VEKTORSZÁMÍTÁS

Vektorok és vektorműveletek

Fizikai mennyiségek:
- skalár
- vektor
  - polárvektor
  - axiálvektor: valamilyen szimmetria nem teljesül rájuk (testtükrözés, töltéstükrözés, időtükrözés) (de a velük foglalkozó fizikai törvényekre igen (gondolták századunkig))

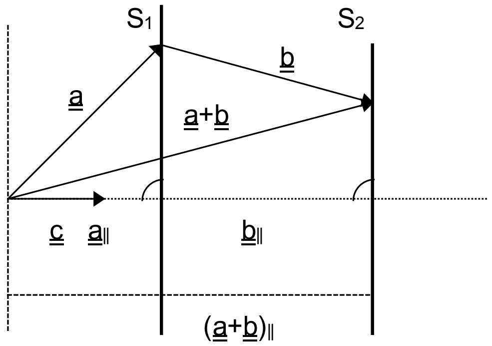
Műveletek vektorokkal:
- szorzás skalárral:
  - $\lambda \underline{\underline{a}} = \underline{\underline{b}}$
- összeadás:
  - $\underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{c}}$
- a vektorok lineáris teret alkotnak a valós számok teste fölött
- skalárszorzat:
  - $\underline{\underline{a}}\underline{\underline{b}} = c = |\underline{\underline{a}}||\underline{\underline{b}}|\cos\alpha$
- vektoriális szorzat:
  - $\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{c}}$
  - $|\underline{\underline{c}}| = |\underline{\underline{a}}||\underline{\underline{b}}|\sin\alpha$
  - $\underline{\underline{c}} \perp S_{ab}$
  - $\underline{\underline{a}}$, $\underline{\underline{b}}$, $\underline{\underline{c}}$ jobbrendszert alkot
- vegyesszorzat:
  - $(\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{b}})\underline{\underline{c}} = (\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b}}, \underline{\underline{c}}) = d$

Műveleti tulajdonságok vektorokra:

művelet	kommutativitás	asszociativitás	disztributivitás az összeadásra nézve
szorzás skalárral	teljesül	teljesül	teljesül
összeadás	teljesül	teljesül	értelmetlen
skalárszorzat	teljesül	nem teljesül	teljesül
vektoriális szorzat	antikommutatív	nem teljesül	teljesül
vegyes szorzat	ciklikus permutációkra	értelmetlen	teljesül

- geometriai összefüggések:
  - merőlegesség:
    - $\underline{\underline{a}} \perp \underline{\underline{b}} \Leftrightarrow \underline{\underline{a}}\underline{\underline{b}} = 0$
  - párhuzamosság:

- $\underline{\underline{a}} \parallel \underline{\underline{b}} \Leftrightarrow \underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{0}}$
- koplanalitás:
  - $\underline{\underline{c}} \in S_{ab} \Leftrightarrow \left(\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b}}, \underline{\underline{c}}\right) = 0$
- paralelogramma területe:
  - $T_p = \left|\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{b}}\right|$
- paralelopipedon térfogata:
  - $V_{pp} = \left|\left(\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b}}, \underline{\underline{c}}\right)\right|$

- skalárszorzat disztributivitásának bizonyítása:
  - Def.: $x_\parallel = \frac{\underline{\underline{x}}\,\underline{\underline{y}}}{\left|\underline{\underline{y}}\right|} = \left|\underline{\underline{x}}\right| \cos\alpha$
  - Ekkor bizonyítandó: $\left|\underline{\underline{c}}\right|\left(\underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}}\right)_\parallel = \left|\underline{\underline{c}}\right|\left(\underline{\underline{a}}_\parallel + \underline{\underline{b}}_\parallel\right)$
  - Ha $\underline{\underline{c}} = \underline{\underline{0}}$, akkor igaz.
  - Ha $\underline{\underline{c}} \neq \underline{\underline{0}}$, akkor bizonyítandó: $\left(\underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}}\right)_\parallel = \underline{\underline{a}}_\parallel + \underline{\underline{b}}_\parallel$
  - 

  - Q. E. D.
- vektoriális szorzat disztributivitásának bizonyítása:
  - tétel: $\left(\underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}}\right) \times \underline{\underline{c}} = \left(\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{c}}\right) + \left(\underline{\underline{b}} \times \underline{\underline{c}}\right)$
  - legyen $\underline{\underline{e}}$ tetszőleges:
  - $$\underline{\underline{e}}\left(\left(\underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}}\right) \times \underline{\underline{c}}\right) = \left(\underline{\underline{e}}, \underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}}, \underline{\underline{c}}\right) = \left(\underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}}, \underline{\underline{c}}, \underline{\underline{e}}\right) = \left(\underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}}\right)\left(\underline{\underline{c}} \times \underline{\underline{e}}\right) = \underline{\underline{a}}\left(\underline{\underline{c}} \times \underline{\underline{e}}\right) + \underline{\underline{b}}\left(\underline{\underline{c}} \times \underline{\underline{e}}\right) =$$
    $$= \left(\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{c}}, \underline{\underline{e}}\right) + \left(\underline{\underline{b}}, \underline{\underline{c}}, \underline{\underline{e}}\right) = \left(\underline{\underline{e}}, \underline{\underline{a}}, \underline{\underline{c}}\right) + \left(\underline{\underline{e}}, \underline{\underline{b}}, \underline{\underline{c}}\right) = \underline{\underline{e}}\left(\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{c}}\right) + \underline{\underline{e}}\left(\underline{\underline{b}} \times \underline{\underline{c}}\right) = \underline{\underline{e}}\left(\left(\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{c}}\right) + \left(\underline{\underline{b}} \times \underline{\underline{c}}\right)\right)$$
  - Q. E. D.

Alkalmazások:

- cosinustétel
- vektorok fölbontása komponensekre (Cramer-szabály):
  - $\underline{\underline{F}} = \alpha\underline{\underline{a}} + \beta\underline{\underline{b}} + \chi\underline{\underline{c}}$ (lineális kombináció)
  - $\left(\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b}}, \underline{\underline{c}}\right) \neq 0$
  - $\alpha = \frac{\left(\underline{\underline{F}}, \underline{\underline{b}}, \underline{\underline{c}}\right)}{\left(\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b}}, \underline{\underline{c}}\right)}$
  - többi együttható hasonlóképpen

Vektorok reprezentációja derékszögű koordinátarendszerben

Vektorreprezentáció, bázis:

- bármely vektor felírható $\underline{\underline{r}} = \sum_i r_i \underline{\underline{f^{(i)}}}$ alakban, ha $\left(\underline{\underline{f^{(1)}}}, \underline{\underline{f^{(2)}}}, \underline{\underline{f^{(3)}}}\right) \neq 0$
- bázis: $\underline{\underline{f^{(i)}}}$ -k
- háromdimenziós vektorokat veszünk, tehát $i = 1,2,3$
- adott bázis és adott $\underline{\underline{r}}$ esetén r_i -k és $\underline{\underline{r}}$ bijektívek
- vektorreprezentáció: $\underline{r} = (r_1, r_2, r_3)$ (adott $\underline{\underline{f^{(i)}}}$ bázison)

Vektorreprezentációk Descartes-féle bázisban (derékszögű koordinátarendszer):

- bázisvektorok: $\underline{\underline{e^{(i)}}}$ -k
- $\left(\underline{\underline{e^{(1)}}}, \underline{\underline{e^{(2)}}}, \underline{\underline{e^{(3)}}}\right) = 1$
- $\underline{\underline{e^{(i)}}}\,\underline{\underline{e^{(k)}}} = \delta_{ik}$
- $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 \rightarrow i = k \\ 0 \rightarrow i \neq k \end{cases}$ (Kronecker-delta)
- $\underline{\underline{a}} \equiv \sum_i a_i \underline{\underline{e^{(i)}}}$
- $a_k \equiv \underline{\underline{a e^{(k)}}}$

Műveletek vektorreprezentációkkal:

Szorzás skalárral:

- $\underline{b} = \lambda \underline{a}$: $b_k = \lambda a_k$

Összeadás:

- $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$: $a_k + b_k = c_k$

Skaláris szorzás:

- $\underline{a}\underline{b} = \sum_i a_i b_i$

Vektoriális szorzás:

- $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{c}$
- $c_k = \sum_{ij} a_i b_j \left(\underline{\underline{e^{(i)}}}, \underline{\underline{e^{(j)}}}, \underline{\underline{e^{(k)}}}\right)$
- $\left(\underline{\underline{e^{(i)}}}, \underline{\underline{e^{(j)}}}, \underline{\underline{e^{(k)}}}\right) = \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 \rightarrow i = j \vee i = k \vee j = k \\ 1 \rightarrow i \neq j \neq k \wedge \text{jobbrendszer} \\ -1 \rightarrow i \neq j \neq k \wedge \text{balrendszer} \end{cases}$ (Levi-Civita-szimbólum)
- $c_k = \sum_{ij} \varepsilon_{ijk} a_i b_j$

