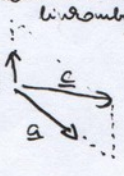
bi2. vektorok lineáris burka lehet az egész tér is
pl. 3 nem egysíkban levő vektor

- triviális vektortér: $\vec{0}$. önmagában is vektorteret alkot ← triviális vektortér
  - minden vektortér részhalmaza
  - önmagában egy altér ↖ valódi lineáris altér: ha tényleg szűkebb és nem $\{\vec{0}\}$

$\Rightarrow$ egy vektortérnek legalább két altere van: $\vec{0}$ és önmaga } "hasonló az origóhoz"

- teljes vektorteret ← az egész teret kifeszítik
  - meghatároz 3 nem egy síkban levő vektor.
  - vektortér dimenziója: minimális száma a meghatározó vektoroknak

- lineárisan független/összefüggő vektorok:
  - ha a vektorok lineáris kombinációjából előállítható a $\vec{0}$ arról is, ha az együtthatók $\neq 0$ (arról az egyik vektor előállítható a többi lineárkombinációjából)
  - pl. • $\vec{c} = \frac{3}{2}\vec{a} + 2\vec{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$



  - $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

  - lineárisan független vektorok maximális száma = a tér dimenziója

pl. $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\underline{v}_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\underline{v}_5 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \alpha_3\underline{v}_3 + \alpha_4\underline{v}_4 + \alpha_5\underline{v}_5 = \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\\\alpha_5\end{pmatrix}$ csak ha $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_5$ ↙ → lineárisan független

6. vektor már függő:

$\underline{v}_0 = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\u\\w\end{pmatrix}$ $\alpha_0\underline{v}_0 + \alpha_1\underline{v}_1 \ldots \alpha_5\underline{v}_5 = \begin{pmatrix}x+\alpha_1\\y+\alpha_2\\z+\alpha_3\\u+\alpha_4\\w+\alpha_5\end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\alpha_1 = -x \quad \alpha_2 = -y \quad \alpha_3 = -z \quad \alpha_4 = -u \quad \alpha_5 = -w$

$\Rightarrow$ 6 $1\underline{v}_0 - x\underline{v}_1 - y\underline{v}_2 - z\underline{v}_3 - u\underline{v}_4 - w\underline{v}_5 = \underline{0}$

nem feltételeznek 0 $\Rightarrow$ lineárisan függő

- **bázisvektor**: annyi db lineárisan független vektor, ahány dimenziós a tér

$V_n \ni \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots \underline{v}_n$ ← bázist alkotnak ∞ sok bázis van egy vektortérben

$\underline{z} \quad \exists \beta_1 \dots \beta_n \qquad \beta$ - **kifejtési együtthatók**

$\underline{z} = \beta_1 \underline{v}_1 + \beta_2 \underline{v}_2 + \beta_3 \underline{v}_3 + \dots + \beta_n \underline{v}_n$

adott bázison minden vektor egyértelműen jellemezhető

$\{ \underline{z}, \underline{v}_1, \dots \underline{v}_n \}$ ← $n+1$ db elem

$\alpha_0 \underline{z} + \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$

$\underline{z} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} \underline{v}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_0} \underline{v}_2 \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_0} \underline{v}_n \dots$

↙ a bázis szerint is lehet fejteni bármely vektort

$\alpha_0 \neq 0$, mert $v_1 \dots v_n$ bázist alkotnak ⇒ lineárisan független

- természetes bázis: ∅ a vektortérben!
  számoszlopban: 1-0 ld. előző oldal (1 db 1-es, a többi 0)

- ∞ dimenziós lineáris tér:

pl.

a_1	a_2	a_3	...	a_n
1	0	0		0
0	1	0		0
0	0	1		0

- bázisfelbontás

$\underline{z} = \beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_n \underline{v}_n$ ← $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ számoszlop és z kölcsönösen egyértelmű

$z \to \beta \to z$

↑ absztrakt vektortérelem (aláhúzással jelölt)

↑ izomorfizmus.

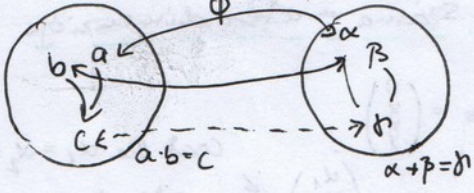
tfh. $\underline{z} = \gamma_1 \underline{v}_1 + \dots + \gamma_n \underline{v}_n$

$(\gamma_1 - \beta_1) \underline{v}_1 + (\gamma_2 - \beta_2) \underline{v}_2 + \dots + (\gamma_n - \beta_n) \underline{v}_n = \underline{0}$

csak ha $\gamma_n = \beta_n$

- izomorf csoportok.

$(\mathbb{R}_+, \cdot)$ és $(\mathbb{R}, +)$ – kommut. csoportok



α: ϕ-vel vett képe a-nak

$\alpha = \phi(a)$

$\beta = \phi(b)$

$\gamma = \alpha + \beta = \phi(a) + \phi(b) = \phi(c) = \phi(ab)$

$\phi(ab) = \phi(a) + \phi(b)$

↑ általánosság: tetszőleges logaritmus tétele

$\phi(a) = \lg a \qquad \lg(ab) = \lg(a) + \lg(b)$

izomorf csoportok

az absztrakt struktúrát reprezentáljuk egy vele izomorf másik struktúrával

- vektoralgebra: lineáris terek tudománya

Bázisok

2019.09.23.
hét 9. óa

- vektortér $V \ni \vec{v}$ $\dim V = n \in \mathbb{N}$ véges dimenziós

$\vec{a}^{(k)}$ $k \in \{1, 2, \dots n\}$ ← a k.-adik dimenzió bázisa

$\forall \vec{v} \in V \quad \exists \alpha_n \in \mathbb{S} \quad \vec{v} = \alpha_1 \vec{a}^{(1)} + \alpha_2 \vec{a}^{(2)} + \dots + \alpha_n \vec{a}^{(n)} =$

$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{a}^{(k)}$ ← a vektor egyértelműen kifejthető a bázisvektorok lineáris kombinációjaként

- mátrixban:

$\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}$ $\begin{matrix} \} s_1 \\ \} s_2 \\ \} s_3 \end{matrix}$ ← 1. index: sor, 2. index: oszlop; s_i sor összege; c_i oszlopok összege

$s_1 = \sum_{l}^{4} \alpha_{1l}$

$s_2 = \sum_{l}^{4} \alpha_{2l}$

$s_3 = \sum_{l}^{4} \alpha_{3l}$

$\vdots$

$s_k = \sum_{l}^{4} \alpha_{kl} \quad k \in \{1 \dots 3\}$

$c_1 = \sum_{k}^{3} \alpha_{k1}$

$c_2 = \sum_{k}^{3} \alpha_{k2}$

$\vdots$

$c_l = \sum_{k}^{3} \alpha_{kl} \quad l \in \{1,2 \dots 4\}$

← k: „futóindex" futtatja az összeadást ↔ összegző index

$\sum_k s_k = \sum_l c_l = \sum_k \left(\sum_l \alpha_{kl}\right) = \sum_l \left(\sum_k \alpha_{kl}\right)$

a summákat „fel lehet cserélni" az összeadás asszoc.-sa miatt (∞ összegre nem feltétlenül igaz)

- **reprezentáció**

$\vec{v} = \sum_k v_k \vec{a}^{(k)} \quad v_k \in \mathbb{S}$ v_k - a vektor adott bázison vett koordinátái

$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ ← a vektort reprezentáltuk a számoszlopokkal (egy adott bázison)

összeadás:

- $V \ni \vec{v}, \vec{u} \qquad \vec{w} = \vec{v} + \vec{u}$

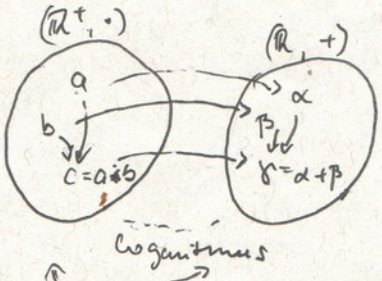
$\vec{w} = \vec{v} + \vec{u} = \sum_k v_k \vec{a}^{(k)} + \sum_k u_k \vec{a}^{(k)} =$ ← 2 n db tagú összeg

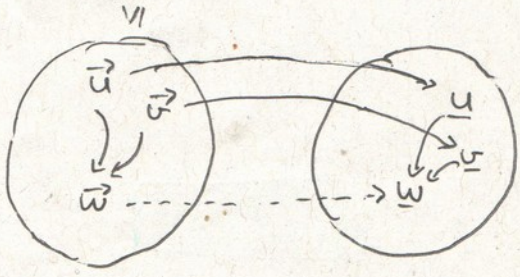
$\sum_k w_k \vec{a}^{(k)} = \sum_k (v_k + u_k) \vec{a}^{(k)}$

$w_k = v_k + u_k$ ← a számoszlopok összeadási szabálya

$\underline{w} = \underline{v} + \underline{u}$ ⇐

a vektort számoszlopokban reprezentáltuk → a műveleteket is reprezentáltuk
⇒ az egész struktúrát megfeleltettük egymásnak





izomorf: oda-vissza feloldható a reprezentáció kölcsönösen egyértelmű ; a diagram kommutat. ; a reprezentáció feloldható

homomorf: kapcsolat csak egyik irány

az absztrakt vektorok és számoszlopok izomorfak

Számmal szorzás:

- $\vec{u} \in V$ $\beta \in S$

$$z = \beta\vec{u} = \beta\left(\sum_k u_k \vec{a}^{(k)}\right) = \sum_k \left(\beta u_k \vec{a}^{(k)}\right) = \sum_k (\beta u_k)\vec{a}^{(k)} = \sum_k z_k \vec{a}^{(k)} =$$

$$z_k = \beta u_k \quad = \sum_k z_k \vec{a}^{(k)} \quad \Rightarrow \underline{z} = \beta \underline{u}$$ leképezés számoszlopokra

- **Descartes-szorzat**

$(a,b) \in A \times B \quad a \in A \quad b \in B$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (a,b) \quad a \in \mathbb{R} \quad b \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (a,b,c) \quad a,b,c \in \mathbb{R}$

$(v_1, v_2, \dots v_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow V \leftrightarrow \mathbb{R}^n$ a vektorok leírhatóak n db számkomponenssel
izomorfizmus - kölcsönösen egyértelmű leképezés

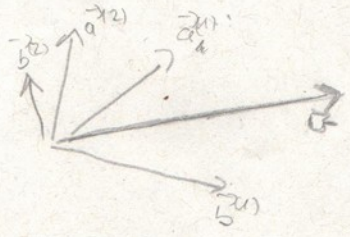
bázistranszformáció

- bázis megváltoztatása - átszámítás:

V $\dim V = n$

$\{\vec{a}^{(k)}\}_{k=1}^{n}$ bázis

$\{\vec{b}^{(k)}\}_{k=1}^{n}$ másik bázis



- pl. $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{a}^{(1)} + 2\vec{a}^{(2)}$ parallelogramma

$$\vec{v} = \sum_k v_k \vec{a}^{(k)} = \sum_\ell v'_\ell \vec{b}^{(\ell)}$$

v_k adott $\rightarrow v'_\ell$ megkeresése
= bázistranszformáció

- átváltás: $\vec{b}^{(\ell)} = \sum_k S_{k\ell} \vec{a}^{(k)} \Rightarrow$ a b-k felírhatóak az a-k lineáris kombinációjaként

$$\vec{b}^{(1)} = S_{11}\vec{a}^{(1)} + S_{21}\vec{a}^{(2)} + \dots + S_{n1}\vec{a}^{(n)}$$
$$\vec{b}^{(2)} = S_{12}\vec{a}^{(1)} + S_{22}\vec{a}^{(2)} + \dots + S_{n2}\vec{a}^{(n)}$$
$$\vec{b}^{(n)} = S_{1n}\vec{a}^{(1)} + S_{2n}\vec{a}^{(2)} + \dots + S_{nn}\vec{a}^{(n)}$$

$$\vec{b}^{(\ell)} = \sum_k S_{k\ell}\vec{a}^{(k)}$$
n db képlet

$$\vec{v} = \sum_k v_k \vec{a}^{(k)} = \sum_\ell v'_\ell \vec{b}^{(\ell)} = \sum_\ell v'_\ell \left(\sum_k S_{k\ell}\vec{a}^{(k)}\right) =$$

$$= \sum_\ell \sum_k v'_\ell S_{k\ell} \vec{a}^{(k)} = \sum_k \left(\sum_\ell S_{k\ell} v'_\ell\right)\vec{a}^{(k)}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_k = \sum_\ell S_{k\ell} v'_\ell}$$

v_k - $\vec{a}^{(k)}$ bázison
v'_ℓ - $\vec{b}^{(\ell)}$ bázison
$S_{k\ell}$: b → a bázis

S táblázat:

	b_1	b_2	b_3
a_1	S_{11}	S_{12}	S_{13}
a_2	S_{21}	S_{22}	S_{23}
a_3	S_{31}	S_{32}	S_{33}

k: sor száma
l: oszlop száma

- vissza: $\vec{a}^{(1)} = R_{11}\vec{b}^{(1)} + R_{21}\vec{b}^{(2)} + \dots + R_{n1}\vec{b}^{(n)}$

$$\vec{a}^{(2)} = R_{12}\vec{b}^{(1)} + R_{22}\vec{b}^{(2)} + \dots + R_{n2}\vec{b}^{(n)}$$
$$\vec{a}^{(k)} = \sum_\ell R_{\ell k}\vec{b}^{(\ell)}$$

$$\vec{v} = \sum_k v_k \vec{a}^{(k)} = \sum_k v_k \left(\sum_\ell R_{\ell k}\vec{b}^{(\ell)}\right) = \sum_k \sum_\ell v_k R_{\ell k}\vec{b}^{(\ell)} = \sum_\ell \left(\sum_k R_{\ell k} v_k\right)\vec{b}^{(\ell)}$$

$$\Rightarrow \boxed{v'_\ell = \sum_k R_{\ell k} v_k}$$

$S_{k\ell}$ és $R_{k\ell}$ táblázatok: mátrixok

MÁTRIXOK

2019. 09. 24.
kedd, 10. óra

- megyünk a piacra árucik

→ áruk

3 kg	2 l	1 csom	1 ü	1 zsák	1 db
1 kg	1 l	0 cs	0 ü	1 z	2 db
0 kg	0 l	0 cs	0 ü	1 z	5 db

↓ napok

árnövekvő →

180 Ft/kg	1 €/cs
200 Ft/l	1 €/l
300 Ft/cs	0 €/cs
180 Ft/ü	1 €/ü
250 Ft/z	0 €/z
300 Ft/db	2 €/db

↓ árnövekvő

árnövekvő →

1970 Ft	10 €
1230 Ft	6 €
1750 Ft	10 €

↓ napok

= mátrixok szorzása

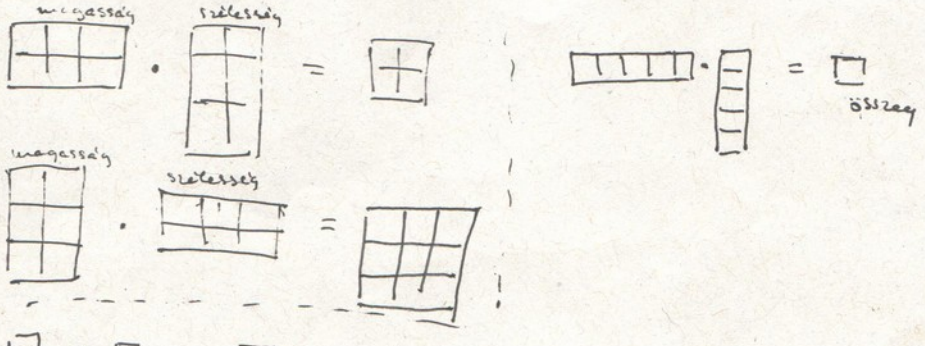
$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}$ $\quad \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}$ eredmény: $\underline{\underline{A}}$ magas, $\underline{\underline{B}}$ széles

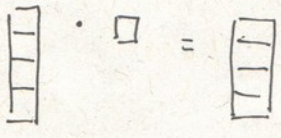
- mátrixok jelölése
  - $\underline{\underline{A}}$ – A táblázat
  - cellák: a mátrix elemei
    jelölés: pl. A_{25} $A_{25,37}$ index: sor, oszlop
    $A(25, 37)$
    függvény!

- műveletek
  A_{km} $k \in \{1,2,3,4\}$ v. {hétfő, kedd, szerda, csütörtök} (nem feltétlenül számok)
  - $C_{32} = A_{31} \cdot B_{12} + A_{32} B_{22} + \ldots = \sum_{m=1}^{7} A_{3m} B_{m2}$

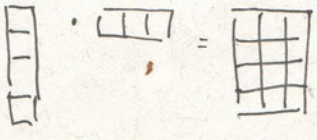
$$C_{ks} = \sum_{m} A_{km} B_{ms}$$

- Két mátrix kompatibilis, a szorzás feltétele ↖ egymáshoz tartozó elemek száma megegyezik ↙ (1. oszlopainak száma = 2. sorainak száma)
- a szorzás nem kommutatív!



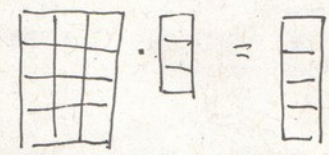


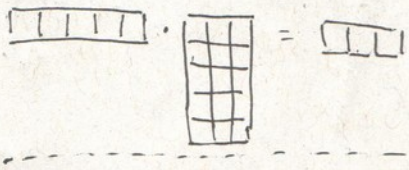
□ · □ = □ számok szorzása – 1×1-es mátrixok szorzása



- 1 oszlopos mátrix: oszlopvektor } kisbetűs jelölés
  1 soros mátrix: sorvektor }

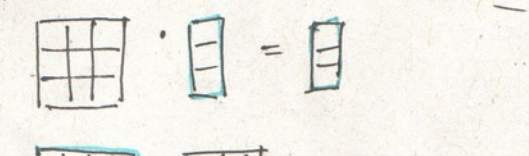
- Számoszlop: speciális mátrix
  négyzetes / kvadratikus mátrix:
  ua. annyi sor mint oszlop





- $\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = c\,\underline{v}$

  Sajátérték - probléma



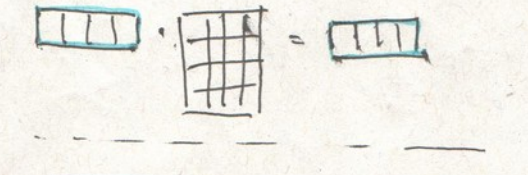
- mátrixelemek kiszámolása

$$C_{rs} = \sum_m A_{rm} B_{ms}$$

r - hiteltőindex
s - hiteltőindex
m - összegzőindex

- mátrixok szorzata

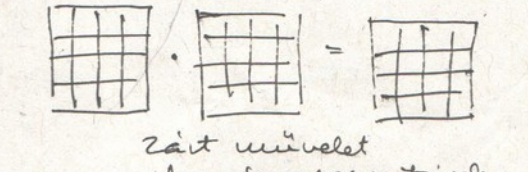
$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$$



- bázistr. - mátrixokkal

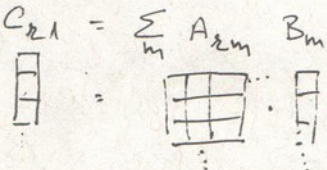
$$v_r = \sum_l R_{rl} v_l$$

$$\vec{v} = \sum_k v_k \vec{a}^{(k)} = \sum_l v_l' \vec{b}^{(l)}$$



Zárt művelet
ha négyzetes mátrixok

$$C_{r1} = \sum_m A_{rm} B_{m1}$$



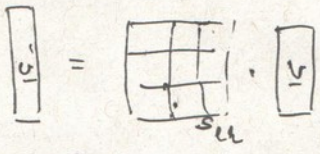
$$C_r = \sum_m A_{rm} B_m$$

← elhagyjuk az 1-es indexeket sor/oszlopvektorok esetén

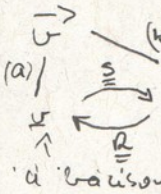
$$c_r = \sum_m A_{rm} b_m$$

← kisbetű, mint oszlopvektor

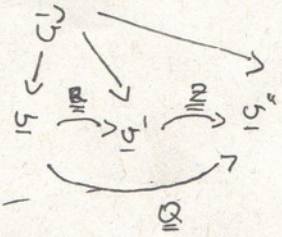
↘ bázistranszformáció:



$$v_l = \sum_r S_{lr} v_r'$$



a bázison $\underline{v}$-vel reprezentáljuk



$$\underline{v}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{v} \qquad \underline{v}'' = \underline{\underline{Z}}\,\underline{v}'$$

$$v_m' = \sum_l R_{ml} v_l \qquad v_r'' = \sum_m Z_{rm} v_m'$$

$$v_r'' = \sum_m Z_{rm} v_m' =$$

$$= \sum_m Z_{rm} \left(\sum_l R_{ml} v_l \right) =$$

$$= \sum_m \sum_l Z_{rm} R_{ml} v_l =$$

$$= \sum_l \left(\sum_m Z_{rm} R_{ml} \right) v_l$$

$(\underline{\underline{Z}}\,\underline{\underline{R}})_{rl}$

két koordinátatransz. egymás után
→ mátrixok szorzata

$$\underline{\underline{Z}}\,\underline{\underline{R}} := \underline{\underline{Q}}$$

$$v_r'' = \sum_l Q_{rl} v_l$$

$$v'' = \underline{\underline{Z}}\,\underline{v}' = \underline{\underline{Z}}\,(\underline{\underline{R}}\,\underline{v}) = (\underline{\underline{Z}}\,\underline{\underline{R}})\,\underline{v} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{v}$$

⇒ a mátrixszorzás assoc.

de nem invertálhatók mindig

Skaláris szorzat

2019. 09. 25.
sze 11-12. óra

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \, |\vec{b}| \cos\alpha$

$V \times V \to \mathbb{R}$

$(\vec{a}, \vec{b}) \to \vec{a}\vec{b}$

axiómák: tulajdonságok

1) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ komm.

2) $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}\vec{b}) + (\vec{a}\vec{c})$ disztr.

3) $\vec{a}(\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a}\vec{b})$ számtényező kiemelése

2-3) $(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b})\vec{c} = \alpha(\vec{a}\vec{c}) + \beta(\vec{b}\vec{c})$ lineárkombinációval be lehet szorozni

hossz és szög: metrikus tulajdonságok a skaláris szorzatban szükséges először tetszőleges vektorok a lineárkombinációban

4) $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0$

5) ha $\vec{a}\vec{a} = 0 \to \vec{a} = \vec{0}$

} a skaláris szorzat pozitív definit

- skaláris szorzat 0, ha
  - az egyik vektor $\vec{0}$
  - ortogonálisak (merőlegesek) vektorok $\to \cos\alpha = 0$

- nemnulla egyik esetén - normálvektor
  - ~~az~~ egyenes pontjai és a vektorok között ~~ha~~ kijelölt (kölcsönösen egyértelműség) van
  - $\vec{m}$: merőleges

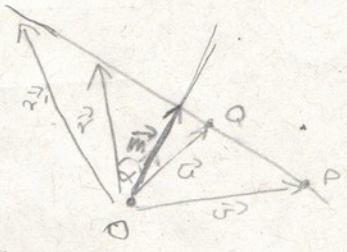
$|m| = \frac{|r|}{\cos\alpha} \Rightarrow \vec{r}\vec{m} = |r| \frac{|r|}{\cos\alpha} \cos\alpha$

$\vec{r}\,\vec{m} = c = \text{áll.}$ $\quad \vec{m} := \vec{n}$

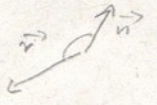
$\vec{r}\,\vec{n} = c := d$

Spec. eset: $|\vec{n}| = 1$ $\quad \underbrace{|\vec{r}| \cos\alpha}_{d} \; \underbrace{|\vec{n}|}_{1} = d$

$\vec{n}$ - normálvektor

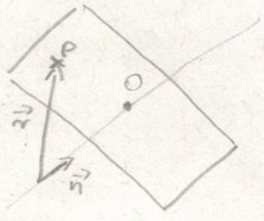


  - előjel: tompaszög esetén negatív



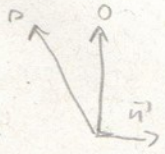
$\vec{r} < 0$

- sík normálvektora



P - a síkban
$\vec{n}$ - norm. vekt.
síkbeli vektorok, mint az előző esetben

vektoregyenlet



- $\vec{r}\,\vec{r} = c$ ha <0, Ø ms.
  ha $=0 \Rightarrow$ ms: $\vec{0}$, az origó ~~az~~
  ha $>0 \Rightarrow$ ~~síkban~~ térben: a sugarú kör egyenlete: a sugarú gömb

$|\vec{r} - \vec{c}| = R$

$(\vec{r} - \vec{c})(\vec{r} - \vec{c}) = R^2$



- irányvektoros egyenlet: máshogy másodfok
- komplex számok síkban háromban, térben nem

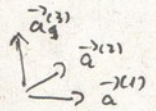
- skaláris szorzás : az a művelet, mely ezeket az axiómákat teljesíti ⇐ megfordítjuk a mondatot

- Euklideszi vektortér
  a vektortér egy alfaja

- $\vec{a}\vec{a} = 0$ nem mindig igaz pl. rel. elmélet ⇐ nem euklideszi geom.

- nem kommutatív skalárszorzat : komplex vektortérben
  $\vec{a}\vec{b}$ = a $\vec{c}\vec{b}$ komplex konjugáltja
  a skalárszorzat hermitikus lesz

-



$$\vec{v} = v_1\vec{a}^{(1)} + v_2\vec{a}^{(2)} + v_3\vec{a}^{(3)} = \sum_{k=1}^{3} v_k \vec{a}^{(k)}$$

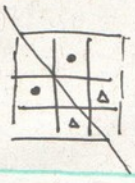
$$\vec{u} = u_1\vec{a}^{(1)} + u_2\vec{a}^{(2)} + u_3\vec{a}^{(3)} = \sum_{l=1}^{3} u_l \vec{a}^{(l)}$$

$$\vec{u}\vec{v} = (\ +\ +\ )(\ +\ +\ ) = u_1v_1\,\vec{a}^{(1)}\vec{a}^{(1)} + u_1v_2\,(\vec{a}^{(1)}\vec{a}^{(2)}) + \dots + u_3v_3\,\vec{a}^{(3)}\vec{a}^{(3)} =$$

$$= \left(\sum_k u_k \vec{a}^{(k)}\right)\left(\sum_l u_l \vec{a}^{(l)}\right) = \sum_k \sum_l u_k v_l \underbrace{(\vec{a}^{(k)}\vec{a}^{(l)})}_{g_{kl}}$$

⇐ g szám

g_{kl}: g szám : 3×3 mátrix



⇐ szimmetrikus mátrix (nem csak szimmetrikus (csak négyzetes esetén értelmes))

$$\vec{u}\vec{v} = \sum_k \sum_l g_{kl} u_k v_l$$

g_{kl} - bázisra jellemző ⇐ metrikus tenzor
$\vec{u}, \vec{v}, u, v$ - vektorokra jell.

- ha $\vec{a}^{(1)} \perp \vec{a}^{(2)} \perp \vec{a}^{(3)}$ bázisvektorok egymásra merőlegesek
  = ortogonális bázis
  skalár. szorzatok 0-k ⇒ egyszerűsítés

[diagonálmátrix: mindenhol 0, kivéve a főátlójában]

- ha $|\vec{a}^{(1)}| = |\vec{a}^{(2)}| \dots = 1$ egységvektorok
  ⇒ $\vec{a}\vec{a} = 1$
  = normált bázis ⇒ egyszerűsítés
  = **Ortonormált bázis**

- ortonormált bázis

$$\left.\begin{array}{ll} \vec{a}^{(1)}\vec{a}^{(1)} = 1 \\ \vec{a}^{(1)}\vec{a}^{(2)} = 0 \\ \vec{a}^{(1)}\vec{a}^{(3)} = 0 \\ \vec{a}^{(2)}\vec{a}^{(2)} = 1 \\ \vec{a}^{(2)}\vec{a}^{(3)} = 0 \\ \vec{a}^{(3)}\vec{a}^{(3)} = 1 \end{array}\right\} \quad \vec{a}^{(k)}\vec{a}^{(l)} = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

- Kronecker - delta

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

ortonormált bázis

$$\Rightarrow \vec{a}^{(k)}\vec{a}^{(l)} = \delta_{kl}$$

ha egységvektor, jelölés: $\vec{e}$

- $\sum_l \delta_{kl} v_l = u_k$ ⇐

$$u_1 = \sum_l \delta_{1l} v_l = \underbrace{\delta_{11}}_{1} v_1 + \underbrace{\delta_{12}}_{0} v_2 + \underbrace{\delta_{13}}_{0} v_3 = v_1$$

$$u_2 = \sum_l \delta_{2l} v_l = \underbrace{\delta_{21}}_{0} v_1 + \underbrace{\delta_{22}}_{1} v_2 + \underbrace{\delta_{23}}_{0} v_3 = v_2$$

$$u_3 = v_3$$

= a δ-val való szorzás nem csinál semmit

$$u_k = \sum_l \delta_{kl} v_l = v_k$$

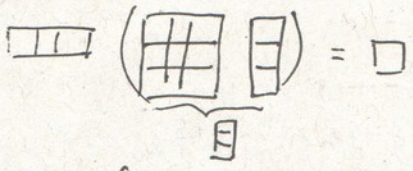
$\vec{e}^{(k)} \vec{e}^{(l)} = \delta_{kl}$

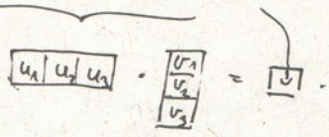
$\vec{u} = \sum_k u_k \vec{e}^{(k)} \qquad \vec{v} = \sum_l v_l \vec{e}^{(l)}$

$\vec{u}\,\vec{v} = \left(\sum_k u_k \vec{e}^{(k)}\right)\left(\sum_l v_l \vec{e}^{(l)}\right) = \sum_k \sum_l u_k v_l \left(\vec{e}^{(k)} \vec{e}^{(l)}\right) = \sum_k \sum_l u_k v_l \delta_{kl} =$

$= \sum_k u_k \left(\sum_l v_l \delta_{kl}\right) = \sum_k u_k v_k = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

- nem ortonormált bázis:

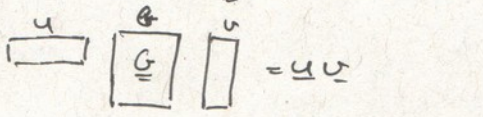




$\underline{u}\,(\underline{\underline{G}}\,\underline{v}) = \underline{u}\,\underline{v}' = \sum_k u_k v_k' =$ $\qquad \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$

$= \sum_k u_k \left(\sum_m g_{km} v_m\right) =$ $\qquad c_{kl} = \sum_m A_{km} B_{ml}$

$= \sum_k \sum_m g_{km} u_k v_m = \sum_k \sum_l g_{kl} u_k v_l$ $\qquad c_k = \sum_m A_{km} B_m$ összegvektor ered.



$= \underline{u}\,\underline{v}$

- $\underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$|\underline{a}|^2 = \sum a_k^2 = 4^2 + 3^2 + 1^2 + 7^2 + 0^2 = 75$

$|\underline{b}|^2 = \sum b_k^2 = 5^2 + 0^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 = 31$

$\underline{a}\,\underline{b} = \sum_k a_k b_k = 4 \cdot 5 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 29$

$\cos\alpha = \dfrac{\underline{a}\,\underline{b}}{|\underline{a}|\,|\underline{b}|} = \dfrac{\underline{a}\,\underline{b}}{\sqrt{\underline{a}\,\underline{a}}\,\sqrt{\underline{b}\,\underline{b}}} = \dfrac{29}{\sqrt{75}\,\sqrt{31}}$

$|\underline{a}\,\underline{b}| \le |a|\,|b|$

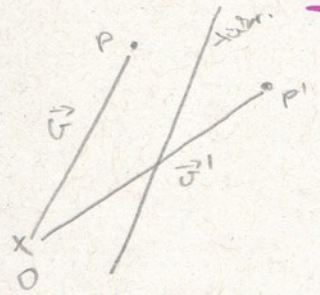
$(\underline{a}\,\underline{b})^2 \le a^2 b^2$

$\uparrow$ =, ha $a \parallel b$ párh.

CSB – egyenlőtlenség

Cauchy – Schwarz – Bunyakovszki;

Geometriai transzformációk

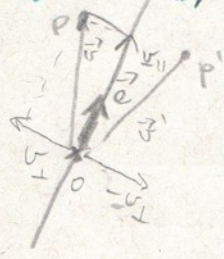


geometriai transzformáció

pontokhoz pontot rendel → függvény

$\vec{v}' = f(\vec{v})$

- projekció (P)



$\vec{e}$ - egységvektor

$\vec{e}\,\vec{e} = 1$

Proj.: $\vec{v} = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp \rightarrow \vec{v}_\perp = \vec{v} - \vec{v}_\parallel$

tükr.: $\vec{v}' = \vec{v}_\parallel - \vec{v}_\perp = \vec{v}_\parallel - (\vec{v} - \vec{v}_\parallel) = 2\vec{v}_\parallel - \vec{v}$ $\quad \vec{v}_\parallel$ - vektorok az egyenesre

λ - - " — hossza

$\vec{v} + \vec{v}' = 2\vec{v}_\parallel$

$\vec{v}_\parallel = \lambda \vec{e}$

$\vec{v} = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp = \lambda\vec{e} + \vec{v}_\perp \;/\cdot\vec{e}$ $\quad \vec{v}_\perp \cdot \vec{e} = 0$! → merőleges komponens eliminálódik

$\vec{v}\vec{e} = \lambda(\vec{e}\vec{e}) + \vec{v}_\perp \vec{e} = \lambda$

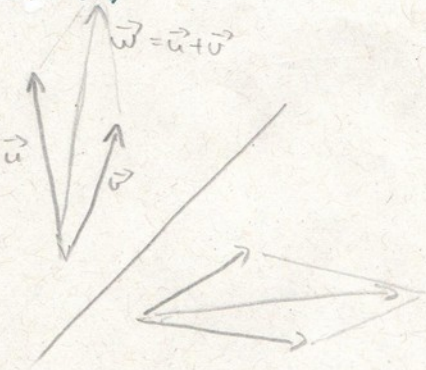
$\Rightarrow \lambda = \vec{v}\vec{e}$

$\vec{v}_\parallel = (\vec{v}\vec{e})\vec{e} = P\vec{v}$ $\quad$ $\vec{e}$ független $\vec{e}$ irányítás ($\vec{e}$ v. $-\vec{e}$)

P - projekció

$\vec{v}' = 2(\vec{v}\vec{e})\vec{e} - \vec{v} = T\vec{v}$ $\quad$ T - tükrözés

- tükrözés (T)



- $\vec{v} \mapsto \vec{v}' = T\vec{v}$

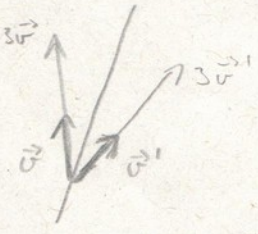
  $\vec{u} \mapsto \vec{u}' = T\vec{u}$

  $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} \mapsto \vec{w}' \overset{T\vec{w}}{=} \vec{u}' + \vec{v}'$

- $T(\vec{u} + \vec{v}) = (T\vec{u} + T\vec{v})$

  T - additív

  (a képek összege az összeg képe)



- $T(\alpha\vec{v}) = \alpha(T\vec{v})$ → homogén

add.+hom. → lineáris

T - lineáris operátor

(a tükrözést leíró)

- $\boxed{T(\vec{v} + \vec{u}) = T\vec{v} + T\vec{u}}$ bizo.:

$$T(\vec{v} + \vec{u}) = 2\left((\vec{v} + \vec{u})\vec{e}\right)\vec{e} - (\vec{v} + \vec{u}) =$$

$$= 2\left((\vec{v}\vec{e}) + (\vec{u}\vec{e})\right)\vec{e} - (\vec{v} + \vec{u}) =$$

$$= 2(\vec{v}\vec{e})\vec{e} + 2(\vec{u}\vec{e})\vec{e} - \vec{v} - \vec{u} =$$

$$= [2(\vec{v}\vec{e})\vec{e} - \vec{v}] + [2(\vec{u}\vec{e})\vec{e} - \vec{u}] =$$

$$= T\vec{v} + T\vec{u}$$

- részteres tükrözés = identitás

$\vec{v}'' = T\vec{v}' = 2(\vec{v}\vec{e})\vec{e} - \vec{v} = 2\left(\left(2(\vec{v}\vec{e})\vec{e} - \vec{v}\right)\vec{e}\right)\vec{e} - \left[2(\vec{v}\vec{e})\vec{e} - \vec{v}\right] =$

$= 2\left[2(\vec{v}\vec{e})\underbrace{(\vec{e}\vec{e})}_{1} - (\vec{v}\vec{e})\right]\vec{e} - 2(\vec{v}\vec{e})\vec{e} + \vec{v} = \vec{v}$

$\vec{v}\vec{e}$

$\vec{0}$ ← nullvektor

$\vec{v}'' = T\vec{v}' = T(T\vec{v}) = TT\vec{v} = T^2\vec{v} = \vec{v} = I\vec{v}$ $\forall \vec{v}$ igaz

$T^2 = I$ identitás ← minden, ami ért tudja - tükrözés

- részteres projekció = egyenes projekció

$P\vec{v} = \vec{v}_{\parallel}$

$P(P\vec{v}) = P\vec{v} \Rightarrow P^2\vec{v} = P\vec{v}$ $\forall v \rightarrow P^2 = P$

↑ minden művelet, ami ért tudja - projekció

- $T\vec{v} = 2P\vec{v} - I\vec{v} = (2P - I)\vec{v}$ $\forall v$

$T = 2P - I$ $\quad P = \frac{I+T}{2}$ $\quad T^2 = I$

$P^2 = P$

- $T^2 = (2P-I)^2 = (2P-I)(2P-I) = 4P^2 - I2P - 2PI + II =$

$= 4P - 2P - 2P + I = I$

- $P^2 = \left(\frac{I+T}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(I+T)(I+T) = \frac{1}{4}(II + IT + TI + TT) = \frac{1}{4}(I + T + T + I) = \frac{1}{4}(2I + 2T) =$

$= \frac{I+T}{2} = P$

- Q - merőleges projekció

$Q^2 = \left(\frac{I-T}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(I-T)(I-T) = \frac{1}{4}(II - IT - TI + TT) = \frac{1}{4}(I - T - T + I) =$

$= \frac{1}{4}(2I - 2T) = \frac{I-T}{2}$ ← $\left(\frac{I-T}{2}\right)^2 = \frac{I-T}{2}$ ⇒ ez is projekció

$Q = \frac{I-T}{2}$

$Q\vec{v} = \frac{I-T}{2}\vec{v} = \frac{1}{2}(I-T)\vec{v} = \frac{1}{2}(I\vec{v} - T\vec{v}) = \frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{v}') = \vec{v}_{\perp}$

- $Q\vec{v}_{\parallel} = Q(Pv) = \vec{0}$

$\frac{I-T}{2}\vec{v}_{\parallel} = \frac{1}{2}(I\vec{v}_{\parallel} - T\vec{v}_{\parallel}) = \frac{1}{2}(\vec{v}_{\parallel} - \vec{v}_{\parallel}) = \vec{0}$

$QP\vec{v} = \vec{0} = O\vec{v}$

$QP = O$ $\quad Q, P, O$ - lineáris operátorok

O - nulloperátor

- $P\vec{v} = \vec{v}_{\parallel}$

$Q\vec{v} = \vec{v}_{\perp}$

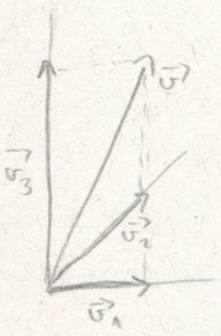
$(P+Q)\vec{v} = P\vec{v} + Q\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} = \vec{v} = I\vec{v}$

$I_{ee} = \delta_{ee}$

$P + Q = I$

$P - Q = T$

$P \cdot Q = \frac{I+T}{2} \cdot \frac{I-T}{2} = \frac{1}{4}(I+T)(I-T) = \frac{1}{4}(II + TI - IT - TT) = \frac{1}{4}(I + T - T - I) = O$



$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \qquad \vec{v}_1 = P_1 \vec{v} \quad \vec{v}_2 = P_2 \vec{v} \quad \vec{v}_3 = P_3 \vec{v}$

$P_1 P_1 = P_1 \quad P_2 P_1 = 0 \quad P_3 P_1 = 0 \quad P_1 P_2 = 0 \quad P_2 P_2 = P_2$

$P_3 P_2 = 0 \quad P_1 P_3 = 0 \quad P_2 P_3 = 0 \quad P_3 P_3 = P_3$

$\boxed{P_k P_\ell = \delta_{k\ell} P_k}$ Kronecker-delta

$\vec{v} = P_1 \vec{v} + P_2 \vec{v} + P_3 \vec{v} \Rightarrow \boxed{\sum_k P_k = I}$

- diadikus szorzás

$\alpha \vec{v} = \vec{v} \alpha$ ⇐ nem a tromm., mert α és $\vec{v}$ nem vektorok a helyvektorok vannak

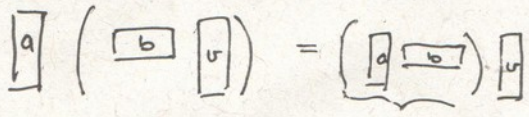
$\vec{v}_{\parallel} = P \vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{e}) \vec{e} = \vec{e} (\vec{v} \cdot \vec{e}) = \vec{e} (\vec{e} \cdot \vec{v}) = (\vec{e} \circ \vec{e}) \vec{v}$

def.: $\boxed{(\vec{a} \circ \vec{b}) \vec{v} = \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{v})}$ diadikus szorzás

$\Rightarrow P = \vec{e} \circ \vec{e}$

lineáris operátor

„két vektorból egy operátort csinál"



a mátrix: reprezentálja az operátort

$(\vec{v}_{\parallel}) = (\vec{v} \cdot \vec{e}) \vec{e} = (\vec{e} \circ \vec{e}) \vec{v}$

$\hookrightarrow \underline{v}_{\parallel} = (\underline{v} \cdot \underline{e}) \underline{e}$ absztrakt és reprezentált vektorok skalárszorzata ua.