Vegyesszorzat:

- $\left(\underline{a},\underline{b},\underline{c}\right)=\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}a_i b_j c_k=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ (determináns)

A kettős vektorszorzat kifejtési tétele

- $\sum \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl}=2\delta_{kl}$
- $\sum \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk}=\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}$
- $\left(\underline{a}\times\left(\underline{b}\times\underline{c}\right)\right)_i=\sum_{jk}\varepsilon_{ijk}a_j\left(b\times c\right)_k=\sum_{jkmn}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}a_j b_m c_n=\sum_{jmn}\delta_{im}\delta_{jn}a_j b_m c_n-$
  $-\sum_{jmn}\delta_{in}\delta_{jm}a_j b_m c_n=\sum_j a_j b_i c_j-\sum_j a_j b_j c_i=b_i\left(\underline{a}\underline{c}\right)-c_i\left(\underline{a}\underline{b}\right)=\left(\left(\underline{a}\underline{c}\right)\underline{b}-\left(\underline{a}\underline{b}\right)\underline{c}\right)_i$
- $\underline{a}\times\left(\underline{b}\times\underline{c}\right)=\left(\underline{a}\underline{c}\right)\underline{b}-\left(\underline{a}\underline{b}\right)\underline{c}$
- $\underline{\underline{a}}\times\left(\underline{\underline{b}}\times\underline{\underline{c}}\right)=\left(\underline{\underline{a}}\underline{\underline{c}}\right)\underline{\underline{b}}-\left(\underline{\underline{a}}\underline{\underline{b}}\right)\underline{\underline{c}}$
- ugyanígy: $\left(\underline{\underline{b}}\times\underline{\underline{c}}\right)\times\underline{\underline{a}}=\left(\underline{\underline{a}}\underline{\underline{b}}\right)\underline{\underline{c}}-\left(\underline{\underline{a}}\underline{\underline{c}}\right)\underline{\underline{b}}$

Reciprok vektorrendszerek (biortogonális vektorrendszer)

Definíció ($\underline{\underline{a}},\underline{\underline{b}},\underline{\underline{c}}$ vektorrendszer reciproka $\underline{\underline{A}},\underline{\underline{B}},\underline{\underline{C}}$):

- $v=\left(\underline{\underline{a}},\underline{\underline{b}},\underline{\underline{c}}\right)\neq 0$
- $\underline{\underline{A}}=\frac{1}{v}\left(\underline{\underline{b}}\times\underline{\underline{c}}\right)$
- $\underline{\underline{B}}=\frac{1}{v}\left(\underline{\underline{c}}\times\underline{\underline{a}}\right)$
- $\underline{\underline{C}}=\frac{1}{v}\left(\underline{\underline{a}}\times\underline{\underline{b}}\right)$

Egy általánosabb összefüggés:

- $\underline{\underline{e}}^{(k)}\underline{\underline{E}}^{(l)}=\delta_{kl}$

Annak bizonyítása, hogy reciprok vektorrendszer reciproka az eredeti rendszer:

- $V=\left(\underline{\underline{A}},\underline{\underline{B}},\underline{\underline{C}}\right)=\frac{1}{v^3}\left(\left(\underline{\underline{b}}\times\underline{\underline{c}}\right)\times\left(\underline{\underline{c}}\times\underline{\underline{a}}\right)\right)\left(\underline{\underline{a}}\times\underline{\underline{b}}\right)=\frac{1}{v^3}\left(\underline{\underline{c}}\left(\underline{\underline{b}}\left(\underline{\underline{c}}\times\underline{\underline{a}}\right)\right)-\underline{\underline{b}}\left(\underline{\underline{c}}\left(\underline{\underline{c}}\times\underline{\underline{a}}\right)\right)\right)\left(\underline{\underline{a}}\times\underline{\underline{b}}\right)=$
  $=\frac{1}{v^3}\left(v\underline{\underline{c}}\right)\left(\underline{\underline{a}}\times\underline{\underline{b}}\right)=\frac{1}{v}$
- $\underline{\underline{A}}'=\frac{1}{v}\left(\left(\underline{\underline{c}}\times\underline{\underline{a}}\right)\times\left(\underline{\underline{a}}\times\underline{\underline{b}}\right)\right)=\frac{1}{v}\left(\underline{\underline{a}}\left(\underline{\underline{c}},\underline{\underline{a}},\underline{\underline{b}}\right)-\underline{\underline{c}}\left(\underline{\underline{a}},\underline{\underline{a}},\underline{\underline{b}}\right)\right)=\underline{\underline{a}}$
- hasonlóképpen $\underline{\underline{B}}'=\underline{\underline{b}}$ és $\underline{\underline{C}}'=\underline{\underline{c}}$

A dimenzió fogalma

- vektor: bármi, ami vektorteret alkot
- lineárkombináció: $\underline{\underline{r}}=\sum_k \alpha_k \underline{\underline{\underline{a}}}^{(k)}$
- $\underline{\underline{\underline{a}}}^{(k)}$ vektorok lineárisan függetlenek, ha $\sum_k \alpha_k \underline{\underline{\underline{a}}}^{(k)}=\underline{\underline{0}}\Rightarrow \forall k:\alpha_k=0$

- ha ez nem áll fönn az $\underline{\underline{a}}^{(k)}$ vektorok egyike kifejezhető a többi vektorból a hozzá tartozó $\alpha_k \neq 0$-val leosztva és átrendezve
- dimenzió: az adott vektortéren a lineárisan független vektorok maximális száma
- a szám n-esek n dimenziós vektorteret alkotnak
- Fourier-sorbafejtés: végtelen dimenziós vektor komponensekre bontása

Lineáris operátorok

operátor: vektorváltozós vektorfüggvény

$f\left(\underline{a}\right)$ lineáris operátor, ha: $f\left(\alpha\underline{a}+\beta\underline{b}\right)=\alpha f\left(\underline{a}\right)+\beta f\left(\underline{b}\right)$

jelölés: $\underline{\underline{A}}\,\underline{r}$

példák:

- $f\left(\underline{r}\right)=\left(\underline{a}\,\underline{r}\right)\underline{b}$ ($\underline{a}$, $\underline{b}$ adott)
- $f\left(\underline{r}\right)=\underline{a}\times\underline{r}$
- nulloperátor: $\underline{\underline{N}}\,\underline{r}=\underline{0}$
- identitásoperátor: $\underline{\underline{E}}\,\underline{r}=\underline{r}$ (nyújtás: $\lambda\underline{\underline{E}}$)
- forgatás ($\underline{t}$ forgásvektor körül $\varphi=\left|\underline{t}\right|$ szöggel), ortogonális operátor: $\underline{\underline{O}}$
- tükrözés (síkra, egyenesre, pontra): $\underline{\underline{T}}$ ($\underline{\underline{T}}\left(\underline{\underline{T}}\,\underline{r}\right)=\underline{\underline{E}}\,\underline{r}$)
  - egyenesre tükrözés: $\underline{\underline{T}}\,\underline{v}=2\left(\underline{v}\,\underline{n}\right)\underline{n}-\underline{v}$
  - nem az origón átmenő egyenesre tükrözés ($\underline{a}$ az egyenes egyik pontjába mutató vektor): $\underline{\underline{T}}\,\underline{v}=2\left(\underline{v}\,\underline{n}\right)\underline{n}-\underline{v}+2\underline{a}-2\left(\underline{a}\,\underline{e}\right)\underline{e}$ (nem lineáris operátor)
- projekció, vetítés (síkra, egyenesre): $\underline{\underline{P}}$ ($\underline{\underline{P}}\left(\underline{\underline{P}}\,\underline{r}\right)=\underline{\underline{P}}\,\underline{r}$, $\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{P}}$ is projektor)
  - egyenesre vetítés: $\underline{\underline{P}}\,\underline{v}=\left(\underline{v}\,\underline{n}\right)\underline{n}$
  - két projektor összege is projektor
  - ortogonális projektorrendszer: $\underline{\underline{P}}_k\underline{\underline{P}}_l=\delta_{kl}\underline{\underline{P}}_k=\delta_{kl}\underline{\underline{P}}_l$
    - pld.: reciprok vektorrendszereknél: $\underline{\underline{P}}_k\underline{v}=\left(\underline{v}\,\underline{\underline{E}}^{(k)}\right)\underline{e}^{(k)}$
  - teljes projektorrendszer: $\sum_k \underline{\underline{P}}_k=\underline{\underline{E}}$
- a tükrözés és projekció kapcsolata:
  - $\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{P}}=\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{T}}=\underline{\underline{P}}$
  - egy projekció definiál egy tükrözést: $\underline{\underline{P}}=\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{E}}+\underline{\underline{T}}\right)$
  - egy tükrözés definiál két projekciót: $\underline{\underline{P}}=\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{E}}+\underline{\underline{T}}\right)$, $\underline{\underline{Q}}=\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{T}}\right)$
  - itt: $\underline{\underline{P}}+\underline{\underline{Q}}=\underline{\underline{I}}$ és $\underline{\underline{P}}-\underline{\underline{Q}}=\underline{\underline{T}}$