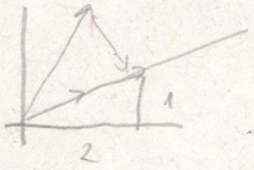
$(\underline{v}_{\parallel})_k = [(\underline{v} \cdot \underline{e}) \underline{e}]_k = (\underline{v} \cdot \underline{e}) e_k =$

$= \left(\sum_\ell v_\ell e_\ell\right) e_k = \sum_\ell (e_k e_\ell v_\ell)$

$(\underline{v}_{\parallel})_k = \sum_\ell P_{k\ell} v_\ell$ ← $\boxed{P_{k\ell} = e_k e_\ell}$

$\boxed{(a \circ b)_{k\ell} = a_k b_\ell}$

- pl.



$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektor hossza: $\sqrt{5}$

$\underline{e} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{P}} = \underline{e} \circ \underline{e} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} (2\ 1) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\underline{v}_{\parallel} = \underline{\underline{P}}\, \underline{v} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{8}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ → a $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektor irányába mutat

- azaz: $(\underline{e} \circ \underline{e}) \underline{v} = \underline{e} (\underline{e} \underline{v})$

$(\underline{e} \cdot \underline{v}) = \frac{1}{\sqrt{5}} (2\ 1) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{8}{\sqrt{5}}$

$P v = e (e v) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\underline{v}_\perp = \underline{v} - \underline{v}_{\parallel}$

$$\underline{v}_\perp = \underline{v} - \underline{v}_\parallel = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} - \frac{8}{5}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}16/5\\8/5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/5\\2/5\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

- Kimaradt merőlegesség-e? ← skaláris szorzat

$$\underline{v}_\perp \underline{v}_\parallel = \frac{1}{5}(-1,2)\,\frac{8}{5}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \frac{8}{25}(-1,2)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 0 \quad \checkmark \qquad \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = (b,-a)$$

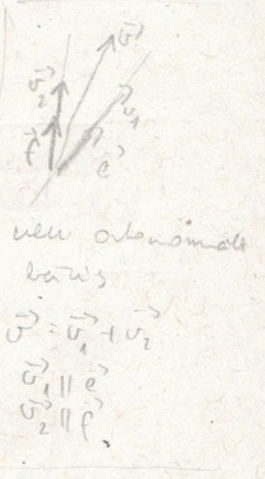
$\vec{v}' = I\,\vec{v}$; $\underline{v}' = \underline{\underline{I}}\,\underline{v}$ ← egységoperátor – identitástranszformáció

- $v_k = \sum_l I_{kl} v_l = \sum_l \delta_{kl} v_l$ $\qquad \delta_{kl} = \begin{cases}1 & k=l\\ 0 & k\neq l\end{cases}$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \quad I$$ ← egységmátrix

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}}_{\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{Q}}} = \begin{pmatrix}\frac{1}{5}&-\frac{2}{5}\\-\frac{2}{5}&\frac{4}{5}\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&-2\\-2&4\end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_\perp = \underline{\underline{Q}}\,\underline{v} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&-2\\-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$



nem ortonormált bázis

$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

$\vec{v}_1 \parallel \vec{e}$

$\vec{v}_2 \parallel \vec{f}$

$$\underline{\underline{T}} = 2\underline{\underline{P}} - \underline{\underline{1}} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}$$ ← a tükrözés mátrixa

$$\underline{v}' = \underline{\underline{T}}\,\underline{v}$$

$$\underline{v}' = \underline{\underline{T}}\,\underline{v} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}17\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17/5\\6/5\end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{T}}^2 = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{T}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}9+16&0\\0&16+9\end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}25&0\\0&25\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = 1 \quad \checkmark$$

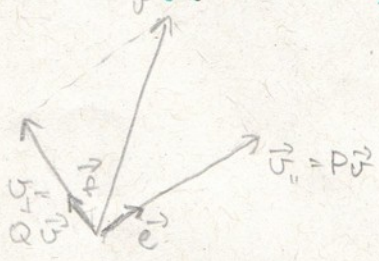
Operátorok is lineáris tenet alkotnak – lehet:
- egymást összeadni
- számmal szorozni
- egymással szorozni

} algebrát alkotnak (mátrixok is)

$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ ← négyzete -1 !!

Tükrözés egységoperátor – 2 dim. ONB

2019.09.30.
1 hét 13. óra



P-operátor

e, f – egységvektorok, bárust alkotnak ONB
ortonormált bázis

$$\vec{v}_\parallel = (\vec{v}\vec{e})\,\vec{e}$$
$$\vec{v}_\perp = (\vec{v}\vec{f})\,\vec{f}$$

$$\vec{v} = \alpha\vec{e} + \beta\vec{f}$$
$$\vec{v} = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp = (\vec{v}\vec{e})\vec{e} + (\vec{v}\vec{f})\vec{f}$$
$$\alpha = \vec{v}\vec{e} \qquad \beta = \vec{v}\vec{f}$$
$$\vec{v} \to \underline{v} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{v}\vec{e}\\\vec{v}\vec{f}\end{pmatrix}$$ ONB

Tükrözés egységoperátor – n dim. ONB

- $\dim V = N$ ortonormált vektorok (ONB) $\{\vec{e}^{(k)}\}_{k=1}^N$

$$\vec{e}^{(k)}\,\vec{e}^{(l)} = \delta_{kl} = \begin{cases}1 & k=l\\0 & k\neq l\end{cases}$$

$$\vec{v} = \sum_k \alpha_k \vec{e}^{(k)} \qquad /\cdot\vec{e}^{(l)}$$

$$\vec{v}\,\vec{e}^{(l)} = \sum_k \alpha_k \vec{e}^{(k)}\vec{e}^{(l)} = \sum_k (\alpha_k \vec{e}^{(k)})\vec{e}^{(l)} = \sum_k \alpha_k (\vec{e}^{(k)}\vec{e}^{(l)}) = \sum_k \alpha_k \delta_{kl} = \alpha_l$$

$$\Rightarrow \alpha_l = \vec{v}\,\vec{e}^{(l)}$$
$$\boxed{\alpha_k = \vec{v}\,\vec{e}^{(k)}}$$

$$\boxed{\vec{v} = \sum_k (\vec{v}\,\vec{e}^{(k)})\,\vec{e}^{(k)}}$$ csak ONB

Operátorok

$V \ni \vec{v}$

$\hat{A} : V \to V$ valban a vektortéren levő leképezés

$\vec{v} \to \vec{u} = \hat{A}\vec{v}$ '$\hat{A}$ hat a $\vec{v}$ vektorra'

- lineáris operátor
  - ↳ additív $\hat{A}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (\hat{A}\vec{v}_1) + (\hat{A}\vec{v}_2)$
  - ↳ homogén $\hat{A}(\alpha\vec{v}) = \alpha(\hat{A}\vec{v})$

  } linearitás: $\hat{A}(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) = \alpha(\hat{A}\vec{v}_1) + \beta(\hat{A}\vec{v}_2)$

  hasonlat: vektorok összeadása és nyújtása = vektorok nyújtása és összeadása

  projekció: vektorvektorek összege = vektorösszeget vetítése

- nevezetes operátorok
  - $\hat{I}$ identitásoperátor ($\hat{E}$ egységoperátor) $\hat{I}\vec{v} = \vec{v}$
  - $\hat{0}$ nulloperátor $\hat{0}\vec{v} = \vec{0}$

- derivált

  $Df = f'$ $\quad D : \tilde{f} \to \tilde{f}$ az függvényterek elemein ható lineáris operátor

  $D(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)' = f_1' + f_2' = (Df_1) + (Df_2)$
  $D(\alpha f_1) = \alpha(Df_1)$

  } lin. op.

- operátorok halmaza: $\mathcal{O}$ $\quad \hat{A} \in \mathcal{O}$
- műveletek: $\hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{O}$
  - (+) $\mathcal{O} \times \mathcal{O} \to \mathcal{O}$

    $(\hat{A}, \hat{B}) \mapsto \hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$

    $\hat{C}\vec{v} = (\hat{A} + \hat{B})\vec{v} = (\hat{A}\vec{v}) + (\hat{B}\vec{v})$ ← nem a disztrib., mert összeadás nem számok összeadása
  - (·) $\mathbb{S} \times \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ számmal szorzás

    $(\alpha, \hat{A}) \mapsto \hat{D} = \alpha\hat{A}$

    $\hat{D}\vec{v} = (\alpha\hat{A})\vec{v} = \alpha(\hat{A}\vec{v})$
  - (lin. komb.) $\hat{F} = \alpha\hat{A} + \beta\hat{B}$

    $\hat{F}\vec{v} = (\alpha\hat{A} + \beta\hat{B})\vec{v} = (\alpha\hat{A})\vec{v} + (\beta\hat{B})\vec{v} = \alpha(\hat{A}\vec{v}) + \beta(\hat{B}\vec{v})$ ← „disztrib.", de nem

⇒ a lineáris téren ható operátorok is lineáris teret alkotnak

összeadás: asszoc. ; számmal szorzás

egységelem: $\hat{0}$

inverz: $(-1)\hat{A} = -\hat{A}$ $\quad \hat{A} + (-\hat{A}) = \hat{0}$

(ha a lineáris tér n dimenziós, az operátorok n^2)

- (egymással szorzás) $\mathcal{O} \times \mathcal{O} \to \mathcal{O}$

  $(\hat{A}, \hat{B}) \mapsto \hat{H} = \hat{A}\hat{B}$

  $\hat{H}\vec{v} = (\hat{A}\hat{B})\vec{v} = (\hat{A}\hat{B})\vec{v}$

$\hat{A}\hat{B}\hat{C} = \hat{F}\hat{C}$

$\hat{F}$

- $\hat{A}\hat{B}\hat{C} = \hat{F}\hat{C} \Rightarrow (\hat{A}\hat{B})\hat{C} = \hat{A}(\hat{B}\hat{C})$ ($\hat{F} = \hat{A}\hat{B}$)



⇒ operátorok szorzása asszociatív

- de nem kommut. !! (általános esetben)

⇒ az operátorok algebrát alkotnak
lineáris tér és egymással is össze lehet szorozni az elemeket
asszociatív algebrát!

- eddig ismert példa a műveletekre:
$\hat{T} = 2\hat{P} - \hat{1}$ $T^2 = 1$ $\hat{T}\hat{T} = \hat{1}$ $P^2 = P$ $P = \frac{\hat{1} + \hat{T}}{2}$



- $(\mathbb{O}, \cdot)$ félcsoportot alkot de NEM csoport
ék semleges elem: $\hat{1}$
• inverz: ∅! ⇒ nem csoport
(létezik az összépet, de nem egyértelmű)
pl. tükrözésnek van
forgatásnak is } az operátorok egy részcsoportja invertálható

Ld. properciós ü. 2D-s leírás

$\hat{A}^{-1} = \hat{A}$ $\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{1}$ $\hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{1}$ $(\hat{A}^{-1})^{-1} = \hat{A}$

$\hat{C} = (\hat{A}\hat{B})$

$\hat{A}^{-1}\hat{C} = \hat{A}^{-1}(\hat{A}\hat{B}) = (\hat{A}^{-1}\hat{A})\hat{B} = \hat{1}\hat{B} = \hat{B}$

$\hat{B}^{-1}(\hat{A}^{-1}\hat{C}) = \hat{B}^{-1}\hat{B} = \hat{1}$

$(\hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1})\hat{C} = \hat{1}$

$\hat{C}^{-1} = \hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1}$

$\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ha az inverz létezik

= az operátorok azon részhalmaza, amely invertálható, csoportot alkot

az inverzek összege kiviheti a csoportból halmazból

- diadikus szorzás ($\vec{a}\circ\vec{b}$) – Operátor

operátorok reprezentációja megfelelő mátrixszal

• $\hat{C} = \vec{a}\circ\vec{b}$ $\circ : V \times V \to \mathbb{O}$

$(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \hat{C} = \vec{a}\circ\vec{b}$

$\hat{C}\vec{v} = \boxed{(\vec{a}\circ\vec{b})\vec{v} = \vec{a}(\vec{b}\vec{v})}$

$\hat{C}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{a}(\vec{b}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)) = \vec{a}((\vec{b}\vec{v}_1) + (\vec{b}\vec{v}_2)) = \vec{a}(\vec{b}\vec{v}_1) + \vec{a}(\vec{b}\vec{v}_2) =$

$= (\hat{C}\vec{v}_1) + (\hat{C}\vec{v}_2) \Rightarrow \boxed{(\vec{a}\circ\vec{b})(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (\vec{a}\circ\vec{b})\vec{v}_1 + (\vec{a}\circ\vec{b})\vec{v}_2}$

$\Rightarrow \hat{C}$ lineáris operátor

• $\vec{a}\circ(\vec{b}_1 + \vec{b}_2) = \vec{a}\circ\vec{b}_1 + \vec{a}\circ\vec{b}_2$ „distr."

$[\vec{a}\circ(\vec{b}_1 + \vec{b}_2)]\vec{v} = \vec{a}[(\vec{b}_1 + \vec{b}_2)\vec{v}] = \vec{a}[(\vec{b}_1\vec{v}) + (\vec{b}_2\vec{v})] =$

$= \vec{a}(\vec{b}_1\vec{v}) + \vec{a}(\vec{b}_2\vec{v}) = (\vec{a}\circ\vec{b}_1)\vec{v} + (\vec{a}\circ\vec{b}_2)\vec{v}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{a}\circ(\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a}\circ\vec{b})}$

$\boxed{(\vec{a}\circ\vec{b})(\vec{c}\circ\vec{d}) = (\vec{b}\vec{c})(\vec{a}\circ\vec{d})}$

• $\hat{F} = \vec{a}\circ\vec{b}$ $\hat{G} = \vec{c}\circ\vec{d}$ ← kiszerés $\hat{H} = (\vec{b}\vec{c})(\vec{a}\circ\vec{d})$

$\hat{H} = \hat{F}\hat{G} = ?$

$\hat{H}\vec{v} = (\hat{F}\hat{G})\vec{v} = \hat{F}(\hat{G}\vec{v}) = \hat{F}((\vec{c}\circ\vec{d})\vec{v}) = \hat{F}(\vec{c}(\vec{d}\vec{v})) = (\vec{d}\vec{v})(\hat{F}\vec{c}) = (\vec{d}\vec{v})((\vec{a}\circ\vec{b})\vec{c}) =$

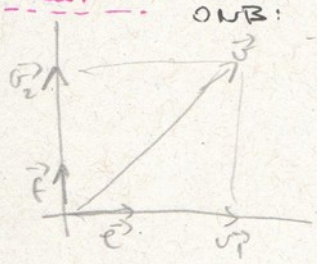
$= (\vec{d}\vec{v})(\vec{a}(\vec{b}\vec{c})) = (\vec{b}\vec{c})\vec{a}(\vec{d}\vec{v}) = (\vec{b}\vec{c})[\vec{a}(\vec{d}\vec{v})] = (\vec{b}\vec{c})(\vec{a}\circ\vec{d})\vec{v} =$

$= [(\vec{b}\vec{c})(\vec{a}\circ\vec{d})]\vec{v} = \hat{H}\vec{v}$

2019. 10. 21.
1. ea.

ferde vetítés, reciprokbázis

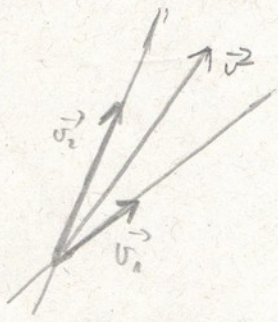
ONB:

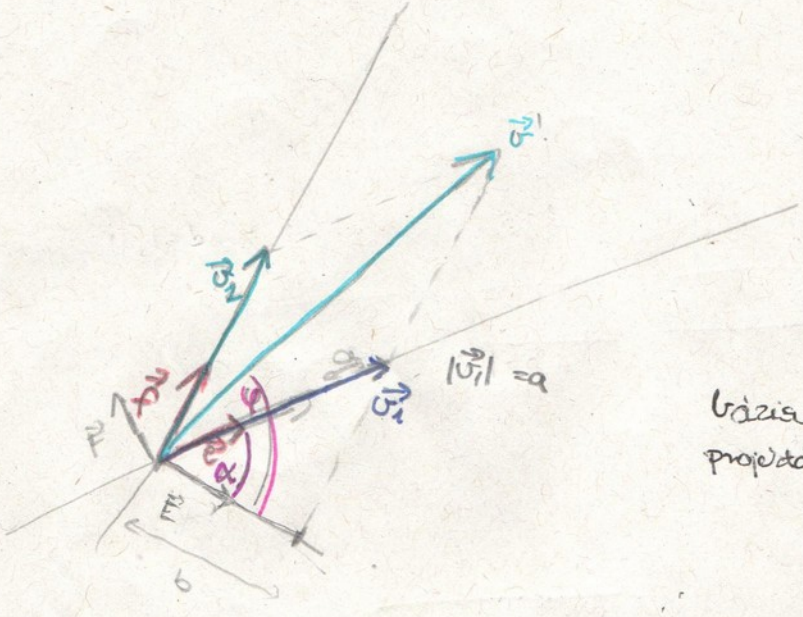


$\vec{v_1} = (\vec{v}\vec{e})\vec{e}$

$\vec{v_2} = (\vec{v}\vec{f})\vec{f}$

$\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$





Vízsík: $\vec{e}, \vec{f}$

Projektálandó v.: $\vec{v}$

$b = a\cos\alpha$
$b = |v|\cos\varphi$
$\Big\} \; a = \frac{b}{\cos\alpha} = \frac{|v|\cos\varphi}{\cos\alpha} =$

$= \frac{|v||E|\cos\varphi}{|E|\cos\alpha} =$

$= \frac{\vec{v}\vec{E}}{|E|\cos\alpha} = \frac{\vec{v}\vec{E}\,|e|}{|v|\cos\alpha|e|} =$

$= \frac{\vec{v}\vec{E}}{\vec{e}\vec{E}}|e| = a$

a) vegyük fel $\vec{E}$-t: $\vec{E} \perp \vec{f} \Rightarrow \vec{E}\vec{f} = 0 \Rightarrow \varphi = \alpha$

$\vec{v}\vec{E} = |\vec{v}|\,|\vec{E}|\cos\varphi$ ~~$= \cos\alpha$~~

$\vec{e}\vec{E} = |\vec{e}|\,|\vec{E}|\cos\alpha \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\vec{e}\vec{E}}{|\vec{e}||\vec{E}|}$

$\vec{v_1} = l\frac{\vec{e}}{|\vec{e}|} = \frac{\vec{v}\vec{E}}{\vec{e}\vec{E}}\frac{\vec{e}}{|\vec{e}|}\cos\alpha = (\vec{v}\vec{E})$

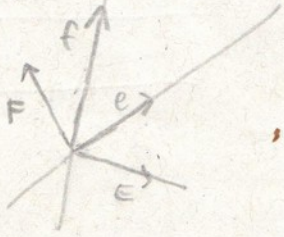
$\vec{v_1} = a\cdot\frac{\vec{e}}{|\vec{e}|} = \frac{\vec{v}\vec{E}}{\vec{e}\vec{E}}|e|\cdot\frac{\vec{e}}{|e|} = \boxed{\frac{\vec{v}\vec{E}}{\vec{e}\vec{E}}\vec{e} = \vec{v_1}}$

b) vegyük fel $\vec{F}$-t: $\vec{F} \perp \vec{e} \quad \vec{F}\vec{e} = 0$

$\boxed{\vec{v_2} = \frac{\vec{v}\vec{F}}{\vec{f}\vec{F}}\vec{f}}$ hasonlóan

c) vegyük fel $\vec{E}$-t és $\vec{F}$-t így:

$\vec{E}\vec{f} = 0$
$\vec{E}\vec{e} = 1$
$\vec{F}\vec{e} = 0$
$\vec{F}\vec{f} = 1$



$\vec{F}, \vec{E}$ – $\vec{f}, \vec{e}$ reciprokbázis

ha $\vec{E}\vec{e} = 1$

$\vec{v_1} = (\vec{v}\vec{E})\vec{e} = \vec{e}(\vec{E}\vec{v}) = \overbrace{(\vec{e}\circ\vec{E})}^{\hat{P}}\vec{v}$

($\hat{P}$: ferde projektor operátor)

$\Rightarrow \boxed{v_1 = (\vec{e}\circ\vec{E})\vec{v} \quad \text{ha } \vec{E}\vec{e} = 1}$

$\boxed{v_2 = (\vec{f}\circ\vec{F})\vec{v} \quad \text{ha } \vec{F}\vec{f} = 1}$

($\hat{Q}$)

- $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

$\vec{v}_1 = (\vec{v}\vec{E})\vec{e} = (\vec{e}\circ\vec{E})\vec{v} = \hat{P}\vec{v}$

$\vec{v}_2 = (\vec{v}\vec{F})\vec{f} = (\vec{f}\circ\vec{F})\vec{v} = \hat{Q}\vec{v}$

} eddigiek

- $\vec{v} = \alpha\vec{e} + \beta\vec{f} \qquad / \cdot \vec{E} \quad / \cdot \vec{F}$

$(\vec{v}\vec{E}) = \alpha(\underbrace{\vec{e}\vec{E}}_{1}) + \beta(\underbrace{\vec{f}\vec{E}}_{0}) = \alpha$

$(\vec{v}\vec{F}) = \alpha(\vec{e}\vec{F}) + \beta(\vec{f}\vec{F}) = \beta$

} a reciprokbázis vektorával való skaláris szorzás megadja az eredeti vektorhoz tartozó kifejtési együtthatót

$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = (\vec{v}\vec{E})\vec{e} + (\vec{v}\vec{F})\vec{f} = (\vec{e}\circ\vec{E})\vec{v} + (\vec{f}\circ\vec{F})\vec{v}}$ $\hat{I}$

- $\vec{v} = (\vec{e}\circ\vec{E})\vec{v} + (f\circ F)\vec{v} = \hat{P}\vec{v} + \hat{Q}\vec{v} = (\hat{P}+\hat{Q})\vec{v} = \hat{I}\vec{v}$

$(\vec{a}\circ\vec{b})(\vec{c}\circ\vec{d}) = (\vec{b}\vec{c})(\vec{a}\circ\vec{d})$

$\hat{P}^2 = \hat{P}\hat{P} = (\vec{e}\circ\vec{E})(\vec{e}\circ\vec{E}) = (\underbrace{\vec{E}\vec{e}}_{1})(\vec{e}\circ\vec{E}) = (\vec{e}\circ\vec{E}) = \hat{P}$

$\hat{Q}^2 = \ldots = \hat{Q}$

$\hat{P}\hat{Q} = (\vec{e}\circ\vec{E})(\vec{f}\circ\vec{F}) = (\underbrace{\vec{E}\vec{f}}_{0})(\vec{e}\circ\vec{F}) = \vec{0} = \hat{0}\vec{v} \Rightarrow \hat{P}\hat{Q} = \hat{0}$

$\Rightarrow \hat{P}\hat{P} = \hat{P} \quad \hat{Q}\hat{Q} = \hat{Q} \quad \hat{P}+\hat{Q} = \hat{I}$

$\hat{P}\hat{Q} = \hat{0} \quad \hat{Q}\hat{P} = \hat{0}$

} projektorok azonossági, kölcsönös, diadikus szorzással

- N dimenzióban

$\{\vec{e}^{(k)}\}_{k=1}^{N}$

$\{\vec{E}^{(k)}\}_{k=1}^{N}$ reciprokbázis

$\boxed{\vec{E}^{(k)}\vec{e}^{(l)} = \delta_{kl}}$ ← a reciprokbázis definíciója – ingyenes fel $\vec{E}$-t!

↖ $\vec{E}$ mindig megfogalmazható $\vec{e}$ alapján

$\vec{v} = \sum_k \alpha_k \vec{e}^{(k)} \qquad / \cdot \vec{E}^{(l)}$

$\vec{v}\vec{E}^{(l)} = \left(\sum_k \alpha_k \vec{e}^{(k)}\right)\vec{E}^{(l)} = \sum_k \left(\alpha_k \vec{e}^{(k)}\right)\vec{E}^{(l)} = \sum_k \alpha_k \left(\vec{e}^{(k)}\vec{E}^{(l)}\right) = \sum_k \alpha_k \delta_{kl} = \alpha_l$

$\therefore \alpha_k = (\vec{v}\,\vec{E}^{(k)})$

$\vec{v} = \sum_k (\vec{v}\,\vec{E}^{(k)})\vec{e}^{(k)} = \sum_k \vec{e}^{(k)}(\vec{E}^{(k)}\vec{v}) = \sum_k \underbrace{(\vec{e}^{(k)}\circ\vec{E}^{(k)})}_{\hat{P}^{(k)}}\vec{v} = \sum_k \hat{P}^{(k)}\vec{v} =$

$= \left(\sum_k \hat{P}^{(k)}\right)\vec{v} = \hat{1}\vec{v}$

$\boxed{\sum_k \hat{P}^{(k)} = \hat{1}}$

$\hat{P}^{(k)} = \vec{e}^{(k)}\circ\vec{E}^{(k)}$

$\hat{P}^{(k)}\hat{P}^{(l)} = (\vec{e}^{(k)}\circ\vec{E}^{(k)})(\vec{e}^{(l)}\circ\vec{E}^{(l)}) = (\underbrace{\vec{E}^{(k)}\vec{e}^{(l)}}_{\delta_{kl}})(\vec{e}^{(k)}\circ\vec{E}^{(l)}) = \delta_{kl}(\vec{e}^{(k)}\circ\vec{E}^{(l)}) =$

$= \delta_{kl}(\vec{e}^{(k)}\circ\vec{E}^{(k)}) = \delta_{kl}\hat{P}^{(k)}$

$\boxed{\hat{P}^{(k)}\hat{P}^{(l)} = \delta_{kl}\hat{P}^{(k)}}$

reciprokbázis

$\vec{E} = \mu\vec{e} + \nu\vec{f}$ felírható lin. kombinációnt

def. szerint:
$\vec{E}\vec{e} = 1$
$\vec{E}\vec{f} = 0$



$\vec{E}\vec{e} = (\mu\vec{e} + \nu\vec{f})\vec{e} = \mu(\vec{e}\vec{e}) + \nu(\vec{f}\vec{e}) = 1$

$\vec{E}\vec{f} = (\mu\vec{e} + \nu\vec{f})\vec{f} = \mu(\vec{e}\vec{f}) + \nu(\vec{f}\vec{f}) = 0$

$g_{11} := \vec{e}\vec{e}$
$g_{12} := \vec{e}\vec{f}$
$g_{21} := \vec{f}\vec{e} = g_{12}$
$g_{22} := \vec{f}\vec{f}$

$g_{11}\mu + g_{12}\nu = 1$
$g_{21}\mu + g_{22}\nu = 0$

lin. eq. sys

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

egy. együttes. módsz.:

$g_{11}g_{22}\mu + g_{12}g_{22}\nu = g_{22}$ / g_{22} / g_{21}
$g_{21}g_{12}\mu + g_{22}g_{12}\nu = 0$ / g_{12} / g_{11}

$(g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12})\mu = g_{22} \Rightarrow \mu = \dfrac{g_{22}}{g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12}} = \dfrac{|\vec{f}|^2}{|\vec{e}|^2|\vec{f}|^2\sin^2\alpha} = \mu$

$|e|^2|f|^2(1-\cos^2\alpha)$

$g_{21}g_{11}\mu + g_{12}g_{21}\nu = g_{21}$
$g_{11}g_{21}\mu + g_{11}g_{22}\nu = 0$

$(g_{12}g_{21} - g_{11}g_{22})\nu = g_{21} \Rightarrow \nu = -\dfrac{g_{21}}{g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12}} = -\dfrac{(\vec{e}\vec{f})}{|\vec{e}|^2|\vec{f}|^2\sin^2\alpha} = \nu$

$\vec{E} = \mu\vec{e} + \nu\vec{f}$

HF: $G, F = ?$
$\underline{e} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\underline{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

kérdés: $G = g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12} \stackrel{?}{=} 0$ (nevező)

$G = (\vec{e}\vec{e})(\vec{f}\vec{f}) - (\vec{e}\vec{f})(\vec{f}\vec{e}) =$
$= |e|^2|f|^2 - (\vec{e}\vec{f})^2 = |e|^2|f|^2 - (|e||f|\cos\alpha)^2 =$
$= |e|^2|f|^2(1-\cos\alpha) = |e|^2|f|^2\sin^2\alpha$

$|e| \neq 0 \quad |f| \neq 0 \quad \alpha \neq 0 \Rightarrow$ értelmes a nevező

ment $\vec{e}$ és $\vec{f}$ bázist alkot

[ONB önmaga reciproka!]

2 dimenzió:
pl. $\underline{e} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\underline{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\underline{E} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\underline{E} = \frac{1}{32}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\underline{E}\,\underline{f} = 0$
$\underline{e}\,\underline{E} = 0$
$\underline{F} = \frac{1}{32}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}$ bázist alkotnak

$\vec{v} = \alpha\vec{e} + \beta\vec{f} + \gamma\vec{g}$ $\underline{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ $\alpha = \vec{v}\vec{E}$ $\beta = \vec{v}\vec{F}$

vektor reprezentációja számoszloppal ← iromány, amivel működik

2016.10.24. 12. dia

$\vec{v} = \sum_k v_k \vec{e}^{(k)} \;/\; \vec{E}^{(l)}$

$\vec{v}\vec{E}^{(l)} = \sum_k v_k \underbrace{\vec{e}^{(k)}\vec{E}^{(l)}}_{\delta_{kl}} =$

$= \sum_k v_k \delta_{kl} = v_l$

$\Rightarrow \boxed{\vec{v}\,\vec{E}^{(l)} = v_l}$

a reciprokbázissal vett vektort megszorozva az adott komponenst

- operátorokkal: 78. old. ábra

$\hat{A} : V \to V \qquad \vec{v} \mapsto \vec{u} = \hat{A}\vec{v}$

$\{\vec{e}^{(k)}\}$ bázis

$\vec{v} = \sum_k v_k \vec{e}^{(k)}$ $\qquad \hat{A}\vec{e}^{(k)} = \vec{f}^{(k)}$

$\vec{u} = \hat{A}\vec{v} = \hat{A}\left(\sum_k v_k \vec{e}^{(k)}\right) = \sum_k v_k (\hat{A}\vec{e}^{(k)}) = \sum_k v_k \vec{f}^{(k)}$

$v_k = \vec{E}^{(k)}\vec{v}$ (ahol v_k)

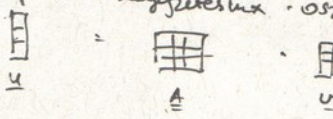
$u_l = \vec{E}^{(l)}\vec{u} \qquad \vec{u} = \sum_l u_l \vec{e}^{(l)}$

$u_l = \vec{E}^{(l)}\vec{u} = \vec{E}^{(l)}\left(\sum_k v_k \vec{f}^{(k)}\right) = \sum_k v_k \left(\vec{E}^{(l)}\vec{f}^{(k)}\right) = \sum_k v_k A_{lk} = \sum_k A_{lk} v_k$

A_{lk} ($\underline{\underline{A}}$)

$u_l = \sum_k A_{lk} v_k$ ← oszlopvektor = négyzetes mátrix · oszlopvektor. forma

$\boxed{\underline{u} = \underline{\underline{A}}\,\underline{v}}$



= az operátort négyzetes mátrixszal lehet reprezentálni

$A_{lk} = f_l^{(k)} = \vec{E}^{(l)}\vec{f}^{(k)} = \vec{E}^{(l)}(\hat{A}\vec{e}^{(k)})$

↑ mátrixelemek

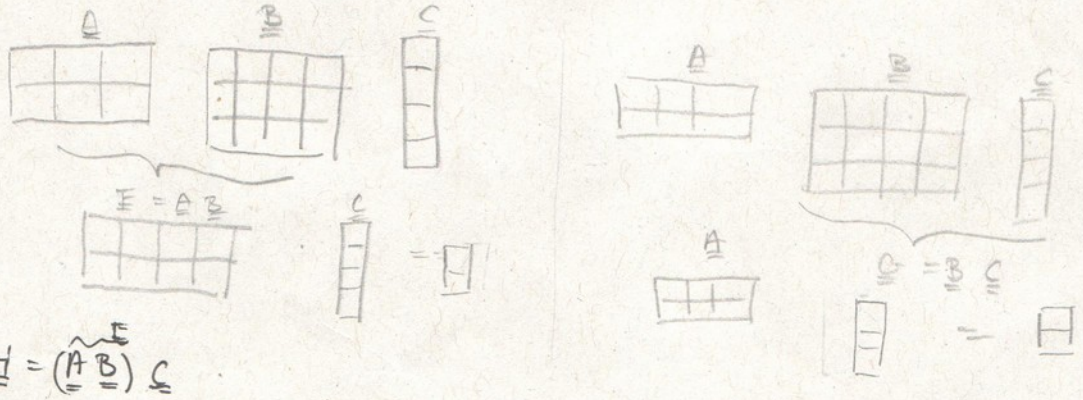
$\langle E^{(l)} | \hat{A} | e^{(k)} \rangle$ szendvics

$\vec{u} = \hat{A}\vec{v} \dashrightarrow \underline{u} = \underline{\underline{A}}\,\underline{v}$

$u_k = \sum_l A_{kl} v_l \qquad A_{kl} = \vec{E}^{(k)}(\hat{A}\vec{e}^{(l)})$

$u_k = \vec{E}^{(k)}\vec{v}$

- a mátrixok szorzása asszoc.



$\underline{\underline{H}} = (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})\,\underline{\underline{C}}$

$H_{kl} = (\underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{C}})_{kl} = \sum_m E_{km} C_{ml} = \sum_m (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})_{km} C_{ml} = \sum_m \left(\sum_p A_{kp} B_{pm}\right) C_{ml} =$

$= \sum_m \sum_p A_{kp} B_{pm} C_{ml} = \sum_p \sum_m A_{kp} B_{pm} C_{ml} = \sum_p A_{kp} \left(\sum_m B_{pm} C_{ml}\right) = \sum_p A_{kp} G_{pl} = (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{G}})_{kl}$

összegzésindexek

G_{pl}

$(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{D}})_{kl} = \sum_p \sum_q \sum_r A_{kp} B_{pq} C_{qr} D_{rl}$

$\Rightarrow (AB)C = A(BC)$

négyzetes mátrixok; asszoc. algebrát alkotnak

09.02.
sze 15-16.ea

Operátorok műveletei

$\underline{u} = \underline{\underline{A}}\,\underline{v}$ $\qquad u_k = \sum_l A_{kl} v_l$ $\qquad A_{kl} = \vec{E}^{(k)} (\hat{A}\, \vec{e}^{(l)})$

spec. eset: ONB $\quad \vec{e}^{(k)} \vec{e}^{(l)} = \delta_{kl} \qquad \vec{E}^{(k)} = \vec{e}^{(k)}$

az ONB önmaga reciproka

összeadás

$\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$

$\hat{C}\vec{v} = \hat{A}\vec{v} + \hat{B}\vec{v}$

$(\hat{C}\vec{v})_k = (\hat{A}\vec{v})_k + (\hat{B}\vec{v})_k = (\sum_l A_{kl} v_l) + (\sum_l B_{kl} v_l) = \sum_l (A_{kl} + B_{kl}) v_l$

$(\underline{\underline{C}}\,\underline{v})_k = \sum_l C_{kl} v_l \qquad C_{kl} = A_{kl} + B_{kl}$

$\Rightarrow \hat{C} = \hat{A} + \hat{B} \quad \rightleftarrows \quad \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$ művelettartó reprezentációk kölcsönös megfeleltetés

skalárral szorzás

$\hat{D} = \alpha \hat{A}$

$\hat{D}\vec{v} = \alpha \hat{A}\vec{v}$

$(\hat{D}\vec{v})_k = \alpha (\hat{A}\vec{v})_k = \alpha (\sum_l A_{kl} v_l) = \sum_l \alpha A_{kl} v_l$

$(\underline{\underline{D}}\,\underline{v})_k = \sum_l D_{kl} v_l \qquad D_{kl} = \alpha A_{kl}$ //

$\Rightarrow \hat{D} = \alpha \hat{A} \quad \rightleftarrows \quad \underline{\underline{D}} = \alpha \cdot \underline{\underline{A}}$

operátorok szorzása

$\hat{F} = \hat{A}\hat{B}$

$\vec{w} = \hat{F}\vec{v} = \hat{A}(\hat{B}\vec{v}) \qquad \vec{u} = \hat{B}\vec{v} \qquad \vec{w} = \hat{A}\vec{u}$

$u_l = (\hat{B}\vec{v})_l = (\underline{\underline{B}}\,\underline{v})_l = \sum_m B_{lm} v_m$

$w_k = (\hat{A}\vec{u})_k = (\underline{\underline{A}}\,\underline{u})_k = \sum_l A_{kl} u_l$

$w_k = \sum_l A_{kl} u_l = \sum_l A_{kl} (\sum_m B_{lm} v_m) = \sum_l \sum_m A_{kl} B_{lm} v_m = \sum_m \underbrace{(\sum_l A_{kl} B_{lm})}_{(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})_{km}} v_m =$

$= \sum_m (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})_{km} v_m$

$w_k = \sum_m F_{km} v_m \qquad F_{km} = \sum_l A_{ml} B_{lm} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$

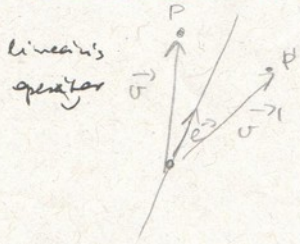
$\Rightarrow \hat{F} = \hat{A}\hat{B} \quad \rightleftarrows \quad \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$

$\hat{F} = \hat{A}\hat{B}$	$\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$	$\hat{D} = \alpha \hat{A}$
$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$	$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$	$\underline{\underline{D}} = \alpha \underline{\underline{A}}$

megfeleltetés de csak adott bázison értelmes

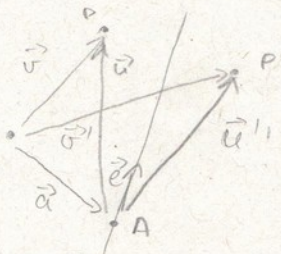
nemlineáris operátor

pl. tükrözés, mikor nem felszín az origó a tengelyen: ∈ nemlineáris operátor



lineáris operátor

$\vec{v}' = 2(\vec{e}\vec{v})\vec{e} - \vec{v} = \hat{T}\vec{v}$



tükrözőtengely: $\vec{e}$ egyenese

$\vec{u}' = 2(\vec{e}\vec{u})\vec{e} - \vec{u}$

$\vec{v} = \vec{a} + \vec{u} \rightarrow \vec{u} = \vec{v} - \vec{a}$

$\vec{v}' = \vec{a} + \vec{u}'$

ellobjuk az origót (ld. Cayley számok analógia)

ha nem 'A' a kezdőpont

$B \Rightarrow \vec{a} \rightarrow \vec{b}$

$\vec{c} = f(\vec{a})$

↑ ösztönös?

mértékválasztási probléma

(gauge transformation)

önkényesen kell választani, de mindig választani

$\vec{v}' = \vec{a} + \vec{u}' = \vec{a} + [2(\vec{e}\vec{u})\vec{e} - \vec{u}] =$

$= \vec{a} + [2(\vec{e}(\vec{v}-\vec{a}))\vec{e} - (\vec{v}-\vec{a})] =$

$= \vec{a} + 2(\vec{e}\vec{v})\vec{e} - 2(\vec{e}\vec{a})\vec{e} - \vec{v} + \vec{a} =$

$= 2(\vec{e}\vec{v})\vec{e} - \vec{v} + [2\vec{a} - 2(\vec{e}\vec{a})\vec{e}]$

$\vec{c}$ új vektor

$\vec{v}' = \hat{T}\vec{v} + \vec{c}$

$\vec{a}$-ból és $\vec{b}$-ből kiszámolható $\vec{c}$ mindig van. (invertálás)

↑ bizt.:

ha A és B egy egyenesen: $\vec{b} = \vec{a} + \lambda\vec{e}$ mindkettő az $\vec{e}$ egyenesen van

$f(\vec{b}) = 2\vec{b} - 2(\vec{e}\vec{b})\vec{e} = 2(\vec{a}+\lambda\vec{e}) - 2(\vec{e}(\vec{a}+\lambda\vec{e}))\vec{e} =$

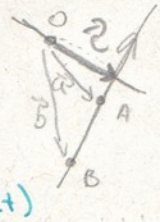
$= 2\vec{a} + 2\lambda\vec{e} - 2(\vec{e}\vec{a} + \lambda\vec{e}\vec{e})\vec{e} = 2\vec{a} + 2\lambda\vec{e} - 2(\vec{e}\vec{a})\vec{e} - 2\lambda(\vec{e}\vec{e})\vec{e} =$

$= 2\vec{a} - 2(\vec{e}\vec{a})\vec{e} = f(\vec{a}) = \vec{c}$

$\vec{c} = 2\vec{a} - 2(\vec{e}\vec{a})\vec{e} = 2[\vec{a} - \vec{e}(\vec{e}\vec{a})] = 2[\vec{a} - (\vec{e}\circ\vec{e})\vec{a}] =$

$= \text{ezért } 2(\hat{1}\vec{a} - \hat{P}\vec{a}) = 2(\hat{1} - \hat{P})\vec{a} = 2\hat{Q}\vec{a}$

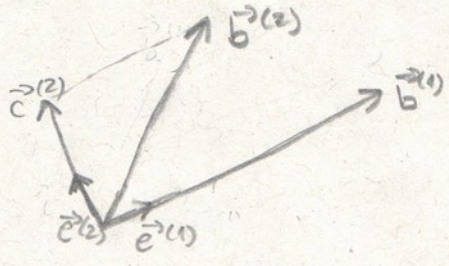
Q - a merőleges egyenesre való vetület



általunkelyt segédelvekkal vesszük, a merőlegesre való vetület kiindulva.

ortogonalizáció (Gram-Schmidt)

- nem ONB - ből ONB -t csinál



1) $\vec{b}^{(1)}\vec{b}^{(1)} = |\vec{b}^{(1)}|^2$

$\vec{e}^{(1)} = \vec{b}^{(1)} / |\vec{b}^{(1)}|$ ← normált bázis alkotható, mert $|\vec{b}^{(1)}| \neq 0$ (lineárisan független)

2) $\vec{b}^{(2)} \overset{?}{\perp} \vec{e}^{(1)}$ nem

felbontjuk komponensekre

ezeket bázis: $\vec{b}^{(1)}$ $\vec{b}^{(2)}$

ONB : $\vec{e}^{(1)}$, $\vec{c}^{(2)}$

2) Jelloutjuk komponenseket

$\vec{b}^{(2)} = \hat{1}\,\vec{b}^{(2)} = (\hat{P}+\hat{Q})\vec{b}^{(2)}$

3) $\vec{c}^{(2)} = \hat{Q}\,\vec{b}^{(2)} = (\hat{1}-\hat{P})\vec{b}^{(2)} = \vec{b}^{(2)} - \hat{P}\,\vec{b}^{(2)}$

$\vec{c}^{(2)} = \vec{b}^{(2)} - \hat{P}\,\vec{b}^{(2)} = \vec{b}^{(2)} - (\vec{e}^{(1)} \circ \vec{e}^{(1)})\,\vec{b}^{(2)} = \vec{b}^{(2)} - \vec{e}^{(1)}(\vec{e}^{(1)}\vec{b}^{(2)}) =$

$\vec{c}^{(2)}\vec{e}^{(1)} = \vec{b}^{(2)}\vec{e}^{(1)} - (\vec{e}^{(1)}\vec{b}^{(2)})\underbrace{\vec{e}^{(1)}\vec{e}^{(1)}}_{1} = 0$ ← skalárszorzat 0 ⇒ ⊥

4) $\vec{e}^{(2)} = \dfrac{\vec{c}^{(2)}}{|\vec{c}^{(2)}|}$ normálás

⋮ az összes dimenzióra

diadikus szorzat: oszlopvektor sor szorozva

ⓕ bázist alkotnak-e?