Műveletek lineáris operátorokkal:

egyenlőség:

- $\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{B}}$, ha $\forall\underline{r}:\underline{\underline{A}}\,\underline{r}=\underline{\underline{B}}\,\underline{r}$

szorzás skalárral:

- $\lambda\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{B}}$: $\underline{\underline{B}}\,\underline{r}=\lambda\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{r}\right)$

összeadás:

- $\underline{\underline{A}} \pm \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}$: $\underline{\underline{C}}\,\underline{r} = \underline{\underline{A}}\,\underline{r} + \underline{\underline{B}}\,\underline{r}$
- kommutatív: $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}}$
- asszociatív: $\underline{\underline{A}} + \left(\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}}\right) = \left(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}\right) + \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}}$

szorzás:

- $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}$: $\underline{\underline{B}}\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{r}\right) = \underline{\underline{C}}\,\underline{r}$
- $\underline{\underline{C}}$ lineáris, mert:
  - $$\underline{\underline{C}}\left(\alpha \underline{r}_1 + \beta \underline{r}_2\right) = \underline{\underline{B}}\left(\underline{\underline{A}}\left(\alpha \underline{r}_1 + \beta \underline{r}_2\right)\right) = \underline{\underline{B}}\left(\alpha \underline{\underline{A}}\,\underline{r}_1 + \beta \underline{\underline{A}}\,\underline{r}_2\right) = \alpha \underline{\underline{B}}\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{r}_1\right) + \beta \underline{\underline{B}}\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{r}_2\right) =$$ $$= \alpha \underline{\underline{C}}\,\underline{r}_1 + \beta \underline{\underline{C}}\,\underline{r}_2$$
- nem kommutatív: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$ ($\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{O}} \neq \underline{\underline{O}}\,\underline{\underline{P}}$ ellenpéldával igazolható)
- asszociatív: $\underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\right) = \left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\right)\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}$
  - $\left(\underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\right)\right)\underline{r} = \underline{\underline{A}}\left(\left(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\right)\underline{r}\right) = \underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{B}}\left(\underline{\underline{C}}\,\underline{r}\right)\right) = \left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\right)\left(\underline{\underline{C}}\,\underline{r}\right) = \left(\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\right)\underline{\underline{C}}\right)\underline{r}$
- $\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{P}}$, $\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{E}}$, $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{N}} = \underline{\underline{N}} = \underline{\underline{N}}\,\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{A}}^n\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^n$
- disztributív: $\underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}}\right) = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}$
  - $$\left(\underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}}\right)\right)\underline{r} = \underline{\underline{A}}\left(\left(\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}}\right)\underline{r}\right) = \underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{B}}\,\underline{r} + \underline{\underline{C}}\,\underline{r}\right) = \underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{B}}\,\underline{r}\right) + \underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{C}}\,\underline{r}\right) = \left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\right)\underline{r} +$$ $$+ \left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}\right)\underline{r} = \left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}\right)\underline{r}$$
- $\left(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}\right)\left(\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}}\right) \neq \underline{\underline{A}}^2 - \underline{\underline{B}}^2$, mert nem kommutatív
- $\neg\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{N}} \rightarrow \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{N}} \vee \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{N}}\right)$
  - ellenpélda: $\underline{\underline{P}}_1\underline{\underline{P}}_2 = \underline{\underline{N}}$

inverz:

- $\underline{\underline{A}}_b^{-1}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}_j^{-1}$
- nem mindegyik operátornak van
- 3 dimenzióban, ha egy operátornak van bal inverze, akkor van jobb is és ezek egyenlőek

Vektorok diadikus szorzata:

- $\left(\underline{a} \circ \underline{b}\right)\underline{r} = \underline{a}\left(\underline{b}\,\underline{r}\right)$
- $\underline{a} \circ \underline{b} = \underline{\underline{A}}$
- nem kommutatív: $\underline{a} \circ \underline{b} \neq \underline{b} \circ \underline{a}$
- $\underline{\underline{P}}\,\underline{r} = \left(\underline{e}^P \circ \underline{e}^P\right)\underline{r}$

Operátorok reprezentációja

- $\underline{\underline{A}}\,\underline{a} = \underline{b}$ reprezentációja $\underline{A}\,\underline{a} = \underline{b}$
- $\underline{a} = \sum_i a_i e^{(i)}$
- $\underline{b} = \underline{\underline{A}}\,\underline{a} = \underline{\underline{A}}\sum_i a_i e^{(i)} = \sum_i a_i\left(\underline{\underline{A}}e^{(i)}\right)$

- $b_k = \underline{b}\,\underline{e}^{(k)} = \sum_i a_i \left(\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{e}^{(i)} \right) \underline{e}^{(k)} \right) = \sum_i A_{ki} a_i$
- ahol: $A_{ki} = \underline{e}^{(k)} \left(\underline{\underline{A}}\,\underline{e}^{(i)} \right)$
- ekkor: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$ 3*3-as mátrix
- $\underline{\underline{A}} = \sum_{i.k} A_{ik} \left(\underline{e}^{(i)} \circ \underline{e}^{(k)} \right)$, mert

$$\sum_{i.k} A_{ik} \left(\underline{e}^{(i)} \circ \underline{e}^{(k)} \right) \underline{a} = \sum_{i.k} A_{ik} \left(\underline{e}^{(k)} \underline{a} \right) \underline{e}^{(i)} = \sum_i \left(\sum_k A_{ik} a_k \right) \underline{e}^{(i)} = \sum_i b_i \underline{e}^{(i)} = \underline{b}$$

- mátrix szorzása vektorral: $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

konkrét operátorokat reprezentáló mátrixok:

- $\underline{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_{ik} = \underline{e}^{(i)} \underline{e}^{(k)} = \delta_{ik}$
- $\underline{a} \circ \underline{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_2 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$
- ha $\underline{A}\underline{r} = \underline{a} \times \underline{r}$, akkor $\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$
- $\underline{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- egyenesre vetítés: $\underline{P} = \underline{n} \circ \underline{n}$
- egyenesre tükrözés: $\underline{T} = 2\underline{n} \circ \underline{n} - \underline{E}$
- tengelyekre vetítés reciprok vektorrendszerekkel (ferdeszögű koordinátarendszereknél): $\underline{P} = \underline{E}^{(k)} \circ \underline{e}^{(k)}$
- 2 dimenziós forgatás: $\underline{F}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$
- 3 dimenziós forgatás: $F_{kl} = \delta_{kl} \cos\varphi + n_k n_l (1 - \cos\varphi) + \sin\varphi \sum_m \varepsilon_{kml} n_m$

Műveletek mátrixokkal:

összeadás:

- ha $\underline{A} \pm \underline{B} = \underline{C}$, akkor $C_{ik} = A_{ik} \pm B_{ik}$

skalárral szorzás:

- ha $\lambda \underline{A} = \underline{B}$, akkor $B_{ik} = \underline{e}^{(i)} \left(\left(\lambda \underline{\underline{A}} \right) \underline{e}^{(k)} \right) = \lambda A_{ik}$

szorzás 3*3-as mátrixok esetében:

- nem kommutatív
- ha $\underline{A}\underline{B} = \underline{C}$, akkor

$$C_{ik} = \underline{\underline{e}}^{(i)} \left(\underline{\underline{A}} \sum_j \left(\underline{\underline{e}}^{(j)} \circ \underline{\underline{e}}^{(j)} \right) \underline{\underline{B}\underline{e}}^{(k)} \right) = \sum_j \left(\underline{\underline{e}}^{(i)} \left(\underline{\underline{A}\underline{e}}^{(j)} \right) \right) \left(\underline{\underline{e}}^{(j)} \left(\underline{\underline{B}\underline{e}}^{(k)} \right) \right) = \sum_j A_{ij} B_{ik}$$

szorzás n*m-es mátrixok esetében ($n = m$: négyzetes mátrix, különben téglalap mátrix):