$\underline{b}^{(1)} = \begin{pmatrix}3\\4\\-12\end{pmatrix}$ $\underline{b}^{(2)} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\underline{b}^{(3)} = \begin{pmatrix}-4\\-5\\6\end{pmatrix}$

- $|\underline{b}^{(1)}|^2 = \underline{b}^{(1)}\,\underline{b}^{(1)} = 3^2+4^2+(-12)^2 = 169 \Rightarrow |\underline{b}^{(1)}| = 13$

$\underline{e}^{(1)} = \dfrac{\underline{b}^{(1)}}{|\underline{b}^{(1)}|} = \dfrac{1}{13}\begin{pmatrix}3\\4\\-12\end{pmatrix}$

- $\underline{c}^{(2)} = \underline{b}^{(2)} - \underline{\underline{P}}\,\underline{b}^{(2)}$

$\underline{\underline{P}} = \underline{e}^{(1)} \circ \underline{e}^{(1)} = \dfrac{1}{169}\begin{pmatrix}3\\4\\-12\end{pmatrix}(3\ 4\ -12) =$

$= \dfrac{1}{169}\begin{pmatrix}9 & 12 & -36\\ 12 & 16 & -48\\ -36 & -48 & 144\end{pmatrix}$

$\vec{u} = (\vec{a}\circ\vec{b})\vec{v} = \vec{a}(\vec{b}\vec{v})$

$\underline{u} = \qquad = \underline{a}(\underline{b}\,\underline{v})$

$u_i = a_i(\underline{b}\,\underline{v}) = a_i\left(\sum_k b_k v_k\right) = \sum_k a_i b_k v_k$

$\vec{u} = \hat{P}\vec{v} \Rightarrow \underline{u} = \underline{\underline{P}}\,\underline{v}$

$u_i = \sum_k P_{ik} v_k$

$\Rightarrow P_{ik} = a_i b_k$

$\underline{\underline{P}}\,\underline{b}^{(2)} = \dfrac{1}{169}\begin{pmatrix}9 & 12 & -36\\ 12 & 16 & -48\\ -36 & -48 & 144\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} =$

$= \dfrac{1}{169}\begin{pmatrix}9\cdot1+12\cdot2-36\cdot3 = -75\\ 12\cdot1+16\cdot2-48\cdot3 = -100\\ -36\cdot1-48\cdot2+144\cdot3 = 300\end{pmatrix} = \dfrac{1}{169}\begin{pmatrix}-75\\-100\\300\end{pmatrix} = \dfrac{25}{169}\begin{pmatrix}-3\\-4\\12\end{pmatrix} \quad \| \underline{b}^{(2)}$

$\underline{\underline{P}}\,\vec{b}^{(2)} = (\underline{e}^{(1)} \circ \underline{e}^{(1)})\,\underline{b}^{(2)} = \underline{e}^{(1)}(\underline{e}^{(1)}\underline{b}^{(2)}) =$

$\underline{e}^{(1)}\underline{b}^{(2)} = \dfrac{1}{13}(3\ 4\ -12)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = -\dfrac{25}{13}$

$\Rightarrow P\,b^{(2)} = \underline{e}^{(1)}\left(-\dfrac{25}{13}\right) = \dfrac{-25}{169}\begin{pmatrix}3\\4\\-12\end{pmatrix}$

$\underline{c}^{(2)} = \underline{b}^{(2)} - \underline{\underline{P}}\,\underline{b}^{(2)} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \dfrac{25}{169}\begin{pmatrix}-3\\-4\\12\end{pmatrix} = \dfrac{1}{169}\begin{pmatrix}169\\338\\507\end{pmatrix} - \dfrac{25\cdot1}{169}\begin{pmatrix}-75\\-100\\300\end{pmatrix} \Rightarrow$

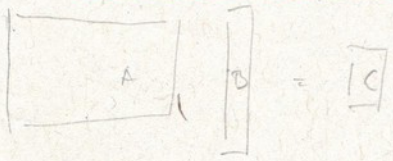
$\underline{c}^{(2)} = \dfrac{1}{169}\begin{pmatrix}244\\438\\207\end{pmatrix}$

$\underline{c}^{(2)} \perp ? \ \underline{b}^{(1)}$

$\underline{c}^{(2)}\underline{b}^{(1)} = \dfrac{1}{169}\begin{pmatrix}244\\438\\207\end{pmatrix}\dfrac{1}{169}(244, 438, 207)\begin{pmatrix}3\\4\\-12\end{pmatrix} = 0$

- $\underline{c}^{(2)}$ normálás

operátorműveletek spec. esetei



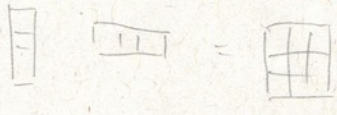
$C_{re} = \sum_m A_{rm} B_{me}$

spec. eset

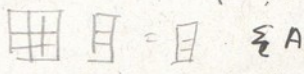
- skaláris szorzás: reprezentációja



- diadikus szorzás

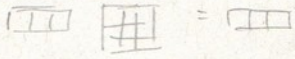


- négyzetes mx. · oszlopvekt.



$\sum_k A_{rk} b_k = c_r$ $\quad \underline{\underline{A}}\,\underline{b} = \underline{c}$ $\quad \hat{A}\vec{b} = \vec{c}$

- sorvekt. · négyzetes mx.



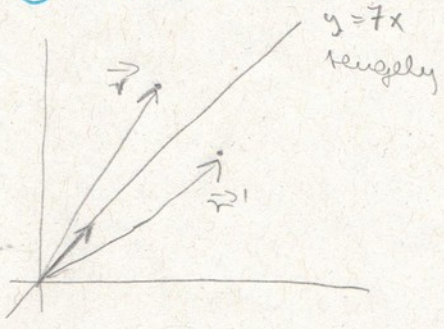
$\sum_k c_k A_{kr} = b_r$

- négyzetes mx · négyzetes mx.



$\sum_m A_{rm} B_{mr} = C_{rr}$ $\quad \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}$ $\quad \hat{A}\hat{B} = \hat{C}$

⊕ tengelyre tükr.



vektorra vektor: $\vec{r}$

$\vec{r}' = \hat{T}\vec{r} = (2\hat{P} - \hat{1})\vec{r}$ $\quad \hat{P} = \vec{e} \circ \vec{e}$

$\underline{r}' = \underline{\underline{T}}\,\underline{r} = (2\underline{\underline{P}} - \underline{\underline{1}})\underline{r}$ $\quad \underline{\underline{P}} = \underline{e} \circ \underline{e}$

egyenes irányú egyrétegvektor:

$\underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ egyenesen $\quad \underline{e} = \frac{1}{\sqrt{50}} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{P}} = \underline{e} \circ \underline{e} =$ nem menedhat az eredményben $\sqrt{}$ (hiba)

$= \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} (1,7) = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 49 \end{pmatrix}$

tükrözésmátrix

$\underline{\underline{T}} = 2\underline{\underline{P}} - \underline{\underline{1}} = \frac{2}{50} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 49 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 49 \end{pmatrix} - \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -24 & 7 \\ 7 & 24 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{T}}^2 = 1$ ellenőrzésképp

$\underline{\underline{T}}^2 = \frac{1}{625} \begin{pmatrix} -24 & 7 \\ 7 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -24 & 7 \\ 7 & 24 \end{pmatrix} = \frac{1}{625} \begin{pmatrix} 576+49 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix} = \frac{1}{625} \begin{pmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

$\underline{r}' = \underline{\underline{T}}\,\underline{r}$

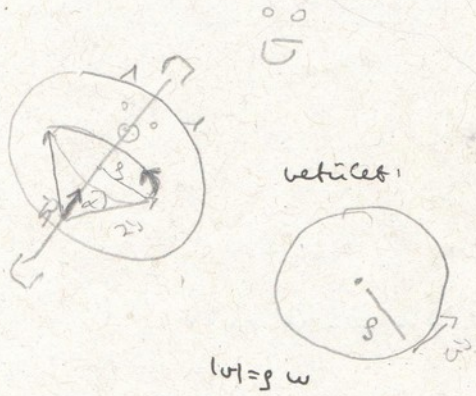
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underline{\underline{T}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -24 & 7 \\ 7 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -24x + 7y \\ 7x + 24y \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$

$$x' = -\frac{24}{25}x + \frac{7}{25}y$$

$$y' = \frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y$$

Vektoriális szorzat

- 3D-s vektorokra speciálisan értelmezett művelet
- Merőleges körüli forgatás



$\vec{n}$ és $\vec{r}$ -re is merőleges a sebesség

$|v| = \varrho\,\omega \qquad \varrho = |r| \sin\alpha$

$\Rightarrow |v| = |r| \sin\alpha\ \omega$

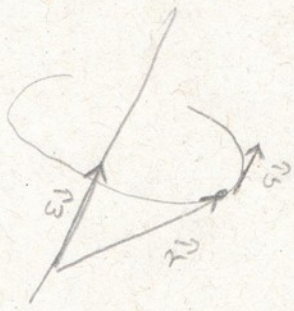
$\vec{\omega}$: $|\vec{\omega}| = \omega = \frac{2\pi}{T}$ iránya: $\vec{n} \parallel \vec{\omega}$

$\vec{\omega} = \vec{n}\,\omega$

α : $\vec{\omega}$ és $\vec{r}$ szöge

jobbsodrás:
jobbkéz
ujjak irányába forog $\rightarrow \omega$ hüvelyk

$|\vec{v}| = |\vec{\omega}|\,|\vec{r}| \sin\alpha$



$\vec{v} \perp \vec{\omega}$
$\vec{v} \perp \vec{r}$

- def.: $\times : V \times V \rightarrow V \quad \dim V = 3$

$(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

$|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\alpha$
$\vec{c} \perp \vec{a}, \ \vec{c} \perp \vec{b}$

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Lorentz-erő: $\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$

szalárral szorzás: $V \times \mathbb{R} \rightarrow V$
skaláris szorzás: $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$
diadikus szorzás: $V \times V \rightarrow 0$
vektoriális szor.: $V \times V \rightarrow V$

- antikommutatív: $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$
- önmagával szorzás: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ mert $\alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha = 0$

két vektor vekt. szorzata 0 $\Rightarrow$ a vektorok párhuzamosak

- asszoc.: NEM $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

$\vec{a}, \vec{b}$ szerint $\qquad \vec{b}, \vec{c}$ szerint

- $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{a}) \times \vec{c} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = 0$

Jacobi-azonosság

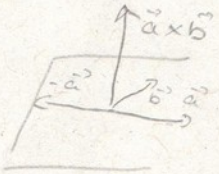
- vektorok algebrát alkotnak (ld. operátorok, négyzetes mátrixok)

= Lie-algebra

vektorösszeadás, skalárral szorzás, vektoriális szorzat miatt
$(V_3, +, \cdot \times)$ 3D-s vektorok erre a műveletekkel Lie-algebrát alkotnak

- $(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \alpha(\vec{a} \times \vec{b})$

ha $\alpha > 0$, egyértelmű
ha $\alpha < 0$, akkor is



- disztr.: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$

= a vektoriális szorzat lineáris művelet

$\vec{a} \times \vec{y} = \vec{u} = f(\vec{y})$

$\vec{a} \times (\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \vec{a} \times \vec{y}_1 + \vec{a} \times \vec{y}_2$
$\vec{a} \times (\alpha\vec{y}) = \alpha(\vec{a} \times \vec{y})$

} vektor. szor. lineáris operátor

$\hat{A}\vec{y} = \vec{u}$



először levetít $\vec{a}$-ra merőleges síkra
majd elforgatja 90°-kal

- invertálható: NEM

ment van benne egy projekciós lépés

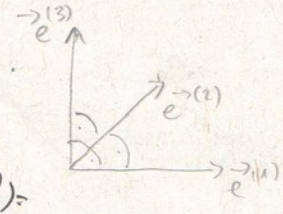
pl. $\vec{y}_2 = \vec{y}_1 + \lambda \vec{a}$

Ekkor $\hat{A}\vec{y}_2 = \vec{a} \times \vec{y}_2 = \vec{a} \times (\vec{y}_1 + \lambda\vec{a}) = \vec{a} \times \vec{y}_1 + \vec{a} \times \lambda\vec{a} =$

$= \vec{a} \times \vec{y}_1 + \lambda \underbrace{\vec{a} \times \vec{a}}_{0} = \vec{a} \times \vec{y}_1 = \hat{A}\vec{y}_1$

- ONB-ou vett vektorral

$\vec{e}^{(k)} \vec{e}^{(l)} = \delta_{kl}$



$\vec{a} = a_1\vec{e}^{(1)} + a_2\vec{e}^{(2)} + a_3\vec{e}^{(3)}$

$\vec{b} = b_1\vec{e}^{(1)} + b_2\vec{e}^{(2)} + b_3\vec{e}^{(3)}$

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_1\vec{e}^{(1)} + a_2\vec{e}^{(2)} + a_3\vec{e}^{(3)}) \times (b_1\vec{e}^{(1)} + b_2\vec{e}^{(2)} + b_3\vec{e}^{(3)}) =$

$= a_1b_1(\vec{e}^{(1)} \times \vec{e}^{(1)}) + a_1b_2(\vec{e}^{(1)} \times \vec{e}^{(2)}) + a_1b_3(\vec{e}^{(1)} \times \vec{e}^{(3)}) +$

$+ a_2b_1(\vec{e}^{(2)} \times \vec{e}^{(1)}) + a_2b_2(\vec{e}^{(2)} \times \vec{e}^{(2)}) + a_2b_3(\vec{e}^{(2)}\vec{e}^{(3)}) +$

$+ a_3b_1(\vec{e}^{(3)} \times \vec{e}^{(1)}) + a_3b_2(\vec{e}^{(3)} \times \vec{e}^{(2)}) + a_3b_3(\vec{e}^{(3)}\vec{e}^{(3)}) =$ bonyolódik

- a struktúra (újonnan bevezetett) algebra ← bináris és nonasz definíciója

$* \quad V \times V \to V$

$\vec{a} * \vec{b} \Rightarrow \vec{c}$

$\vec{a} * (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} * \vec{b} + \vec{a} * \vec{c}$ } ⇒ lineáris

$\vec{a} * (\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a} * \vec{b})$

← kompatibilis a lineáris műveletekkel (következnek a disztr.)

$\vec{a} = \sum_k a_k \vec{e}^{(k)} \qquad \vec{b} = \sum_l b_l \vec{e}^{(l)}$

$\vec{c} = \vec{a} * \vec{b} = \left(\sum_k a_k \vec{e}^{(k)}\right) * \left(\sum_l b_l \vec{e}^{(l)}\right) = \sum_k \sum_l a_k b_l (\vec{e}^{(k)} * \vec{e}^{(l)}) =$

$\vec{e}^{(k)} * \vec{e}^{(l)} = \sum_m C_m^{kl} \vec{e}^{(m)}$ mert a vektorok felírhatóak a bázisok lineárisjaként

C_m^{kl} ← az algebra struktúraállandója

$= \sum_k \sum_l a_k b_l \left(\sum_m C_m^{kl} \vec{e}^{(m)}\right) = \sum_m \left(\sum_k \sum_l C_m^{kl} a_k b_l\right) \vec{e}^{(m)} =$

$= \vec{c} = \sum_m c_m \vec{e}^{(m)}$

C_m^{kl} – harmadrendű tenzor

$\Rightarrow \boxed{c_m = \sum_k \sum_l C_m^{kl} a_k b_l}$

- ONB-u vett vektorok, folyt.

struktúra-állandók

str. állandók

$\vec{e}^{(1)} \times \vec{e}^{(1)} = \vec{0} = 0\vec{e}^{(1)} + 0\vec{e}^{(2)} + 0\vec{e}^{(3)}$

$\vec{e}^{(1)} \times \vec{e}^{(2)} = \vec{e}^{(3)} = 0\vec{e}^{(1)} + 0\vec{e}^{(2)} + 1\vec{e}^{(3)}$

$\vec{e}^{(1)} \times \vec{e}^{(3)} = -\vec{e}^{(2)} = 0\vec{e}^{(1)} + (-1)\vec{e}^{(2)} + 0\vec{e}^{(3)}$

$\vec{e}^{(2)} \times \vec{e}^{(1)} = -\vec{e}^{(3)} = 0\vec{e}^{(1)} + 0\vec{e}^{(2)} + (-1)\vec{e}^{(3)}$

$\vec{e}^{(2)} \times \vec{e}^{(2)} = 0 = 0\vec{e}^{(1)} + 0\vec{e}^{(2)} + 0\vec{e}^{(3)}$

$\vec{e}^{(2)} \times \vec{e}^{(3)} = \vec{e}^{(1)} = 1\vec{e}^{(1)} + 0\vec{e}^{(2)} + 0\vec{e}^{(3)}$

$\vec{e}^{(3)} \times \vec{e}^{(1)} = \vec{e}^{(2)} = 0\vec{e}^{(1)} + 1\vec{e}^{(2)} + 0\vec{e}^{(3)}$

$\vec{e}^{(3)} \times \vec{e}^{(2)} = -\vec{e}^{(1)} = (-1)\vec{e}^{(1)} + 0\vec{e}^{(2)} + 0\vec{e}^{(3)}$

$\vec{e}^{(3)} \times \vec{e}^{(3)} = 0 = 0\vec{e}^{(1)} + 0\vec{e}^{(2)} + 0\vec{e}^{(3)}$

véges sok művelet szabály felállítása ⇒ ∞ sok vektor leírható

$$\vec{e}^{(k)} \times \vec{e}^{(l)} = \sum_m \varepsilon_{klm} \vec{e}^{(m)}$$

$k, l \to \vec{e}$ · k indexe

$m \to$ az eredmény hanyadik komponense

ε_{klm} : Levi-Civita együtthatók

$\varepsilon_{123} = 1$ $\quad \varepsilon_{231} = 1 \quad \varepsilon_{312} = 1$ ← az indexek ciklikus permutációja



$\varepsilon = -1$ ha

$\varepsilon_{132} = -1 \quad \varepsilon_{213} = -1 \quad \varepsilon_{321} = -1$ ← az indexek anticiklikus permutációi

= az indexek összes permutációja szerepel

$\varepsilon = 0$ ha

$\varepsilon_{111}, \varepsilon_{112}, \varepsilon_{122}, \varepsilon_{133}, \varepsilon_{332}, \dots$ ← ha valamelyik 2 index megegyezik
$\Rightarrow \varepsilon = 0$

$\varepsilon_{klm} = -\varepsilon_{lkm}$ ha bármelyik két indexet megcseréljük, az ellentettet kapjuk

$\varepsilon_{123} = -\varepsilon_{213} = 1$
$\varepsilon_{112} = -\varepsilon_{112} = 0$

$\Rightarrow \varepsilon$ teljesen antiszimmetrikus

$\vec{c}$ = borzadály $= a_1 b_1 \vec{0} + a_1 b_2 \vec{e}^{(3)} + a_1 b_3 (-\vec{e}^{(2)}) + a_2 b_1 (-\vec{e}^{(3)}) +$
$+ a_2 b_2 \vec{0} + a_2 b_3 \vec{e}^{(1)} + a_3 b_1 (\vec{e}^{(2)}) + a_3 b_2 (-\vec{e}^{(1)}) + a_3 b_3 \vec{0} =$
$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{e}^{(1)} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{e}^{(2)} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{e}^{(3)}$

$\Rightarrow \vec{c} = c_1 \vec{e}^{(1)} + c_2 \vec{e}^{(2)} + c_3 \vec{e}^{(3)}$

$c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$
$c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3$
$c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$

← első tag: ciklikus perm.
2. tag: ellentettes

- azaz mátrixokkal: $c = a \times b$

$$\begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

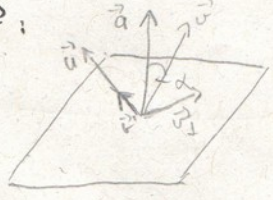
$\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b}$

$c_m = \sum_k \sum_l \varepsilon_{klm} a_k b_l$

ell.: az eredmény merőleges-e a-ra és b-re!

geometriailag:

$\vec{u} = \vec{a} \times \vec{v}$:



$\vec{v}_\perp = \hat{Q} \vec{v}$ $\quad \vec{a}$-ra merőleges

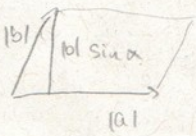
$\vec{v}' = F \vec{v}_\perp$ elforgatjuk $\vec{v}_\perp$-t 90°-kal

$\vec{u} = |a| \vec{v}'$ ez

$|\vec{u}| = |a| |v'| = |a| |v_\perp| = |a| |v| \sin\alpha$

disztr.: $\vec{a} \times (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{a} \times \vec{v}_1 + \vec{a} \times \vec{v}_2$

- a vektoriális szorzat abszolút értéke: a két vektor által kifeszített paralelogramma területe



$(\vec{a} \times \vec{b}) = |a| |b| \sin\alpha$

10.09.07.
Net 17.ea.

Jobbsodrású → vektoriális szorzás általánosítása n dimenzióban

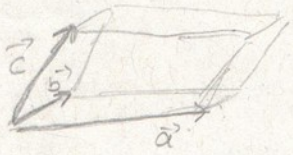
Vegyesszorzat (vektoriális & skaláris)

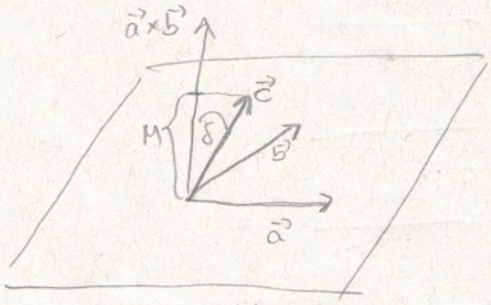
- dim = 3 $\quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \quad (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} \neq \alpha \in \mathbb{R}$

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \underbrace{|\vec{a} \times \vec{b}|}_{T} \underbrace{|\vec{c}| \cos\delta}_{M} =$$

T: terület, M: magasság

paralelepipedon térfogata





- ha a 3 vektor fordított sorrendben van
  $\Rightarrow$ negatív térfogat ↑ balsodrású rendszer

jelölés:

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$$

- ha a 3 vektor 1 síkba esik : térfogat = 0 (lineárisan függ)

- a térfogat nem csak ilyen sorrendből jön ki

$$\Rightarrow (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a})\vec{b} = (\vec{b} \times \vec{c})\vec{a}$$

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{c}\vec{a}\vec{b}) = (\vec{b}\vec{c}\vec{a}) =$$

$$= -(\vec{b}\vec{a}\vec{c}) = -(\vec{a}\vec{c}\vec{b}) = -(\vec{c}\vec{b}\vec{a})$$

← vegyesszorzat jelölése $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ vagy $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ vagy $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$

az $\vec{a}, \vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok 6 permutációja

antiszimmetrikus ~~mezőben~~ kifejezés

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{c}(\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a}\vec{c}\vec{a}\vec{b})$$

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: bázist alkotnak $\Rightarrow$ vektorok jelölhetők ezek lineáris kombinációként (lineárisan független)

$\forall \vec{v}: \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \quad \vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \quad / \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ ← $\vec{b}$-re és $\vec{c}$-re merőleges vektor

$$\vec{v}(\vec{b} \times \vec{c}) = \alpha\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) + \beta\vec{b}(\vec{b} \times \vec{c}) + \gamma\vec{c}(\vec{b} \times \vec{c})$$

$$(\vec{v}\vec{b}\vec{c}) = \alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) + \beta\underbrace{(\vec{b}\vec{b}\vec{c})}_{0} + \gamma\underbrace{(\vec{c}\vec{b}\vec{c})}_{0}$$

0, mert van benne két azonos vektor

$$(\vec{v}\vec{b}\vec{c}) = \alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$$

$$\boxed{\alpha = \frac{(\vec{a}\vec{b}\vec{c})}{(\vec{v}\vec{b}\vec{c})}}$$

← értelmes nevező, mert bázist alkotnak

$$\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \quad / \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$$ ← $\vec{c}$-re, $\vec{a}$-ra merőleges $\Rightarrow \beta$

$$(\vec{v}\vec{c}\vec{a}) = \alpha\underbrace{(\vec{a}\vec{c}\vec{a})}_{0} + \beta(\vec{b}\vec{c}\vec{a}) + \gamma\underbrace{(\vec{c}\vec{c}\vec{a})}_{0}$$

$$(\vec{a}\vec{v}\vec{c}) = \beta(\vec{b}\vec{c}\vec{a}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta = \frac{(\vec{a}\vec{v}\vec{c})}{(\vec{b}\vec{c}\vec{a})}}$$

$$\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \quad / \cdot (\vec{b} \times \vec{a})$$

$$\vec{v}(\vec{a} \times \vec{b}) = \alpha\vec{a}(\vec{a} \times \vec{b}) + \beta\vec{b}(\vec{b} \times \vec{a}) + \gamma\vec{c}(\vec{b} \times \vec{a})$$

$$\boxed{\gamma = \frac{(\vec{a}\vec{b}\vec{v})}{(\vec{a}\vec{b}\vec{c})}}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{(\vec{v}\vec{b}\vec{c})}{(\vec{a}\vec{b}\vec{c})}} \qquad \boxed{\beta = \frac{(\vec{a}\vec{v}\vec{c})}{(\vec{a}\vec{b}\vec{c})}} \qquad \boxed{\gamma = \frac{(\vec{a}\vec{b}\vec{v})}{(\vec{a}\vec{b}\vec{c})}}$$

Cramer-szabály

reciprokrázis

$\vec{a} = 1\vec{a} + 0\vec{b} + 0\vec{c} \Rightarrow \alpha = \frac{(\vec{a}\vec{b}\vec{c})}{(\vec{a}\vec{b}\vec{c})} = 1 = \frac{\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})}{(\vec{a}\vec{b}\vec{c})} = \vec{a}\left(\frac{\vec{b}\times\vec{c}}{(\vec{a}\vec{b}\vec{c})}\right) = 1$ — legyen $\vec{A}$

legyen:

$\vec{A} = \frac{\vec{b}\times\vec{c}}{(\vec{a}\vec{b}\vec{c})}$

$\vec{B} = \frac{\vec{c}\times\vec{a}}{(\vec{a}\vec{b}\vec{c})}$

$\vec{C} = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{(\vec{a}\vec{b}\vec{c})}$

$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ és $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: reciprokbázisok

reciprokb. def.-ja:

$\vec{a}\vec{A} = 1$, $\vec{b}\vec{A} = 0$, $\vec{c}\vec{A} = 0$

$\vec{a}\vec{B} = 0$, $\vec{b}\vec{B} = 1$, $\vec{c}\vec{B} = 0$

$\vec{a}\vec{C} = 0$, $\vec{b}\vec{C} = 0$, $\vec{c}\vec{C} = 1$

$\Leftarrow$

$\frac{(\vec{b}\vec{b}\vec{c})}{(\vec{a}\vec{b}\vec{c})} = \vec{b}\left(\frac{\vec{b}\times\vec{c}}{(\vec{a}\vec{b}\vec{c})}\right) = 0$

$\vec{c}\left(\frac{\vec{b}\times\vec{c}}{(\vec{a}\vec{b}\vec{c})}\right) = 0$

$\vec{e}^{(k)}\vec{E}^{(l)} = \delta_{kl}$

reciprok-bázis definíciója a 3D-s térben

ONB-ön vett reprezentáció

$\{\vec{e}^{(k)}\}$ $\vec{e}^{(k)}\vec{e}^{(l)} = \delta_{kl}$ ⇐ ONB

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ reprezentációja: $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$

$\underline{d} = \underline{a}\times\underline{b} \Rightarrow d_k = \sum_l \sum_m \varepsilon_{klm} a_l b_m$

$(\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}) = (\underline{a}\times\underline{b})\underline{c} = \sum_k (a\times b)_k c_k = \sum_k \left(\sum_l \sum_m \varepsilon_{klm} a_l b_m\right) c_k =$

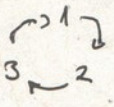
$= \sum_k \sum_l \sum_m \varepsilon_{klm} a_l b_m c_k = \sum_l \sum_m \sum_k \varepsilon_{lmk} a_l b_m c_k$

↑ 1 db képlet, mert $(\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}) \in \mathbb{R}$ (nincs indexe)

27 tag, de csak 6 db nem nulla

$(\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}) = \varepsilon_{123} a_1 b_2 c_3 + \varepsilon_{213} a_2 b_1 c_3 + \varepsilon_{312} a_3 b_1 c_2 + \varepsilon_{132} a_1 b_3 c_2 + \varepsilon_{231} a_2 b_3 c_1 + \varepsilon_{321} a_3 b_2 c_1 + 0 + \dots$

$(\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}) = a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1$



ha $(\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}) = 0$, a $\vec{a}, \vec{b}$ és $\vec{c}$ egy síkban (lineárisan függő)

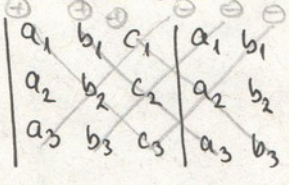
$\det(a,b,c)$ ← determináns ♡

$\|$

$$(\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}) = \underline{a}(\underline{b}\times\underline{c}) = (\underline{a}\times\underline{b})\underline{c}$$

↖ négyzetes mátrixnak ki lehet számítani a determinánsát

Sarrus-szabály:



$= a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3$

pl. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -7 & 3 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & -7 \end{matrix}$ $= 3\cdot 0\cdot 3 + 4\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot(-7) - 2\cdot 0\cdot 1 - 3\cdot 1\cdot(-7) - 4\cdot 2\cdot 3 =$

$= 0 + 4 - 28 - 0 + 21 - 24 = -27$ $\neq 0 \Rightarrow$ a 3 vektor lineárisan független

$< 0 \Rightarrow$ balsodrású rsz

$\underline{a} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ $\underline{b} = \begin{pmatrix}4\\0\\-7\end{pmatrix}$ $\underline{c} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ bázis $\quad \underline{v} = \begin{pmatrix}5\\12\\-4\end{pmatrix} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c}$

Cramer

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix}5 & 4 & 2\\12 & 0 & 1\\-4 & -7 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 4 & 2\\2 & 0 & 1\\1 & -7 & 3\end{vmatrix}} \quad \} 27$$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix}3 & 5 & 2\\2 & 12 & 1\\1 & -4 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 4 & 2\\2 & 0 & 1\\1 & -7 & 3\end{vmatrix}}$$

$$\gamma = \frac{\begin{vmatrix}3 & 4 & 5\\2 & 0 & 12\\1 & -7 & -4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 4 & 2\\2 & 0 & 1\\1 & -7 & 3\end{vmatrix}}$$

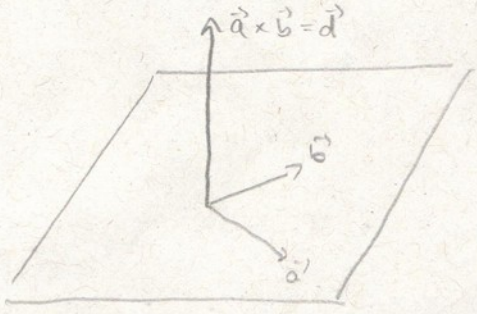
avagy: $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\alpha + \begin{pmatrix}4\\0\\-7\end{pmatrix}\beta + \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\gamma = \begin{pmatrix}5\\12\\-4\end{pmatrix}$

$3\alpha + 4\beta + 2\gamma = 5$
$2\alpha + 0\beta + 1\gamma = 12$
$1\alpha - 7\beta + 3\gamma = -4$

lin. eq. sys.

Kettős vektorszorzat

$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} \quad \in V$



$(\vec{a}\times\vec{b}) \perp a \perp b$

$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} \perp (\vec{a}\times\vec{b}) \Rightarrow$ $\vec{a}, \vec{b}$ síkjában

$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$

$\vec{v} = (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \vec{d}\times\vec{c}$ $\quad \vec{d} := (\vec{a}\times\vec{b})$

$\vec{d}\times\vec{c} =$

$$v_r = \sum_l \sum_m \varepsilon_{rlm}\, d_l\, c_m$$

$$d_l = \sum_p \sum_q a_p\, b_q\, \varepsilon_{lpq}$$

$\vec{v} = (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} \Rightarrow$

$$v_r = \sum_l \sum_m \sum_p \sum_q \varepsilon_{rlm}\,\varepsilon_{lpq}\, a_p\, b_q\, c_m =$$

$$= \sum_m \sum_p \sum_q \Big(\sum_l \varepsilon_{rlm}\,\varepsilon_{lpq}\Big) a_p\, b_q\, c_m =$$

$\varepsilon_{rlm} = \varepsilon_{mrl}$ (ciklikus permut.)

81 tagú összeg ($\times 3$ komponens)

$$\sum_l \varepsilon_{mrl}\,\varepsilon_{lpq} = \delta_{mp}\,\delta_{rq} - \delta_{mq}\,\delta_{rp}$$

$\varepsilon_{mrl}\,\varepsilon_{lpq}$ csak akkor nem 0, ha az (m,r) és (p,q) számpárok uarok

lehetőségek: $m=p$ és $r=q$ vagy $m=q$ és $r=p$

és $\rightarrow m \neq r$, $p \neq q$

$\delta_{mq}\,\delta_{rp}$: neg. előjel, mert ekkor az esetben az egyik $\varepsilon = 1$, a másik $\varepsilon = -1$

$$= \sum_m \sum_p \sum_q \big(\delta_{mp}\,\delta_{rq} - \delta_{mq}\,\delta_{rp}\big) a_p\, b_q\, c_m =$$

$$= \sum_m \sum_p \Big[\delta_{mp}\Big(\sum_q \delta_{rq}\, b_q\Big) a_p\, c_m - \Big(\sum_q \delta_{mq}\, b_q\Big)\delta_{rp}\, a_p\, c_m\Big] =$$

($\sum_q \delta_{rq}\, b_q = b_r$, $\sum_q \delta_{mq}\, b_q = b_m$)

$$= \sum_m \sum_p \big(\delta_{mp}\, b_r\, a_p\, c_m - b_m\, \delta_{rp}\, a_p\, c_m\big) =$$

← 20161011 ~1:07:00

$$= \sum_p \left[\left(\sum_m \delta_{mp} c_m \right) b_k a_p - \left(\sum_m b_m c_m \right) \delta_{kp} a_p \right] =$$

($\sum_m \delta_{mp} c_m = c_p$; $\sum_m b_m c_m$ = b és sa. szor.)

$$= \sum_p \left[c_p b_k a_p - (\underline{b}\,\underline{c}) \delta_{kp} a_p \right] = \underbrace{\sum_p (c_p a_p)}_{\underline{c}\cdot\underline{a}} b_k - (\underline{b}\,\underline{c}) \underbrace{\left(\sum_p \delta_{kp} a_p \right)}_{a_k} =$$

$$= (\underline{c}\,\underline{a}) b_k - (\underline{b}\,\underline{c}) a_k = v_k \quad \Rightarrow \underline{v} = (\underline{c}\,\underline{a})\underline{b} - (\underline{b}\,\underline{c})\underline{a} = (\underline{a}\times\underline{b})\times\underline{c}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{c})}$$

$$\boxed{\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})}$$

2019.09.08.
előadás 18. óra

Determinánsok (bev.)

3 vektor: $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$

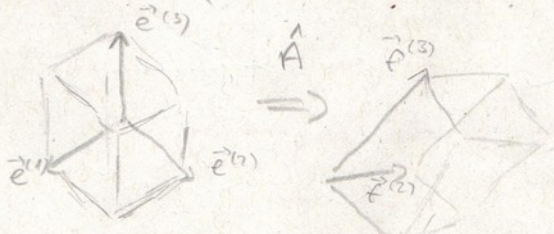
$\vec{u} = \hat{A}\vec{v} \quad \rightarrow \quad \underline{u} = \underline{\underline{A}}\,\underline{v}$

$$A_{kl} = f_k^{(l)} = \vec{e}^{(k)} \vec{f}^{(l)} = \vec{e}^{(k)} \underbrace{\left(\hat{A} \vec{e}^{(l)} \right)}_{\vec{f}^{(l)} = \hat{A}\vec{e}^{(l)}}$$

(skalárris)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} f_1^{(1)} & f_1^{(2)} & f_1^{(3)} \\ f_2^{(1)} & f_2^{(2)} & f_2^{(3)} \\ f_3^{(1)} & f_3^{(2)} & f_3^{(3)} \end{pmatrix} \qquad \det \underline{\underline{A}} : \text{a lerépített térfogata}$$

$$(\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$



kocka → paralellep.

reverzibilis, ha $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$

$\frac{V_{par}}{V_{kocka}} = \det A$ — „térfogattorzítási tényező"

- det szorzása

$\vec{u} = \hat{A}\vec{v}$

$\vec{w} = \hat{B}\vec{u} = \hat{B}(\hat{A}\vec{v}) = (\hat{B}\hat{A})\vec{v} = \hat{C}\vec{v}$

a két operáció egymásutánja

$\det \hat{C} = \det \hat{B} \det \hat{A}$

$$\boxed{\det(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = (\det \underline{\underline{A}})(\det \underline{\underline{B}})}$$

determinánsok szorzástétele

- det: inverz operátor (ha létezik):

$\vec{a} = \hat{A}\vec{v} \qquad \vec{v} = \hat{A}^{-1}\vec{u}$

$\vec{u} = \hat{A}\vec{v} = \hat{A}(\hat{A}^{-1}\vec{u}) = (\hat{A}\hat{A}^{-1})\vec{u} \quad \Rightarrow \quad \hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{1}$

$\hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{1}$

$$\boxed{\det \underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}}}$$

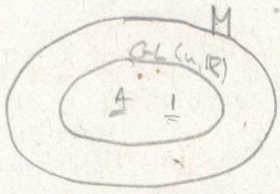
$\Rightarrow$ reguláris determinánsú mátrixok:

csoportot alkotnak a mátrixszorzásra nézve

- $GL(n, \mathbb{R})$ csoport (general linear)

$n \times n$-es mátrixok

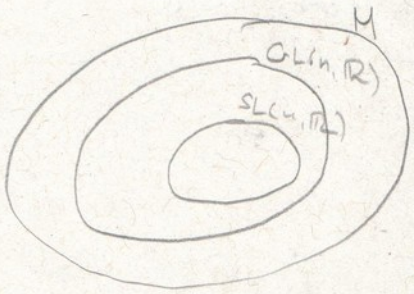
$\mathbb{R}$: valós számokon értelmezett



- $SL(n,\mathbb{R})$: részcsoport

  det = 1 pl. identitás

  (relativisztikus kvantummechanikában)



- $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \cdots & & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \\ B_{21} & & \\ B_{31} & \cdots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & & \\ & \cdots & \end{pmatrix}$

$C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31}$ ← ez alapján is belátható

$\det(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = (\det \underline{\underline{A}})(\det \underline{\underline{B}})$

Négyszeres vektorszorzat

$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{c})$
$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$
} kettős szorzat

$(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d})$ ← skalár ⇒ ∈ ℝ

$(\vec{a}\times\vec{b})(\underbrace{\vec{c}\times\vec{d}}_{\vec{u}}) = (\vec{a}\times\vec{b})\vec{u} = (\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{u}) = (\vec{u}\,\vec{a}\,\vec{b}) = (\vec{u}\times\vec{a})\vec{b} =$ ← ciklikusan permutálhatók

$= \big((\vec{c}\times\vec{d})\times\vec{a}\big)\vec{b} = \big[\vec{d}(\vec{c}\vec{a}) - \vec{c}(\vec{d}\vec{a})\big]\vec{b} =$

$= (\vec{c}\vec{a})(\vec{d}\vec{b}) - (\vec{c}\vec{b})(\vec{d}\vec{a})$

[2×2-es det.: $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$]

$(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{c}\vec{a})(\vec{d}\vec{b}) - (\vec{c}\vec{b})(\vec{d}\vec{a}) = \begin{vmatrix} (\vec{a}\vec{c}) & (\vec{b}\vec{c}) \\ (\vec{a}\vec{d}) & (\vec{b}\vec{d}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\underline{a}\,\underline{c}) & (\underline{b}\,\underline{c}) \\ (\underline{a}\,\underline{d}) & (\underline{b}\,\underline{d}) \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} (ac) & (bc) \\ (ad) & (bd) \end{vmatrix}$

$(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} (\underline{a}\,\underline{c}) & (\underline{b}\,\underline{c}) \\ (\underline{a}\,\underline{d}) & (\underline{b}\,\underline{d}) \end{vmatrix}$

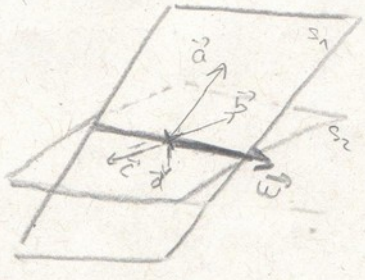
$\begin{pmatrix} a_1 \cdots \\ b_1 \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$

$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{u} = \vec{b}(\vec{a}\vec{u}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{u}) = \vec{b}\big(\vec{a}(\vec{c}\times\vec{d})\big) - \vec{a}\big(\vec{b}(\vec{c}\times\vec{d})\big) =$

$= (\vec{a}\vec{c}\vec{d})\vec{b} - (\vec{b}\vec{c}\vec{d})\vec{a}$ ← egyenlőek!

$(\underbrace{\vec{a}\times\vec{b}}_{\vec{v}})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{c}(\vec{v}\vec{d}) - \vec{d}(\vec{v}\vec{c}) = \vec{c}\big((\vec{a}\times\vec{b})\vec{d}\big) - \vec{d}\big((\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}\big) =$

$= (\vec{a}\vec{b}\vec{d})\vec{c} - (\vec{a}\vec{b}\vec{c})\vec{d}$



$\vec{a}, \times\vec{b}$ lin. kombinációi: S_1 síkban

$\vec{c}, \vec{d}$ lin. kombinációi: S_2 síkban

$\Uparrow$

$\vec{w}$ lin. kombinációi: a síkok metszőegyenesén

- 6 vektor tétele

6 vektor: $\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}\boxed{d}\boxed{e}\boxed{f}$ részítsük → $\begin{vmatrix} a\cdot d & a\cdot e & a\cdot f \\ b\cdot d & b\cdot e & b\cdot f \\ c\cdot d & c\cdot e & c\cdot f \end{vmatrix} = \det \underline{\underline{U}} \cdot \det \underline{\underline{V}}$

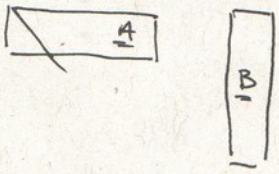
$\underline{\underline{U}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{V}} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$

biz.:

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cdot d & a\cdot e & a\cdot f \\ b\cdot d & b\cdot e & b\cdot f \\ c\cdot d & c\cdot e & c\cdot f \end{pmatrix}$

majd determinánsok szorzástétele miatt következik

- mátrixok transzponálása:



a főátlóra tükrözzük

$B_{kl} = A_{lk}$ $\quad \tilde{\underline{\underline{A}}}_{kl} = \underline{\underline{A}}_{lk}$

pl. $B_{12} = B_{21}$

A transzponáltja B: $\underline{\underline{B}} = \tilde{\underline{\underline{A}}}$

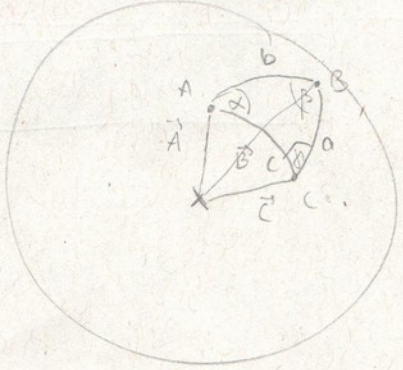
(vagy $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}^T$ jelölés)

- négyzetes mx esetén előfordulhat, hogy egyenlő a transzponáltjával

⇒ szimmetrikus mátrix $\quad \tilde{\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{A}}$

ha $\tilde{\underline{\underline{A}}} = -\underline{\underline{A}}$ ← antiszimmetrikus mátrix

Gömbháromszög cos-tétel ♡



forrószár mentén helyezkedek el az oldalak

$r = 1$ egység sugarú gömb

$\sphericalangle(\vec{A},\vec{C}) = b$ $\quad |\vec{A}| = |\vec{B}| = |\vec{C}| = 1$

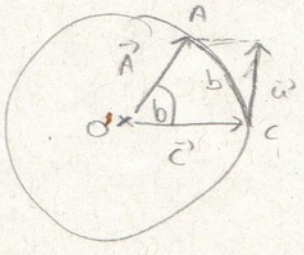
$\vec{A}\,\vec{C} = |\vec{A}|\,|\vec{C}| \cos b$

$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \cos b &= \vec{A}\,\vec{C} \\ \cos a &= \vec{C}\,\vec{B} \\ \cos c &= \vec{A}\,\vec{B} \end{aligned}}$



$\vec{u}, \vec{v}$ - érintők

$\sphericalangle(\vec{u},\vec{v}) = \gamma$



$\vec{u} = (\vec{C}\times\vec{A}) \times \vec{C} = \vec{A}\,(\vec{C}\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\vec{C}) =$

$= \vec{A} - \vec{C}(\vec{C}\,\vec{A}) = \vec{A} - (\vec{C}\circ\vec{C})\vec{A}$

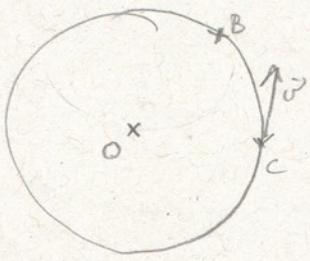
$\vec{C}\circ\vec{C}$: projektor, levetíti $\vec{A}$-t $\vec{C}$-re

$\Rightarrow |\vec{u}| = \sin b$

$|\vec{u}| = \sin b$ $\qquad \vec{u} = \vec{A} - \vec{c}(\vec{c}\vec{A})$

biz: $\vec{u}\vec{u} = (\vec{A} - \vec{c}(\vec{c}\vec{A}))(\vec{A} - \vec{c}(\vec{c}\vec{A})) = \vec{A}\vec{A} - (\vec{c}\vec{A})(\vec{c}\vec{A}) - (\vec{A}\vec{c})(\vec{c}\vec{A}) + (\vec{c}\vec{c})(\vec{c}\vec{A})^2 =$

$= 1 - (\vec{c}\vec{A})^2 = 1 - \cos^2 b = \sin^2 b$ ✓



$\vec{u} = \vec{A} - \vec{c}(\vec{c}\vec{A})$

$\vec{v} = \vec{B} - \vec{c}(\vec{c}\vec{B})$ hasonlóan

$|u| = \sin b$

$|v| = \sin a$

$\vec{u}\vec{v} = |u||v|\cos\gamma = \sin a \sin b \cos\gamma =$

$= (\vec{A} - (\vec{c}\vec{A})\vec{c})(\vec{B} - (\vec{c}\vec{B})\vec{c}) = \vec{A}\vec{B} - (\vec{c}\vec{A})(\vec{c}\vec{B})$

$= \vec{A}\vec{B} - (\vec{c}\vec{A})(\vec{c}\vec{B}) - (\vec{c}\vec{B})(\vec{A}\vec{c}) + (\vec{c}\vec{A})(\vec{c}\vec{B})(\vec{c}\vec{c}) =$

$= \vec{A}\vec{B} - (\vec{c}\vec{A})(\vec{c}\vec{B}) = \cos c - \cos b \cos a$

$\Rightarrow$

$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma$

$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos\beta$

$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha$

20161013 1:15:00

sin-tétel

$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{c}(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{c}\,|\vec{u}||\vec{v}|\sin\gamma$

$\vec{u} \times \vec{v} = [\vec{A} - \vec{c}(\vec{c}\vec{A})] \times [\vec{B} - \vec{c}(\vec{c}\vec{B})] =$

$= \vec{A}\times\vec{B} - (\vec{c}\vec{A})\vec{c}\times\vec{B} - (\vec{c}\vec{B})\vec{A}\times\vec{c} + (\vec{c}\vec{A})(\vec{c}\vec{B})\vec{c}\times\vec{c} =$ (utóbbi 0)

$= \vec{A}\times\vec{B} - (\vec{c}\vec{A})\vec{c}\times\vec{B} + (\vec{c}\vec{B})\vec{c}\times\vec{A} =$

$= \vec{A}\times\vec{B} + \vec{c}\times[(\vec{c}\vec{B})\vec{A} - (\vec{c}\vec{A})\vec{B}] = \vec{A}\times\vec{B} + \vec{c}\times[\vec{c}\times(\vec{A}\times\vec{B})] =$

$\vec{c}\times(\vec{A}\times\vec{B})$ $\qquad \vec{w} := \vec{A}\times\vec{B}$

$= \vec{A}\times\vec{B} + \vec{c}(\vec{c}\vec{w}) - \vec{A}\times\vec{B} = \vec{c}(\vec{A}\vec{B}\vec{c})$

$\Rightarrow \vec{u}\times\vec{v} = \vec{c}(\vec{A}\vec{B}\vec{c})$

$\vec{c}\times(\vec{c}\times\vec{w}) = \vec{c}(\vec{c}\vec{w}) - \vec{w}(\vec{c}\vec{c}) =$

$= \vec{c}(\vec{c}\vec{w}) - \vec{w}$

$|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\gamma = \sin b \sin a \sin\gamma = \vec{c}(\vec{A}\vec{B}\vec{c})$

$= \sin a \sin c \sin\beta$

$= \sin c \sin b \sin\alpha$

↖ valahogy felírva az egyenlőtlenségek a szellők által elérhető pontpárokon lévő egyenlőtlenségek kapcsán

$\Rightarrow \dots \Rightarrow \dfrac{\sin a}{\sin b} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

- ha nem egységsugarú a kör:

$|\vec{A}| = |\vec{B}| = |\vec{c}| = R$

$\cos\dfrac{b}{R} = \vec{A}\vec{c}$ $\qquad \Rightarrow \cos\dfrac{c}{R} = \cos\dfrac{a}{R}\cos\dfrac{b}{R} + \sin\dfrac{a}{R}\sin\dfrac{b}{R}\cos\gamma$

ha $a, b, c \ll R$:

$\sin x \approx x$

$\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2}$ (parabolikus jelleg!)

$1 - \dfrac{c^2}{2R^2} = \left(1 - \dfrac{a^2}{2R^2}\right)\left(1 - \dfrac{b^2}{2R^2}\right) - \dfrac{a}{R}\cdot\dfrac{b}{R}\cos\gamma$

$1 - \dfrac{c^2}{2R^2} = 1 - \dfrac{a^2}{2R^2} - \dfrac{b^2}{2R^2} + \dfrac{a^2b^2}{4R^4} - \dfrac{ab}{R^2}\cos\gamma \quad / \cdot(-2R^2)$

elhanyagolható

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

$\Rightarrow$ síkl. ∞ sugarú gömb

= ha a tételekben felcseréljük a cos-t ch-ra és a sin-t sh-ra: hiperbolikus geometria

- síkbeli sin-tétel:

$\dfrac{\sin a}{\sin b} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} \Rightarrow \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{a/R}{b/R} = \dfrac{a}{b}$

terület

$T_\Delta = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ ha $R \neq 1$ $T_\Delta = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) R^2$

Minél nagyobb a terület, annál több a szögek összege

Szögek összege nagyobb, mint 180°

Determináns – a vegyesszorzat kiterjesztése n dimenzióba

2019.10.09.
sze 19-20. ea.

- vektoriális szorzat csak 3 dim-ben értelmes, de a vegyesszorzat kiterjeszthető
- $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \mu \qquad V \times V \times V \to \mathbb{R}$

$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})(\alpha \vec{c}_1 + \beta \vec{c}_2) = \alpha (\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c}_1 + \beta (\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c}_2 =$

$= \alpha (\vec{a}\vec{b}\vec{c}_1) + \beta (\vec{a}\vec{b}\vec{c}_2)$

↳ vegyesszorzat lineáris mind3 változóban (csak $\vec{b}$-ben $\vec{a}, \vec{b}$ esetén is)
= multilineáris ~~művelet~~ függvény, 3 változós

$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = -(\vec{b}\vec{a}\vec{c})$ ← alternáló függvény ← két változó felcserélése csak az előjelet változtatja

= a vegyesszorzat 3változós, multilineáris, alternáló fv

- általánosítás n dimenzióban: n vektor által alkotott parallelepip.
"hiperparallelepi" kifogata
- ha $\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$

$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b})(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) = \alpha (a \times a) + \beta (a \times b) = 0$

alternáló tul miatt
$f(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}, \vec{d}) = -f(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}, \vec{d})$
$\vec{a}$-ket megcserélve
$\Rightarrow f(\dots) = 0$

⇒ ha a vektorok lineárisan összefüggők, vegyesszorzatuk 0
(ha legalább 2 db egy síkba esik)

- V $\dim V = n$

~~vektorok~~: $\vec{a}^{(1)}\ \vec{a}^{(2)} \dots \vec{a}^{(n)}$

$f : \underbrace{V \times V \times V \dots \times V}_{n \text{ db}} \to \mathbb{R}$ ← multilineáris és alternáló
(= kifogatai forma – matekos név)

~~alternáló: két változó felcserélése csak az előjelet változtatja~~

- bázisok: $\vec{e}^{(1)} \dots \vec{e}^{(n)}$

$\vec{a}^{(1)} = \sum_{k_1} \alpha_{1k_1} \vec{e}^{(k_1)}$

$\vec{a}^{(2)} = \sum_{k_2} \alpha_{2k_2} \vec{e}^{(k_2)}$

$\vec{a}^{(n)} = \sum_{k_n} \alpha_{nk_n} \vec{e}^{(k_n)}$

	k_1	k_2	k_3
1	α_{1k_1}	α_{1k_2}	α_{1k_3}
2	α_{2k_1}	α_{2k_2}	α_{2k_3}
3	α_{3k_1}	α_{3k_2}	α_{3k_3}

- a fv kiszámítása:

$f(\vec{a}^{(1)}, \vec{a}^{(2)}, \dots \vec{a}^{(n)}) = f\left(\sum_{k_1} \alpha_{1k_1} \vec{e}^{(k_1)} + \sum_{k_2} \alpha_{2k_2} \vec{e}^{(k_2)} + \dots + \sum_{k_n} \alpha_{nk_n} \vec{e}^{(k_n)}\right) =$

$= \underbrace{\sum_{k_1} \sum_{k_2} \dots \sum_{k_n}}_{n^n \text{ tagú összeg}} (\alpha_{1k_1} \alpha_{2k_2} \dots \alpha_{nk_n}) f(\vec{e}^{(k_1)}, \vec{e}^{(k_2)} \dots \vec{e}^{(k_n)})$

← csak n! nemnulla

↳ a fv multilinearitása miatt kiemelhető így fel

- legyen a fv az n-indexes Levi-Civita fv

$\varepsilon_{12\dots n} := 1$ indexcseréknél változik az előjel

minden permutáció elérhető egy-egy elem cseréjével
(zsonglőrcsapat-probléma)
pos sok csere után $\varepsilon = 1$
pl an sok csere után $\varepsilon = -1$

3 index felett ø értelmezve a cirkuláris és anticiklikus permutáció

$$f(\vec{a}^{(1)}, \vec{a}^{(2)} \dots \vec{a}^{(n)}) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} \dots \sum_{k_n} \alpha_{1k_1} \alpha_{2k_2} \dots \alpha_{nk_n} f(\vec{e}^{(k_1)}, \vec{e}^{(k_2)} \dots \vec{e}^{(k_n)}) = \det \underline{\underline{A}}$$

n db szám szorzata

legyen Levi-Civita $\varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_n}$

$n!$ db nem nulla

$$\begin{vmatrix} a^{(1)} & a^{(2)} & \dots & a^{(n)} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}}$$

definiáljuk így

négyzetes mx

(indexek felcserélődtek – 2. a sor és 1. az oszlop)

így választunk α-kat, mint a bástyák a sakktáblán (egyszerre egy sorban és oszlopban pontosan 1 van)

$\Rightarrow n!$ féle elrendezés, ezeket szummázzuk

ε adja meg a tagok előjelét (pos vagy plusz számú permutáció kellett-e)

- dim = 3 ONB

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \longmapsto \begin{aligned} \vec{a} &= \sum_k \alpha_k \vec{e}^{(k)} \\ \vec{b} &= \sum_l \beta_l \vec{e}^{(l)} \\ \vec{c} &= \sum_m \gamma_m \vec{e}^{(m)} \end{aligned}$$

$$f(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = f\left(\sum_k \alpha_k \vec{e}^{(k)}, \sum_l \beta_l \vec{e}^{(l)}, \sum_m \gamma_m \vec{e}^{(m)}\right) =$$

$$= \sum_k \sum_l \sum_m \alpha_k \beta_l \gamma_m f(\vec{e}^{(k)}, \vec{e}^{(l)}, \vec{e}^{(m)})$$

legyen ONB $\Rightarrow \vec{e}^{(k)} \vec{e}^{(l)} = \delta_{kl}$

$$(\vec{e}^{(k)} \times \vec{e}^{(l)}) \vec{e}^{(m)} = \varepsilon_{klm}$$

3D-ben, ONB-ben a 3 bázisvektor vegyesszorzata

$$\begin{vmatrix} a & b & c \end{vmatrix} = \det \underline{\underline{A}} = \sum_k \sum_l \sum_m \varepsilon_{klm} \alpha_k \beta_l \gamma_m =$$

$$= \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 + \alpha_2 \beta_3 \gamma_1 + \alpha_3 \beta_1 \gamma_2 - \alpha_3 \beta_2 \gamma_1 - \alpha_1 \beta_3 \gamma_2 - \alpha_2 \beta_1 \gamma_3$$

3D-ben a sarrus-szabály ez az eljárás általános, de a sarrus-szab. csak 3D-ben működik

A determináns kiszámítása

$$\begin{vmatrix} a_1 & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & b & c \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underbrace{b}_{b} & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+5b & b & c \end{vmatrix}$$

← oszlop hozzáadása 1. az oszlop számszorosával

⇒ a det. számértéke nem változik

sorokkal is hasonlóan megtehető

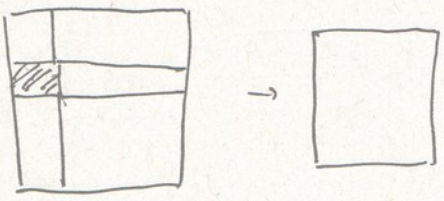
két sor vagy oszlop felcserélése ⇒ előjelváltás

$\det = 0$, ha (akkor és csak akkor)

- egy sor / oszlop 0
- két sor / oszlop ua.
- egyik sor a többi linearisan függ

kifejtési tétel:

determináns kiszámítására:



előjlésekor:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ & \vdots & & \end{vmatrix}$$

2k: 5×5-ös kiszámítása

aldeterminánsra

- ha kiválasztunk egy elemet, annak sorát és oszlopát kihúzzuk
  ha a kiválasztott elem a sokszor 0 oszlopban
  ⇒ eggyel kisebb négyzetes mx, ha összetartjuk a mennyiségét
  majd ebből választjuk az új tagot számot
- ezt n! - féleppen végezhetjük meg n db (n-1)-es det.

pl.
$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 9 & 7 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[+3.\text{oszlop}]{1.\text{oszlop}} \begin{vmatrix} 5 & -3 & 10 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ -2 & 9 & 5 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{2.s-3.s} \begin{vmatrix} 5 & -3 & 10 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & 9 & 5 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

a utolsón egész számok vannak ⇒ a det. is egész szám lesz

$$\xrightarrow[5.0]{2.0-} \begin{vmatrix} 5 & -4 & 10 & 4 & 1 \\ 5 & -7 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & 11 & 5 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[5.0-4(1.0)]{\text{4-ből}} \begin{vmatrix} 5 & -4 & 10 & 4 & -19 \\ 5 & -7 & 0 & 1 & -15 \\ -2 & 11 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \begin{vmatrix} -4 & 10 & 4 & -19 \\ -7 & 0 & 1 & -15 \\ 11 & 5 & 1 & 6 \\ -3 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{és } 3.0+1.0]{2.0+1.0} - \begin{vmatrix} -4 & 6 & 0 & -19 \\ -7 & -7 & -6 & -15 \\ 11 & 16 & 12 & 6 \\ -3 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{számul}]{3.0-\text{ból}} -6\text{-ot}$$

↑ az előjel kerülhető
- az egyik oszlopot szorozzuk be (-1)-gyel)

$$= 6 \begin{vmatrix} -4 & 6 & 0 & -19 \\ -7 & -7 & 1 & -15 \\ 11 & 16 & -2 & 6 \\ -3 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[3.s+2\cdot(2.s)]{\text{2-ből}} 6 \begin{vmatrix} -4 & 6 & 0 & 19 \\ -7 & -7 & 1 & -15 \\ -3 & 2 & 0 & -24 \\ -3 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 6(-1)\cdot 1 \begin{vmatrix} -4 & 6 & -19 \\ -3 & 2 & -24 \\ -3 & 0 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{1.s-3\cdot(2.s)} -6 \begin{vmatrix} 5 & 0 & 53 \\ -3 & 2 & -24 \\ -3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -6 \cdot 2 \begin{vmatrix} 5 & 53 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} =$$

ezután a kapott fejteni a sarkus-szabállyal

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

$$= -12\,(5\cdot 5 - (-3)\cdot 53) = -12 \cdot 184$$

- sor ↔ oszlop kölcsönösen hozzáadni sorhoz ↔ oszlophoz

a determináns fve a kifejtett tételünk

Felsőfokú algebrai feladatgyűjt.

diagonálmátrix

$$F_n(a,b) = \begin{vmatrix} a & b & b & b & b \\ b & a & b & b & b \\ b & b & a & b & b \\ b & b & b & a & b \\ b & b & b & a & b \end{vmatrix}_{n\times n}$$

$$\begin{pmatrix} a & & & & \\ & b & & & \\ & & c & & \\ & & & d & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

csak a főátlón nemnulla diagonálmátrix

$$\det \begin{pmatrix} a & & & & \\ & b & & & \\ & & c & & \\ & & & d & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} = a\,b\,c\,d\,\ldots$$

diagonálmx esetén a det a főátlós elemeinek szorzata

ha $b=0$ diagonálmx $\Rightarrow$ $\boxed{F_n(a,0) = a^n}$

ha $b \neq 0$

soronként kiemelünk b-t

$$b^n \begin{vmatrix} \frac{a}{b} & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & \frac{a}{b} & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & \frac{a}{b} & 1 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{vmatrix} \quad (II)$$

$$x := \frac{a}{b} \Rightarrow f_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & x & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & x & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & x & \ddots \\ \vdots & & & & \end{vmatrix} =$$

minden sorból levonjuk az 1. sort:

az összes sort levonjuk az elsőből

$$= \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ (1-x) & (x-1) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ (1-x) & 0 & (x-1) & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ (1-x) & & & & & (x-1) \end{vmatrix} = (x-1)^{n-1} \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & & & \\ -1 & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 \end{vmatrix} =$$

a 2. sorból kiemelünk $(x-1)$-et

$$= (x-1)^{n-1} \begin{vmatrix} x+n-1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 1 & & & \\ -1 & & 1 & & \\ -1 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = (x-1)^{n-1}(x+n-1)\cdot 1$$

aldeterminánsuk det = 1

$$\Rightarrow f_n(x) = (x-1)^{n-1}(x+n-1)$$

(II) esetén

$$b^n \begin{vmatrix} \frac{a}{b} & 1 & 1 & \\ 1 & \frac{a}{b} & 1 & \\ 1 & 1 & \frac{a}{b} & \ddots \\ \vdots & \vdots & & \end{vmatrix} = b^n f_n\left(\frac{a}{b}\right) = b^n\left(\frac{a}{b}-1\right)^{n-1}\left(\frac{a}{b}+n-1\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{F_n(a,b) = (a-b)^{n-1}(a+(n-1)b)}$$

Vandermonde mátrix

JD. 20161012 1:10 kor

$$V_n(x_1, x_2 \dots x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-2} & \vdots \\ 1 & \vdots & \vdots & & \vdots & x_n^{n-1} \\ & x_n & x_n^2 & & x_n^{n-2} & \end{vmatrix} =$$

az oszlopokat kivonjuk a tőle balra levőnek x_1-szeresét

ha bármely két x megegyezik, két sor ua. $\Rightarrow \det = 0$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} & 0 \\ 1 & x_2 & & x_2^{n-2} & (x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & (x_3^{n-1} - x_1 x_3^{n-2}) \\ 1 & x_n & & x_n^{n-2} & \vdots \\ & & & & (x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} & 0 \\ 1 & x_2 & & x_2^{n-2} & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & & x_3^{n-2} & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) \\ 1 & x_n & & \vdots & \vdots \\ & & & x_n^{n-2} & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & & x_2^{n-3}(x_2 - x_1) & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & & x_3^{n-3}(x_3 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) \\ 1 & x_n & & x_n^{n-3}(x_n - x_1) & \vdots \\ & & & & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} = \dots =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & 0 & & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^2(x_3 - x_1) & & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^2(x_n - x_1) & & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 & x_2(x_2 - x_1) & (x_2 - x_1) & & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & & x_3(x_3 - x_1) & & & \\ 1 & x_n & & & & \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3(x_3 - x_1) & \dots & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) \\ & \vdots & & & \\ 1 & x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & & x_3^{n-2} \\ 1 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1) \underbrace{V_{n-1}(x_2 \dots x_n)}_{n-1 \text{ db}} \quad \leftarrow \text{rekurzív képlet}$$

$$= (x_3 - x_2)(x_4 - x_2) \dots (x_n - x_2) V_{n-2}(x_3 \dots x_n)$$

$$= \prod_{\substack{k,l \\ k>l}} (x_k - x_l)$$

produktum

V: Vandermonde mx

Rózsa Pál
Bevezetés a mátrixelméletbe

Kontinuáns mátrix

$$A_n(x) = \begin{vmatrix} 2-x & -1 & 0 & & \\ -1 & 2-x & -1 & & \\ 0 & -1 & 2-x & -1 & \\ & & -1 & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2-x \end{vmatrix}_{n\times n}$$

(aldeterminánsa $A_{n-1}(x)$)

↑ x n-ed fokú polinomja

Csebisev-polinom (jelölés: T_n)

↙ kontinuáns mátrix ← (folyamatosság a szomszédainál van üresre)

a főátlót közvetlenül szorban vannak nem 0 elemek

jelölés:



ha vannak az elemek ismétlődnek: homogén kontinuáns

$$\begin{vmatrix} a & b & & & \\ b & a & b & & \\ & b & a & b & \\ & & b & a & b \\ & & & \ddots & ba \end{vmatrix} =$$

$$2-x = -\frac{a}{b}$$

$$= (-b)^n \begin{vmatrix} -\frac{a}{b} & -1 & & \\ -1 & -\frac{a}{b} & \ddots & \\ & \ddots & & \end{vmatrix}$$

fejtsük ki $A_n(x)$-et az első sora szerint!

$$A_n(x) = |\dots| = (2-x)A_{n-1}(x) - (-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 & & \\ 0 & 2-x & \ddots & \\ & -1 & \ddots & 2-x \end{vmatrix} =$$

előjel!

$\ominus A_{n-2}(x)$

$$\Rightarrow \boxed{A_n(x) = (2-x)A_{n-1}(x) - A_{n-2}(x)}$$

↑ lineáris rekurzió, mert A_n A_{n-1} és A_{n-2} lineárisan

homogén lineáris rekurzió ⇒ minden mo. a 0

← rekurziós képlet: $A_n = f(A_{n-1}, A_{n-2} \dots A_{n-k})$ k-ad rendű rekurzió

← lineáris differenciálegyenlettel analóg

$$A_2 = \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} = (2-x)^2 - 1$$

$$A_1 = 2-x$$

legyen A_0 is!

$\Rightarrow A_2 = (2-x)A_1 - A_0$

$(2-x)^2 - 1 = (2-x)A_1 - A_0 \quad \Rightarrow A_0 = 1$

legyen A_{-1} is!

$A_1 = (2-x)A_0 - A_{-1}$

$2-x = (2-x)1 - A_{-1} \quad \Rightarrow A_{-1} = 0$

$A_2 = (2-x)^2 - 1$

$A_1 = 2-x$

$A_0 = 1$

$A_{-1} = 0$

$A_2 = 2x \cdot A_1 - A_0 =$

$= 2x(2-x) - 1$

sejtsük meg, hogy a mo. megoldások sorozat
a mo. lineáris teret alkot ⇒ összeg is mo.

$$A_n = \alpha A_{n-1} + \beta A_{n-2} + \gamma A_{n-3} + \dots + \mu A_{n-k}$$

tfh $A_n = q^n$

$$q^n = \alpha q^{n-1} + \beta q^{n-2} + \dots + \mu q^{n-k} \quad / \cdot \frac{1}{q^{n-k}}$$

$$q^k = \alpha q^{k-1} + \beta q^{k-2} + \dots + \mu$$

↑ k-ad fokú algebrai egyenlet
⇒ k db mo. a cmpx síkon

a rekurziós probléma karakterisztikus egyenlete

megoldások: $q_1, q_2, \dots, q_k$ ← lineáris teret alkotnak
bázist alkotnak

$$A_n = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n + \dots + C_k q_k^n \quad *$$

$$A_{k-1} = q_1^{k-1} C_1 + q_2^{k-1} C_2 + \dots + q_k^{k-1} C_k$$
$$A_{k-2} = q_1^{k-2} C_1 \quad \dots \quad q_k^{k-2} C_k$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$A_1 = q_1 C_1 + q_2 C_2 \quad \dots \quad q_k C_k$$
$$A_0 = C_1 + C_2 \quad \dots \quad + C_k$$

C_k-ra lineáris egyenletrsz

$$\begin{pmatrix} q_1^{k-1} & q_2^{k-1} & \dots & q_k^{k-1} \\ q_1^{k-2} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ q_1 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{k-1} \\ A_{k-2} \\ \vdots \\ A_0 \end{pmatrix}$$

Vandermonde mátrix
det = 0, ha valamelyik két q megegyezik

$2-x =: 2\cos\alpha$

$x = 2 - 2\cos\alpha = 2(1-\cos\alpha) = 2\left(1-\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}$

ha x-re . 0 és 4 közé esik, a sin értelmes
ha nem, akkor x cup x

$A_n(\alpha) = 2\cos\alpha\, A_{n-1}(\alpha) - A_{n-2}(\alpha)$

tfh $A_n = q^n$

$q^n = 2\cos\alpha\, q^{n-1} - q^{n-2} \quad / \cdot \frac{1}{q^{n-2}}$

$q^2 = 2\cos\alpha\, q - 1$

$q^2 - 2\cos\alpha\, q + 1 = 0$

$q_{1,2} = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{4\cos^2\alpha - 4}}{2} = \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1} = \cos\alpha \pm \sqrt{-\sin^2\alpha} =$

$= \cos\alpha \pm i\sin\alpha = e^{\pm i\alpha}$

$\Rightarrow q_1 = e^{i\alpha} \quad q_2 = e^{-i\alpha}$

$\Rightarrow A_n(\alpha) = C_1(e^{i\alpha})^n + C_2(e^{-i\alpha})^n = C_1 e^{in\alpha} + C_2 e^{-in\alpha}$

$A_0 = 1$ és $A_{-1} = 0$

$A_0(\alpha) = C_1 + C_2 = 1$
$A_{-1}(\alpha) = C_1 e^{-i\alpha} + C_2 e^{i\alpha} = 0$ } C_1, C_2-re lin. egyg. rsz.

$C_1 e^{i\alpha} + C_2 e^{i\alpha} = e^{i\alpha}$
$C_1 e^{-i\alpha} + C_2 e^{i\alpha} = 0$
$\Rightarrow C_1 \underbrace{(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})}_{2i\sin\alpha} = e^{i\alpha} \quad \Rightarrow C_1 = \frac{e^{i\alpha}}{2i\sin\alpha}$

$C_1 e^{-i\alpha} + C_2 e^{-i\alpha} = e^{-i\alpha}$
$C_1 e^{-i\alpha} + C_2 e^{i\alpha} = 0$
$C_2 \underbrace{(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})}_{2i\sin\alpha} = -e^{-i\alpha}$

$A_n = C_1 e^{in\alpha} + C_2 e^{-in\alpha} = \frac{e^{i\alpha}}{2i\sin\alpha} e^{in\alpha} - \frac{e^{-i\alpha} e^{-in\alpha}}{2i\sin\alpha} =$

$= \frac{e^{i(n+1)\alpha} - e^{-i(n+1)\alpha}}{2i\sin\alpha}$

$\Rightarrow \boxed{A_n(\alpha) = \frac{\sin[(n+1)\alpha]}{\sin\alpha}}$

$n+1 = p\cdot\pi \quad p \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{p}{n+1}\pi$

$\alpha \neq$

$p = 0$ mo?

$\alpha \to 0 \quad \frac{\sin(n+1)\alpha}{(n+1)\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\sin\alpha} \quad (n \neq 1)$

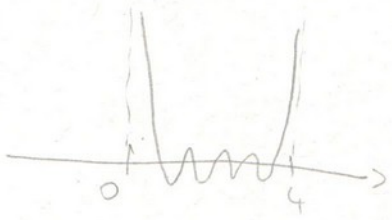
$\to 0 \quad \to 1$

$\Rightarrow p = 0$ nem mo.

$p = 1, 2, \dots, n$

$x_p = 4 \sin^2 \frac{\alpha_p}{2} = 4 \sin^2 \left(\frac{p}{n+1} \frac{\pi}{2} \right)$

a polinom gyökei (n db)



= lineáris rekurziót is ~~nara~~ hasonlóan oldunk meg, mint diff. lineáris differenciálegyenletet polinom-nyel

Mátrixok det. tulajdonságai

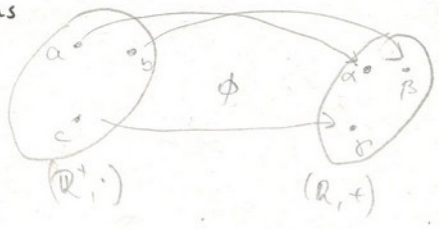
2019. 10. 14.
1. hét 21. óra.

Négyzetes mxok - determinánsuk

- négyzetes mxok assoc. algebrát alkotnak (összeadás, számmal szorzás, egymással szorzás)

determináns: homomorfizmus - négyzetes mxokra

homomorfizmus példa:



$\alpha = \varphi(a)$

α φ képeként a-nak

$\beta = \varphi(b)$

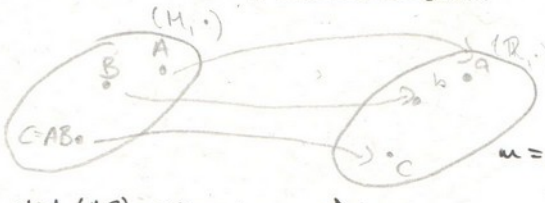
$\gamma = \varphi(c)$

$\alpha + \beta = \varphi(a) + \varphi(b)$

{ logaritmus

izomorfizmus: megfordítható homomorfizmus

hasonlóképp, mxok és determinánsuk:



$\det(AB) = (\det A)(\det B)$

$\varphi(ab) = \varphi(a)\,\varphi(b)$

a determináns képe homomorf

$a = \det H$

de nem izomorf

nem 0 determinánsú négyzetes mxok: csoportot alkotnak

létezik az inverz $\det \underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}}$

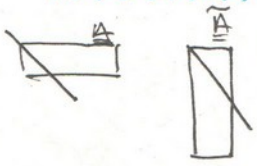
mxok összegére már nem igaz!!

két mx összegének determinánsa nem a det-ek összege

$\det(\alpha \underline{\underline{A}}) = \alpha^N (\det A)$

$N \times N$-es mx

mx transzponálása



$\tilde{\underline{\underline{A}}}$ $\underline{\underline{A}}^T$

$(\tilde{A})_{re} = A_{er}$

$\tilde{\tilde{\underline{\underline{A}}}} = \underline{\underline{A}}$

főátlóra való tükrözés

- Sorux transzponáltja oszlopux
- négyzetes ux transzponáltja ~~négyzetes~~ négyz. ux.
  - ha egyenlő a transzponáltjával:

$$\tilde{\underline{\underline{S}}} = \underline{\underline{S}} \qquad S_{re} = S_{er}$$ szimmetrikus ux

hány dbr független eleme van egy szimmetrikus ux-nak,

$$\frac{n^2-n}{2} + n = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

(főátló)

- antiszimmetrikus ux: $\tilde{\underline{\underline{A}}} = -A$

a főátlóban 0-ék vannak

független adatok: $\binom{n}{2}$ (a főátló feletti/alatti számokat tükrözve a főátlón)

$$\frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$$

- egy tetszőleges négyzetes ux felbontható egy szimmetrikus és egy antiszimm. ux összegeként

$$\underline{\underline{M}} = \underbrace{\frac{\underline{\underline{M}} + \tilde{\underline{\underline{M}}}}{2}}_{\underline{\underline{S}}} + \underbrace{\frac{\underline{\underline{M}} - \tilde{\underline{\underline{M}}}}{2}}_{\underline{\underline{A}}}$$

$$S_{re} = \frac{1}{2}(M_{re} + \tilde{M}_{re}) = \frac{1}{2}(M_{re} + M_{er})$$

$$\tilde{S}_{re} = S_{er} = \frac{1}{2}(M_{er} + M_{re}) \;\; // \Rightarrow \text{szimmetrikus}$$

$$A_{re} = \frac{M_{re} - M_{er}}{2}$$

$$\tilde{A}_{re} = A_{er} = \frac{M_{er} - M_{re}}{2} \Rightarrow \text{antiszimm.}$$

- összeg transzp.-ja

$$\widetilde{(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})} = \tilde{\underline{\underline{A}}} + \tilde{\underline{\underline{B}}}$$

- skalárral szorz.

$$\widetilde{(\alpha \underline{\underline{A}})} = \alpha \tilde{\underline{\underline{A}}}$$

- egymással szorz.

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} \qquad C_{re} = \sum_m A_{rm} B_{me}$$

$$\tilde{C}_{re} = C_{er} = \sum_m A_{em} B_{mr} = \sum_m (\tilde{A})_{me} (\tilde{B})_{rm} = \sum_m \tilde{B}_{rm} \tilde{A}_{me}$$

$$\Rightarrow \widetilde{(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})} = \tilde{\underline{\underline{B}}}\,\tilde{\underline{\underline{A}}}$$

$$\widetilde{(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}})} = \tilde{\underline{\underline{C}}}\,\tilde{\underline{\underline{B}}}\,\tilde{\underline{\underline{A}}}$$

mx invertálása

- csak négyzetes mx esetén értelmes

$\vec{u} = \hat{A}\vec{v}$ ha $\exists \hat{B}$ $\vec{v} = \hat{B}\vec{u}$ $\Leftrightarrow \Rightarrow \hat{B} = \hat{A}^{-1}$

$\hat{A}^{-1}$ nem mindig létezik (pl. merőleges projektor)

reprezentáció

$\underline{u} = \underline{\underline{A}}\,\underline{v}$ ha $\exists \underline{\underline{B}}$ $\underline{v} = \underline{\underline{B}}\,\underline{u} \Rightarrow \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}^{-1}$

$\underline{\underline{B}}\,\underline{u} = \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{A}}\,\underline{v}) = (\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}})\underline{v} = \underline{v} = \underline{\underline{1}}\,\underline{v}$

$\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{1}}$ definíció szerint $\Rightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{1}}$

$\det(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}) = \det\underline{\underline{B}}\,\det\underline{\underline{A}} = \det\underline{\underline{1}} = 1$

$\Rightarrow \det\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\det\underline{\underline{A}}}$

- Összegek inverze nem az inverzek összege!!
- inverzek szorzata

$\hat{D} = \hat{A}\hat{B}$ $\hat{D}^{-1} = \hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1} \Rightarrow (\hat{A}\hat{B})^{-1} = \hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1}$

$\hat{D}^{-1}\hat{D} = (\hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1})(\hat{A}\hat{B}) = \hat{B}^{-1}(\hat{A}^{-1}\hat{A})\hat{B} = \hat{B}^{-1}(\hat{1}\hat{B}) = \hat{B}^{-1}\hat{B} = \hat{1}$

$(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}})^{-1} = \underline{\underline{C}}^{-1}\,\underline{\underline{B}}^{-1}\,\underline{\underline{A}}^{-1}$ ha létezik

mx nyoma (spur)

- nyom (spur $\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}}$ német v. trace $\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}}$ angol)
- csak négyzetes mx-ek főátló elemeit összeg

$\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}} = \sum_i A_{ii}$

$\mathrm{Sp}(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) = \mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}} + \mathrm{Sp}\,\underline{\underline{B}}$

$\mathrm{Sp}(\alpha\,\underline{\underline{A}}) = \alpha(\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}})$

$\mathrm{Sp}(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) \neq \mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}}\;\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{B}}$

- Spurjuk nagyon: $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}$, $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}$

(ciklikus permutáció)

$\mathrm{Sp}(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}) = \mathrm{Sp}(\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = \mathrm{Sp}(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}})$

$\mathrm{Sp}(\underline{\underline{D}}) = \mathrm{Sp}(\underline{\underline{F}}) = \mathrm{Sp}(\underline{\underline{G}})$

bizi.