- $\underline{A}_{n\times m} \underline{B}_{m\times k} = \underline{C}_{n\times k}$
- $\underline{A}\underline{b} = \underline{c}$: $\underline{A}_{3\times 3} \underline{B}_{3\times 1} = \underline{C}_{3\times 1}$
- $\underline{A}\underline{B} = \underline{C}$: $\underline{A}_{3\times 3} \underline{B}_{3\times 3} = \underline{C}_{3\times 3}$
- $\underline{a}\underline{b} = c$: $\underline{A}_{1\times 3} \underline{B}_{3\times 1} = \underline{C}_{1\times 1}$
- $\underline{a} \circ \underline{b} = \underline{C}$: $\underline{A}_{3\times 1} \underline{B}_{1\times 3} = \underline{C}_{3\times 3}$

Determináns

3*3-as mátrixok esetében:

- ha $\underline{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$, akkor

$$\det \underline{A} = \left|\underline{A}\right| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \left(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \right) = \left(\underline{\underline{A}\underline{e}}^{(1)}, \underline{\underline{A}\underline{e}}^{(2)}, \underline{\underline{A}\underline{e}}^{(3)} \right)$$

- $\det \underline{\underline{A}} = \left|\underline{\underline{A}}\right| = \left|\underline{A}\right|$: előjeles térfogatnövelési faktor
- $\det\left(\underline{\underline{A}\underline{B}} \right) = \det \underline{\underline{A}} \det \underline{\underline{B}} = \det \underline{\underline{B}} \det \underline{\underline{A}} = \det\left(\underline{\underline{B}\underline{A}} \right)$
- konkrét operátorok determinánsai:
  - $\det \underline{\underline{E}} = 1$
  - $\det \underline{\underline{P}} = 0 \vee 1$
  - $\det \underline{\underline{T}} = 1 \vee -1$
  - $\det \underline{\underline{O}} = 1$
  - $\det \underline{\underline{A}}_b^{-1} \det \underline{\underline{A}} = \det \underline{\underline{A}} \det \underline{\underline{A}}_j^{-1} = 1$
  - ha $\det \underline{\underline{A}} = 0$ nincs inverze $\underline{\underline{A}}$-nak

n*n-es mátrixok esetében:

- $\det \underline{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i,j,\ldots,p} A_{1i} A_{2j} \ldots A_{np} \varepsilon_{ij\ldots p}$
- $\varepsilon_{ij\ldots p} = \begin{cases} 1 & \text{ha páros számú permutációval kapható vissza az eredeti sorrend} \\ -1 & \text{ha páratlan számú permutációval kapható vissza az eredeti sorrend} \\ 0 & \text{ha az indexek nem mind különbözõk} \end{cases}$

a determináns tulajdonságai:

- $$\lambda\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda A_{i1} & \lambda A_{i2} & \cdots & \lambda A_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$$
- $\det\left(\lambda \underline{A}\right) = \lambda^n \det \underline{A}$
- $$\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1i} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{ni} & \cdots & A_{nj} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1i} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nj} & \cdots & A_{ni} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$$
- $$\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & \cdots & A_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{j1} & \cdots & A_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{j1} & \cdots & A_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & \cdots & A_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$$
- $$\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1}+B_{i1} & \cdots & A_{in}+B_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & \cdots & A_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{i1} & \cdots & B_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$$
- $$\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & \cdots & A_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{j1} & \cdots & A_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{j1}+\lambda A_{i1} & \cdots & A_{jn}+\lambda A_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

a determináns kiszámítása:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = A_{11} \begin{vmatrix} 1 & A'_{12} & \cdots & A'_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = A_{11} \begin{vmatrix} 1 & A'_{12} & \cdots & A'_{1n} \\ 0 & A'_{22} & \cdots & A'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & A'_{n2} & \cdots & A'_{nn} \end{vmatrix} =$$

- $$= A_{11} A'_{22} \begin{vmatrix} 1 & A'_{12} & \cdots & A'_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & A''_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & A'_{n2} & \cdots & A'_{nn} \end{vmatrix} = A_{11} A'_{22} \begin{vmatrix} 1 & A'_{12} & \cdots & A'_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & A''_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A''_{nn} \end{vmatrix} =$$

  $$= A_{11} A'_{22} A'''_{33} \ldots A'^{(n-1)}_{nn} \begin{vmatrix} 1 & A'_{12} & \cdots & A'_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & A''_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = A_{11} A'_{22} A'''_{33} \ldots A'^{(n-1)}_{nn}$$

- ha egyik főátlóban lévő elem 0, akkor oszlopcsere, ha egy sor 0 lesz, akkor másik sor hozzáadása, majd sorcsere nevezetes determinánsok:

- $$D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = (a-b)^{(n-1)}\left(a+(n-1)b\right)$$
- Van der Mande determináns: $$V_n(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{k>l}(x_k - x_l)$$
- Wronsky-féle determináns:

$$W_n\left(f_1(x),\dots,f_2(x)\right) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)'}(x) & f_2^{(n-1)'}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)'}(x) \end{vmatrix}$$

- sávmátrix: $$\begin{pmatrix} \iddots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \iddots & \ddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \iddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \iddots & \ddots & \iddots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & \iddots \end{pmatrix}$$
- kontinuális mátrix: 3 szélességű sávmátrix
- homogén kontinuális mátrix: $$\begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & a \end{pmatrix}$$
- szimmetrikus homogén kontinuális mátrix: $$\begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix}$$
  - átalakítva: Csevisev polinom: $$A_n(x) = \begin{vmatrix} 2-x & -1 & 0 & \cdots \\ -1 & 2-x & -1 & \cdots \\ 0 & -1 & 2-x & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

- ha $x = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}$: $\alpha = \frac{k\pi}{n-1}$, ahol $k \in Z$

transzponált mátrix:

- $\underline{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$
- $\underline{\tilde{\tilde{A}}} = \underline{A}$
- ha $\underline{A} + \underline{B} = \underline{C}$, akkor $\underline{\tilde{A}} + \underline{\tilde{B}} = \underline{\tilde{C}}$
- ha $\lambda\underline{A} = \underline{B}$, akkor $\lambda\underline{\tilde{A}} = \underline{\tilde{B}}$
- ha $\underline{A}\underline{B} = \underline{C}$, akkor $\underline{\tilde{B}}\underline{\tilde{A}} = \underline{\tilde{C}}$ mert $(AB)_{ik} = \sum_j A_{ij}B_{jk} = \sum_j \tilde{A}_{ji}\tilde{B}_{kj} = (\tilde{B}\tilde{A})_{ki}$
- szimmetrikus mátrix: $\underline{\tilde{A}} = \underline{A}$
- antiszimmetrikus mátrix: $\underline{\tilde{A}} = -\underline{A}$
- minden mátrix fölbontható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegére: $\underline{C} = \frac{\underline{C} + \underline{\tilde{C}}}{2} + \frac{\underline{C} - \underline{\tilde{C}}}{2}$
- $\det\underline{A} = \det\underline{\tilde{A}}$, mert:
  - $\det\underline{\tilde{A}} = \sum_{ij\ldots l} \varepsilon_{ij\ldots l}\tilde{A}_{1i}\tilde{A}_{2j}\ldots\tilde{A}_{nl} = \sum_{ij\ldots l} \varepsilon_{ij\ldots l}A_{1I}A_{2J}\ldots A_{nL} = \sum_{IJ\ldots L} \varepsilon_{IJ\ldots L}A_{1I}A_{2J}\ldots A_{nL} = \det\underline{A}$
  - azért mert $\varepsilon_{ij\ldots l} = \varepsilon_{IJ\ldots L}$, mivel az oda- és visszarendezés paritása szükségképpen ugyanannyi

determinánsok kifejtési tétele:

- legyen: $\underline{A^{(l.k)}} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1(k-1)} & A_{1(k+1)} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{(l-1)1} & \cdots & A_{(l-1)(k-1)} & A_{(l-1)(k+1)} & \cdots & A_{(l-1)n} \\ A_{(l+1)1} & \cdots & A_{(l+1)(k-1)} & A_{(l+1)(k+1)} & \cdots & A_{(l+1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{n(k-1)} & A_{n(k+1)} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$
- $\det\underline{A} = \sum_k A_{ik}\left|\underline{A^{(i,k)}}\right|(-1)^{i+k} = \sum_i A_{ik}\left|\underline{A^{(i,k)}}\right|(-1)^{i+k}$

mátrixok szorzatának determinánsa:

- $D = \left|\begin{array}{ccc:ccc} A_{11} & \cdots & A_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline -1 & \cdots & 0 & B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & B_{n1} & \cdots & B_{nn} \end{array}\right| = \det\begin{pmatrix} \underline{A} & \underline{N} \\ -\underline{E} & \underline{B} \end{pmatrix} = \det\underline{A}\det\underline{B}$