$D_{rs} = \sum_p \sum_q A_{rp} B_{pq} C_{qr}$

$\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{D}} = \sum_r D_{rr} = \sum_r \sum_p \sum_q A_{rp} B_{pq} C_{qr} = \sum_q \left(\sum_r \sum_p C_{qr} A_{rp} B_{pq}\right) =$

$= \sum_q (\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})_{qq} = \mathrm{Sp}(\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = \mathrm{Sp}\,\underline{\underline{F}}$

ekvivalencia transzformációk

$\Rightarrow \underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}}^{-1}$ ← ekvivalencia transzformáció ($\underline{\underline{A}}'$ ekvivalens $\underline{\underline{A}}$-val)

(spur és det is nagyjából)

$\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}}' = \mathrm{Sp}(\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}}^{-1}) = \mathrm{Sp}(\underline{\underline{R}}^{-1}\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}) = \mathrm{Sp}(\underline{\underline{1}}\,\underline{\underline{A}}) = \mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}}$

$\det\underline{\underline{A}}' = \det(\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}}^{-1}) = (\det\underline{\underline{R}})(\det\underline{\underline{A}})(\det\underline{\underline{R}}^{-1}) = \det\underline{\underline{A}}$

$1/\det\underline{\underline{R}}$

Szimmetrikus reflexív tranzitív

• szimmetria:

R^{-1}/ $A' = R A R^{-1}$ /R

$R^{-1} A' R = R^{-1} R A R^{-1} R$

$A = (R^{-1}) A' (R^{-1})^{-1}$

az ekvivalencia reláció felbontja a mxok halmazát diszjunkt halmazokra

a részhalmazokon belül a spur és det-ek megegyeznek

• tranzitivitás: $B \sim A$, $C \sim B$ $\Rightarrow C \sim A$

$B = R_1 A R_1^{-1}$

$C = R_2 B R_2^{-1}$

$C = R_2 (R_1 A R_1^{-1}) R_2^{-1} = \underbrace{(R_2 R_1)}_{R_3} A \underbrace{(R_1^{-1} R_2^{-1})}_{R_3^{-1}} = R_3 A R_3^{-1}$

adjungálás

$(A^*)_{kl} = (A_{kl})^*$ ← cmpx konjugált

művelet: adjungálás $\underline{\underline{A}}^\dagger = (\underline{\underline{\tilde{A}}})^* = (\underline{\underline{\tilde{A}}}^*)$ $\quad (A^\dagger)_{kl} = A^*_{lk}$

• milyen mx-ra $\underline{\underline{H}}^\dagger = \underline{\underline{H}}$ ← hermitikus mxok

főátlóban valós számok (hogy a konjugált önmaga legyen)

„önadjungált" mxok

• antihermitikus: $\underline{\underline{Z}}^\dagger = -\underline{\underline{Z}}$

$\underline{a}^* = \begin{pmatrix} 3-i \\ 2i \\ 4+5i \end{pmatrix}$ $\quad \underline{a}^\dagger = (3+i, -2i, 4-5i)$ ← skalárszorzat

$\left[\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \tilde{\underline{a}} = (1, i) \quad \tilde{\underline{a}}\,\underline{a} = (1, i)\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + i \cdot i = 0\right]$

$\underline{a}^\dagger = (1, -i) \quad a^\dagger a = (1 \; -i)\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + (-i) i = 2 > 0$

$\sum a_k^* a_k = \sum |a_k|^2 \geq 0$ ⌟

$\tilde{\underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{F}}^{-1}$ mxokat reverzálja ← ortogonális mxok

$\tilde{\underline{\underline{F}}}\,\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}}$

pl. $\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ forgásmx $\quad \tilde{\underline{\underline{F}}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

$\tilde{\underline{\underline{F}}}\,\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

• unitér mx:

az ortogonális mx cmpx általánosítása

$\underline{\underline{U}}^\dagger = \underline{\underline{U}}^{-1}$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{U}}^\dagger \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{1}}$

• az ortogonális és unitér mxok csoportot alkotnak a mxszorzásra nézve

= ortogonális csoport $O(n)$ ↑ n×n-es ortogonális mxok csoportja

zárttság igaz-e

$\tilde{\underline{\underline{F}}}_1 \underline{\underline{F}}_1 = \underline{\underline{1}}$

$\tilde{\underline{\underline{F}}}_2 \underline{\underline{F}}_2 = \underline{\underline{1}}$

$\underline{\underline{F}}_3 = \underline{\underline{F}}_2 \underline{\underline{F}}_1$

$\tilde{\underline{\underline{F}}}_3 = \tilde{\underline{\underline{F}}}_2 \tilde{\underline{\underline{F}}}_1 = \tilde{\underline{\underline{F}}}_1 \tilde{\underline{\underline{F}}}_2$

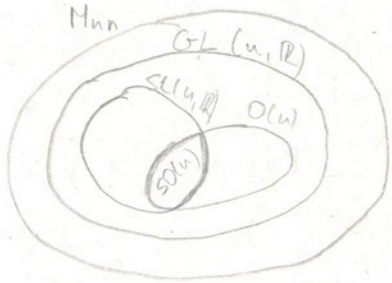
unitér esetén: $U(n)$

$\tilde{\underline{\underline{F}}}_3 \underline{\underline{F}}_3 = (\tilde{\underline{\underline{F}}}_1 \tilde{\underline{\underline{F}}}_2)(\underline{\underline{F}}_2 \underline{\underline{F}}_1) = \tilde{\underline{\underline{F}}}_1 (\underbrace{\tilde{\underline{\underline{F}}}_2 \underline{\underline{F}}_2}_{\underline{\underline{1}}}) \underline{\underline{F}}_1 = \tilde{\underline{\underline{F}}}_1 \underline{\underline{F}}_1 = \underline{\underline{1}}$

$\det(\tilde{F}\,F) = \det \mathbb{1} = 1$

$(\det \tilde{F})(\det F)$

$(\det F)^2 = 1$

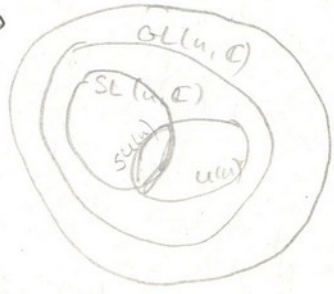


unitér pl.:

$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -i\sin\varphi \\ -i\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

$SO(n)$:
speciális ortogonális mátrix csoportja
$\det = 1$

$SU(n)$:
$\det = 1$
unitér mátrix



mátrixreprezentáció

$\underline{\underline{L}}\;\underline{\underline{G}}\;\underline{\underline{\tilde{L}}} = \underline{\underline{G}}$ ← (rel. elmélet
L: Lorentz-transf.)

Geometriai transzformációk, mint műveletek

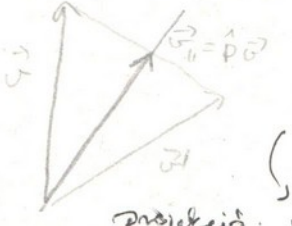
$\vec{u} = \hat{A}\,\vec{v}$

$\underline{u} = \underline{\underline{A}}\,\underline{v}$

$\vec{e}^{(k)}\,\vec{e}^{(l)} = \delta_{kl}$ ONB

$\vec{v} = \sum v_k \vec{e}^{(k)}$ $\quad v_k \to \underline{v}$

$\hat{A}\,\vec{e}^{(k)} = \vec{f}^{(k)}$ $\quad A_{kl} = \vec{e}^{(k)}(\hat{A}\vec{e}^{(l)})$



$\vec{v}_{\parallel} = (\vec{v}\vec{e})\vec{e}$

$\vec{v}' = 2(\vec{v}\vec{e})\vec{e} - \vec{v}$

tükrözés: $\underline{v}' = 2(\underline{v}\underline{e})\underline{e} - \underline{v}$

$v'_k = 2(\underline{v}\underline{e})e_k - v_k = 2\left(\sum_l v_l e_l\right)e_k - \sum_l \delta_{kl} v_l = \sum_l (2e_k e_l - \delta_{kl}) v_l$

$(\underline{\underline{T}}\,\underline{v})_k = \sum_l T_{kl} v_l \quad \Rightarrow \quad T_{kl} = 2e_k e_l - \delta_{kl}$

ell.: $(\underline{\underline{T}})^2_{kl} = (\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{T}})_{kl} = \sum_m T_{km} T_{ml} = \sum_m (2e_k e_m - \delta_{km})(2e_m e_l - \delta_{ml}) =$

$= 4\sum_m e_k e_m e_m e_l - 2\sum_m \delta_{km} e_m e_l - 2\sum_m e_k e_m \delta_{ml} + \sum_m \delta_{km}\delta_{ml} =$

$= 4 e_k e_l \underbrace{\left(\sum_m e_m e_m\right)}_{1} - 2 e_k \underbrace{\left(\sum_m \delta_{km} e_m\right)}_{e_k} - 2 e_k \underbrace{\left(\sum_m e_m \delta_{ml}\right)}_{e_l} + \sum_m \delta_{km}\delta_{ml}$

$= \underbrace{4 e_k e_l - 2 e_l e_k - 2 e_k e_l}_{0} + \sum_m \delta_{km}\delta_{ml} = \delta_{kl} = \mathbb{1}_{kl}$

Keresztszorzás, mint művelet

$\vec{a} \times \vec{b}$

$\vec{v}' = \vec{a} \times \vec{v} = \hat{M}\, \vec{v}$

$\vec{a} \times (\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2) = \alpha (\vec{a} \times \vec{v}_1) + \beta (\vec{a} \times \vec{v}_2)$

$\underline{v}' = \underline{a} \times \underline{v} = \underline{\underline{M}}\, \underline{v}$

$$v_i' = \sum_l \sum_m \varepsilon_{ilm} a_l v_m = \sum_l M_{il} v_l = \sum_m M_{im} v_m$$

$$\sum_m \left(\sum_l \varepsilon_{ilm} a_l \right) v_m = \sum_m M_{im} v_m$$

$$\boxed{M_{im} = \sum_l \varepsilon_{ilm} a_l} \qquad \underline{v}' = \underline{a} \times \underline{v} = \underline{\underline{M}}\, \underline{v}$$

$$M_{im} = \sum_l \varepsilon_{ilm} a_l$$

$$\begin{cases} M_{11} = \sum_l \varepsilon_{1l1} a_l = 0 & \text{mert két index van. } \varepsilon\text{-ban} \\ M_{12} = \sum_l \varepsilon_{1l2} a_l = \varepsilon_{112} a_1 + \varepsilon_{122} a_2 + \varepsilon_{132} a_3 = -a_3 \\ M_{21} = \sum_l \varepsilon_{2l1} a_l = 0 + 0 + \varepsilon_{231} a_3 = a_3 \\ M_{22} = 0 \qquad M_{33} = 0 \\ M_{13} = \sum_l \varepsilon_{113} a_l = \varepsilon_{123} a_2 = a_2 \\ M_{31} = \varepsilon_{321} a_2 = -a_2 \\ M_{23} = \sum_l \varepsilon_{2l3} a_l = \varepsilon_{213} a_1 = -a_1 \\ M_{32} = \varepsilon_{312} a_1 = a_1 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

} a legáltalánosabb antiszimmetrikus mátrix 3D-s lineáris leképzés ábrázolása 3×3-as

$$\underline{\underline{M}}\, \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_3 v_2 + a_2 v_3 \\ a_3 v_1 - a_1 v_3 \\ -a_2 v_1 + a_1 v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 v_3 - a_3 v_2 \\ a_3 v_1 - a_1 v_3 \\ a_1 v_2 - a_2 v_1 \end{pmatrix}$$

2019. 10. 15
ke 22. ea.

FORGATÁS

$a, b \in \mathbb{R}$

$$\underline{\underline{C}}(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\underline{\underline{I}}} + b \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{\underline{\underline{J}}} \qquad \underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}}(a_1,b_1) + \underline{\underline{C}}(a_2,b_2) = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & -b_1-b_2 \\ b_1+b_2 & a_1+a_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}}(a_1,b_1) \cdot \underline{\underline{C}}(a_2,b_2) = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -a_1b_2 - b_1a_2 \\ b_1a_2 + a_1b_2 & -b_1b_2 + a_1a_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\underline{C}}(a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$$

$$\underline{\underline{C}}(a,b) = a\,\underline{\underline{I}} + b\,\underline{\underline{J}}$$

$$\underline{\underline{C}}(a_1,b_1)\,\underline{\underline{C}}(a_2,b_2) = (a_1\underline{\underline{I}} + b_1\underline{\underline{J}})(a_2\underline{\underline{I}} + b_2\underline{\underline{J}}) = a_1a_2\,\underline{\underline{I}}\,\underline{\underline{I}} + b_1a_2\,\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{I}} +$$

$$+ a_1b_2\,\underline{\underline{I}}\,\underline{\underline{J}} + b_1b_2\,\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{J}} = (a_1a_2 - b_1b_2)\underline{\underline{I}} + (a_1b_2 + a_2b_1)\,\underline{\underline{J}}$$

$$\underline{\underline{I}}\,\underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{I}}$$

$$\underline{\underline{I}}\,\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{J}} \qquad \underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{J}} \qquad \underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\underline{\underline{I}}$$

↑

a cmpx számokra leképez ilyen alakú mxokat

izomorfizmus

a cmpx számok és algebrájának mxokkal való ábrázolása

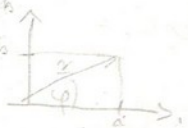
⇒ a cmpx számok műveletei megfeleltethetőek

összeadás, skalárral szorzás

cmpx konjugálás – transzponált

cmpx reciprok – determinánsos ~ alsóháromszög ⇐ transzponált determinánsos ↙ $\frac{z^*}{|z|^2}$

$$z = a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$



$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

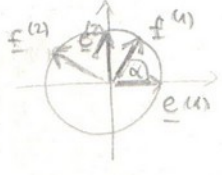
$$\underline{\underline{F}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{F}}(\alpha)\,\underline{\underline{F}}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \underline{\underline{F}}(\alpha+\beta) \quad \Rightarrow \underline{\underline{F}}(\alpha)\,\underline{\underline{F}}(\beta) = \underline{\underline{F}}(\alpha+\beta)$$

$$\underline{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \underline{f}^{(1)} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \underline{f}^{(2)} \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$



↑ forgatás α szöggel

forgatásmátrix

$$\underline{\underline{F}}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{F}}(\alpha)\,\underline{\underline{F}}(\beta) = \underline{\underline{F}}(\alpha+\beta)$$

$$\underline{\underline{F}}(\alpha)\,\underline{\underline{F}}(0) = \underline{\underline{F}}(\alpha+0) = \underline{\underline{F}}(\alpha)$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\underline{F}}(0) = \underline{\underline{1}}}$$

$$\underline{\underline{F}}(\alpha)\,\underline{\underline{F}}(-\alpha) = \underline{\underline{F}}(\alpha-\alpha) = \underline{\underline{F}}(0) = \underline{\underline{1}}$$

$$\boxed{\underline{\underline{F}}(-\alpha) = \underline{\underline{F}}(\alpha)^{-1}}$$

$$\underline{\underline{F}}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \underline{\underline{F}}(\alpha)^{-1} = \underline{\underline{\tilde{F}}}(\alpha)$$

$\det \underline{\underline{F}} = 1$ ortogonális mx

$SO(2)$ csoportot alkotják (speciális ortogonális)

- exponenciális

Cmpx számok esetén:

$$f(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$$

$\Rightarrow$ analógia: $\underline{\underline{F}}(\alpha) = e^{\alpha \square}$ ← mx!

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

← bármely algebra elemeire felírható egy ilyen hatványsor az e értéke négyzetes mxok algebrát alkotnak

mx sorozat

konvergens-e ⇐ az egymáshoz tartozó elemek egymással konvergensek-e

$$e^{\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{A}} + \frac{1}{2!}\underline{\underline{A}}^2 + \frac{1}{3!}\underline{\underline{A}}^3 + \dots$$

↑ minden négyzetes mxra létezik, konvergens és van határértéke

$$\left[\underline{\underline{f}}(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi} = e^{i\varphi}\right.$$
$$\left.|\varphi| \ll 1 \text{ esetén } \cos\varphi \sim 1 \quad \sin\varphi \sim \varphi \quad e^{i\varphi} \sim 1 + i\varphi\right]$$

$$\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

↙ $\underline{\underline{J}}^2 = -\underline{\underline{1}} \quad \underline{\underline{J}}^3 = -\underline{\underline{J}} \quad \underline{\underline{J}}^4 = \underline{\underline{1}} \quad \underline{\underline{J}}^5 = \underline{\underline{J}} \dots$

$$\underline{\underline{B}} = e^{\varphi \underline{\underline{J}}} = \underline{\underline{1}} + \varphi\underline{\underline{J}} + \frac{1}{2!}(\varphi\underline{\underline{J}})^2 + \frac{1}{3!}(\varphi\underline{\underline{J}})^3 + \dots =$$

$$= \underline{\underline{1}} + \varphi\underline{\underline{J}} + \frac{1}{2!}\varphi^2(-\underline{\underline{1}}) + \frac{1}{3!}\varphi^3(-\underline{\underline{J}}) + \frac{1}{4!}\varphi^4\underline{\underline{1}} + \frac{1}{5!}\varphi^5\underline{\underline{J}} + \dots =$$

$$= \underline{\underline{1}}\underbrace{\left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots\right)}_{\cos\varphi} + \underline{\underline{J}}\underbrace{\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots\right)}_{\sin\varphi \text{ hatványsora}} =$$

$$= \cos\varphi\,\underline{\underline{1}} + \sin\varphi\,\underline{\underline{J}} =$$

$$= \cos\varphi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\varphi\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \underline{\underline{F}}(\varphi)$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\underline{\underline{F}}(\varphi) = e^{\varphi\underline{\underline{J}}}}$, $\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{e^{\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}} \neq e^{\underline{\underline{A}}}e^{\underline{\underline{B}}}}$ mert a mxok nem kommutálnak igaz, ha $\underline{\underline{A}} = \lambda\underline{\underline{B}}$

mátrixfelírásban:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \qquad e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

$$e^{\varphi \underline{\underline{J}}} = \lim_{n\to\infty}\left(\underline{\underline{1}}+\frac{\varphi \underline{\underline{J}}}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\frac{\varphi}{n}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right]^n = \lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix}1&-\frac{\varphi}{n}\\ \frac{\varphi}{n}&1\end{pmatrix}^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+\frac{\varphi^2}{n^2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2/n^2}} & -\frac{\varphi/n}{\sqrt{1+\varphi^2/n^2}}\\ \frac{\varphi/n}{\sqrt{1+\varphi^2/n^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\varphi^2}{n^2}}}\end{pmatrix}\right]^n =$$

$$\frac{1}{1+\frac{\varphi^2}{n^2}}+\frac{\varphi^2/n^2}{1+\frac{\varphi^2}{n^2}} = \frac{1+\frac{\varphi^2}{n^2}}{1+\frac{\varphi^2}{n^2}} = 1 \checkmark$$

$$\cos\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{\dots}} \qquad \sin\alpha_n = \frac{\varphi/n}{\sqrt{\dots}} \qquad \operatorname{tg}\alpha_n = \varphi/n$$

} mert négyzetek összege 1

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{1+\frac{\varphi^2}{n^2}}\right)^n \underbrace{\begin{pmatrix}\cos\alpha_n & -\sin\alpha_n\\ \sin\alpha_n & \cos\alpha_n\end{pmatrix}^n}_{\underline{\underline{F}}(\alpha_n)}\right] =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{\varphi^2}{n^2}}\right)^n = 1$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{1+\frac{\varphi^2}{n^2}}\right)^n \begin{pmatrix}\cos(n\alpha_n) & -\sin(n\alpha_n)\\ \sin(n\alpha_n) & \cos(n\alpha_n)\end{pmatrix}\right] = \lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix}\cos(n\alpha_n) & -\sin(n\alpha_n)\\ \sin(n\alpha_n) & \cos(n\alpha_n)\end{pmatrix} =$$

ha $n \gg 1$ $\quad \alpha_n \sim \varphi/n \quad n\alpha_n \sim \varphi$

$$= \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix} = \underline{\underline{F}}(\varphi)$$

- Szeléziránat- és hosszartartás: a forgásunk nem változtatja meg a vektor → hosszát, → egymással bezárt szögét } skalárszorzatát

biz.: $\vec{u} \to \vec{u}' = \hat{F}\vec{u} \qquad \underline{u}' = \underline{\underline{F}}\,\underline{u}$

$\vec{v} \to \vec{v}' = \hat{F}\vec{v} \qquad \underline{v}' = \underline{\underline{F}}\,\underline{v} \qquad u'_k = \sum_\ell F_{k\ell} u_\ell \qquad v'_k = \sum_\ell F_{k\ell} v_\ell$

$$\underline{u}'\,\underline{v}' = \sum_k u'_k v'_k = \sum_k \left(\sum_\ell F_{k\ell} u_\ell\right)\left(\sum_m F_{km} v_m\right) =$$

← nem lehet ugyanazt a summát kétszer használni ⇒ új index kell

$$= \sum_k \sum_\ell \sum_m F_{k\ell} F_{km} u_\ell v_m = \sum_\ell \sum_m \left(\sum_k F_{k\ell} F_{km}\right) u_\ell v_m \overset{*}{=}$$

$$\left[\sum_k F_{k\ell} F_{km} = \sum_k (\tilde{F})_{\ell k} F_{km} = (\underline{\underline{\tilde{F}}}\,\underline{\underline{F}})_{\ell m} = \underline{\underline{1}}_{\ell m} = \delta_{\ell m}\right]$$

$$\overset{*}{=} \sum_\ell \sum_m \delta_{\ell m} u_\ell v_m = \sum_\ell u_\ell \left(\sum_m \delta_{\ell m} v_m\right) = \sum_\ell u_\ell v_\ell = \underline{u}\,\underline{v}$$

- a forgatás skalárszorzattartó transzformáció és hosszartartó

Cayley-térben az unitér mátrix

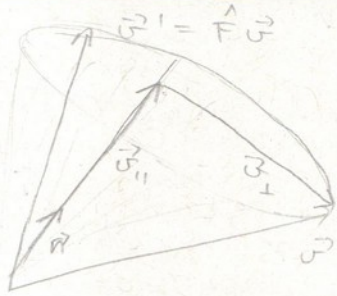
valós térben az ortogonális mátrix

↑ 2D-s forgatás

3D-ben használjuk

forgatás, tükrözéssel – hosszartartóak ⇒ O3 ortogonális csoport

forgatás 3D-ben

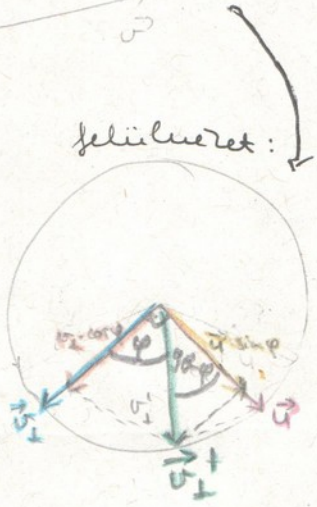


$|\vec{n}| = 1$ tengelyen egységvektor

a vektor forgatás körben

kiegészítették síkok

tengely: $\vec{n}$ irányában



- $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$

$\vec{v}_\parallel \parallel \vec{n}$ $\quad$ $\vec{v}_\perp \perp \vec{n}$

$\vec{v}_\parallel = (\vec{v}\,\vec{n})\vec{n}$

$\vec{v}_\perp = \vec{v} - \vec{v}_\parallel = \vec{v} - \vec{n}(\vec{v}\,\vec{n})$

$\vec{v}' = \hat{F}\vec{v} = \hat{F}\vec{v}_\perp + \hat{F}\vec{v}_\parallel$

mert lineáris operátor

$\hat{F}\vec{v}_\parallel = \vec{v}_\parallel$ ⇒ sajátvektor

- $\vec{v}_\perp' = \vec{v}_\perp \cos\varphi + \vec{u}\sin\varphi$ $\quad$ $\vec{u}$-egységvektor

$\begin{cases} \vec{u} = \vec{n}\times\vec{v}_\perp & \leftarrow \text{merőleges mindkettőre} \\ |u| = |n|\,|v_\perp|\sin\varphi \end{cases}$

- $\vec{v}_\perp' = \vec{v}_\perp\cos\varphi + (\vec{n}\times\vec{v}_\perp)\sin\varphi$

$\vec{u} = (\vec{n}\times\vec{v}_\perp) = \vec{n}\times(\vec{v}-\vec{v}_\parallel) = \vec{n}\times\vec{v} - \underbrace{\vec{n}\times\vec{v}_\parallel}_{0}$

$\vec{v}_\perp' = \vec{v}_\perp\cos\varphi + \vec{n}\times\vec{v}\sin\varphi$

- $\vec{v}' = \hat{F}\vec{v} = \vec{v}_\parallel + (\overbrace{\vec{v}_\perp\cos\varphi + (\vec{n}\times\vec{v})\sin\varphi}^{v_\perp'}) =$

$= (\vec{v}\,\vec{n})\vec{n} + (\vec{v} - (\vec{v}\,\vec{n})\vec{n})\cos\varphi + (\vec{n}\times\vec{v})\sin\varphi$

$\underline{v}' = (\underline{v}\,\underline{n})\underline{n} + (\underline{v} - (\underline{v}\,\underline{n})\underline{n})\cos\varphi + (\underline{n}\times\underline{v})\sin\varphi =$

$= \underline{v}\cos\varphi + (\underline{v}\,\underline{n})\underline{n}(1-\cos\varphi) + \underline{n}\times\underline{v}\sin\varphi$

- $v_k' = v_k\cos\varphi + n_k(\underline{v}\,\underline{n})(1-\cos\varphi) + \left(\sum_\ell\sum_m \varepsilon_{k\ell m} n_\ell v_m\right)\sin\varphi =$

$= v_k\cos\varphi + n_k\left(\sum_\ell v_\ell n_\ell\right)(1-\cos\varphi) + \sum_\ell\sum_m \varepsilon_{k\ell m} n_\ell v_m \sin\varphi =$

$= \left(\sum_\ell \delta_{k\ell} v_\ell\right)\cos\varphi + \sum_\ell n_k n_\ell v_\ell (1-\cos\varphi) + \sum_\ell\sum_m \varepsilon_{k\ell m} n_m v_\ell \sin\varphi =$

↕ ℓ és m felcserélhető, mert összegzés indexei

$= \sum_\ell \left(\underbrace{\delta_{k\ell}\cos\varphi + n_k n_\ell(1-\cos\varphi) + \sum_m \varepsilon_{k\ell m} n_m \sin\varphi}_{\underline{\underline{F}}_{k\ell}}\right) v_\ell$

$\underline{\underline{F}}_{k\ell}$ ← a forgatás mátrixa

sínus csak a nem diagonális komponensben

$\Rightarrow \boxed{v_k' = \sum_\ell F_{k\ell} v_\ell}$

$\boxed{\underline{\underline{F}}_{k\ell} = \delta_{k\ell}\cos\varphi + n_k n_\ell(1-\cos\varphi) + \sum_m \varepsilon_{k\ell m} n_m \sin\varphi}$

Spec. ext: $\underline{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ z tengely körüli forg.

$\underline{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$F_{11} = \delta_{11}\cos\varphi + u_1u_1(1-\cos\varphi) + \sum_m \varepsilon_{1m1} n_m \sin\varphi = \cos\varphi$

$F_{12} = \delta_{12}\cos\varphi + u_1u_2(1-\cos\varphi) + \sum_m \varepsilon_{1m2} n_m \sin\varphi = \varepsilon_{132} n_3 \sin\varphi = -\sin\varphi$

$F_{13} = \delta_{13}\cos\varphi + u_1u_3(1-\cos\varphi) + \sum_m \varepsilon_{1m3} n_m \sin\varphi = \varepsilon_{133} n_3 \sin\varphi = 0$

$F_{21} = \delta_{21}\cos\varphi + n_2n_1(1-\cos\varphi) + \sum_m \varepsilon_{2m1} n_m \sin\varphi = \varepsilon_{231} n_3 \sin\varphi = \sin\varphi$

$F_{22} = \delta_{22}\cos\varphi + n_2n_2(1-\cos\varphi) + \sum_m \varepsilon_{2m2} n_m \sin\varphi = \cos\varphi$

$F_{23} = \delta_{23}\cos\varphi + n_2n_3(1-\cos\varphi) + \sum_m \varepsilon_{2m3} n_m \sin\varphi = \varepsilon_{233} n_3 \sin\varphi = 0$

$F_{31} = \delta_{31}\cos\varphi + n_3n_1(1-\cos\varphi) + \sum_m \varepsilon_{3m1} n_m \sin\varphi = \varepsilon_{331} n_m \sin\varphi = 0$

$F_{32} = \delta_{32}\cos\varphi + n_3n_2(1-\cos\varphi) + \sum_m \varepsilon_{3m2} n_m \sin\varphi = \varepsilon_{332} n_m \sin\varphi = 0$

$F_{33} = \delta_{33}\cos\varphi + n_3n_3(1-\cos\varphi) + \sum_m \varepsilon_{3m3} n_m \sin\varphi = \cos\varphi + 1 - \cos\varphi = 1$

= a 3D-s forgásmátrix (z tengely körül)

$$\underline{\underline{F}} = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

a 3D-s tér felbontható két invariáns altérre

x-y sík

z tengely



külön működik az x-y síkban és z körül

-spur: $Sp(\underline{\underline{F}}) = 2\cos\varphi + 1$

$Sp\,\underline{\underline{F}} = \sum_\alpha F_{\alpha\alpha} = \sum_\alpha \left(\delta_{\alpha\alpha}\cos\varphi + u_\alpha u_\alpha(1-\cos\varphi) + \sum_m \varepsilon_{\alpha m\alpha} n_m \sin\varphi\right) =$

$= \left(\sum_\alpha \delta_{\alpha\alpha}\right)\cos\varphi + \left(\sum_\alpha u_\alpha u_\alpha\right)(1-\cos\varphi) = 1 + 2\cos\varphi$

minden forgásmátrixnak ennyi a spurja

forgatások csoportot alkotnak

$\Rightarrow$ forgatások egymásutánja is forgatás

végrendelet

ortogonális mx

2019.10.16.
Sze 23-24.ea

Lineáris egyenletrendszerek

- egyértelműség: egyenlet, számolás miatt - de a mo. nem feltétlen egész szám (⇔ det ≠ 0 esetén igen)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_4 \end{cases}$$

a együtthatók és b-k ismertek
ismeretlenek: x-ek
vagy 1, ∞ sok, vagy 0 mo. van

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$$

b az a-k kiromlyalatt

$$\begin{bmatrix} \vec{a}^{(1)} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} \vec{a}^{(2)} \end{bmatrix} x_2 \cdots \begin{bmatrix} \vec{a}^{(n)} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} \vec{b} \end{bmatrix}$$

a vektorrendszer rangja:
a lineáris burok dimenziója
max. dim V

ha $b = 0$ ⇒ homogén lin. egy.rsz.
⇔ inhomogén -u-

ha b benne van a-k lineáris burkában:
megoldható akkor és csak akkor
ha a és b rendszerének rangja
ha b-vel együtt az a-k dimenziója nem nő
⇒ 0 mo.

homogén
az $\vec{a}^{(n)}$-k lineáris burkában
a $\vec{0}$ mindig benne van
⇒ triviális mo.: $x_n = 0$
nemtriviális mo. keresése
ha $\vec{a}^{(n)}$-k lineárisan összefüggők

ha az a és b-vektorok rangja < dim V
⇒ ∞ mo.
- $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$
- $\underline{\underline{A}}$ injektív
- $\ker \underline{\underline{A}} = \{0\}$ triviális altér
- minden lin. független rendszer képtere is lin. független

ha 1 igaz, akkor is

$(\det \underline{\underline{A}} = 0)$

$\underline{\underline{A}}\,\underline{x}_1 = \underline{0}$ mo.
$\underline{\underline{A}}\,\underline{x}_2 = \underline{0}$ mo.

$\underline{x} = (\alpha \underline{x}_1 + \beta \underline{x}_2)$

$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{A}}(\alpha \underline{x}_1 + \beta \underline{x}_2) = \alpha(\underline{\underline{A}}\,\underline{x}_1) + \beta(\underline{\underline{A}}\,\underline{x}_2) = 0$

ha van két mo, arok linkombja is mo. ⇒ a homogén egyenlet mo-ai lineáris
⇒ bázis mo.-k keresése, melyekből előállítható akkori összes alkotnak

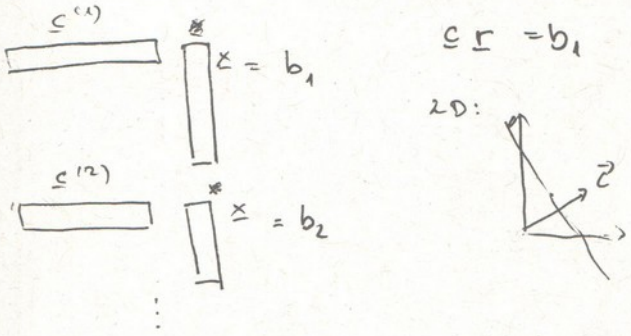
inhomogén

$$\left.\begin{matrix} \underline{\underline{A}}\,\underline{x}_1 = \underline{b} \\ \underline{\underline{A}}\,\underline{x}_2 = \underline{b} \end{matrix}\right\} \ominus \qquad \underline{\underline{A}}\,\underline{x}_1 - \underline{\underline{A}}\,\underline{x}_2 = \underline{\underline{A}}(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) = \underline{0}$$

$\Rightarrow \underline{x}_{\text{inh.}} = \underline{x}_1 + \underline{x}_{\text{hom}}$ ← az inhomogén megoldása egy mo. és a homogén egy.rsz. általános mo.-ának összege

homogén egyenlet ha van egy nemtriviális mo. ⇒ ∞ sok mo. (lineáris)
inhomogén egyenlet: 1 mo.

egyenes mo.-ai koordináta segítségével:
2 ismeretlen esetén az egyenletek ← egyenes egyenletei
1 mo.: metszéspont
0 mo.: párhuzamos
∞ mo.: megegyező egyenlet



térben egy sík egyenlete

$\underline{c}$: normálvektora a síknak

$b = 0$ esetén az egyenes átmegy az origón

n dimenziós alakzat:

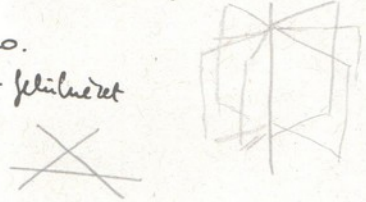
$(n-1)$ dimenziós hipersík egyenlete

pl. 3 általános helyzetű síknak egy közös metszéspontja van akk.

∞ sok mo.: a síkok egyenlete ua. vagy párhuzamos v. közös egyenesek

0 mo.

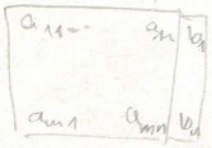
pl. felületek





az egyenletrendszer kiegészített/bővített mátrixa:

ha a rangja megegyezik az eredeti rangjával, van mo.



hozzáírjuk b oszlopát az a-hoz mátrixához

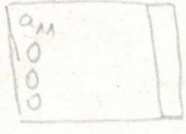
Gauss-elimináció

az egyenletrendszer ekvivalencia-relációval szemben alkalmazni a bővített mx-szal végzett ekvivalencia-műveleteket

x-ek "elhagyása" homogén egyenletrendszer esetén a 0-ákat nem írjuk le

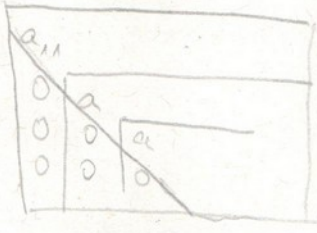
- hozzáadhatjuk az egyik sor többszörösét a másikhoz ← oszlopokat NEM
  - $\varnothing$ értéke ($\Leftrightarrow$ determinánsa) $\Rightarrow$ nem kell a szorzást "komplikálni" 1/szorzó kímélésével
- felcserélhetjük a sorokat

- módszer:



ha $a_{11} = 0$, akkor rendezzük úgy a sorokat, hogy $a_{11} \neq 0$

addig egyenlő együtthatóra oldjuk.



cél: trapézmátrix a főátló alatt csak 0

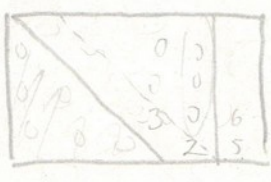
$\Rightarrow$ az utolsó egyenlet egyértelműen megadja az utolsó x-et majd sorban visszahelyettesítés

$\rightarrow$ ha az utolsó egyenlet $0x = b$ alakú ($b \neq 0$) $\Rightarrow$ $\varnothing$ mo. ($\Leftarrow$ inhomogén e.)

$\rightarrow$ ha több ismeretlen, mint egyenlet $\Rightarrow$ marad egy utolsó egyenlet több változóval $\Rightarrow \infty$ mo.

$\rightarrow$ homogén esetben nem jöhet ki ellentmondásos eset homogén egyenletnek mindig van mo.-a

visszahelyettesítés:



jobb oldalról az oszlopokat 0-ákkal egészítjük ki

végeredmény: diagonálmx

nem négyzetes mx: több sor, mint oszlop - hiányokat kapott lehet, vagy elmaradnak alul egyenletek

ha több ismeretlen van

a végén marad pl. $3z + 2u - v = 4 \Rightarrow 3z = 4 - 2u + v$ ← egyenes egyenlete

∞ sok mo.