- $D=\det\begin{pmatrix}\underline{A} & \underline{A}\underline{B}\\ -\underline{E} & \underline{N}\end{pmatrix}=(-1)^{n(n+1)}\det(\underline{A}\underline{B})=\det(\underline{A}\underline{B})$
- tehát $\det\underline{A}\det\underline{B}=\det(\underline{A}\underline{B})$

Mátrixok invertálása:

- legyen $\operatorname{adj}\underline{A}=\begin{pmatrix}\left|\underline{A}^{(1,1)}\right| & -\left|\underline{A}^{(2,1)}\right| & \cdots\\ -\left|\underline{A}^{(1,2)}\right| & \left|\underline{A}^{(2,2)}\right| & \cdots\\ \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}$ (előjeles aldeterminánsokból alkotott mátrix transzponáltja)
- $(\operatorname{adj}\underline{A})_{ik}=(-1)^{i+k}\left|\underline{A}^{(k,i)}\right|$
- $\operatorname{adj}\underline{A}\underline{A}=\underline{A}\operatorname{adj}\underline{A}=\det\underline{A}\underline{E}$
  - legyen $\underline{A}'=\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1k} & \cdots & A_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{i1} & \cdots & A_{ik} & \cdots & A_{in}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{i1} & \cdots & A_{ik} & \cdots & A_{in}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{n1} & \cdots & A_{nk} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}$ (j-edik sorba beírom az i-edik sort)
  - $(\underline{A}\operatorname{adj}\underline{A})_{ii}=\sum_k A_{ik}(adj\underline{A})_{ki}=\sum_k A_{ik}(-1)^{i+k}\left|\underline{A}^{(i,k)}\right|=\det\underline{A}$
  - $(\underline{A}\operatorname{adj}\underline{A})_{ij}=\sum_k A_{ik}(adj\underline{A})_j=\sum_k A_{ik}(-1)^{j+k}\left|\underline{A}^{(j,k)}\right|=\det\underline{A}'=0$ $(i\neq j)$
  - másik oldalra hasonlóan
- $\underline{A}_b^{-1}=\underline{A}_j^{-1}=\dfrac{\operatorname{adj}\underline{A}}{\det\underline{A}}=\underline{A}^{-1}$
- ha $\det\underline{A}=0$, akkor mivel $|\underline{A}|\left|\underline{A}_j^{-1}\right|=\left|\underline{A}_b^{-1}\right||\underline{A}|=\det\underline{E}=1$ a mátrixnak nincs inverze
- csk ilyen inverz van, mert $\underline{A}\underline{X}=\underline{E}\Rightarrow\underline{X}=\underline{A}^{-1}$ és $\underline{X}\underline{A}=\underline{E}\Rightarrow\underline{X}=\underline{A}^{-1}$

Négyzetes hipermátrixok:

- $\begin{pmatrix}\underline{A} & \underline{B}\\ \underline{C} & \underline{D}\end{pmatrix}$ alakúak, ahol ezek n*n-es mátrixok
- $\begin{pmatrix}\underline{A} & \underline{B}\\ \underline{C} & \underline{D}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{E} & \underline{F}\\ \underline{G} & \underline{H}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\underline{A}\underline{E}+\underline{B}\underline{G} & \underline{A}\underline{F}+\underline{B}\underline{H}\\ \underline{C}\underline{E}+\underline{D}\underline{G} & \underline{C}\underline{F}+\underline{D}\underline{H}\end{pmatrix}$
- $\begin{vmatrix}\underline{A} & \underline{B}\\ \underline{C} & \underline{D}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\underline{A} & \underline{N}\\ \underline{C} & \underline{E}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\underline{E} & \underline{A}^{-1}\underline{B}\\ \underline{N} & \underline{D}-\underline{C}\underline{A}^{-1}\underline{B}\end{vmatrix}=|\underline{A}|\left|\underline{D}-\underline{C}\underline{A}^{-1}\underline{B}\right|=\left|\underline{A}\underline{D}-\underline{A}\underline{C}\underline{A}^{-1}\underline{B}\right|$
- fölcserélhető blokkokból álló hipermátrixra: $\begin{vmatrix}\underline{A} & \underline{B}\\ \underline{C} & \underline{D}\end{vmatrix}=|\underline{A}\underline{D}-\underline{C}\underline{B}|$

Lineáris egyenletrendszerek, Gauss-algoritmus

A Gauss-algoritmus:

- lineáris egyenletrendszer: $$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$
- felfogható úgy hogy: $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$
- tehát: $\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$
- legyen $\underline{A}' = \left(\underline{A} \mid \underline{b}\right)$
- $\underline{A}'$ -vel végrehajtható a megoldásokat nem befolyásoló műveletek:
  - sor szorozható egy 0-tól különböző számmal
  - 2 sor felcserélhető
  - bármely sor számszorosa hozzáadható egy másik sorhoz
  - két oszlop felcserélhető, de akkor az adott változók is cserélődnek
- ezeknek a segítségével trapézmátrix alakra tudjuk hozni, ami három fajta lehet:

1. háromszögmátrix: $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & b_1' \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & b_2' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_m' \end{array}\right)$$

2. $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & b_1' \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & b_2' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_k' \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{k+1}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_m' \end{array}\right)$$

   - ha $b_{k+1}' = b_{k+2}' = \ldots = b_m' = 0$ hamis, akkor ellentmondásra jutottunk
   - ha igaz, akkor háromszögmátrixot kapunk

3. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_1' \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & b_2' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & b_k' \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & b_{k+1}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & b_m' \end{array}\right)$

- ha $b_{k+1}' = b_{k+2}' = \ldots = b_n' = 0$ hamis, akkor ellentmondásra jutottunk
- $n-k$ darab szabad paraméter lesz
- átalakítható a következőképpen: $\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & b_1' & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & b_2' & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_k' & \cdots \end{array}\right)$

- ezt egységmátrixá alakítjuk: $\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1'' & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2'' & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_k'' & \cdots \end{array}\right)$

Mátrixok rangja ($r\left(\underline{\underline{A}}\right) = r$):

- a fenti módon trapézmátrixá átalakított mátrix sorainak száma
- szingularitást mér
- $r \le \min\left(n, m\right)$
- egy mátrix rangja a legnagyobb nem 0 aldeterminâns mérete
- nem szinguláris (invertálható) mátrixoknál: $r = \min\left(n, m\right)$
- példák:
  - $r\left(\underline{\underline{N}}\right) = 0$
  - $r\left(\underline{a} \circ \underline{b}\right) = 1$
- háromdimenziós tér operátorait reprezentáló mátrixoknál:
  - $\underline{\underline{A}}$ térbe képez: $r\left(\underline{\underline{A}}\right) = 3$
  - $\underline{\underline{A}}$ síkba képez: $r\left(\underline{\underline{A}}\right) = 2$
  - $\underline{\underline{A}}$ egyenesbe képez: $r\left(\underline{\underline{A}}\right) = 1$
  - $\underline{\underline{A}}$ pontba képez: $r\left(\underline{\underline{A}}\right) = 0$
- operátorokat jellemző mátrixoknál az számít, hogy hány dimenzióba képeznek
- $\left|r\left(\underline{\underline{A}}\right) - r\left(\underline{\underline{B}}\right)\right| \le r\left(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}\right) \le r\left(\underline{\underline{A}}\right) + r\left(\underline{\underline{B}}\right)$
- $r\left(\underline{\underline{AB}}\right) \le \min\left(r\left(\underline{\underline{A}}\right), r\left(\underline{\underline{B}}\right)\right)$

Mátrixok invertálása a Gauss-algoritmus segítségével:

- $\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{b}$

- legyen $e_k^{(n)} = \delta_{nk}$
- $\underline{b} = \sum_k b_k \underline{e}^{(k)}$
- $\underline{\underline{A}}\underline{g}^{(n)} = \underline{e}^{(n)}$
- $\underline{x} = \sum_k b_k \underline{g}^{(k)}$
- ez a Green-függvényes módszer vektorokkal
- legyen: $C_{lk} = g_l^{(k)}$
- ekkor: $\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{C}}$

Sajátérték-számítás

Operátorok bilineáris alakja:

- mátrixok szorzása vektorral balról:
  - $y_i = \left(\underline{x}\underline{\underline{A}}\right)_i = \sum_j x_j A_{ij} = \sum_i \tilde{A}_{ij} x_j$
  - $\underline{y} = \underline{x}\underline{\underline{A}} = \tilde{\underline{\underline{A}}}\underline{x}$
- operátorok szorzata vektorral:
  - legyen $\tilde{\underline{\underline{A}}}$ az az operátor, amit a $\tilde{\underline{\underline{A}}}$ mátrix reprezentál
  - ekkor: $\underline{\underline{x}}\underline{\underline{A}} = \tilde{\underline{\underline{A}}}\underline{\underline{x}}$
- bilineáris alak (szendvicselés):
  - $\forall \underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b}} : \underline{\underline{a}}\left(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{b}}\right) = \underline{\underline{b}}\left(\tilde{\underline{\underline{A}}}\underline{\underline{a}}\right) = \left(\underline{\underline{b}}\tilde{\underline{\underline{A}}}\right)\underline{\underline{a}} = \left(\underline{\underline{a}}\underline{\underline{A}}\right)\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{b}}\tilde{\underline{\underline{A}}}\underline{\underline{a}} = \underline{\underline{a}}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{b}}$

Operátorok sajátértékei és sajátvektorai:

- alapprobléma: $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{s}} = \lambda \underline{\underline{s}}$
- $\underline{\underline{s}}$-t $\underline{\underline{A}}$ sajátvektorának nevezzük
- λ-t $\underline{\underline{A}}$ sajátértékének
- $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{0}}$: mindig jó, triviális sajátvektor
- ha $\underline{\underline{s}}$ sajátvektora $\underline{\underline{A}}$-nak, akkor $\forall \alpha : \alpha \underline{\underline{s}}$ is az (valójában sajátirányról van szó)
- normált sajátvektor: $\left|\underline{\underline{s}}\right| = 1$

Mátrix sajátértéke:

- reprezentálva a problémát: $\underline{\underline{A}}\underline{v} = \lambda \underline{v}$
- ebből: $A_{kl} v_l = \lambda v_k$
- egy homogén lineáris egyenletrendszert kapunk: $$\begin{aligned} \left(A_{11} - \lambda\right) v_1 + A_{12} v_2 + A_{13} v_3 &= 0 \\ A_{21} v_1 + \left(A_{22} - \lambda\right) v_2 + A_{23} v_3 &= 0 \\ A_{31} v_1 + A_{32} v_2 + \left(A_{33} - \lambda\right) v_3 &= 0 \end{aligned}$$
- $\underline{v} = 0$ triviális megoldás
- $A_{kl} v_l - \lambda \delta_{kl} v_l = \left(A_{kl} - \lambda \delta_{kl}\right) v_l = B_{kl} v_l = 0$
- $\left(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}\right)\underline{v} = \underline{\underline{B}}\underline{v} = 0$

- $\underline{B} = \begin{pmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33}-\lambda \end{pmatrix}$
- akkor van nem triviális megoldása, ha a karakterisztikus polinom: $f(\lambda) = \det \underline{B} = 0$
- karakterisztikus egyenlet: $f(\lambda) = 0$
- ennek *n* darab komplex gyöke van, ezeket visszahelyettesítve Gauss-módszerrel megkapjuk a sajátvektorokat

2*2-es és 3*3-as mátrixok karakterisztikus egyenletei:

- $\mathrm{Sp}\,\underline{A} = \mathrm{Tr}\,\underline{A} = \sum_k A_{kk}$
- 2*2: $f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \mathrm{Sp}\,\underline{A} + \det \underline{A}$
  - biz.: $\begin{vmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda \end{vmatrix} = (A_{11}-\lambda)(A_{22}-\lambda) - A_{12}A_{21} =$
    $= \lambda^2 - (A_{11} - A_{22})\lambda + A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = \lambda^2 - \lambda \,\mathrm{Sp}\,\underline{A} + \det \underline{A}$
- 3*3: $f(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 \,\mathrm{Sp}\,\underline{A} + \lambda \,\mathrm{Sp}(\mathrm{adj}\underline{A}) - \det \underline{A}$

A sajátértékekből rekonstruálható az eredeti mátrix.

Ha egy lineáris operátort más bázisban reprezentálunk a sajátértékei ugyanazok lesznek.

- a karakterisztikus egyenlet együtthatói invariáns mennyiségek

Valós szimmetrikus és komplex hermitikus mátrix (teljesül, hogy $\underline{A}^* = \underline{\widetilde{A}}$) sajátértékei valósak:

- $\underline{A}\underline{s} = \lambda \underline{s}$
- ebből: $\underline{\widetilde{A}}\underline{s}^* = \underline{A}^* \underline{s}^* = \lambda^* \underline{s}^*$
- $\lambda \underline{s}\underline{s}^* = \underline{s}^* \underline{A}\underline{s} = \underline{s}\underline{\widetilde{A}}\underline{s}^* = \lambda^* \underline{s}\underline{s}^*$
- tehát: $(\lambda - \lambda^*)|\underline{s}|^2 = 0$, amiből λ valós vagy a triviális megoldást kapjuk

Ha $\underline{A} = \underline{\widetilde{A}}$, és $\lambda_k \neq \lambda_l$: $s^{(k)} s^{(l)} = 0$:

- $\lambda_k \underline{s}^{(k)} \underline{s}^{(l)} = \underline{s}^{(l)} \underline{A}\underline{s}^{(k)} = \underline{s}^{(k)} \underline{\widetilde{A}}\underline{s}^{(l)} = \underline{s}^{(k)} \underline{A}\underline{s}^{(l)} = \lambda_l \underline{s}^{(k)} \underline{s}^{(l)}$
- ebből: $(\lambda_k - \lambda_l) s^{(k)} s^{(l)} = 0$
- mivel $\lambda_k \neq \lambda_l$: $s^{(k)} s^{(l)} = 0$

Baloldali sajátérték-probléma:

- mátrixok szorzása balról vektorral: $a_l A_{lk} = b_k$
- ez ekvivalens azzal, hogy: $\widetilde{A}_{kl} a_l = b_k$
- ez alapján definiálható az operátorok szorzása balról vektorral: $\underline{\underline{a}}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{\widetilde{A}}}\underline{\underline{a}}$, ahol $\underline{\underline{\widetilde{A}}}$ az az operátor, amit az $\underline{\widetilde{A}}$ mátrix reprezentál
- a baloldali sajátérték-probléma: $\underline{\underline{v}}\underline{\underline{A}} = \lambda \underline{\underline{A}}$, reprezentálva: $\underline{v}\underline{A} = \lambda \underline{A}$
- a baloldali sajátérték-probléma megegyezik a transzponált mátrix jobboldali sajátérték-problémájával
- a sajátértékek mindkét problémánál ugyanazok
- szimmetrikus (önadjungált, hermitikus) mátrixok jobb- és baloldali sajátvektorai egybeesnek

A mátrixok fajtái:

1. $\underline{A} = \underline{A}^{+} = \underline{\tilde{A}}^{*}$ és a sajátértékek egyszeresek:

- a normált sajátvektorok *n* dimenziós ortonormált bázist alkotnak
- térjünk át erre a bázisra (főtengely-transzformáció, diagonalizálás):
  - $A_{ik} = \underline{\underline{s}}^{(i)} \underline{\underline{A}}\underline{\underline{s}}^{(k)} = \lambda_k \underline{\underline{s}}^{(i)} \underline{\underline{s}}^{(k)} = \lambda_k \delta_{ik}$
  - $\underline{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$
- minden mátrix felbontható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegére
  - a szimmetrikus nyújtja a tengelyeket
  - az antiszimmetrikus vektorszoroz
- a jobb- és baloldali sajátértékek egybeesnek

2. $\underline{A} = \underline{A}^{+} = \underline{\tilde{A}}^{*}$ de a sajátértékek többszörösek:

- ha $\underline{\underline{s}}^{(k)}$ és $\underline{\underline{s}}^{(l)}$ ($k \neq l$) azonos sajátértékhez tartozó sajátvektorok, akkor $\alpha \underline{\underline{s}}^{(k)} + \beta \underline{\underline{s}}^{(l)}$ is sajátvektor és ugyanahhoz a sajátértékhez tartozik, mint $\underline{\underline{s}}^{(k)}$ és $\underline{\underline{s}}^{(l)}$
  - $\underline{\underline{A}}\left(\alpha \underline{\underline{s}}^{(k)} + \beta \underline{\underline{s}}^{(l)}\right) = \alpha \underline{\underline{A}}\underline{\underline{s}}^{k} + \beta \underline{\underline{A}}\underline{\underline{s}}^{(l)} = \lambda\left(\alpha \underline{\underline{s}}^{(k)} + \beta \underline{\underline{s}}^{(l)}\right)$
- n darab ugyanazon sajátértékhez tartozó sajátvektor n dimenziós saját-alteret alkot
- egy sajátértékhez minimum egy 1 dimenziós saját altér tartozik
- ekkor kiválaszthatok a saját altérből lineárisan független egységvektorokat, úgy, hogy a többi sajátvektorral ortonormált bázist alkossanak