4 változós esetén sík egyenlete

egyenletrendszer

(f) $2x - 3y - 4z + 5u = -13$
$4x - 6y + z - u = 14$
$6x - 9y + z + 2u = 13$
$2x - 3y - 2z - 4u = 9$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -4 & 5 & -13 \\ 4 & -6 & 1 & -1 & 14 \\ 6 & -9 & 1 & 2 & 13 \\ 2 & -3 & -2 & -4 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (2)-2\cdot(1) \\ (3)-3\cdot(1) \\ (4)-(1) \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -4 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 9 & -11 & 40 \\ 0 & 0 & 13 & -13 & 52 \\ 0 & 0 & 2 & -9 & 22 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ (3)\cdot\frac{1}{13}\to(2) \\ \\ \end{array} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -4 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & -11 & 40 \\ 0 & 0 & 2 & -9 & 22 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ (3)-9\cdot(2) \\ (4)-2\cdot(2) \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -4 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 14 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ (3):(-2) \\ \\ \end{array} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -4 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 14 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -4 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (1)-5(3) \\ (2)+(3) \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (1)+4\cdot(2) \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

az 5 dimenziós térben a vektor nem valódi síkmetszetben függetlenül

ekvivalens: $2x - 3y = 5$, $z = 2$, $u = -2$

$2x - 3y = 5$
$1z = 2$
$1u = -2$

$2x = 5 + 3t$ ← $y = t$ t paraméter
$z = 2$
$u = -2$

vektoros alakban:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+3t \\ t \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{x} = \underline{r_0} + \underline{s}t$

$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{A}}(\underline{r_0} + \underline{s}t) = \underset{\sim}{\underline{\underline{A}}\,\underline{r_0}} + t(\underset{\sim}{\underline{\underline{A}}\,\underline{s}})$ (0)

(f) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ [2]-2[1] \\ [3]-3[1] \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -7 & -8 \\ 0 & -5 & -13 & -18 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ [3]-5\cdot[2] \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 22 & 22 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ [3]:22 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

(f) $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -3 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} [1]-[2] \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -3 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ [2]-2\cdot[1] \\ [3]-4\cdot[1] \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 1 & -2 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ [3]-[2] \end{array}$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ [3]\to[2] \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ [3]-5[2] \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & u & t \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 16 & -11 \end{array}\right) \sim$$

u legyen paraméter

transzlátor oszlopa

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -11 & -16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 5 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & 5 & 15 & 15 \\ 0 & 0 & -5 & -11 & -16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ [2]+[3] \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c|c} 5 & -5 & 0 & 6 & 11 \\ 0 & 5 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 11 & 16 \end{array}\right) \sim$$

paraméter oszlopa $u = t$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 5 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 5 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 11 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{l} [1]:5 \\ \\ \\ \end{array}$$

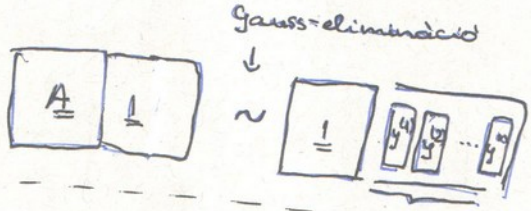
$x = 2 + 2t$
$y = 4/5 - t/5$
$z = 11/5 + 16/5\,t$
$u = t$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4/5 \\ 11/5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1/5 \\ 16/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e)
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -5 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 5 & 3 & 1 \\ 5 & 9 & 4 & 7 & 5 & 8 \end{array}\right) \overset{[2]\to[1]}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 5 & 3 & 1 \\ 5 & 9 & 4 & 7 & 5 & 8 \end{array}\right) \overset{\substack{[2]-2\cdot[1] \\ [3]-4\cdot[1]}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -11 & -3 & -5 & -6 \\ 0 & -1 & -11 & -3 & -5 & -11 \end{array}\right) \} 4$$

f) mátrikinvert

$$\begin{aligned} 6x - 3y + 18z &= b_1 \\ -108x + 24y + \quad +18u &= b_2 \\ -18x + 3y + 6z + 6u &= b_3 \\ -18y + 108z + 6u &= b_4 \end{aligned}$$



$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ $\quad \underline{b} = \sum b_l \underline{e}^{(l)}$

$\underline{\underline{A}}\,\underline{y}^{(1)} = \underline{e}^{(1)}$
$\underline{\underline{A}}\,\underline{y}^{(2)} = \underline{e}^{(2)}$
$\underline{\underline{A}}\,\underline{y}^{(3)} = \underline{e}^{(3)}$
$\underline{\underline{A}}\,\underline{y}^{(4)} = \underline{e}^{(4)}$

$\Rightarrow \underline{x} = b_1 \underline{y}^{(1)} + b_2 \underline{y}^{(2)} + b_3 \underline{y}^{(3)} + b_4 \underline{y}^{(4)}$

$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = b_1 (\underline{\underline{A}}\,\underline{y}^{(1)}) + b_2 (\underline{\underline{A}}\,\underline{y}^{(2)}) + \dots + b_4 (\underline{\underline{A}}\,\underline{y}^{(4)})$

$= b_1 \underline{e}^{(1)} + \dots b_4 \underline{e}^{(4)} = \underline{b}$

$\underline{x} = \sum_l b_l \underline{y}^{(l)}$

$x_k = \sum_l b_l y_l^{(k)} =$

$= \sum_l b_l C_{kl}$

$\Rightarrow x_k = \sum_l C_{kl} b_l$

$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$

$\underline{x} = \underline{\underline{C}}\,\underline{b}$

$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}^{-1}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -36 & 8 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 36 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{[2]-18\cdot[1] \\ [3]+3\cdot[1]}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 108 & 6 & 18 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 20 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 36 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{[2]\leftrightarrow[3]}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 20 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 108 & 6 & 18 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 36 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{[3]-5[2] \\ [4]-3\cdot[2]}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 20 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & 3 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & -4 & -9 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \overset{[4]+3\cdot[3]}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 20 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & 3 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 0 & 3 & -18 & 1 \end{array}\right) \cdot 8 \sim \cdot 4$$

$\Rightarrow$ van mo., a det $\neq 0$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 160 & 16 & 24 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 32 & -16 & 12 & 4 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 0 & 3 & -18 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{[2]+[4] \\ [3]-[4]}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 160 & 0 & 24 & 3 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & 32 & 0 & 12 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 0 & 3 & -18 & 1 \end{array}\right) \cdot 16 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 32 & -16 & 96 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 160 & 0 & 24 & 3 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & 32 & 0 & 12 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 0 & 3 & -18 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{[1]-3\cdot[3] \\ [2]-5\cdot[3]}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 32 & -16 & 96 & 0 & -20 & -3 & 6 & 3 \\ 0 & -16 & 0 & 0 & -36 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 32 & 0 & 12 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 0 & 3 & -18 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} [1]-[2] \\ (\cdot 4) \\ (-2) \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 32 & 0 & 0 & 0 & 16 & -1 & 6 & -3 \\ 0 & 32 & 0 & 0 & 72 & 4 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 32 & 0 & 12 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & 0 & -6 & 36 & -2 \end{array}\right)$$

$\sim$ a jobbkoban leegyen ua a szama

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{(32)^3} \begin{pmatrix} 16 & -1 & 6 & -3 \\ 72 & 4 & 0 & -12 \\ 12 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -6 & 36 & -2 \end{pmatrix}$$

determinans lebegőpontos

- másik inverzképzési eljárás: $\underline{\underline{A}}$ mx $\quad \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}^{-1}$

$\det A$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 6 & 0 \\ -36 & 8 & 0 & 6 \\ -6 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & 36 & 2 \end{array}\right)$$

$C_{21} = \dfrac{-11}{\det A}$ a transzponált elem

$\begin{vmatrix} -36 & 0 & 6 \\ -6 & 2 & 2 \\ 0 & 36 & 2 \end{vmatrix}$ aldeterminans

Vektoregyenletek

- egyenlet, melyben az ismeretlen egy vektor
- visszavezethető számokra vonatkozó egyenletrendszerre

① $\vec{a}\,\vec{y} = \beta$ — $\vec{a}$ – ismert vektor, $\vec{y}$ – ismeretlen vektor

- $\vec{a} = \vec{0}$
  - $\vec{a}\,\vec{y} = 0$
    - $\beta = 0$ → $\vec{y} \in V$
    - $\beta \neq 0$ → ↯
- $\vec{a} \neq \vec{0}$
  - $\beta = 0 \Rightarrow \vec{y} \perp \vec{a}$ → $\vec{y} = \vec{a} \times \vec{c}$, $\vec{c} \in V$
  - $\beta \neq 0$ → $\vec{y} = \frac{\beta}{|\vec{a}|^2}\vec{a} + \vec{a} \times \vec{c}$ $\Rightarrow \infty$ sok mo.

② $\vec{a} \times \vec{y} = \vec{b}$

- $\vec{a} = \vec{0}$
  - $\vec{b} = \vec{0}$ → $\vec{y} \in V$
  - $\vec{b} \neq \vec{0}$ → ↯
- $\vec{a} \neq \vec{0}$
  - $\vec{b} = \vec{0}$ → $\vec{y} = \lambda\vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
  - $\vec{b} \neq \vec{0}$
    - $\vec{b}\vec{a} \neq 0$ nem $\perp$-ek → ↯
    - $\vec{b}\vec{a} = 0$ $\vec{b} \perp \vec{a}$

$\vec{a}, \vec{b}$ és $\vec{a} \times \vec{b}$ bázist alkotnak

(*) $\vec{y} = -\frac{1}{|a|^2}\vec{a} \times \vec{b} + \lambda\vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(*) $\vec{y} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma(\vec{a} \times \vec{b})$

$\vec{a} \times \vec{y} = \vec{a} \times (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\,\vec{a} \times \vec{b}) = \alpha\,\vec{a} \times \vec{a} + \beta\,\vec{a} \times \vec{b} + \gamma\,\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}) =$ (kettős vektorszor.)

$= \beta(\vec{a} \times \vec{b}) + \gamma(\vec{a}(\vec{a}\vec{b}) - \vec{b}(\vec{a}\vec{a})) = \beta(\vec{a} \times \vec{b}) - \gamma|a|^2\vec{b} \overset{!}{=} \vec{b} = 0\vec{a} + 1\vec{b} + 0\,\vec{a} \times \vec{b}$

$\Rightarrow -\gamma|a|^2 = 1 \Rightarrow \gamma = -\frac{1}{|a|^2}$, $\beta = 0$

$\Rightarrow \vec{y} = -\frac{1}{|a|^2}\vec{a} \times \vec{b} + \lambda\vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

③ (I) $\vec{a} \times \vec{y} = \vec{b}$

(II) $\vec{b} \times \vec{y} = \mu\vec{a}$, $\mu \in \mathbb{R}$ $\quad \vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$

(I) + (II)

- $\vec{b}\vec{a} \neq 0$ → $\vec{b} \not\perp \vec{a}$ → ↯
- $\vec{b}\vec{a} = 0$ $\quad b \perp a$

$\vec{y} = -\frac{1}{|a|^2}\vec{a} \times \vec{b} + \lambda\vec{a}$

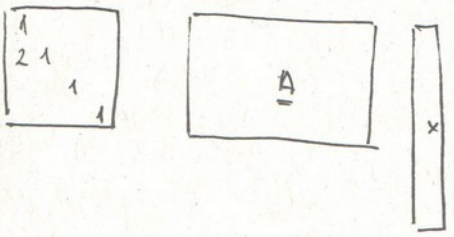
(II) $\vec{b} \times \vec{y} = \vec{b} \times \left(-\frac{1}{|a|^2}\vec{a} \times \vec{b} + \lambda\vec{a}\right) = -\frac{1}{|a|^2}\vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b}) + \lambda(\vec{b} \times \vec{a}) =$

$= -\frac{1}{|a|^2}(\vec{a}|b|^2 - \vec{b}(\vec{a}\vec{b})) + \lambda(\vec{b} \times \vec{a}) = -\frac{|b|^2}{|a|^2}\vec{a} - \lambda\vec{a} \times \vec{b} \overset{!}{=} \mu\vec{a}$

$\Rightarrow \mu = -\frac{|b|^2}{|a|^2}$, $\lambda = 0$ ← ha μ ennyi, van mo., egyébként ∅ !

$\Rightarrow \vec{y} = -\frac{1}{|a|^2}\vec{a} \times \vec{b}$ ha $\mu = -\frac{|b|^2}{|a|^2}$

2019.10.21.
hét 2s.ea.



↑ a sorok szorzása megfeleltethető egy ilyen négyzetes mx-szal való szorzásnak
ez a mx invertálható

végeredmény:





↙ sorok felcserélése ilyen mx-szel való szorzás

$\Rightarrow A^{-1}$ ezen sor elemi négyzetes mx szorzata

Reprezentációváltás / bázistranszformáció

$\vec{v}$ ↗ $\underline{v}$ (V) $\dim V = n$
↘ $\underline{v}'$ (V')

$\{\vec{e}^{(k)}\}_{k=1}^{n}$ $\{\vec{f}^{(l)}\}_{l=1}^{n}$

a két reprezentáció egyenlő egymással

$$\vec{v} = \sum_k v_k \vec{e}^{(k)} = \sum_l v_l \vec{f}^{(l)} \quad / \vec{F}^{(m)} \quad \vec{E}^{(m)}$$

reciprokrelációs: $\vec{E}^{(k)}$ hogy $\vec{E}^{(k)} \vec{e}^{(l)} = \delta_{kl}$
$\vec{F}^{(k)}$ hogy $\vec{F}^{(k)} \vec{f}^{(l)} = \delta_{kl}$

Ha az eredeti bázis ortonormált, reciproka önmaga
ortogonális bázis esetén az irány marad, hossz változik
mértékegységes bázisok esetén a reciprokbázis mértékegysége az
eredeti reciproka pl. $m \to 1/m$ méter

$$\vec{v} = \sum_k v_k \vec{e}^{(k)} \quad / \vec{E}^{(l)}$$

$$\vec{v}\vec{E}^{(l)} = \sum_k v_k \underbrace{(\vec{e}^{(k)}\vec{E}^{(l)})}_{\delta_{kl}} = v_l \quad \Rightarrow \boxed{v_l = \vec{v}\vec{E}^{(l)}}$$

$$\vec{v}\vec{F}^{(m)} = \sum_k v_k \underbrace{(\vec{e}^{(k)}\vec{F}^{(m)})}_{l_{mk}} = \sum_l v_l' \underbrace{(\vec{f}^{(l)}\vec{F}^{(m)})}_{\delta_{lm}} = \sum_l v_l' \delta_{lm} = v_m'$$

négyzetes mx

$$\boxed{v_m' = \sum_k l_{mk} v_k} \Rightarrow \boxed{\underline{v}' = \underline{\underline{l}}\,\underline{v}} \qquad \boxed{l_{mk} = \vec{e}^{(k)}\vec{F}^{(m)}}$$

$$\vec{v}\vec{E}^{(k)} = \sum_l v_l \underbrace{(\vec{e}^{(l)}\vec{E}^{(k)})}_{\delta_{lk}} = \sum_l v_l' \underbrace{(\vec{f}^{(l)}\vec{E}^{(k)})}_{s_{kl}} = \sum_l s_{kl} v_l'$$

$$\boxed{v_k = \sum_l s_{kl} v_l'} \Rightarrow \boxed{\underline{v} = \underline{\underline{s}}\,\underline{v}'} \qquad \boxed{s_{kl} = \vec{f}^{(l)}\vec{E}^{(k)}}$$

$\underline{v}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{v} = \underline{\underline{R}}\,(\underline{\underline{S}}\,\underline{v}') = (\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{S}})\,\underline{v}' = \underline{\underline{1}}\,\underline{v}'$

$\Rightarrow \boxed{\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{1}}} \quad \Rightarrow \boxed{\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{R}}^{-1}}$ egymás inverzei

$\boxed{R_{mk} = \vec{e}^{(k)}\,\vec{F}^{(m)}}$

$\boxed{S_{kl} = \vec{f}^{(l)}\,\vec{E}^{(k)}}$

Spec. eset ONB

error $\vec{e}^{(k)}\,\vec{e}^{(l)} = \delta_{kl}$ $\qquad \vec{E}^{(l)} = \vec{e}^{(l)}$

$\vec{f}^{(k)}\,\vec{f}^{(l)} = \delta_{kl}$ $\qquad \vec{F}^{(l)} = \vec{f}^{(l)}$

$R_{mk} = \vec{e}^{(k)}\,\vec{f}^{(m)} = \vec{f}^{(m)}\,\vec{e}^{(k)} = S_{km}$

$S_{ml} = \vec{f}^{(l)}\,\vec{e}^{(m)}$

$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{\tilde{R}}} = \underline{\underline{R}}^{-1}$ ← ONB esetén S és R nem csak egymás inverzei, de transzponáltjai is

ortogonális mátrix – determinánsa ± 1

pl. forgatásmátrix

---

projektor $\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{1}}$

$\vec{a}\,/\,(\vec{a}\circ\vec{b})\,\vec{c} = \vec{a}\,(\vec{b}\,\vec{c})$

$\vec{d}\,(\vec{a}\circ\vec{b})\,\vec{c} = (\vec{d}\,\vec{a})\,(\vec{b}\,\vec{c})$

$\sum_m R_{km}\,S_{ml} = 1_{kl} = \delta_{kl}$

$\delta_{kl} = \sum_m (\vec{e}^{(m)}\,\vec{F}^{(k)})\,(\vec{f}^{(l)}\,\vec{E}^{(m)}) = \sum_m (\vec{F}^{(k)}\,\vec{e}^{(m)})\,(\vec{E}^{(m)}\,\vec{f}^{(l)}) =$

$= \sum_m \vec{F}^{(k)}\,(\vec{e}^{(m)}\circ\vec{E}^{(m)})\,\vec{f}^{(l)} = \vec{F}^{(k)}\,\Big(\sum_m \underbrace{(\vec{e}^{(m)}\circ\vec{E}^{(m)})}_{\hat{1}}\Big)\,\vec{f}^{(l)}$

$\vec{F}^{(k)}\,\vec{f}^{(l)} = \delta_{kl}$

$\vec{v} = \sum_k v_k\,\vec{e}^{(k)} = \sum_k (\vec{v}\,\vec{E}^{(k)})\,\vec{e}^{(k)} =$ bázis: →

$= \sum_k \vec{e}^{(k)}\,(\vec{E}^{(k)}\,\vec{v}) = \sum_k (\vec{e}^{(k)}\circ\vec{E}^{(k)})\,\vec{v} = \Big(\sum_k \vec{e}^{(k)}\circ\vec{E}^{(k)}\Big)\,\vec{v} \Rightarrow$

$\hat{1}$

er egy projektor (lineáris leképezés)

$P^{(k)}\,\vec{v} = v_k\,\vec{e}^{(k)} = (\vec{E}^{(k)}\,\vec{v})\,\vec{e}^{(k)} = (\vec{e}^{(k)}\circ\vec{E}^{(k)})\,v \Rightarrow \boxed{P^{(k)} = \vec{e}^{(k)}\circ\vec{E}^{(k)}}$

$\hat{P}^{(k)}\,\hat{P}^{(l)} = (\vec{e}^{(k)}\circ\vec{E}^{(k)})\,(\vec{e}^{(l)}\circ\vec{E}^{(l)}) = (\vec{E}^{(k)}\,\vec{e}^{(l)})\,\vec{e}^{(l)}\circ\vec{E}^{(l)} = \delta_{kl}\,\vec{e}^{(k)}\circ\vec{E}^{(l)}$

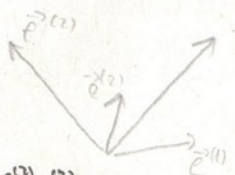
$= \delta_{kl}\,\vec{e}^{(k)}\,\vec{E}^{(k)} = \delta_{kl}\,\hat{P}^{(k)}$

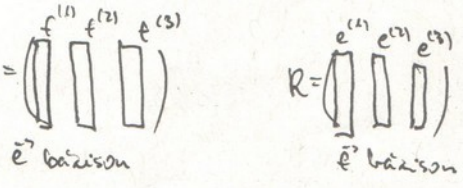
⇒ a projektor négyzete önmaga, két kül. projektor összetétele 0

teljességi reláció az e-k lineáris

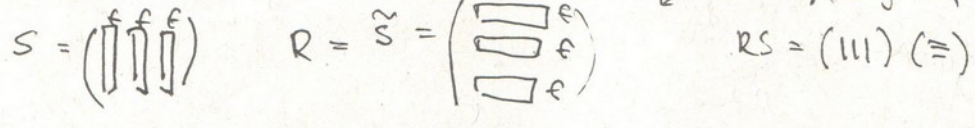
$R_{km} = \vec{e}^{(m)}\,\vec{F}^{(k)}$

$S_{mk} = \vec{E}^{(m)}\,\vec{f}^{(l)} = f_m^{(l)}$ ←





ONB esetén:



← RS egységmx,

$RS = (111)\ (\equiv)$

Operátorok reprezentálása bázison

$\vec{u} = \hat{A}\vec{v}$ $\quad A_{kl} = \vec{e}^{(k)}(\hat{A}\vec{e}^{(l)})$

$\underline{u} = \underline{\underline{A}}\,\underline{v}$

$\vec{u} = \sum_l u_l \vec{e}^{(l)}$ ← 37. old

$\hat{1} = \sum_k \vec{e}^{(k)} \circ \vec{E}^{(k)}$ ← az egységoperátor projektorfelbontása

$u_k = \vec{E}^{(k)}\vec{u} = \vec{E}^{(k)}(\hat{A}\vec{v}) = \vec{E}^{(k)}\hat{A}\hat{1}\vec{v} = \vec{E}^{(k)}\hat{A}\sum_l(\vec{e}^{(l)}\circ\vec{E}^{(l)})\vec{v} =$

$= \sum_l \underbrace{(\vec{E}^{(k)}(\hat{A}\vec{e}^{(l)}))}_{A_{kl}}(\vec{E}^{(l)}\vec{v}) = \sum_l A_{kl}v_l = u_k$

2016.02.24. 12:30

másképp:
$\vec{u} = \sum_k u_k\vec{e}^{(k)} = \sum_k(\vec{E}^{(k)}\vec{u})\vec{e}^{(k)} = \sum_k(\vec{e}^{(k)}\circ\vec{E}^{(k)})\vec{u}$

$\sum_k \hat{P}^{(k)} = \hat{1}$

$\hat{P}^{(k)}\hat{P}^{(l)} = \delta_{kl}\hat{P}^{(l)}$

$A_{kl} = \vec{E}^{(k)}(\hat{A}\vec{e}^{(l)})$ 'szendvics'

↙ ONB esetén $\vec{e}^{(k)}$ helyett $\vec{e}^{(k)}$ és $\vec{E}^{(k)}$ és $\vec{e}^{(k)}$ egyaránt

Különféle bázison operátorok

$\vec{v} \to \vec{v}'$ (mátrixban $\underline{v} \to \underline{v}'$), $\hat{A} \to \underline{\underline{A}}$ (mátrixban $\underline{\underline{A}}'$)

$\vec{u} = \hat{A}\vec{v}$

$u'_k = \vec{F}^{(k)}\vec{u} = \vec{F}^{(k)}(\hat{A}\vec{v}) = \vec{F}^{(k)}\hat{A}(\underbrace{\sum_l \vec{f}^{(l)}\circ\vec{F}^{(l)}}_{\hat{1}})\vec{v} = \sum_l \underbrace{\vec{F}^{(k)}\hat{A}\vec{f}^{(l)}}_{A'_{kl}}\underbrace{(\vec{F}^{(l)}\vec{v})}_{v'_l} = \sum_l A'_{kl}v'_l$

$\vec{v} \to \vec{e}$ $\quad v_k = \vec{E}^{(k)}\vec{v}$

$\vec{v} \to \vec{f}$ (bázisok) $\quad v'_k = \vec{F}^{(k)}\vec{v}$

$v'_k = \sum_l R_{kl}v_l$ $\quad R_{kl} = \vec{F}^{(k)}\vec{e}^{(l)}$ $\quad \underline{v}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{v}$

$v_l = \sum_m S_{lm}v'_m$ $\quad S_{lm} = \vec{E}^{(l)}\vec{f}^{(m)}$ $\quad \underline{v} = \underline{\underline{S}}\,\underline{v}'$

$\hat{A} \to \vec{e}$ – $\underline{\underline{A}}$ $\quad A_{kl} = \vec{E}^{(k)}\hat{A}\vec{e}^{(l)}$ $\quad \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}'\underline{\underline{R}}$

$\hat{A} \to \vec{f}$ – $\underline{\underline{A}}'$ $\quad A'_{kl} = \vec{F}^{(k)}\hat{A}\vec{f}^{(l)}$ $\quad \underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}$

Összefüggés $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{A}}'$ elemei közt:

$A'_{kl} = \vec{F}^{(k)}\hat{A}\vec{f}^{(l)} = \vec{F}^{(k)}\hat{1}\hat{A}\cdot\hat{1}\cdot\vec{f}^{(l)} = \vec{F}^{(k)}(\sum_p \vec{e}^{(p)}\circ\vec{E}^{(p)})\hat{A}(\sum_q \vec{e}^{(q)}\circ\vec{E}^{(q)})\vec{f}^{(l)}$

$[(\square\,\square)\,\square = \square\,(\square\,\square)$ $\quad (a\circ b)c = a(bc)$

$\square\,(\square\,\square) = (\square\,\square)\,\square$ $\quad a(b\circ c) = (ab)c]$

$= \sum_p\sum_q \underbrace{(\vec{F}^{(k)}\vec{e}^{(p)})}_{R_{kp}}\underbrace{(\vec{E}^{(p)}\hat{A}\vec{e}^{(q)})}_{A_{pq}}\underbrace{(\vec{E}^{(q)}\vec{f}^{(l)})}_{S_{ql}} = \sum_p\sum_q R_{kp}A_{pq}S_{ql} = (\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}})_{kl}$

$\Rightarrow \underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}}^{-1}$ ← $S(RAS)R$, $(SR)A(SR)$

$S/ \quad /R \Rightarrow \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}'\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}}^{-1}\underline{\underline{A}}'\underline{\underline{R}}$

$\vec{u} = \hat{A}\vec{v} \to \vec{u}' = \hat{A}'\vec{v}'$

$\underline{u} = \underline{\underline{A}}\,\underline{v}$ $\quad \underline{u}' = \underline{\underline{A}}'\underline{v}'$

$\underline{u}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{u} = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{S}}\,\underline{v}') =$

$= (\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}})\underline{v}' = \underline{\underline{A}}'\underline{v}'$

← Rovarnál-s egyenletek
az együtthatók egymással együtt változnak
formai reprezentálás
a különböző egyenletek valóban formában írják le
a különböző reprezentációkban

tenzorok (folyt.)

ONB esetén $E = e \quad F = f \quad S = e^{-1} = \tilde{R}$

$$A'_{kl} = \sum_p \sum_q R_{kp} A_{pq} S_{ql} = \sum_p \sum_q R_{kp} A_{pq} R_{lq} = \sum_p \sum_q R_{kp} R_{lq} A_{pq}$$

bázistranszformáláskor $\alpha' = \alpha$ skalár

$$v_k' = \sum_p R_{kp} v_p \quad \text{vektor}$$

$$A'_{kl} = \sum_p \sum_q R_{kp} R_{lq} A_{pq} \quad \text{operátor}$$

tenzorok

több, mint 2 index és a transzformációk

$$T'_{klm} = \sum_p \sum_q \sum_s R_{kp} R_{lq} R_{ms} T_{pqs}$$

$$H'_{klmn} = \sum_p \sum_q \sum_s \sum_t R_{kp} R_{lq} R_{ms} R_{nt} H_{pqst}$$

↑ a vesszős komponensek az eredeti komponensek lineáris

=definálják

homogén lineáris másodrendű transzformációkat

↳ ha tenzor = 0 $\Rightarrow$ tenzor' = 0 $\Rightarrow$ minden koordinátarendszerben 0

error korrekciós (?)

izotrópia: ha R helyére más mátrixot írunk, nem változik

↳ forgatás

a gravitációt pl. nem lehet tenzorokkal leírni

mert „kiszaporodnak" koordinátarendszerváltással – pl. súlytalanság fix helyben

---

mátrixok → transzformációk leírása
↳ operátorok reprezentációja

2019.10.22.
ke 26.ea.

mátrix: kétindexes tenzor

$\hat{A} \rightarrow \underline{\underline{A}}$

$\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}}^{-1}$

$\underline{\underline{A}}'$ és $\underline{\underline{A}}$: ekvivalens mátrixok

determinánsuk és spurjuk megegyezik

– ekvivalencia

a det. és a spur az operátor tul.-a

ha ezek különböznek, biztosan nem ugyanaz az operátornak a reprezentációja

biz., hogy ugyanaz az operátornak a mátrixa: nem triviális

~ determináns ~ térfogattranszformáció ← bázistól függetlenek

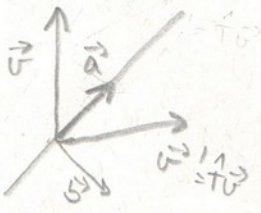
Sajátérték-probléma

$\hat{T}\vec{a} = 1 \cdot \vec{a}$

$\hat{T}\vec{b} = (-1) \cdot \vec{b}$

↳ $\vec{a}$ és $\vec{b}$: a tükrözés sajátvektorai

ezeken az operátor felveszi a sajátértékét



$\vec{a}$: tengelyen

$\vec{b}$: tengelyre $\perp$ } sajátvektorok!

minden operátornak vannak sajátvektorai, ezek kiszámítása...

a sajátvektorok bázist alkotnak → egyszerű struktúrájú operátor

– " – nem alkotnak → nem egyszerű – " –

ingyen jel $\vec{v}$ -t a sajátvektorok lineáris kombinációjaként

$$\vec{v} = 2\vec{a} + \vec{b}$$

$$\hat{T}\vec{v} = 2(\hat{T}\vec{a}) + \lambda(\hat{T}\vec{b}) = 2\vec{a} - \vec{b}$$

ha ismerjük a sajátvektorokat és azok hányadát akkor tudjuk
→ bármely vektor transzformáltja megadható

Sajátvektorok keresése

$?\exists \; u \in V \; \vec{u} \neq \vec{0}$ hogy $\boxed{\hat{A}\vec{u} = \lambda\vec{u}}$ $?\exists \; \lambda \in \mathbb{S}$

$\vec{u}$: sajátvektor
λ : sajátérték

- a nullvektor minden operátor sajátvektora lenne ⇒ nem sajátvektor
- ha $\vec{u}$ sajátvektor, $\alpha \cdot \vec{u}$ is

$$\hat{A}(\alpha\vec{u}) = \alpha(\hat{A}\vec{u}) = \alpha(\lambda\vec{u}) = \lambda(\alpha\vec{u})$$

⇒ „sajátirányok" határozhatók meg, ebben az irányban ∞ sok sajátvektor

- ha ahhoz a sajátértékhez tartozik két lineárisan független vektor

$$\hat{A}\vec{u} = \lambda\vec{u}$$
$$\hat{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

$$\hat{A}\vec{w} = \hat{A}(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha(\hat{A}\vec{u}) + \beta(\hat{A}\vec{v}) =$$
$$= \alpha(\lambda\vec{u}) + \beta(\lambda\vec{v}) = \lambda(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \lambda\vec{w}$$
⇒ lineáris is sajátvektor

degenerált sajátértékek:
két külön irányú sajátvektorhoz ua. a sajátérték tartozik

a lineárisok lineáris burkot alkotnak, azok is sajátvektorok
ez egy lineáris altér, nem csak egy irány

- spektrum: sajátértékek halmaza
- minden operátornak van min. 1 sajátvektora és sajátértéke ⇐ ∞ sok, mert a többszörös is sajátvektor ⇒ lineárisan független sajátvektorok keresése
- ha van két különböző sajátértékhez tartozó sajátvektor, azok a vektorok lineárisan függetlenek

Sajátértékek kiszámítása

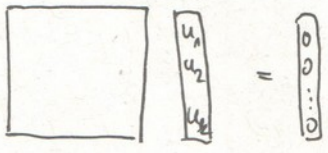
$$\underline{\underline{A}}\,\underline{u} = \lambda\underline{u}$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{u} = \lambda\,\underline{\underline{1}}\,\underline{u}$$

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{1}})\,\underline{u} = \underline{0}$$

$\underline{\underline{B}}(\lambda)$ ← λ-tól függő B mátrix

$$\underline{\underline{B}}(\lambda)\,\underline{u} = \underline{0}$$



homogén lineáris egyenes
van-e nemtriviális mo.-a ennek

lineárisan összefüggnek a vektorok, ha $\det(\underline{\underline{B}}) = 0$
ekkor van nemtriviális mo.
egyébként csak a triviális mo. ua.

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & \\ & & & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

$\det(\underline{\underline{B}})$: λ n-edfokú polinomja
⇒ $\underline{\underline{B}}$ karakterisztikus polinomja $f(\lambda)$

$$f(\lambda) = \det(\underline{\underline{B}}) = \det(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{1}})$$

$f(\lambda) = 0$ keresése — n db gyök

polinom ⇒ $\mathbb{C}$-ben ∞-ban mindig van mo.
ha $\underline{\underline{A}}$ szimmetrikus ⇒ az összes λ valós ← fizikában: λ-nak jelentés ⇒ $\lambda \in \mathbb{R}$

$f(\lambda)$ polinom: n db no. $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$

de esetleg is egybe no.-ok

egybeeshetnek, ha $\Rightarrow$ szimmetria

$\hookrightarrow$ véletlen $\Rightarrow$ perturbáció feloldja a degeneráltságot

$\underline{\underline{B}}(\lambda)\,\underline{u}=\underline{0}$ megoldásai: karakterisztikus polinom gyökei

$\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_n$

$\underline{u}^{(1)} \quad \underline{u}^{(2)} \quad \underline{u}^{(n)}$ ← hiv van a különböző sajátértékek, ahhoz a különböző sajátvektor valamely bázisrészhez $\Rightarrow$ bázist alkotnak

(4) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ← szimmetrikus mx

1) $\underline{\underline{B}}$ felírása $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}} = \begin{pmatrix} (3-\lambda) & -1 & 2 \\ -1 & (3-\lambda) & 2 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{pmatrix}$

2) $\det(\underline{\underline{B}}) = f(\lambda)$ Sarrus-szabály

$$f(\lambda) = (3-\lambda)(3-\lambda)(-\lambda) + (-1)\cdot 2\cdot 2 + 2(-1)\cdot 2 - (3-\lambda)\cdot 2\cdot 2 - (-1)(-1)(-\lambda) - 2\cdot(3-\lambda)\cdot 2 =$$

$$= (9 - 6\lambda + \lambda^2)(-\lambda) - 4 - 4 - 12 + 4\lambda + \lambda - 12 + 4\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 9\lambda - 32 = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32$$

ha páratlan méretű a mx, akkor a legmagasabb fokú tag negatív poz.

$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 32 = 0$ megoldása

$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = \lambda^3 + \dots + \lambda_1\lambda_2\lambda_3$

a rül. sajátértékek szorzata az eredeti mx determinánsa

32 osztói lehetnek no.-ok $\Rightarrow (-2)$ no.

polinomosztás

$f(\lambda) = (\lambda + 2)(\dots)$

$(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 0\lambda + 32) : (\lambda + 2) = \lambda^2 - 8\lambda + 16$

$\lambda^3 + 2\lambda^2$

$0 - 8\lambda^2 + 0\lambda$

$-8\lambda^2 - 16\lambda$

$0 + 16\lambda + 32$

$16\lambda + 32$

0

$\Rightarrow f(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda^2 - 8\lambda + 16) = 0$

$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$

$\lambda_{2,3} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4\cdot 16}}{2} = 4$ $\Rightarrow$ $\boxed{\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 4}$

karakterisztikus polinom kiszámítása

2×2: $f(\lambda) = \lambda^2 - (\mathrm{sp}A)\lambda + (\det A)$

3×3: $f(\lambda) = \lambda^3 - (\mathrm{sp}A)\lambda^2 + (\mathrm{izé}A)\lambda - (\det A)$ ← 4×4-től kifejtési tétel

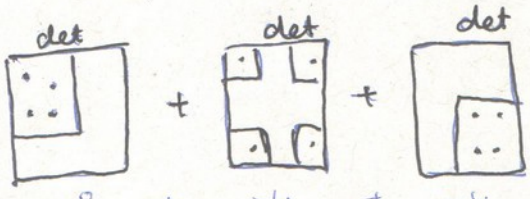
jelen esetben:

$\mathrm{sp}\,\underline{\underline{A}} = 3+3 = 6$

$\det A$

izé: algebrai adjungált spurja

izé:



$8 + (-4) + (-4) = 0$

a sajátértékek (→ a karakterisztikus polinom is) független a bázistól ezért invariáns a spur és a det → az operátor tul-ai a legfontosabb tul

Sajátérték és sajátvektor megadja az operátort

$\hat{A} \rightsquigarrow \underline{\underline{A}}$

$\hookrightarrow \underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}}^{-1}$

$f(A) = \det(A - \lambda 1)$

$f(A') = \det(A' - \lambda 1) = \det(RAR^{-1} - \lambda 1) = \det(RAR^{-1} - \lambda R 1 R^{-1}) =$

$= \det[R(A - \lambda 1)R^{-1}] = \det(A - \lambda 1) = f(A)$

⇒ a karakterisztikus polinom együtthatói invariánsok (bázistól függetlenek) ⊛

a) $\lambda = -2$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. sor esetén det = 0

ha az egyik sor a másik többszöröse

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2×2 homogén egyenl. rsz.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3×3 esetén 1 db Gauss eliminációval kerítünk egy 0-t

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{[1]+2[2]}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

1. sor 2. sor 3. sor: ell.

$\Rightarrow e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ← szimmetrikus mx esetén normáljuk le

szimm. mx → lenormáljuk

$$e^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) $\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$ ← mind 3 sor ugyanaz az egyenlet ⇒ degenerált mo.-ok

$(-1)x + (-1)y + 2z = 0$

$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vektorra merőleges az alsík → $(-1, -1, -2)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ← ∞ sok mo. nem sajátvektor hanem sajátalsík

pl. $u^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}$ $u^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ lehetne is:

$$u^{(1)} \times u^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} := u^{(3)}$$

⇒ 3 egyenesre merőleges egységvektor:

$$u^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad u^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u^{(3)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Szimmetrikus mx:
- a sajátaltérek valósak
- a sajátvektorok ⊥-esek egymásra

2019.11.04.
hét 27. ea.

$\hat{A}: V \to V \quad \vec{v} \mapsto \vec{u} = \hat{A}\vec{v}$

$\exists \vec{v} \in V \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}$

$\hat{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}$ ← jobboldali sajátértékek

$\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \lambda\underline{v}$

$\Rightarrow \left(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{1}}\right)\underline{v} = 0$

$\underline{\underline{B}}(\lambda)\,\underline{v} = 0$

nemtriv. mx mint operátor akkor mindig nemtriv.

$\underline{\underline{B}}(\lambda)$ nemtriviális mo.-ait keressük

homogén esetben csak akkor van, ha $\det(\underline{\underline{B}}) = 0$

$f(\lambda) = \det \underline{\underline{B}}(\lambda) = \det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{1}}\right)$ ← $\det\left(\lambda\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{A}}\right) = -\det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{1}}\right)$ ha páratlan dim

↑ karakterisztikus polinom ← paraméteres determinánsa paraméter: λ

$\det\left(\lambda\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{A}}\right) = \det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{1}}\right)$ ha pos dim

$f(\lambda) = 0 \Rightarrow$ mo.: $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{C}$

ha a mo.ok közül ennek egyike, nem sajátvektor, hanem sajátaltér

$\hat{1}$ és $c\hat{1}$ c konstans ← minden vektor sajátvektor ⇒ sajátaltér: egész tér

3 dim. esetén
- ↳ 3 mo. egybeesik ⇒ $\hat{1}$
- ↳ 2 mo. egybeesik ⇒ sajátsík és rá merőleges sajátvektor

megrajzolni a sajátirányokat ⇒ sajátvektor megrajzolásához be kell normálni vmivel

(*)

$\underline{\underline{A}}'\underline{v}' = \lambda'\underline{v}' \quad \lambda' = \lambda$ a skalár nem függ a bázistól

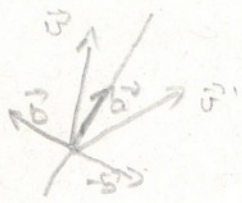
$\underline{v}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{v} \qquad \underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}}^{-1}$

$$f_2(\lambda) = \det\left(\underline{\underline{A}}' - \lambda\underline{\underline{1}}\right) = \det\left(\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}}^{-1} - \lambda\,\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{R}}^{-1}\right) = \det\left[\underline{\underline{R}}\left(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{1}}\right)\underline{\underline{R}}^{-1}\right] =$$

$$= \det(\underline{\underline{R}})\det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{1}}\right)\det\left(\underline{\underline{R}}^{-1}\right) = \det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{1}}\right) = f_1(\lambda)$$

a sajátértékek jelentése geometriai ⇒ polinomok invariánsok ⇒ spur és det bázistól független, az operátorra jellemző invariáns

tükrözés

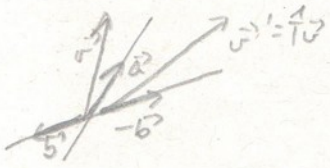


$\vec{v}' = \hat{T}\vec{v}$

$\hat{T}\vec{a} = \vec{a} \Rightarrow \lambda = 1$

$\hat{T}\vec{b} = -\vec{b} \Rightarrow \lambda = -1$

$T^2 = 1$



arra hány dimenziós a tükrözés, sajátértékei 1 és -1

ferde tükrözés esetén is

projekció



$\vec{v}_{\parallel} = \hat{P}\vec{v}$

$\hat{P}\vec{a} = \vec{a} \Rightarrow \lambda = 1$

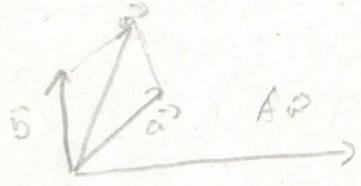
$\hat{P}\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = 0$

$P^2 = P$

ferde projekció esetén is



projektorfelbontás:



$\vec{v}_a = \hat{P}\vec{v} \qquad \vec{v}_b = \hat{Q}\vec{v}$

$\vec{v} = 3\vec{v}_a + (-1)\vec{v}_b = \hat{A}\vec{v} =$ | $\vec{a}, \vec{b}$: saj. vek. ; $3, -1$: sajérték

$= 3\hat{P}\vec{v} - \hat{Q}\vec{v} = (3\hat{P} - \hat{Q})\vec{v}$

$\Rightarrow \hat{A} = 3\hat{P} - \hat{Q}$

$\Rightarrow$ az egyszerű struktúrájú operátorok felbonthatóak projekciókra $\rightarrow$ egyiktenük: sajátértékek a saj. vektorok és sajátértékek egyértelműen meghatározzák az operátort

forgatások

vektorok skalárszorzata megmarad

invert = transzponált = ortogonális az oszlopokat alkotnak

a szorzatuk nem kommutatív

általában szögű forgás, de más tengely

(a spur független a sorrendtől)

forgatások egymásutánja:

forgásmátrix szorzata

eredmény elfordulás: φ: eredményvektor szöge

de mi a tengely?

az 1 mindig sajátérték

ezek ennek a sajátvektora a tengely

($\vec{n}$-t le kell normálni!)

$$\hat{F}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Sp}\,\hat{F} = 2\cos\varphi$

$\det \hat{F} = 1$

$$f(\lambda) = \lambda^2 - (\mathrm{Sp}\,\hat{F})\lambda + \det\hat{F}$$

$$\lambda^2 - 2\cos\varphi\,\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\cos\varphi \pm \sqrt{(2\cos\varphi)^2 - 4}}{2} = \cos\varphi \pm \sqrt{\cos^2\varphi - 1} = \cos\varphi \pm \sqrt{-\sin^2\varphi} =$$

$$= \cos\varphi \pm i\sin\varphi = e^{\pm i\varphi} \Rightarrow \text{sajátértékek cmplx}$$

sajátvektorok:

$\lambda_1 = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$$\hat{F} - \lambda_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} - (\cos\varphi + i\sin\varphi)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sin\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & -i\sin\varphi \end{pmatrix} = \sin\varphi \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

sajátvektorok cmplx $\Rightarrow$ minden valós vektorterben csupán 2 dim-ban

$\lambda_2 = e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$

$F - \lambda_2 1 = \begin{pmatrix} i\sin\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & i\sin\varphi \end{pmatrix} = \sin\varphi \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ sajátvektorok: $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

ugyanaz vektorok $\Rightarrow$ ø geometriai interpret.