3. $\underline{A} \neq \underline{A}^{+} = \underline{\tilde{A}}^{*}$ és a sajátértékek egyszeresek:

- ekkor nem ortonormált, esetleg komplex elemű bázist kapunk
- a jobb és baloldali sajátértékek reciprok-vektorrendszert alkotnak:
  - legyen $\underline{A}\underline{u} = \lambda \underline{u}$ és $\underline{v}\underline{A} = \lambda \underline{v}$
  - $\lambda_k \underline{v}^{(l)} \underline{u}^{(k)} = \underline{v}^{(l)} \underline{A}\underline{u}^{(k)} = \lambda_l \underline{v}^{(l)} \underline{u}^{(k)}$
  - $\left(\lambda_k - \lambda_l\right)\left(\underline{v}^{(l)} \underline{u}^{(k)}\right) = 0$
  - ha $\lambda_k \neq \lambda_l$ (ebben az esetben egyenértékű azzal, hogy $k \neq l$): $\underline{v}^{(l)} \underline{u}^{(k)} = 0$
  - a sajátvektorok hosszát választhatom úgy, hogy: $\underline{v}^{k} \underline{u}^{k} = 0$
  - ekkor: $\underline{v}^{(l)} \underline{u}^{(k)} = \delta_{kl}$
- úgy kell őket normálni, hogy a fentiek teljesüljenek

4. $\underline{A} \neq \underline{A}^{+} = \underline{\tilde{A}}^{*}$ és a sajátértékek többszörösek:

- a mátrix egy tagjához hozzáadunk ε-t, majd elvégezzük az $\varepsilon \to 0$ határátmenetet és megnézzük, hogy a sajátvektorok hova tartanak
- ha egy vektorhoz több sajátvektor tart, akkor nem egyszerű struktúrájú mátrixokról beszélünk (ilyen szimmetrikus mátrixoknál az ortonormáltság miatt nem volt)
- nem egyszerű struktúrájú mátrixoknál nincs annyi lineárisan független sajátvektor ahány dimenziós a tér, tehát ezek nem definiálnak bázist
- a nem egyszerű struktúrájú mátrixok nillpotens mátrixot ($\underline{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$) tartalmaznak

- egyébként a saját altérből kiválaszthatók úgy bal- és jobboldali sajátvektorok, hogy egy ferdeszögű bázis alakuljon ki a reciprok vektorrendszerével

inverzmátrix sajátvektorai:

- ha $\underline{C}\underline{s} = \lambda \underline{s}$, akkor $\underline{C}^{-1}\underline{s} = \frac{1}{\lambda}\underline{s}$

Projektorfelbontás:

- legyen $\underline{A}\underline{u} = \lambda \underline{u}$ és $\underline{v}\underline{A} = \lambda \underline{v}$
- $\underline{P}^{(k)} = \underline{u}^{(k)} \circ \underline{v}^{(k)}$ projektorok
- $\underline{P}^{(k)}\underline{P}^{(l)} = \left(\underline{u}^{(k)} \circ \underline{v}^{(k)}\right)\left(\underline{u}^{(l)} \circ \underline{v}^{(l)}\right) = \left(\underline{u}^{(l)}\underline{v}^{(k)}\right)\left(\underline{u}^{(k)} \circ \underline{v}^{(l)}\right) = \delta_{kl}\left(\underline{u}^{(k)} \circ \underline{v}^{(l)}\right) = \delta_{kl}\underline{P}^{(k)}$
  (ortogonális projektorrendszert alkotnak)
- $\sum_k \underline{P}^{(k)} = \underline{E}$
- legyen $\underline{M} = \sum_k \lambda_k \underline{P}^{(k)} = \sum_k \lambda_k \left(\underline{u}^{(k)} \circ \underline{v}^{(k)}\right)$
- $\underline{M}\underline{u}^{(l)} = \sum_k \lambda_k \left(\underline{u}^{(k)} \circ \underline{v}^{(k)}\right)\underline{u}^{(l)} = \sum_k \lambda_k \underline{u}^{(k)}\delta_{kl} = \lambda_l \underline{u}^{(l)}$
- $\underline{\tilde{M}} = \sum_k \lambda_k \left(\underline{v}^{(k)} \circ \underline{u}^{(k)}\right)$
- $\underline{\tilde{M}}\underline{v}^{(l)} = \sum_k \lambda_k \left(\underline{v}^{(k)} \circ \underline{u}^{(k)}\right)\underline{v}^{(l)} = \sum_k \lambda_k \underline{v}^{(k)}\delta_{kl} = \lambda_l \underline{v}^{(l)}$
- ebből: $\underline{M} = \underline{A}$
- $\underline{A}^{-1} = \sum_k \frac{1}{\lambda_k} P^{(k)}$
- ha egybeesnek a sajátértékek (egyszerű struktúrájú mátrixoknál) a sajátvektorok nem egyértelműek, de egy saját altérhez tartozó projektorok összege igen

Mátrixfüggvények:

- $\underline{A} = \sum_k \lambda_k \underline{P}^{(k)}$ és $\underline{P}^{(k)}\underline{P}^{(l)} = \delta_{kl}\underline{P}^{(k)}$
- $\underline{A}^2 = \left(\sum_k \lambda_k \underline{P}^{(k)}\right)\left(\sum_l \lambda_l \underline{P}^{(l)}\right) = \sum_k \lambda_k^2 \underline{P}^{(k)}$
- teljes indukcióval: $\underline{A}^n = \sum_k \lambda_k^n \underline{P}^{(k)}$ (a sajátvektorok maradnak, a sajátértékek vele hatványozódnak)
- $n = 0$ -ra: $\underline{A}^0 = \sum_k \lambda_k^0 \underline{P}^{(k)} = \sum_k \underline{P}^{(k)} = \underline{E}$
- polinomokra: $p(x) = \alpha x^N + \beta x^{N-1} + \ldots + \mu x + \nu$ -ből
  $$p(\underline{A}) = \alpha \underline{A}^N + \beta \underline{A}^{N-1} + \ldots + \mu \underline{A} + \nu =$$
  $$= \alpha \sum_k \lambda_k^N \underline{P}^{(k)} + \beta \sum_k \lambda_k^{N-1} \underline{P}^{(k)} + \ldots + \mu \sum_k \lambda_k \underline{P}^{(k)} + \nu =$$
  $$= \sum_k \left(\alpha\lambda_k^N + \beta\lambda_k^{N-1} + \ldots + \mu\lambda_k + \nu\right)\underline{P}^{(k)} = \sum_k p(\lambda_k)\underline{P}^{(k)}$$
- speciális eset: $p(x) = f(x)$: $f(\underline{A}) = \sum_k f(\lambda_k)\underline{P}^{(k)} = 0$

- Cayley-Hamilton tétel: Minden mátrix kielégíti a saját karakterisztikus egyenletét. (Nem egyszerű struktúrájú mátrixokra is igaz, de ezt nem bizonyítjuk.)
- Hatványsorokra ($F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$), ha $F(x)$ λ_k -kban értelmezve van:

$$F(\underline{A})=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \underline{A}^n = \sum_k F(\lambda_k) P^{(k)}$$

Tehetetlenségi nyomaték

Ha egy merev test $\underline{\omega}$ forgatónyomatékkal forog mekkora lesz a perdülete?

- egy pontra: $\underline{\underline{N}}^{(i)} = \underline{r}^{(i)} \times m_i \underline{v}^{(i)}$
- a testre: $\underline{\underline{N}} = \sum_i \underline{r}^{(i)} \times m_i \underline{v}^{(i)} = \sum_i m_i \underline{r}^{(i)} \times \left(\underline{\omega} \times \underline{r}^{(i)}\right) = \sum_i m_i \left(\underline{\omega r}^{(i)2} - \left(\underline{r}^{(i)} \underline{\omega}\right) \underline{r}^{(i)}\right) = \underline{\underline{\Theta\omega}}$
- $\underline{\underline{\Theta}}$ lineáris operátor, $\underline{\Theta}$ szimmetrikus mátrix
- $\underline{\underline{\Theta}} = \sum_i \left(m_i \underline{r}^{(i)2} \underline{\underline{E}} - \underline{r}^{(i)} \circ \underline{r}^{(i)}\right)$
- $E_f = \sum_i \frac{1}{2} m_i \underline{v}^{(i)2} = \frac{1}{2} \sum_i \left(\underline{\omega}^2 \underline{r}^{(i)2} - \left(\underline{\omega r}^{(i)}\right)^2\right) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\omega\Theta\omega}}$
- főtengelyrendszerben: $\underline{\Theta}^f = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix}$
- Θ_{ik} : ha $i = k$, akkor fő tehetetlenségi nyomaték, ha nem, akkor deviációs nyomaték
- $\underline{n}$ irányú tengelyre: $\Theta^{(\underline{n})} = \underline{\underline{n\Theta n}}$
- ha $\underline{\omega} = \sum_k \underline{\underline{\omega}}_k$, akkor $\underline{N} = \sum_k \Theta^{\left(\underline{e}^{(k)}\right)} \underline{\underline{\omega}}_k$, de $E_f \neq \sum_k \Theta^{\left(\underline{e}^{(k)}\right)} \underline{\underline{\omega}}_k^2$ a kétszeres szorzatok miatt