3D-ben a tengely körüli forgatás:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

↑ blokkdiagonális mx

* a z tengely irányába mutató vektor mindig sajátvektor

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 1 & \\ 3 & 2 & \\ \hline & & 4 \\ & & 1 \end{array}\right) \qquad \det\left(\begin{array}{cc|c} 5-\lambda & 1 & \\ 3 & 2-\lambda & \\ \hline & & 4-\lambda \\ & & 1 \end{array}\right)$$

← karakt. polinom: a két blokkhoz tartozó karakterisztikus polinomok szorzata (?)

Skaláris karakterisztikus polinom felbontja részekre karakterisztikus polinom szorzatára

(f) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -4 \\ 2 & 8 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad \underline{\underline{A}}^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 8 & -1 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

$f(\lambda) = \lambda^3 - (\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}})\lambda^2 + (\mathrm{id}\,\underline{\underline{A}})\lambda - (\det A)$

$\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}} = 14$ $\qquad \mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}}^T = 14$

$\mathrm{id}\,\underline{\underline{A}} = 24 - 14 + 9 - 4 + 24 - 4 = 35$ $\qquad \mathrm{id}\,\underline{\underline{A}}^T = 24 - 17 + 9 - 4 + 24 - 4 = 35$

$f_1(\lambda) = \det(A - \lambda 1) = \det B(\lambda)$ $\qquad f_2(\lambda) = \det(A^T - \lambda 1) = \det B^T(\lambda)$

$\Longleftrightarrow$

mx és transzponáltjának det-a megegyezik

mx e's

$\Rightarrow$ transzponáltjainak karakterisztikus polinomja is

$$\det \underline{\underline{A}} = \begin{vmatrix} 3 & 7 & -4 \\ 2 & 8 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \overset{2.\,\text{s}+1.\,\text{o.}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & -4 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 10 & -4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$= 30 - 8 = 22$

$\Rightarrow$ karakterisztikus polinom:

$\lambda^3 - 14\lambda^2 + 35\lambda - 22 = 0$

$\lambda^3 - 14\lambda^2 + 35\lambda - 22 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 1}$

Szimmetrikus mx sajátértéke mindig valós – ez nem sima, csak véletlen valós !

polinomosztás:

$$(\lambda^3 - 14\lambda^2 + 35\lambda - 22)(\lambda - 1) = \lambda^2 - 13\lambda + 22$$

$$\begin{array}{r} \lambda^3 - \lambda^2 \\ \hline 0 \quad -13\lambda^2 + 35\lambda \\ \quad -13\lambda^2 + 13\lambda \\ \hline \quad\quad 22\lambda - 22 \end{array}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l}\lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 11\end{array}}$

$$\lambda_{2,3} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4 \cdot 22}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{13 \pm 9}{2} \quad \begin{array}{l} \nearrow 2 \\ \searrow 11 \end{array}$$

$\lambda_1 = 1$

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -4 \\ 2 & 7 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 7 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{[1.5]+2[2.5]}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \overset{1.\text{ sor}}{=} \begin{pmatrix} \cdot \\ 0 \\ \cdot \end{pmatrix} \overset{2.\text{ sor}}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} - \lambda_1 I = \{(\widetilde{A - \lambda_1 I}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 7 & 7 & -4 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix} \overset{2.:2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 2$ Sorrendet kevertük a 2-t

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 2 & 6 & -4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & -4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$x, y \leftarrow$ 1. sor
$z \leftarrow$ 3. sor
} 2. sor: elle! az összeg legyen 0

Gauss-eliminációval 1 vagy 0 keletkezzen
$\Rightarrow$ 2 számolás kiírása

$$\widetilde{A - \lambda_2 I} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 7 & 6 & -1 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} \overset{:2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \underline{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = 11$

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -8 & 7 & -4 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & -1 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & -1 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1/4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad u^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} - \lambda_3 I = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -4 \\ 7 & -3 & -4 \\ -4 & -4 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 15 & 5 & 0 \\ 7 & -3 & -1 \\ -4 & -4 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} \qquad v^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \qquad \underline{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \frac{1}{19} \qquad \underline{u}^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \frac{1}{18}$$

skalaris szorzatok:

$\underline{v}^{(2)} \underline{u}^{(1)} = 0$ $\quad$ $\underline{v}^{(1)} \underline{u}^{(3)} = 0$

$\underline{v}^{(2)} \underline{u}^{(3)} = 0$ $\quad$ $\underline{v}^{(2)} \underline{u}^{(1)} = 0$

$\underline{v}^{(1)} \underline{u}^{(2)} = 0$ $\quad$ $\underline{v}^{(3)} \underline{u}^{(2)} = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\underline{v}^{(k)} \underline{u}^{(l)} = \delta_{kl}}$ $\Rightarrow$ $\vec{u}$ - k bázist alkotnak
$\vec{v}$ - k reciprokbázis!

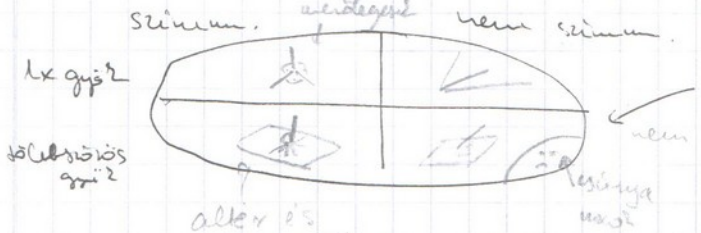
$\underline{u}_k^{(1)} \underline{v}^{(1)} = 2$ $\Rightarrow$ normálni kell $\underline{v}^{(1)}$-et $\frac{1}{2}$-el!

$\Rightarrow$ így a reciprokbázis fennáll
kiortogonális rendszert alkotnak a mx és
transzponáltjának sajátvektorai

Szimmetrikus mx esetén
a sajátvektorok merőlegesek egymásra
$\Rightarrow$ a saját hosszukkal kell normálni

$\Rightarrow$ nem szimmetrikus mx esetén
meg kell ~~határozni~~ keresni a mx és transzponáltjának
saját vektorait is

egyszerűs gyakorlat esetén működik jól



nem egyszerű struktúrájú mx (csúnya mx)

pl. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -1$

$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{\underline{\tilde{A}}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}} = 6$

ide $\det \underline{\underline{A}} = 6 - 0 + 2 - 6 + 3 + 0 = 5$

Remark: racionális gyökök polinom:
$f(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 5\lambda + 12$

$\det \underline{\underline{A}} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{[s1]+[s3]\cdot 2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -4(0+3) = -12$

$f(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 5\lambda + 12$ $\qquad \lambda_1 = -1$

$(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 5\lambda + 12) : (\lambda + 1) = \lambda^2 - 7\lambda + 12$

$\lambda^3 + \lambda^2$
$-7\lambda^2 + 5\lambda$
$-7\lambda^2 - 7\lambda$
$12\lambda + 12$
$12\lambda + 12$
0

$\Rightarrow f(\lambda) = (\lambda^2 - 7\lambda + 12)(\lambda + 1)$

$\lambda_{2,3} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} < \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix}$

$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = 4 \end{matrix}}$ ✓

$\underline{\lambda_1 = -1}$

$\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 2 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$

$(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 1 \\ 0 \\ \cdot 3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix}$

$\underline{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{1}{5}$

$\underline{\lambda_2 = 3}$

$\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & -2 \end{pmatrix} \overset{[s3]+2[s1]}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\underline{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} (-1)$

$\underline{\lambda_3 = 4}$

$\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -6 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\underline{u}^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\underline{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \frac{1}{5}$

2019.11.05.
Ke 28.ea.

baloldali sajátvektor

$\underline{\underline{A}}\,\underline{u} = \lambda \underline{u}$

$(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}})\,\underline{u} = 0$

$f(\lambda) = \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}}) = 0$

$\underline{\tilde{v}}\,\underline{\underline{A}} = \lambda \underline{\tilde{v}}$ ← baloldali sajátérték-probléma

$\tilde{v}$: sorvektor.

$\underline{\tilde{v}}^{(l)}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{u}^{(k)} = \lambda_k \underline{u}^{(k)}$

$\underline{\tilde{v}}^{(l)}\,\underline{\underline{A}} = \lambda_l \underline{\tilde{v}}^{(l)}$ / $\tilde{u}^{(k)}$

$\underline{\tilde{v}}^{(l)}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{u}^{(k)} = \lambda_k \underline{\tilde{v}}^{(l)}\underline{u}^{(k)}$

$= \lambda_l \underline{\tilde{v}}^{(l)}\underline{u}^{(k)}$ (ha $\lambda_k = \lambda_l$ akkor is.)

$\Rightarrow (\lambda_k - \lambda_l)\,(\underline{\tilde{v}}^{(l)}\underline{u}^{(k)}) = 0$

$\lambda_k - \lambda_l = 0$: $\lambda_k = \lambda_l$

$\underline{\tilde{v}}^{(l)}\underline{u}^{(k)} = 0$: $\underline{\tilde{v}}^{(l)} \perp \underline{u}^{(k)}$ $\Rightarrow \underline{\tilde{v}}^{(l)}\underline{u}^{(k)} = \delta_{kl}$

ha vannak megegyező sajátértékek (→ sajátaltér) ⇒ nem tud ⊥ lenni a többi vektorra

projektorfelbontás

- projektorok

$\underline{\tilde{v}}^{(k)}\underline{u}^{(k)} = \delta_{kk}$

$\underline{\underline{P}}^{(k)} = \underline{u}^{(k)} \circ \underline{\tilde{v}}^{(k)}$

$\underline{\underline{P}}^{(1)}\underline{\underline{P}}^{(1)} = (\underline{u}^{(1)} \circ \underline{\tilde{v}}^{(1)})(\underline{u}^{(1)} \circ \underline{\tilde{v}}^{(1)}) = (\underline{\tilde{v}}^{(1)}\underline{u}^{(1)})\,\underline{u}^{(1)} \circ \underline{\tilde{v}}^{(1)} = \underline{\underline{P}}^{(1)}$

$\underline{\underline{P}}^{(1)}\underline{\underline{P}}^{(2)} = (\underline{u}^{(1)} \circ \underline{\tilde{v}}^{(1)})(\underline{u}^{(2)} \circ \underline{\tilde{v}}^{(2)}) = (\underline{\tilde{v}}^{(1)}\underline{u}^{(2)})(\underline{u}^{(1)} \circ \underline{\tilde{v}}^{(2)}) = 0$

$\Rightarrow \boxed{P^{(k)}P^{(l)} = \delta_{kl}P^{(k)}}$

$\boxed{\sum_k \underline{\underline{P}}^{(k)} = \underline{\underline{1}}}$ ← igaz, mert a sajátvektorok bázist alkotnak ⇒ egységnyi struktúrájú operátor

- projektorok összege

$\underline{\underline{C}} = \lambda_1 \underline{\underline{P}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\underline{P}}^{(2)} + \lambda_3 \underline{\underline{P}}^{(3)}$ ← hasson $\underline{u}^{(1)}$-re

$\underline{\underline{C}}\,\underline{u}^{(1)} = \lambda_1 (\underline{\underline{P}}^{(1)}\underline{u}^{(1)}) + \lambda_2 (\underline{\underline{P}}^{(2)}\underline{u}^{(1)}) + \ldots = \lambda_1 \underline{u}^{(1)} + 0 + \ldots = \lambda_1 \underline{u}^{(1)}$

$\lambda_1\,\underline{\underline{P}}^{(1)}\underline{u}^{(1)} = (\underline{u}^{(1)} \circ \underline{\tilde{v}}^{(1)})\underline{u}^{(1)} = \underline{u}^{(1)}(\underline{\tilde{v}}^{(1)}\underline{u}^{(1)}) = \underline{u}^{(1)}$

$\underline{\underline{P}}^{(2)}\underline{u}^{(1)} = (\underline{u}^{(2)} \circ \underline{\tilde{v}}^{(2)})\underline{u}^{(1)} = \underline{u}^{(2)}(\underline{\tilde{v}}^{(2)}\underline{u}^{(1)}) = 0$

szorozzuk most $\underline{\underline{C}}$-t balról

$\underline{\tilde{v}}^{(1)}\underline{\underline{C}} = \underline{\tilde{v}}^{(1)}\lambda_1 \underline{\underline{P}}^{(1)} + \ldots = \lambda_1 \underline{\tilde{v}}^{(1)}$

$\Rightarrow \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}$

a mátrix projektorfelbontása:

$\underline{\underline{A}} = \sum_k \lambda_k \underline{\underline{P}}^{(k)}$

$\underline{\underline{P}}^{(k)} = \underline{u}^{(k)} \circ \underline{\tilde{v}}^{(k)}$

mátrix projektorfelbontása:

$$\underline{\underline{A}} = \sum_k \lambda_k \underline{\underline{P}}^{(k)} \quad \leftarrow \quad \underline{\underline{P}}^{(k)} = \underline{u}^{(k)} \circ \underline{\tilde{v}}^{(k)}$$

$\underline{u}^{(k)}$: jobboldali
$\underline{v}^{(k)}$: balboldali } sajátvektor.

operátorra:

$$\hat{A} = \sum_k \lambda_k \left(\vec{u}^{(k)} \circ \vec{v}^{(k)} \right)$$

← egyszerű struktúrájú operátorunk

Csűnya operátor

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}} = 0 \\ \det \underline{\underline{A}} = 0 \end{matrix}$$

$$f(\lambda) = \lambda^2 - 0\lambda + 0 \Rightarrow \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ← jobboldali $\qquad \underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ← balboldali

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$y = 0$ $\qquad$ $x = 0$

$\underline{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\underline{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ← $\underline{u}^{(1)}$-et és $\underline{v}^{(1)}$-et nem tudjuk normálni

Csűnya mátrix mellett gyökös nemtriviális vektorból kettőnél kevesebb van

$\Rightarrow$ kevesebb sajátvektor, mint dimenzió és $\underline{v} \perp \underline{u}$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon^2 & 0 \end{pmatrix}$$ ← perturbáció feloldja a degenerációt!

(spektrálelmélet = sajátértékproblémák)

$\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{B}} = 0$
$\det = -\varepsilon^2$ $\Rightarrow f(\lambda) = \lambda^2 - 0\lambda - \varepsilon^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \varepsilon^2 = 0$

$\lambda_1 = \varepsilon$ $\qquad$ $\lambda_2 = -\varepsilon$

a) $\lambda_1 = \varepsilon$

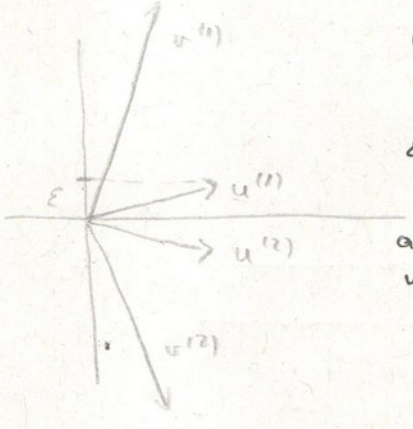
$$\begin{pmatrix} -\varepsilon & 1 \\ \varepsilon^2 & -\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & -\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2\varepsilon}$$ ← ha $\varepsilon \to 0$ akkor 0-val osztás a probléma forrása

b) $\lambda_2 = -\varepsilon$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\varepsilon \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\varepsilon \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\varepsilon \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2\varepsilon}$$



$u^{(2)}$: $u^{(1)}$ tükörképe

$\varepsilon \to 0$ esetén összűnnek a rét vektor nem alkot bázist

bordan-féle normálalakra csűnya mátrix sajátértékére

FORDÍTOTT LAP!

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -4 \\ 2 & 8 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1 \quad \underline{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2}$

$\lambda_2 = 2 \quad \underline{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \frac{1}{9}$

$\lambda_3 = 11 \quad \underline{u}^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} 81 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \frac{1}{18}$

$$\underline{\underline{P}}^{(1)} = \underline{u}^{(1)} \circ \tilde{\underline{v}}^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -1, 0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

↙ a sajátterben nem egyértelmű, de a projektor igen (a skalárszorost is sajátvektort.)

ha az eredeti mátrixban egész számok voltak, projektorban is (?)

$$\underline{\underline{P}}^{(2)} = \underline{u}^{(2)} \circ \tilde{\underline{v}}^{(2)} = \frac{1}{-9} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} (2, -3, -4) = \frac{1}{-9} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 4 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{P}}^{(3)} = \underline{u}^{(3)} \circ \tilde{\underline{v}}^{(3)} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} (1, 3, -2) = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 4 & 12 & -8 \\ 4 & 12 & -8 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

ell.: $\underline{\underline{P}}^{(1)} + \underline{\underline{P}}^{(2)} + \underline{\underline{P}}^{(3)} = 1$

$$\underline{\underline{P}}^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 18 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{P}}^{(2)} = \frac{1}{-9} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 4 & -6 & -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -4 & 6 & 8 \\ -4 & 6 & 8 \\ -8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{P}}^{(3)} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 4 & 12 & -8 \\ 4 & 12 & -8 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma P = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} = \underline{\underline{1}} \quad \checkmark$$

$$\lambda_1 \underline{\underline{P}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\underline{P}}^{(2)} + \lambda_3 \underline{\underline{P}}^{(3)} =$$

$$= \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 18 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -8 & 12 & 16 \\ -8 & 12 & 16 \\ -16 & 24 & 32 \end{pmatrix} + \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 44 & 132 & -88 \\ 44 & 132 & -88 \\ -11 & -33 & 22 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 54 & 126 & -72 \\ 36 & 144 & -72 \\ -18 & -18 & 54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -4 \\ 2 & 8 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \quad \checkmark$$

$$\underline{v}^{(k)} \underline{\underline{A}} \underline{u}^{(l)} = \lambda_l \delta_{kl}$$

↑ mert $\underline{\underline{A}} \underline{u}^{(l)} = \lambda_l \underline{u}^{(l)}$

$\tilde{\underline{v}}^{(k)} \underline{\underline{A}} \underline{u}^{(l)} = \lambda_l \tilde{\underline{v}}^{(k)} \underline{u}^{(l)}$ ← δ_{kl}

↖ diagonálisan:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_3 \dots & \\ & & & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

ha az operátort átviszonfordítjuk sajátvektorai bázisára

$\vec{v} = 2\vec{a} + 1\vec{b} \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 3$

$\lambda_2 = -5$

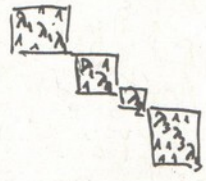
$\hat{A}\vec{v} = 2(\hat{A}\vec{a}) + 1(\hat{A}\vec{b}) + 2 \cdot (3\vec{a}) + 1(-5\vec{b}) = 6\vec{a} - 5\vec{b}$

$\Rightarrow u = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

= főtengelytranszformáció ← mérés tárgyát főtengely körül forgatni elsősorban arra a mozgásra használják

jordan-féle normálalak:



↙ bármilyen mátrixnál lehet, ilyen alakra hozható

FORDÍTOTT CAP

Mátrixfüek

$$\underline{\underline{A}} = \sum_k \lambda_k \underline{\underline{P}}^{(k)}$$

$$\underline{\underline{A}}^2 = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}} = \left(\sum_k \lambda_k \underline{\underline{P}}^{(k)}\right)\left(\sum_\ell \lambda_\ell \underline{\underline{P}}^{(\ell)}\right) = \sum_k \sum_\ell \lambda_k \lambda_\ell \underline{\underline{P}}^{(k)} \underline{\underline{P}}^{(\ell)} =$$

$$= \sum_k \sum_\ell \lambda_k \lambda_\ell \delta_{k\ell} \underline{\underline{P}}^{(k)} = \sum_k \lambda_k^2 \underline{\underline{P}}^{(k)}$$

$$\underline{\underline{A}}^3 = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^2 = \left(\sum_k \lambda_k \underline{\underline{P}}^{(k)}\right)\left(\sum_k \lambda_k^2 \underline{\underline{P}}^{(k)}\right) = \sum_k \sum_\ell \lambda_k^2 \lambda_\ell \underline{\underline{P}}^{(k)} \underline{\underline{P}}^{(\ell)} =$$

$$= \sum_k \sum_\ell \lambda_k^2 \lambda_\ell \delta_{k\ell} \underline{\underline{P}}^{(k)} = \sum_k \lambda_k^3 \underline{\underline{P}}^{(k)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\underline{A}}^n = \sum_k \lambda_k^n \underline{\underline{P}}^{(k)}}$$

← mx sorából határánya
⇒ egyszerűbb lehet a sajátértéket kiszámolni és propertyfelbontást emiatt

polinom

$$p(x) = 3x^3 - 4x^2 + 7x - 9$$

$$p(\underline{\underline{A}}) = 3\underline{\underline{A}}^3 - 4\underline{\underline{A}}^2 + 7\underline{\underline{A}} - 9\underline{\underline{1}} =$$

$$= 3\left(\sum_k \lambda_k^3 \underline{\underline{P}}^{(k)}\right) - 4\left(\sum_k \lambda_k^2 \underline{\underline{P}}^{(k)}\right) + 7\left(\sum_k \lambda_k \underline{\underline{P}}^{(k)}\right) - 9\sum_k \underline{\underline{P}}^{(k)} =$$

$$= \sum_k \left(3\lambda_k^3 - 4\lambda_k^2 + 7\lambda_k - 9\right)\underline{\underline{P}}^{(k)} = \sum_k p(\lambda_k)\underline{\underline{P}}^{(k)}$$

Spec. eset: legyen a polinom a karakterisztikus polinomja

$$\boxed{f(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{0}}}$$

← ∀ mátrix ugyanis (számokra is)

⇒ a mx kielégíti a saját karakterisztikus egyenletét

~~Cayley-Hamilton tétel~~

Cayley-Hamilton tétel

határértékek

$$F(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots = e^x$$

$$F(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{A}} + \frac{1}{2}\underline{\underline{A}}^2 + \frac{1}{3!}\underline{\underline{A}}^3 + \ldots = \sum_k F(\lambda_k)\underline{\underline{P}}^{(k)}$$

$$\Rightarrow \boxed{F(\underline{\underline{A}}) = \sum_k F(\lambda_k)\underline{\underline{P}}^{(k)}}$$

egy számnak 2 db gyöke van
⇒ egy mxnak 2^n gyöke van (nxn-es mx)

$$\boxed{\sqrt{\underline{\underline{A}}} = \sum \left(\pm\sqrt{\lambda_k}\right)\underline{\underline{P}}^{(k)}}$$

$$\boxed{\underline{\underline{A}}^{-1} = \sum_k \frac{1}{\lambda_k}\underline{\underline{P}}^{(k)}}$$

← elméletben ez használható

nem lehet invertálni a mátrixot, ha az egyik sajátértéke 0 (ha det = 0)

a det a sajátértékek szorzata

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n) = (\ldots) + \lambda_1\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_n = (\ldots) + \det(\underline{\underline{A}})$$

egy mx a saját terével mindig kommutál

$[\underline{\underline{A}}, F(\underline{\underline{A}})] = \underline{\underline{0}}$ ← kommutátor felírása

$[\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}] = \underline{\underline{0}}$

$\rightarrow \underline{\underline{B}} = F(\underline{\underline{A}})$ ← rá mx arra kommutál, ha van egy közös ösz"

$\underline{\underline{A}} = F(\underline{\underline{C}})$ ← $\underline{\underline{C}}$ → $\underline{\underline{B}} = G(\underline{\underline{C}})$

négyzetre emelve $\underline{\underline{A}}$-t:

λ: 1, −1, 3

λ^2: 1, 1, 9 ← a négyzetnek nem feltétlenül sajátértékei

projektorok összege: identitásra vezető projektor (?)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}} = 9$

$\mathrm{ize}\,\underline{\underline{A}} = 24$

$\det \underline{\underline{A}} = 16$

$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 24\lambda - 16 = 0$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 24\lambda - 16 : (\lambda - 1) = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2$

$\lambda^3 - \lambda^2$

$-8\lambda^2 + 24\lambda$

$-8\lambda^2 + 8\lambda$

$16\lambda - 16$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 4$

$\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{s}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

↑ bal- és jobboldali sajátvektor megegyezik, mert szimmetrikus mx

$\lambda_2 = \lambda_3 = 4$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{s}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

↑ $\forall\, \underline{s}^{(1)}$-re merőleges vektor mo. ⇒ sajátvektor

$\underline{s}^{(3)}$ legyen ⊥ és legyen ONB

$$\underline{s}^{(3)} = \underline{s}^{(1)} \times \underline{s}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

hányleg 1-re van normálva

$\underline{s}^{(1)}$ egyértelmű ⇒ $\underline{s}^{(2)}$ lehetőleges a rá merőleges sík bárhol

⇒ $\underline{s}^{(3)}$ legyen merőleges mindkettőre

2019.11.06.
sze 29-30. ea.

$\underline{\underline{A}} \rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 & u^{(1)} & v^{(1)} \\ \lambda_2 & u^{(2)} & v^{(2)} \\ \lambda_3 & u^{(3)} & v^{(3)} \end{matrix} \rightarrow \underline{\underline{P}}^{(1)}, \underline{\underline{P}}^{(2)}, \underline{\underline{P}}^{(3)}$

$\underline{\underline{A}}^2 = \sum_k \lambda_k^2 \underline{\underline{P}}^{(k)}$

$\underline{\underline{A}}^3 = \sum_k \lambda_k^3 \underline{\underline{P}}^{(k)}$

$\underline{\underline{A}}^n = \sum_k \lambda_k^n \underline{\underline{P}}^{(k)}$

$p(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$

$p(\underline{\underline{A}}) = c_0 \underline{\underline{1}} + c_1 \underline{\underline{A}} + \dots + c_n \underline{\underline{A}}^n = \sum_k p(\lambda_k) \underline{\underline{P}}^{(k)}$

$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$

$F(\underline{\underline{A}}) = \sum_k F(\lambda_k) \underline{\underline{P}}^{(k)}$

ha felbontása unokra: unkjuk

sajátértékek

pl. ha van 0 $\Rightarrow$ a logaritmus nem létezik

ha cmplx $\Rightarrow$ cmplx ha

lineáris unkfv: $e^{i \underline{\underline{\Omega}} t}$

$\underline{\underline{\Omega}}$ sajátértékei $\Rightarrow$ projektorfelbontás

$e^{i \underline{\underline{\Omega}} t} = \sum_k e^{i \omega_k t} \underline{\underline{P}}^{(k)} \Leftarrow \underline{\underline{\Omega}} = \sum_k \omega_k \underline{\underline{P}}^{(k)}$

pl.: $\underline{\underline{B}} = \cos\left(\frac{\pi}{3} \underline{\underline{A}}\right) = \sum_k \cos\left(\frac{\pi}{3} \lambda_k\right) \cdot P^{(k)} = \frac{1}{2} \underline{\underline{P}}^{(1)} + \left(-\frac{1}{2}\right) \underline{\underline{P}}^{(2)} + \frac{1}{2} \underline{\underline{P}}^{(3)} = *$

előző $\underline{\underline{A}}$ unk-ra

$\cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot 1\right) = \frac{1}{2}$

$\cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot 3\right) = -\frac{1}{2}$

$\cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot 11\right) = \frac{1}{2}$

$\Leftarrow$ a sajátértékek függése

$\underline{\underline{P}}^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{\underline{P}}^{(2)} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 4 & -6 & -8 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{P}}^{(3)} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 4 & 12 & -8 \\ 4 & 12 & -8 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ ld. 87 o.

$\underline{\underline{P}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} =$

$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$* = \frac{1}{36} \left[\begin{pmatrix} 18 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & -9 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 6 & 8 \\ -4 & 6 & 8 \\ -8 & 12 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 12 & -8 \\ 4 & 12 & -8 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \right] =$

$= \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 26 & -12 & -16 \\ 8 & 6 & -16 \\ 16 & -24 & -14 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 13 & -6 & -8 \\ 4 & 3 & -8 \\ 8 & -12 & -7 \end{pmatrix}$ $\Leftarrow$ unk cos-a!

unkvizsgálat:

sajátértékek

jobb- és baloldali sajátvektorok $\leftarrow$ merőlegesek

projektorok kiszámolása $\leftarrow$ összegük 1-e

$* = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{P}}^{(1)} + \underline{\underline{P}}^{(3)} \right) - \frac{1}{2} \underline{\underline{P}}^{(2)} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\underline{\underline{P}}^{(1)} + \underline{\underline{P}}^{(2)} + \underline{\underline{P}}^{(3)} \right)}_{\underline{\underline{1}}} - \underline{\underline{P}}^{(2)} = \frac{1}{2} \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{P}}^{(2)}$

$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 4 & -6 & -8 \end{pmatrix}$

- projektorok összege 1
- ha $\lambda_k = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P}}^{(k)}$ nem számít

$\Leftarrow$ ha csak a függését kell kiszámolni, nem muszáj az összes sajátvektort kiszámolni

$$\underline{\underline{P}}^{(1)} = \underline{s}^{(1)} \circ \underline{s}^{(1)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}(1\ 1\ 1) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$$

a jobb - és bal oldali sajátvektor egyenlő ⇒ projektorra szimm. mátrix

$$\underline{\underline{P}}^{(2)} = \underline{s}^{(2)} \circ \underline{s}^{(2)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}(1\ -1\ 0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&-3&0\\-3&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{P}}^{(3)} = \underline{s}^{(3)} \circ \underline{s}^{(3)} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}(1\ 1\ -2) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&1&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}$$

$$1\cdot\underline{\underline{P}}^{(1)} + \underbrace{4\,\underline{\underline{P}}^{(2)} + 4\,\underline{\underline{P}}^{(3)}}_{4\left(\underline{\underline{P}}^{(2)}+\underline{\underline{P}}^{(3)}\right)}$$

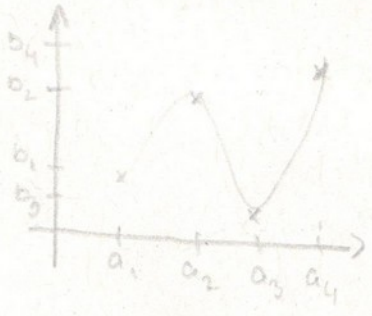
↖ $\underline{\underline{P}}^{(2)}$ önadjungált megválasztása eltűnik

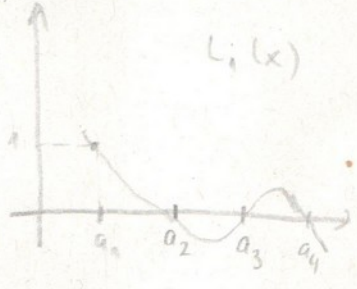
$$F(\underline{\underline{A}}) = F(1)\,\underline{\underline{P}}^{(1)} + \underbrace{F(4)\,\underline{\underline{P}}^{(2)} + F(4)\,\underline{\underline{P}}^{(3)}}_{F(4)\left(\underline{\underline{P}}^{(2)}+\underline{\underline{P}}^{(3)}\right)} = F(1)P^{(1)} + F(4)\left(1-P^{(1)}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\underline{\underline{A}}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cdot\underline{\underline{P}}^{(1)} + \sin\frac{4\pi}{3}\left(\underline{\underline{1}}-\underline{\underline{P}}^{(1)}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\underline{\underline{P}}^{(1)} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\underline{\underline{1}}-\underline{\underline{P}}^{(1)}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(2\,\underline{\underline{P}}^{(1)}-\underline{\underline{1}}\right)$$

Lagrange-interpoláció

fv → minél egyszerűbb görbe menjen át a megadott függvényen (legyen polinom)





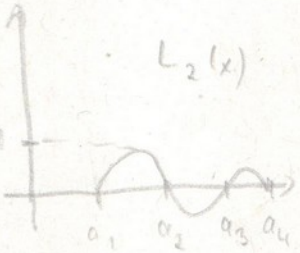
Lagrange-féle első interpolációs polinom:

$$L_1(x) = \frac{(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)}$$

$L_1(a_1)=1$ $\quad L_2(a_1)=0$
$L_1(a_2)=0$ $\quad L_2(a_2)=1$
$L_1(a_3)=0$ $\quad L_2(a_3)=0$

$$L_2(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)}$$

$L_2(a_2) = \delta_{22}$



a keresett fv:
$\Rightarrow f(x) = b_1L_1(x) + b_2L_2(x) + b_3L_3(x) + \dots$
$L(x)$-ek lineáris.

x helyett egy mx legyen!

$$L_1(\underline{\underline{A}}) = \frac{(\underline{\underline{A}}-\lambda_2\underline{\underline{1}})(\underline{\underline{A}}-\lambda_3\underline{\underline{1}})(\underline{\underline{A}}-\lambda_4\underline{\underline{1}})}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)}$$

3 nem szorzata → nem kanonikus, de mivel mind3 $\underline{\underline{A}}$ fv, most mégis

$(A-\lambda_4 1)\,\underline{u}^{(4)} = \lambda_4\underline{u}^{(4)} - \lambda_4\,\underline{u}^{(4)} = 0$

$L_1(\underline{\underline{A}})\,\underline{u}^{(1)} = \underline{u}^{(1)}$
$L_1(\underline{\underline{A}})\,\underline{u}^{(2)} = 0$
$L_1(\underline{\underline{A}})\,\underline{u}^{(3)} = 0$

} L_1 projektor az első sajátvektorra vetít.

⇒ mátrixok kanonikus sajátvektorai vetítik is

Hermite-féle polinomok : degenerált eset (→ hermitikus mátrix)

projektorok ⇒ mátrix felír ⇒ sajátértékek másodfokúból adódnak

(f) 2×2-es mátrix

$\underline{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ← egyik jobboldali sajátvektor ⇒ merőlegesség miatt minden arra merőleges

$\underline{\tilde{v}}^{(1)} = (1, 3)\frac{1}{16}$ ← $\underline{u}^{(1)}$-gyel normálva

$\mathrm{Sp}\,A = 0$

$\det A = -256$

mátrix felírása

$\underline{u}^{(2)} \perp \underline{v}^{(1)} \Rightarrow \underline{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\underline{v}^{(2)} \perp \underline{u}^{(1)} \qquad \underline{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}\frac{1}{16} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}\frac{1}{16}$

$\underline{\underline{P}}^{(1)} = \underline{u}^{(1)} \circ \underline{\tilde{v}}^{(1)} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}(1\ 3) = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 7 & 21 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

jobboldali ⟹ balboldali

$\underline{\underline{P}}^{(2)} = \underline{u}^{(2)} \circ \underline{\tilde{v}}^{(2)} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}(3\ -7) = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 9 & -21 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{P}}^{(1)} + \underline{\underline{P}}^{(2)} = \underline{\underline{1}}$ ⇐ a 2-es sajátvektorokat nem is kellett volna kiszámolni!

$f(\underline{\underline{A}}) = \lambda^2 - \mathrm{Sp}\,\lambda + \det = \lambda^2 - 0\lambda - 256 \Rightarrow \lambda_1 = \pm 16$

nem egyértelmű, hogy λ_1 v. λ_2 negatív ⇒ két eset

$\lambda_1 = 16$
$\lambda_2 = -16$ ← ha fordított sorrend ⇒ $\underline{\underline{A}}$ ennek (-1)-szerese ⇒ 2 mx lehetséges!

$\underline{\underline{A}} = \sum \lambda_i \underline{\underline{P}}^{(i)} = \lambda_1 \underline{\underline{P}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\underline{P}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 7 & 21 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -21 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 42 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

ell.: $\begin{pmatrix} -2 & 42 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 112 \\ 48 \end{pmatrix} = 16\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

Vi.te-formulák alapján:

$f(A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$ ← $\mathrm{Sp}\,A = \lambda_1 + \lambda_2$ $\quad \det A = \lambda_1\lambda_2$

Cmpx sajátértékprob.

$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ ← sajátértéke cmpx legyen ⇒ nincs szükség feltételezni i-ről, hogy a skalár cmpx legyen

$\mathrm{Sp}\, A = 2i$
$\det A = -2$

$\lambda^2 - 2i\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{2i \pm \sqrt{(2i)^2 + 8}}{2} = \frac{2i \pm \sqrt{-4+8}}{2} = i \pm 1$

valós szimmetrikus mx ⇒ sajátértékei mindig valósak!
cmpx szimm. mx-ok esetén nem igaz

$\lambda_1 = i+1$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ↙ $\underline{u}^{(1)} = \underline{v}^{(1)}$ nem szimm mx

$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{u}^{(1)} = \underline{v}^{(1)}$ ↙ sajátértékei cmpxek de sajátvektorai valósak

$\lambda_2 = i-1$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ← $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{u}^{(2)} = \underline{v}^{(2)}$

$\underline{\underline{P}}^{(1)} = \underline{u}^{(1)} \circ \underline{u}^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1\ 1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{P}}^{(2)} = \underline{u}^{(2)} \circ \underline{u}^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1\ -1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{A}}$ előáll-e így: ell.

$\underline{\underline{A}} = (i+1)\underline{\underline{P}}^{(1)} + (i-1)\underline{\underline{P}}^{(2)} = i\left(\underline{\underline{P}}^{(1)} + \underline{\underline{P}}^{(2)}\right) + 1\left(\underline{\underline{P}}^{(1)} - \underline{\underline{P}}^{(2)}\right) = i\,\underline{\underline{1}} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathrm{Sp} = 0$, $\det = 1$

$\lambda^2 - \mathrm{Sp}\,\lambda + \det = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow$ $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$

$\lambda_1 = i$

$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$ ← 2-vel kéne osztani → osztok mindkettőt $\sqrt{2}$-vel

$\underline{\underline{\tilde{J}}} - \lambda_1 \underline{\underline{1}} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\lambda_2 = -i$

$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$ ← $\underline{u}^{(1)}$ önmagára merőleges?!

$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\underline{\underline{P}}^{(1)} = \underline{u}^{(1)} \circ \underline{v}^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} (1\ i) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{1}} - i\,\underline{\underline{J}}\right)$

$\underline{\underline{P}}^{(2)} = \underline{u}^{(2)} \circ \underline{v}^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (1\ -i) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{1}} + i\,\underline{\underline{J}}\right)$

$i\underline{\underline{P}}^{(1)} + (-i)\underline{\underline{P}}^{(2)} = \frac{i}{2}\left(\underline{\underline{1}} - i\,\underline{\underline{J}}\right) + \frac{-i}{2}\left(\underline{\underline{1}} + i\,\underline{\underline{J}}\right) = \underline{\underline{J}}$

konvenció: egy vektor önmagával vett skalárja legyen mindig pozitív.
kivéve, ha a vektor a nullvektor

$\underline{a}\,\underline{b} = \sum_k a_k b_k$ ← skalárszorzat

$\underline{a}\,\underline{b} = \sum_k a_k^* b_k$ ← hermitikus skalárszorzat

$\underline{a}\,\underline{a} = \sum_k a_k^* a_k = \sum_k |a_k|^2 \geq 0$ ← $\underline{a}\,\underline{a} = 0$ csak ha $\underline{a} = 0$

mx adjungálása:

$\underline{\underline{A}}^\dagger = (\underline{\underline{\tilde{A}}})^* = (\underline{\underline{\tilde{A}}}^*)$ $\quad (A^\dagger)_{kl} = (A_{lk})^*$ $\quad \tilde{A}\tilde{B} = \tilde{B}\tilde{A}$

$\Rightarrow (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$

$\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}^\dagger = (-i, -1)$ $\quad (A^\dagger)^\dagger = A$

Cmpx általánosítás:

$\underline{\underline{A}}\,\underline{u} = \lambda \underline{u}$ jobboldali sajátértékprob

$\underline{v}^\dagger \underline{\underline{A}} = \lambda \underline{v}^\dagger \Rightarrow \underline{\underline{A}}^\dagger \underline{v} = \lambda^* \underline{v}$

balsóldali saját. prob

ekvivalens: $\tilde{\underline{v}}\,\underline{\underline{A}} = \lambda \tilde{\underline{v}}$

$\underline{\underline{\tilde{A}}}\,\underline{v} = \lambda \underline{v}$

$\underline{v}^{(2)\dagger}\,\underline{u}^{(1)} = \delta_{21}$

□ □

① első feladat újra: $\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{u} = \lambda \underline{u}$

$\underline{\underline{J}}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{J}}^\dagger \underline{v} = \lambda^* \underline{v}$

$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$ $\quad \lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$

$\begin{vmatrix} -\lambda^* & 1 \\ -1 & -\lambda^* \end{vmatrix} = (\lambda^*)^2 + 1$ $\quad \lambda_1^* = -i$, $\lambda_2^* = i$

$\lambda_1 = i$

$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\underline{\underline{J}} - \lambda_1^* \underline{\underline{1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - (-i) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$

~~$\underline{u}^{(1)\dagger}\,\underline{u}^{(1)}$~~ skaláris szorzat: $\underline{v}^{(1)\dagger}\,\underline{u}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1\ i) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (1\ i) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = 1$ ✓

$\lambda_2 = -i$

$\underline{\underline{J}} - \lambda_2 \underline{\underline{1}} = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\underline{\underline{J}}^\dagger - \lambda_2^* \underline{\underline{1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - (-i) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\underline{v}^{(2)\dagger}\,\underline{u}^{(2)} = \frac{1}{2} (1\ -i) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = 1$ ✓

$\underline{\underline{P}}^{(2)} = \underline{u}^{(2)} \circ \underline{v}^{(2)\dagger}$

$\underline{\underline{P}}^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} (1\ i) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{P}}^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (1\ -i) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$

} nagyon hasonlók, mint az előző oldali módszerrel de a sajátvektoroknál nem áll fenn ellentmondás

Hermitikus mx

hermitikus mx: megegyezik a saját adjungáltjával

$\underline{\underline{H}}^\dagger = \underline{\underline{H}}$

Diagonálban valós számok

főátlón kívül egymás konjugáltjai

hermitikus mx sajátvektorai valósak!

a jobb- és baloldali, sajátvektorai ortogonálisak

$\underline{\underline{H}}$ ua sajátértéke valós:

$\underline{\underline{H}}^+ \underline{u} = \lambda^* \underline{u}$ ← pirloldali

$\underline{v}^+ \underline{\underline{H}} = \lambda \underline{v}^+$ ← baloldali

$\underline{\underline{H}}^+ \underline{v} = \lambda^* \underline{v} \xrightarrow[\text{hermitikus}]{\underline{\underline{H}}^+ = \underline{\underline{H}}} \underline{\underline{H}}\,\underline{v} = \lambda \underline{v}$

$\Leftrightarrow \lambda = \lambda^*$ tehát λ valós

$\underline{u}^{(1)+} / \underline{\underline{H}}\,\underline{u}^{(2)} = \lambda_2 \underline{u}^{(2)}$

$\square \quad \| \qquad \| \qquad \Rightarrow \quad \underline{v}^{(1)+} \underline{\underline{H}}\,\underline{v}^{(2)} = \lambda_2 \underline{v}^{(1)+} \underline{v}^{(2)}$

$\underline{v}^{(1)+} \underline{\underline{H}} = \lambda_1 \underline{v}^{(1)+} / \underline{u}^{(2)} \qquad = \lambda_2 \underline{v}^{(1)+} \underline{v}^{(2)}$

$- \quad \square \quad = \quad -$

$(\lambda_2 - \lambda_1)(\underline{u}^{(1)+} \underline{u}^{(2)}) = 0$

$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{S}}^+ = \underline{\underline{S}}$

$Sp\,\underline{\underline{S}} = 0 \qquad \lambda^2 + 1 = 0 \quad \nearrow \lambda_1 = 1$

$\det \underline{\underline{S}} = -1 \qquad \lambda^2 = -1 \quad \searrow \lambda_2 = -1$

$\underline{\lambda_1 = 1}$

$\Rightarrow \underline{u}^{(1)} = \underline{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\underline{\lambda_2 = -1}$

$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{u}^{(2)} = \underline{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\underline{v}^{(2)+} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \;\; i)$

$\underline{v}^{(2)+} \underline{u}^{(1)} = 0$ ✓

Csúnya mx-ok

Csúnya mx: ∄ projektorfelbontás

megoldás: pl. hatványsorral

$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$\underline{\underline{G}}(v) = e^{v\underline{\underline{A}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(v\underline{\underline{A}})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^n}{n!} \underline{\underline{A}}^n$

$v \in \mathbb{R}$

Cayley-Hamilton tétel: minden mx kielégíti a saját karakterisztikus egyenletét

$f(\lambda) = \lambda^n + (\ )\lambda^{n-1} + \ldots = 0$

$\underline{\underline{A}}^n + (\ )\underline{\underline{A}}^{n-1} + \ldots + (\ )\underline{\underline{A}} + (\ )\underline{\underline{1}} = 0$

$A^0 = 1$

$A^1 = A$

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Hatványsor:

$\frac{v^0}{0!}\underline{\underline{A}}^0 + \frac{v^1}{1!}\underline{\underline{A}}^1 = \underline{\underline{1}} + v\underline{\underline{A}}$

$\underline{\underline{G}}(v) = e^{v\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{1}} + v\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{G}}(v_1)\,\underline{\underline{G}}(v_2) = e^{v_1\underline{\underline{A}}} e^{v_2\underline{\underline{A}}} = e^{(v_1+v_2)\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{G}}(v_1+v_2)$ ⇒ csoportot alkotnak

$G(0) = 1 \qquad \underline{\underline{G}}(-v) = \underline{\underline{G}}(v)^{-1}$

$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = G(v)\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+vt \\ t \end{pmatrix}$ ⇒ $\begin{matrix} x' = x+vt \\ t' = t \end{matrix}$

Galilei-transzformáció

a mechanikában használatos transzformációk csoportot alkotnak ⇒ a klasszikus mechanika mellett csúnya mx-ok vannak

a relativitáselmélet a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mx-on alapul

nilpotens mx: valamelyik hatványa 0

a hatványsor végesre, polinom

$\underline{\underline{P}}^2 = \underline{\underline{P}}$ projektor tul.

$\underline{\underline{B}}(t) = e^{t\underline{\underline{P}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\underline{\underline{P}})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\underline{\underline{P}}^n =$

$P^0 = 1$

$P^1 = P$

$P^2 = P$

$\vdots$

$= \underbrace{\frac{t_0}{0!}P^0}_{\underline{\underline{1}}} + \underbrace{\left(\frac{t_1}{1!} + \frac{t_2}{2!} + \ldots\right)}_{e^t - 1}\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{1}} + (e^t - 1)\underline{\underline{P}}$

$\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{P}}$

$Q^2 = (1-P)(1-P) = 11 - P1 - 1P + PP = 1 - P - P + P = 1 - P = Q$

$\underline{\underline{P}} = 1\,\underline{\underline{P}} + 0\,\underline{\underline{Q}}$ ← a projektor projektorfelbontása

$e^{t\underline{\underline{P}}} = e^{1\cdot t}P + e^{0\cdot t}Q = e^t P + Q = e^t P + 1 - P = \underline{\underline{1}} + (e^t - 1)\underline{\underline{P}}$

projektor tetszőleges fve:

$F(\underline{\underline{P}}) = F(1)\underline{\underline{P}} + F(0)\underline{\underline{Q}} = F(0)\underline{\underline{1}} + (F(1) - F(0))\underline{\underline{P}}$

Lorentz-transzformáció

$T = 2P - 1 \qquad T^2 = 1$

$P = \frac{1+T}{2} \qquad Q = \frac{1-T}{2}$

$P^2 = \left(\frac{1+T}{2}\right)\left(\frac{1+T}{2}\right) = \frac{1}{4}(11 + 1T + T1 + TT) = \frac{1}{4}(1 + T + T + 1) = \frac{1+T}{2} = P$

$Q^2 = Q$

$\Rightarrow$ projektorfelbontás: $\underline{\underline{T}} = 1 \cdot \underline{\underline{P}} + (-1)\,\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{P}} - \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{T}}$

$$e^{\alpha \underline{\underline{T}}} = e^{\alpha \cdot 1}\underline{\underline{P}} + e^{-\alpha}\underline{\underline{Q}} = e^{\alpha}\frac{1+T}{2} + e^{-\alpha}\frac{1-T}{2} = \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}\underline{\underline{1}} + \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}\underline{\underline{T}} \Rightarrow$$

$$e^{\alpha \underline{\underline{T}}} = \operatorname{ch}\alpha\,\underline{\underline{1}} + \operatorname{sh}\alpha\,\underline{\underline{T}}$$

$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

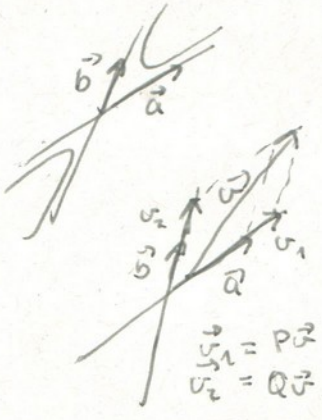
$\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lorentz-transzformáció

$$e^{\alpha \underline{\underline{T}}} = \operatorname{ch}\alpha\,\underline{\underline{1}} + \operatorname{sh}\alpha\,\underline{\underline{T}} = \operatorname{ch}\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \operatorname{sh}\alpha\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\alpha & \operatorname{sh}\alpha \\ \operatorname{sh}\alpha & \operatorname{ch}\alpha \end{pmatrix} = e^{\alpha \underline{\underline{T}}}}$$

2019. 11. 11.
hét 31. aa

Hiperbola



Ha ismerjük $\vec{a}$ és $\vec{b}$ bázisokat

$\hat{P} = \vec{a} \circ \vec{A}$

$\vec{A}\vec{a} = 1$
$\vec{A}\vec{b} = 0$
$\vec{B}\vec{a} = 0$
$\vec{B}\vec{b} = 1$
} reciprok-bázis

$\vec{v}_1 = \alpha\vec{a} = \hat{P}\vec{v} = (\vec{a} \circ \vec{A})\vec{v} = \vec{a}(\vec{A}\vec{v})$

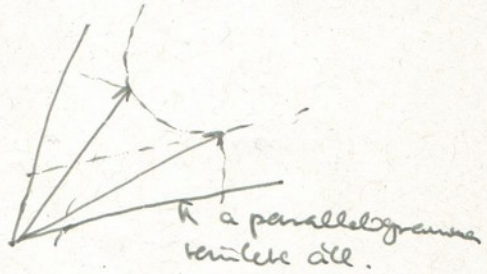
$\vec{v}_2 = \beta\vec{b} = \hat{Q}\vec{v} = (\vec{b} \circ \vec{B})\vec{v} = \vec{b}(\vec{B}\vec{v})$

legyen $\hat{M} = \hat{P} - \hat{Q} = 1\hat{P} + (-1)\hat{Q}$ $\leftarrow$ $\hat{M}$ projektorfelbontása

$\hat{Z}(t) = e^{t\hat{M}} = e^{1\cdot t}\underline{\underline{\hat{P}}} + e^{-t}\underline{\underline{\hat{Q}}}$ mátrixfv

$\hat{Z}(t)\vec{v} = e^{t}\underbrace{(\hat{P}\vec{v})}_{\alpha\vec{a}} + e^{-t}\underbrace{(\hat{Q}\vec{v})}_{\beta\vec{b}}$

$\Rightarrow$ $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{v}$ vektor alapján megrajzolható a hiperbola egyenlete



gerenda-dgl származás

mennyit kell tanulni

x - az oszlopban tanulmányozott vas mennyisége

lineáris függvények:

$\dot{x}(t) = \alpha x + \beta y + \gamma z + \dots$ ← kölcsönhatás szén, só

$\dot{y}(t) = \mu x + \nu y + \lambda z$ ← szénlemezelés – kölcsönhatás só

$\dot{z}(t) = \dots$

$\dot{x}_k(t) = \sum_{\ell=1}^{N} A_{k\ell} x_\ell$ ← a gerenda növekedés egyenletre nem valós

↳ sorozatos differenciálegyenletrendszer, lineáris, oldal együtthatós homogén

$$\boxed{\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} \qquad \underline{x}(0) = \underline{x}_0}$$

$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{pmatrix}$

ha a kölcsönhatások is függnek időbeli változástól lesz homogén diffegy → van megoldása

kezdőfeltételek: az összes mennyiség kezdőpontbeli értéke

$t=0 \quad x_\ell = \xi_\ell = x_\ell(0)$

legyen ősre az x-ek egy vektor!

$\dot{x} = Ax$

$\frac{dx}{dt} = Ax$

$\frac{dx}{x} = A\,dt$

$\int \frac{dx}{x} = A \int dt$

$\ln x = At + K$

$x = e^{At+K} = e^K e^{At}$

illesszük a kezdőfeltételhez

$t=0 \Rightarrow x = e^K e^{A\cdot 0} = e^K \cdot 1 = x_0$

$$\boxed{x(t) = x_0 e^{At}}$$

$\underline{x}(t) = x_0 e^{\underline{\underline{A}}t}$ ✓

oszlopv. oszlopv. mx

$\underline{x}(t) = \left(e^{\underline{\underline{A}}t}\right) x_0$ ✓

matematikailag értelmes, de helyes-e?

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$e^{\underline{\underline{A}}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\underline{\underline{A}}t)^n}{n!} = \underline{\underline{1}} + t\underline{\underline{A}} + \frac{t^2}{2}\underline{\underline{A}}^2 + \frac{t^3}{6}\underline{\underline{A}}^3$

$x(t) = \left(\underline{\underline{1}} + t\underline{\underline{A}} + \frac{t^2}{2}\underline{\underline{A}}^2 + \frac{t^3}{6}\underline{\underline{A}}^3 + \frac{t^4}{24}\underline{\underline{A}}^4 + \dots\right) x_0$

$\dot{x}(t) = \left(\underline{0} + \underline{\underline{A}} + t\underline{\underline{A}}^2 + \frac{t^2}{2}\underline{\underline{A}}^3 + \frac{t^3}{6}\underline{\underline{A}}^4 + \dots\right) x_0 = \underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{1}} + t\underline{\underline{A}} + \frac{t^2}{2}\underline{\underline{A}}^2 + \frac{t^3}{6}\underline{\underline{A}}^3 + \dots\right) x_0$

$= \underline{\underline{A}}\, e^{\underline{\underline{A}}t} x_0 = \underline{\underline{A}}\, \underline{x}(t)$

$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}}\, \underline{x}(t)$

Ötlet: $x(t) = \underline{a} \cdot f(t)$ sorozatokban keressük $\underline{a}$ - konstansvektor

$\dot{x}(t) = \underline{a}\, \dot{f}(t)$

$\dot{x} = \underline{a}\, \dot{f}(t) = \underline{\underline{A}}\, \underline{a}\, f(t)$

$\underline{\underline{A}}\,\underline{a} = \frac{\dot{f}(t)}{f(t)}\,\underline{a}$ ← csak akkor teljesülhet, ha időben állandó $\frac{\dot{f}(t)}{f(t)}$ mert bal oldal időfüggetlen

$\underline{\underline{A}}\,\underline{a} = \lambda \underline{a} \Rightarrow \dot{f}(t) = \lambda f(t)$

sajátpár! n db mo.

mo.: $f(t) = e^{\lambda t}$ ← $e^{\lambda t}$-nek $\emptyset$ konstans szorzója, mert az $=$-ben jelenik meg

$\lambda_1 \dots \lambda_n$

$\underline{a}^{(1)} \dots \underline{a}^{(n)}$

⇒ $\lambda_k, \underline{a}^{(k)}$ $\quad \underline{x}^{(k)} = \underline{a}^{(k)} e^{\lambda_k t}$

$k \in \{1, \dots, n\}$

lineáris egyenlet ⇒ a mo-k összege is mo

$$\underline{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k \underline{a}^{(k)} e^{\lambda_k t}$$ ← az egyenlet általános mo-a

C_k - tetszőleges számok

$$\underline{x}(0) = \sum_k C_k \underline{a}^{(k)} \stackrel{!}{=} \underline{x}_0$$ ← valahol teljesülnie kell a kezdőn!

C-re lineáris egyenlet

$$\sum_k C_k \underbrace{\underline{a}^{(k)} \underline{b}^{(l)}}_{\delta_{kl}} = \underline{x}_0 \underline{b}^{(l)}$$ reciprokbázis: $\underline{b}^{(k)} \underline{a}^{(l)} = \delta_{kl}$

↖ $C_l = \underline{x}_0 \underline{b}^{(l)}$

$C_k = \underline{x}_0 \underline{b}^{(k)}$

$$\underline{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} (\underline{x}_0 \underline{b}^{(k)}) \underline{a}^{(k)} e^{\lambda_k t} =$$ ← "tanösvényi mo"; nagyon nehéz :(nond meg is mutatja.

$$= \sum_k e^{\lambda_k t} \underline{a}^{(k)} (\underline{b}^{(k)} \underline{x}_0) =$$

$$= \sum_k e^{\lambda_k t} (\underline{a}^{(k)} \circ \underline{b}^{(k)}) \underline{x}_0 = \Big(\sum_k e^{\lambda_k t} \underbrace{(\underline{a}^{(k)} \circ \underline{b}^{(k)})}_{\underline{\underline{P}}^{(k)}} \Big) \underline{x}_0 =$$

$$= \Big(\underbrace{\sum_k e^{\lambda_k t} \underline{\underline{P}}^{(k)}}_{e^{\underline{\underline{A}} t}} \Big) \underline{x}_0 = e^{\underline{\underline{A}} t} \underline{x}_0$$

az edényekhez nem hozzáadhatunk új lemmákat ⇒ nincs újrakezdés

gardarasági cél is hibás: nem a javak megsokszorozása a cél, hanem a javak fejlesztése is

cap for life detection: ⇝ ← gardarasági ciklusok (Buddy Audio's)

javak és elképzelések (nyelvek, receptek) együttes

= bármi modellezhe kívülről realisztikus

de lemmákat folyamatokat jól leír

Főtengely-transzformáció

! 2019. 11. 12.
! ke 3200

$\underline{\underline{A}}\,\underline{u}^{(k)} = \lambda_k \underline{u}^{(k)}$

$\underline{\tilde{v}}^{(k)}\underline{\underline{A}} = \lambda_k \underline{\tilde{v}}^{(k)}$

$\underline{\underline{P}}^{(k)} = \underline{u}^{(k)} \circ \underline{\tilde{v}}^{(k)}$

$\underline{\underline{A}} = \sum_k \lambda_k \underline{u}^{(k)} \circ \underline{\tilde{v}}^{(k)}$

$\underline{\underline{A}} = \sum_m \lambda_m \underline{u}^{(m)} \circ \underline{\tilde{v}}^{(m)}$

$A_{re} = \sum_m \lambda_m u_r^{(m)} v_e^{(m)}$

$\lambda_m = \sum_p \delta_{mp} \lambda_p$

$A_{re} = \sum_m \sum_p \delta_{mp} \lambda_p u_r^{(m)} v_e^{(m)} = \sum_p \sum_m \left(u_r^{(m)}\right)\left(\delta_{mp}\lambda_p\right)\left(v_e^{(p)}\right) =$

$= \sum_m \sum_p U_{rm} \Lambda_{mp} V_{pe}$

$U_{rm} = u_r^{(m)}$ $\quad V_{pe} = v_e^{(p)}$

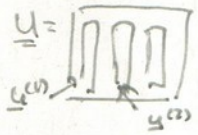
$\Lambda_{mp} = \delta_{mp}\lambda_p$

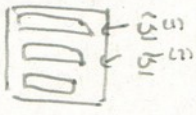
3 mx szorzata:

$(ABC)_{re} = \sum_m \sum_p A_{rm} B_{mp} C_{pe} \Rightarrow$

λ: sorindex
m: oszlopindex

$\underline{\underline{A}} =$ 

$\underline{\underline{U}} =$ 





$\underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{U}} =$  $= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{V}} = \underline{\underline{U}}^{-1}$ ment $\underline{u}$-$\underline{v}$ sorhalmaz reciprok mx

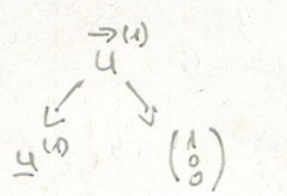
$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{\underline{U}}^{-1} \Rightarrow \underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{\Lambda}}$ másik bázison felírva ua!!

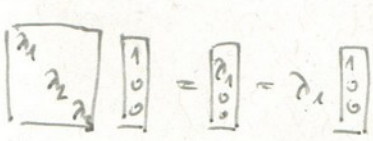
Tekintsük át $\underline{\underline{\Lambda}}$ bázisát:

$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{\underline{V}}$ $\quad$ és $\underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{1}}$

$\underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{V}}\,(\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{\underline{V}})\,\underline{\underline{U}} = (\underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{U}})\,\underline{\underline{\Lambda}}\,(\underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{U}}) = \underline{\underline{\Lambda}}$

$\boxed{\underline{\underline{\Lambda}} = \underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}}^{-1}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{U}}}$





bázis: a sajátvektorok bázisa!

az u-ból álló bázison $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a mx ellen diagonális

= főtengely-transzformáció (=diagonalizálás)

a mx legegyszerűbb alakra hozása

szimm. mx esetén

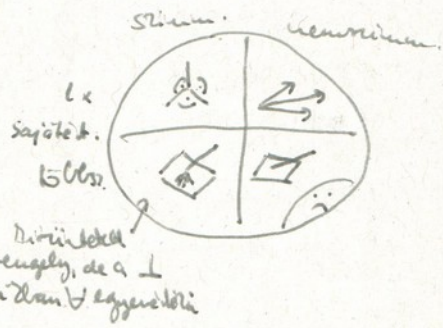
$\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{V}}$ csak a sajátvektorokra kell forgatni a bázist

λ-k valósak

diagonalizálás csak négyzetes mxokra lehet

vannak mxok amik csak Jordan-féle normálalakra lehet hozni

Hogy döntheti el, hogy egy mx csinya-e?



Cayley - Hamilton tétel

∀ négyzetes mátrix igaz

$$f(\lambda) = \lambda^n + ( )\lambda^{n-1} + \dots + ( )\lambda + ( ) = 0$$

$$\underline{\underline{A}}^n$$

minimálegyenlet:

a mátrixhoz tartozó legkisebb fokú egyenlet, amit kielégít ← lehet, hogy csak a karakterisztikus polinom

pl. $\underline{\underline{P}}^2 = \underline{\underline{P}}$

$m(x) = x^2 + ( )x^{2-1} + \dots + ( )x + ( )$ minimálpolinom

$m(\underline{\underline{A}}) = 0$

$$\underline{\underline{A}}^2 + ( )\underline{\underline{A}}^{2-1} + \dots + ( )\underline{\underline{A}} + ( )\underline{\underline{1}} = 0$$

$\underline{\underline{A}}\,\underline{y} = \lambda \underline{y} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^k \underline{y} = \lambda^k \underline{y}$

$m(\underline{\underline{A}})\,\underline{y} = m(\lambda)\underline{y} = \underline{0}$ $\quad m(\lambda) = 0$

⇒ ha egy mx kielégít egy egyenletet, a sajátértékei is kielégítik a minimálegyenletet és a karakterisztikus egyenletet is

pl. tükrözés: $\underline{\underline{T}}^2 = \underline{\underline{1}}$

$\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$

$f(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{\mu_1}(\lambda-\lambda_2)^{\mu_2}\dots(\lambda-\lambda_n)^{\mu_n}$

$\sum \mu_i = n$ ← mx dimenziója

μ_i: a gyök multiplicitása (hányszoros gyök) legalább 1

⇒ a minimál- és karakterisztikus polinomnak is ugyanazok a gyökei vannak a sajátértékeknél

$m(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{\nu_1}(\lambda-\lambda_2)^{\nu}\dots(\lambda-\lambda_n)^{\nu_n}$ $\quad 1 \le \nu_i \le \mu_i$

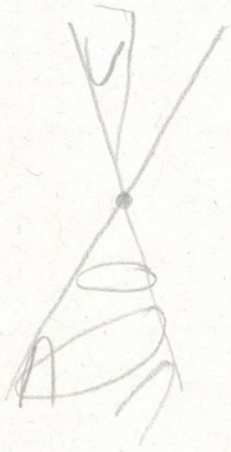
akkor egyszerű struktúrájú, ha $\nu_i = 1$ $\forall i$-re

⇒ csinya a mx, ha a minimálegyenlet multiplicitása > 1

Tengely transzformációk - kapcsolat

$\underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{\Lambda}}$ $\quad (\equiv)\ \underline{\underline{A}}\,(|||) = (\cdot\cdot\cdot)$

Kúpszeletek



kúpot síkkal elmetszve ilyen görbéket kapunk

kör, ellipszis, parabola, hiperbola, pont, egyenesek

kör alapú kúpra sajátosan fel,
de ellipszis alapúaknak lesznek metszetei a kör



egyenes: elsőfokú / lineáris egyenlet

másodfokú: x^2 vagy xy van benne

$p(x,y) = 17x^2 + 12xy + 8y^2 + 20\sqrt{5}x + 20 = 0$

legáltalánosabb: $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \varphi = 0$ ← másodrendű / kvadratikus egyenlet / formula
(3 ismeretlen esetén: felületek is lehetnek)

másodrendű egyenleteket kielégítő görbék: kúpszeletek

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{2} a_{k\ell} x_k x_\ell = a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 = a_{11}x^2 + (a_{12}+a_{21})xy + a_{22}y^2$$

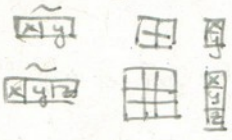
↑ 2-ig megy

$x_1 := x \quad x_2 := y$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta/2 \\ \beta/2 & \gamma \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} \delta \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

$\sum_k x_k \left(\sum_\ell a_{k\ell} x_\ell\right)$ ⇒ mátrixokkal:

$$\tilde{\underline{x}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \tilde{\underline{b}}\,\underline{x} + c = 0$$



alakra írható a másodfokú egyenlet
n dimenzió: ha 3, akkor felület
2 akkor görbe

Írjuk át más bázisra!

$\underline{v}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{v}$ $\quad \underline{\underline{R}}^{-1} = \tilde{\underline{\underline{R}}}$

$\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}}^{-1}$

$\underline{x}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{x}$

↳ $\tilde{\underline{x}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{x}' = (\tilde{\underline{x}}\,\tilde{\underline{\underline{R}}})(\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}}^{-1})(\underline{\underline{R}}\,\underline{x}) = \tilde{\underline{x}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{x}$

$\tilde{\underline{b}}\,\underline{x}' = \tilde{\underline{b}}\,(\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{R}})\,\underline{x} = \tilde{\underline{b}}\,\underline{x}$

$\Rightarrow \tilde{\underline{x}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \tilde{\underline{b}}\,\underline{x} + c = 0$

↳ $\tilde{\underline{x}}'\,\underline{\underline{A}}\,\underline{x}' + \tilde{\underline{b}}\,\underline{x}' + c = 0$

← hasonlóan egyenletek ugyanúgy alak

Vizsgáljuk meg a mátrixot → legyen diagonális

$p(x,y)$

kvadratikus tagok (α, β, γ) : $\tilde{\underline{x}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{x}$: $(x\ y)\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow p(x,y) = (x\ y)\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (20\sqrt{5}\ \ 0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 20 = 0$

$(x'\ y')\,(\quad)\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (\ 5\ )\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

sajátvektorokkal való transzformáció

$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 20\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad c = 20$

két gyök összege: spur
két gyök szorzata: det

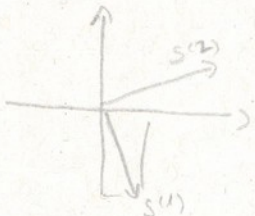
karakt. polin.: $\lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0$ $\quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 400}}{2} = \frac{25 \pm 15}{2} \begin{matrix} \nearrow 5 \\ \searrow 20 \end{matrix}$

$\lambda_1 = 5$

$\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{s}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\lambda_2 = 20$

$\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{s}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}$



tanárosz: jobbsodrású rsz
sz.mozgás CCW

csak sajátvektorokból álló mátrixokra működik

$\underline{\underline{R}} = (\underline{s}^{(1)}, \underline{s}^{(2)}) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}}^{-1} = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}}$

$\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 40 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$\underline{b}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{b} = (\underline{\underline{R}})(\text{I})$ $\qquad b_1' = \frac{1}{\sqrt{5}} (1, -2) \begin{pmatrix} 20\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} = 20$

(I) $\quad b_1' = \underline{s}^{(1)}\,\underline{b}$ $\qquad b_2' = \frac{1}{\sqrt{5}} (2, 1) \begin{pmatrix} 20\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} = 40$

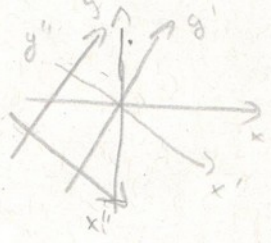
$b_2' = \underline{s}^{(2)}\,\underline{b}$

$\Rightarrow (x', y') \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (20, 40) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 20$ ← koordrsz elforgatása

$\Rightarrow$ már nincs xy-s tag
diagonalizálás adódott

$P(x', y') = 5x'^2 + 20y'^2 + 20x' + 40y' + 20 = 0$

$x'^2 + 4y'^2 + 4x' + 8y' + 4 = 0$



ha egy sajátért. 0 $\Rightarrow$
másik $\neq -$ 0 $\Rightarrow$ nem is volt másodfokú

teljes négyzetté rakjuk:

$(x'^2 + 4x') + (4y'^2 + 8y') + 4 = 0$

$[(x'+2)^2 - 4] + 4(y'^2 + 2y') + [(y'+1)^2 - 1] + 4 = 0$

$\underbrace{(x'+2)^2}_{(x'')^2} + 4\underbrace{(y'+1)^2}_{(y'')^2} - 4$ ← eltolás

$(x'')^2 + 4(y'')^2 = 4$

$\left(\frac{x''}{2}\right)^2 + (y'')^2 = 1$

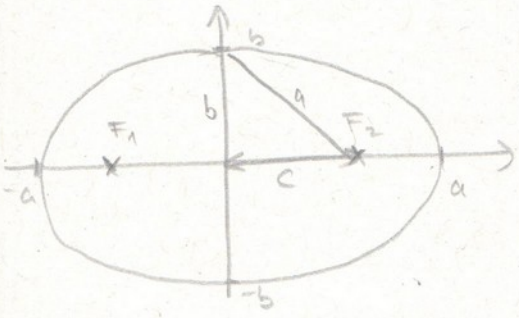
sajátértékek:

- λ-k azonos előjelűek, a rang. nem 0

$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = K$

$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$

ellipszis



$r_1 + r_2 = \text{áll.} = 2a$

$a^2 = b^2 + c^2$

$\varepsilon = c/a < 1$ $\quad \varepsilon = 0$ extrém rövid

↑ numerikus excentricitás

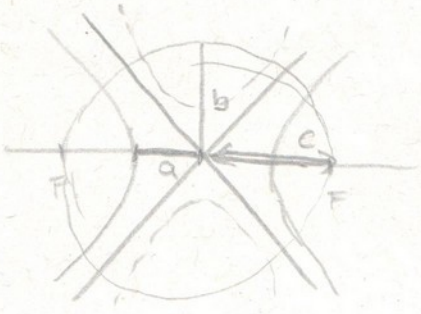
- λ_1 és λ_2 azonos előjelű, $K = 0$ $\Rightarrow$ pont
- λ_1 és λ_2 — " — $K < 0$ $\Rightarrow \emptyset$ (üres ellipszis)
- λ_1 és λ_2 ellentétes előjelű $\Rightarrow$ hiperbola

pl. $5x''^2 - 3y''^2 = 15$

$\frac{x''^2}{3} - \frac{y''^2}{5} = 1 \quad \Leftarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

ha nagyon nagyok a koordinátái, rét egyenesben lesz $m = \pm\frac{b}{a}$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \approx 0 \Rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 \Rightarrow y = \pm\frac{b}{a}x$



ha $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$

felfelé és lefelé az aszimptotákhoz konjugált hiperbola

$r_1 - r_2 = 2a$

r_1 és r_2 abszolút hossza lehet

a 4 lehetséges fókusz egy körön helyezkedik el

$c^2 = a^2 + b^2$

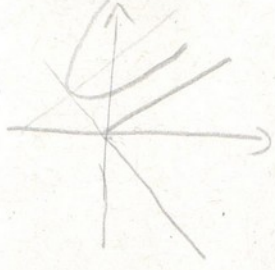
$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$

- λ_1 és λ_2 ellentétes előjelű és $K = 0$ $\Rightarrow$ a rét aszimptotái, metsző egyenesek

- ha $\lambda_2 = 0$ $\Rightarrow$ parabola

pl.: $(x'+2)^2 - 5y' = 7$

$(\underbrace{x'+2}_{x''})^2 = 5(\underbrace{y' + \frac{7}{5}}_{y''}) \Rightarrow y'' = \frac{1}{5}x^2$



parabola csúcsa: $(-2, \frac{7}{5})$

ha y együtthatója 0

pl. $x''^2 = 4$ $\Rightarrow$ két párhuzamos egyenes

ha x együtthatója a és 0, a rét egyenes egybeesik

2019. 11. 23.
sze 33.ea
(zh után)

Kanonikus alakok

$\lambda_1\lambda_2 > 0$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ — 1: ellipszis, 0: •, -1: ↯

$\lambda_1\lambda_2 < 0$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ — 1: ><, hip. (kétvő); 0: X, aszimptoták; -1: ≈, hip. (ellő)

$\lambda_1\lambda_2 = 0$

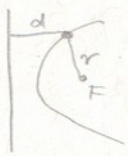
$x^2 = 2py$ ∪ parabola

$\frac{x^2}{a^2}$ — 1: ||, 0: 1, -1: ↯

$\lambda_1\lambda_2 \Leftrightarrow \det$

⇒ egyenlet típusa

$\vec{d} = \varepsilon$



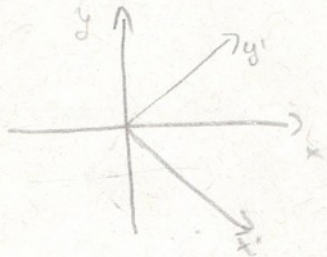
parabola

$17x^2 + 12xy + 8y^2 + 20\sqrt{5}x + 20 = 0$

$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 20$

$\underline{s}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\underline{s}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$



$\underline{v}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{v} \qquad \underline{\underline{R}} = (=)$

$\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}}$

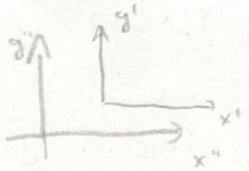
$5x'^2 + 20y'^2 + 20x' + 40y' + 20 = 0$

$5((x'+2)^2 - 4) + 20((y'+1) - 1) + 20 = 0$

$x'' = x'+2 \qquad y'' = y'+1$

$5x''^2 + 20y''^2 = 20$

$\Rightarrow \frac{x''^2}{4} + y^2 = 20 \Rightarrow a = 2,\ b = 1$



kétszeres pont: $O''(0,0)$ $A''(-2,0)$ $B''(2,0)$ $C''(0,1)$ $D''(0,-1)$ $F_1''(-\sqrt{5},0)$ $F_2''(\sqrt{5},0)$

transzformáljuk vissza:

eltolás:

$x'' = x'+2$

$y'' = y'+1$

$x' = x''-2$

$y' = y''-1$

$O'(-2,-1)$ $A'(-4,-1)$ $B'(0,-1)$ $C'(-2,0)$ $D'(-2,-2)$ $F_1'(-\sqrt{5}-2,-1)$ $F_2'(\sqrt{5}-2,-1)$

elforgatás:

$\underline{v} = \underline{\underline{R}}^{-1}\underline{v}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{v}'$ (4)

$\underline{\underline{R}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ← olyan sorrendben, ahogy számoltuk

$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ← ennyi az eredeti koordinátákban

Tükrözés egyenlete: $x'' = 0$

$x'' = x' + 2 \Rightarrow x' = -2$

valódi egyenletek (nem pont) esetén ezt használjuk pl. aszimptoták

alakmennyiség helyvektora: $\underline{v}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{v}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underline{\underline{R}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (=)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x' = \frac{1}{5}(x - 2y)$

$y' = \frac{1}{5}(2x + y)$

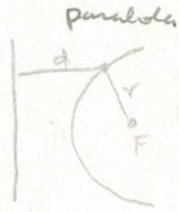
$\frac{1}{5}(x-2y) = -2$

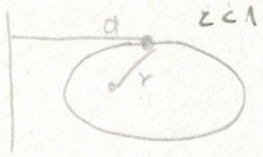
$x - 2y = -10$

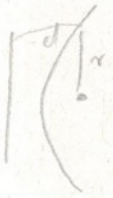
$2y = x + 10$

tükrözés egyenlete az eredeti koordinátákban → $y = \frac{1}{2}x + 5$

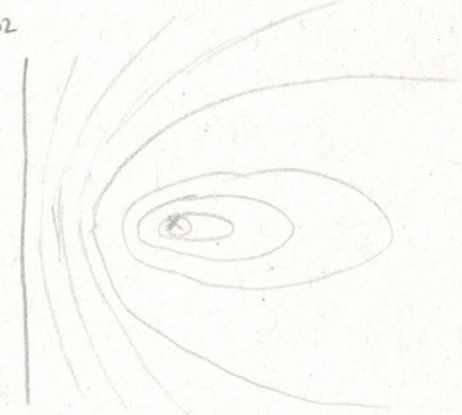
$\frac{r}{d} = \varepsilon$





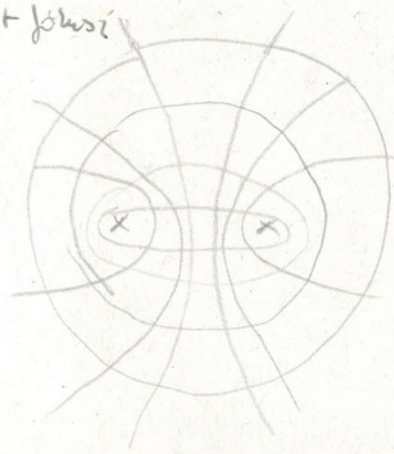


egy fókusz

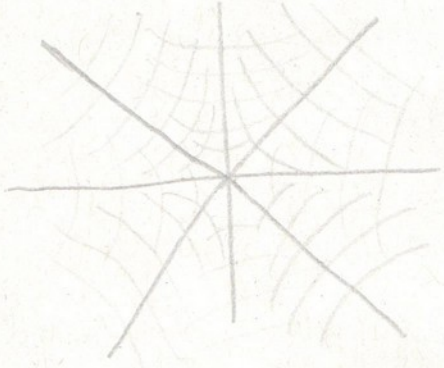


a síkon mindenütt
átmegy egy kúpszelet

két fókusz



a síkon mindenütt
átmegy egy ellipszis és egy hip.bola
⇒ azzal is lehet megadni egy pontot,
hogy melyik ellipszis/hiperbola mentén jut el
⇒ új geometria!
ortogonális görbevonalú koordináta
⇒ az ellipsz. és a hiperbola
∀ pontban ⊥



↖ ez is ortogonális görbevonalú koordináta

3 dimenzióban

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta xy + \varepsilon xz + \varphi yz + \mu x + \nu y + \lambda z + \sigma = 0$$

másodrendű felület

$$\underline{\underline{x}}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{x}} + \underline{\underline{b}}^T \underline{\underline{x}} + c$$



↳ $\underline{\underline{x}}' = \underline{\underline{R}}\, \underline{\underline{x}}$ $\quad \underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{R}}\, \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{R}}^T$ $\quad \underline{\underline{b}}' = \underline{\underline{R}}\, \underline{\underline{b}}$

$\underline{\underline{R}} = (\equiv)$ $\quad A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + b_1' x' + b_2' y' + b_3' z + c = 0$$

← tetsz. sz.mx. a mx
a sajátértékei $\in \mathbb{R}$
és sajátvektorai $\perp$ ek

← több eset marad alkalmas,
hogy $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = ?$

$\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$ előjele ua.



- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ← ellipszoid
  minden irányban ellipszis a metszete
  forgási szelve körmetszetes

spec. eset $b = c$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1$ ← forgásellipszoid
egyik irányban keresztmetszete kör

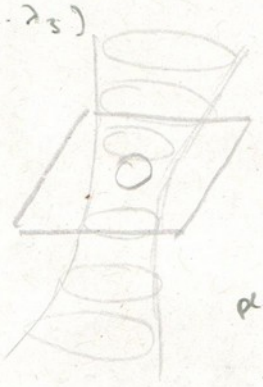
spec. eset $a = b = c$ ← gömb

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ ← pont
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ ↯

$\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$ ← az egyik előjele kül (pl. λ_3)

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right)$ ← $z = \text{const}$ esetén ellipszis keresztmetszet



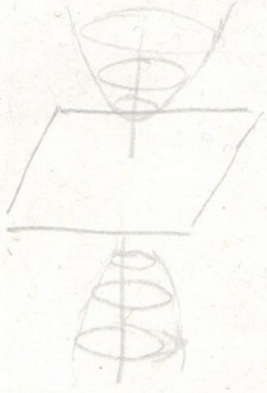
egyköpenyű hiperboloid



megvalósulás pl. erőművek hűtőtornyai

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

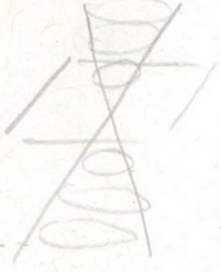
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} - 1$ ← $z \geq c$ esetén ellipszis



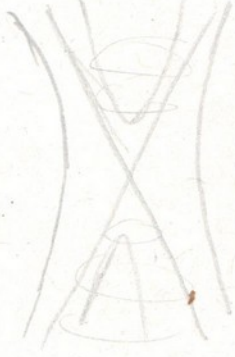
kétköpenyű hiperboloid →

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$



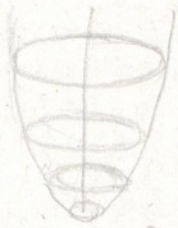
ellipszis keresztmetszetű kúp
$a = b$ esetén körkúp

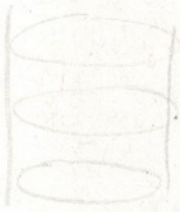


vagy λ (pl. λ_3) $= 0$, $\lambda_1 \neq 0$ $\lambda_2 \neq 0$

$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = z$

↑ + ha λ_1 és λ_2 előjele ua.



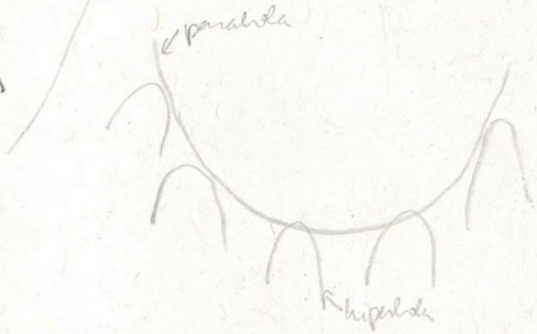


- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$

spec.: $a = b$

$x^2 + y^2 = a^2 z$ ← forgásparaboloid elliptikus z tengely körül

ha $a \neq b$ ellipszis alapú henger



- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$ hiperbolikus paraboloid

nyeregfelület

hegy: két ismeretlen részt!

ha $z = \text{const}$

⇒ magas hiperbola alakú fal



ret λ (λ_1 és λ_2) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $\lambda_3 \neq 0$

$\lambda_3 z^2 + \alpha x + \beta y = 0$

parabolikus henger

ha $z = \text{const}$ ⇒ két egyenessel párhuzamos sík