Forgatások, áttérés másik Descartes-rendszerbe

Forgatások:

- lineáris operátorok: $\underline{r}' = \underline{\underline{\vartheta r}}$
- $\forall \underline{a}, \underline{b} : \left(\underline{\underline{\vartheta a}}\right)\left(\underline{\underline{\vartheta b}}\right) = \underline{\underline{ab}}$
- ebből következik, hogy a vektorok hosszát megtartja
- $\forall \underline{a}, \underline{b} : \left(\underline{\underline{a\tilde{\vartheta}}}\right)\left(\underline{\underline{\vartheta b}}\right) = \underline{\underline{ab}}$
- ebből: $\underline{\underline{\tilde{\vartheta}\vartheta}} = \underline{E}$ (a forgatás operátora ortogonális operátor)
- a forgásmátrix ortogonális mátrix: $\underline{\vartheta}^{-1} = \underline{\tilde{\vartheta}}$
- $\det \underline{\vartheta} = 1$
- $\underline{\tilde{\vartheta}}\underline{\vartheta} = \underline{\vartheta}\underline{\tilde{\vartheta}} = \underline{E}$
- $\sum_l \tilde{\vartheta}_{il} \vartheta_{lk} = \sum_l \vartheta_{il} \tilde{\vartheta}_{lk} = \delta_{ik}$
- $\sum_l \vartheta_{li} \vartheta_{lk} = \sum_l \vartheta_{il} \vartheta_{kl} = \delta_{ik}$
- a három oszlopvektor és a három sorvektor ortonormált bázist alkot

- $\underline{\vartheta} = \left(\underline{f}^{(1)} \;\middle|\; \underline{f}^{(2)} \;\middle|\; \underline{f}^{(3)} \right) = \begin{pmatrix} \underline{g}^{(1)} \\ \hline \underline{g}^{(2)} \\ \hline \underline{g}^{(3)} \end{pmatrix}$
- $\underline{f}^{(k)}\underline{f}^{(l)} = \delta_{kl}$ és $\underline{g}^{(k)}\underline{g}^{(l)} = \delta_{kl}$

Áttérés egyik ortonormált bázisról a másikra:

- $r_i = \underline{r}\,\underline{e}^{(i)}$ és $\underline{r} = \sum_i r_i \underline{e}^{(i)}$
- $r_j' = \underline{r}\,\underline{e}^{(i)\prime}$ és $\underline{r} = \sum_j r_j' \underline{e}^{(j)\prime}$
- ebből: $r_j' = \sum_i r_i \underline{e}^{(i)} \underline{e}^{(j)\prime} = \sum_i \vartheta_{ij} r_i$
- ahol: $\underline{r}' = \underline{\vartheta}\,\underline{r}$ és $\vartheta_{ij} = \underline{e}^{(j)\prime} \underline{e}^{(i)}$
- $\left(\underline{\vartheta}\,\underline{\tilde{\vartheta}}\right)_{ij} = \sum_k \vartheta_{ik}\tilde{\vartheta}_{kj} = \sum_k \vartheta_{ik}\vartheta_{jk} = \sum_k \underline{e}^{(k)\prime 2} \underline{e}^{(i)} \underline{e}^{(j)} = \underline{e}^{(i)} \underline{e}^{(j)} = \delta_{ij}$
- ebből: $\underline{\tilde{\vartheta}} = \underline{\vartheta}^{-1}$, vagyis $\underline{\vartheta}\,\underline{\tilde{\vartheta}} = \underline{\tilde{\vartheta}}\,\underline{\vartheta} = \underline{E}$
- $\underline{\vartheta}$ a két koordinátarendszer viszonyára jellemző ortogonális mátrix
- minden passzív szemléletű bázisforgatás megfelel egy ellenkező irányú aktív szemléletű vektorforgatásnak
- $\underline{r} = \underline{\tilde{\vartheta}}\,\underline{r}' = \underline{\vartheta}^{-1}\underline{r}'$

mátrixok reprezentálása különböző bázisokban:

- $\underline{A}\,\underline{r} = \underline{t}$ és $\underline{A}'\,\underline{r}' = \underline{t}'$
- ebből: $\underline{A}'\,\underline{\vartheta}\,\underline{r} = \underline{\vartheta}\,\underline{t}$
- tehát: $\underline{t} = \underline{\vartheta}^{-1}\underline{A}'\,\underline{\vartheta}\,\underline{r} = \underline{\tilde{\vartheta}}\,\underline{A}'\,\underline{\vartheta}\,\underline{r}$
- ebből: $\underline{A} = \underline{\tilde{\vartheta}}\,\underline{A}'\,\underline{\vartheta}$
- és: $\underline{A}' = \underline{\vartheta}\,\underline{A}\,\underline{\tilde{\vartheta}}$
- $A_{mn}' = \sum_{ij} \vartheta_{mi} A_{ij} \tilde{\vartheta}_{jn} = \sum_{ij} \vartheta_{mi}\vartheta_{nj} A_{ij}$

invariáns mennyiségek (karakterisztikus polinom együtthatói):

- $\det \underline{A}$:
  - $\det \underline{A}' = \det \underline{\vartheta} \det \underline{A} \det \underline{\tilde{\vartheta}} = \det \underline{A}$
- $\mathrm{Sp}\,\underline{A}$:
  - $\mathrm{Sp}\left(\underline{A}\,\underline{B}\right) = \sum_i \left(\underline{A}\,\underline{B}\right)_{ii} = \sum_i A_{ij} B_{ji} = \sum_j \left(\underline{B}\,\underline{A}\right)_{jj} = \mathrm{Sp}\left(\underline{B}\,\underline{A}\right)$
  - $\mathrm{Sp}\,\underline{A}' = \mathrm{Sp}\left(\underline{\vartheta}\,\underline{A}\,\underline{\tilde{\vartheta}}\right) = \mathrm{Sp}\left(\underline{\tilde{\vartheta}}\,\underline{\vartheta}\,\underline{A}\right) = \mathrm{Sp}\,\underline{A}$
- $\mathrm{Sp}\left(\mathrm{adj}\,\underline{A}\right)$

főtengely transzformáció szimmetrikus mátrixokra ($\underline{\tilde{A}} = \underline{A}$):

- térjünk át a mátrix normált sajátvektorai által meghatározott ortonormált bázisra

- $$\underline{A}' = \begin{pmatrix} \underline{s}^{(1)} \\ \hline \underline{s}^{(2)} \\ \hline \underline{s}^{(3)} \end{pmatrix} \underline{A} \left(\underline{s}^{(1)} \middle| \underline{s}^{(2)} \middle| \underline{s}^{(3)} \right) = \underline{\vartheta}\underline{A}\underline{\vartheta}^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} \underline{s}^{(1)} \\ \hline \underline{s}^{(2)} \\ \hline \underline{s}^{(3)} \end{pmatrix} \left(\lambda_1 \underline{s}^{(1)} \middle| \lambda_2 \underline{s}^{(2)} \middle| \lambda_3 \underline{s}^{(3)} \right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

nem szimmetrikus mátrixok esetében:

- $\underline{A}\underline{s}^j = \lambda \underline{s}^j$ és $\underline{s}^b \underline{A} = \underline{\tilde{A}}\underline{s}^b = \lambda \underline{s}^b$
- úgy kell „normálni”, hogy: $\underline{s}^{j(l)} \underline{s}^{b(k)} = \delta_{lk}$ teljesüljön
- ekkor áttérve a sajátértékek által meghatározott ferdeszögű bázisra:
- $$\underline{A}' = \begin{pmatrix} \underline{s}^{b(1)} \\ \hline \underline{s}^{b(2)} \\ \hline \underline{s}^{b(3)} \end{pmatrix} \underline{A} \left(\underline{s}^{j(1)} \middle| \underline{s}^{j(2)} \middle| \underline{s}^{j(3)} \right) = \underline{C}\underline{A}\underline{C}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

mátrix hatványozása:

- $$\underline{C}\underline{A}^n \underline{C}^{-1} = \left(\underline{C}\underline{A}\underline{C}^{-1} \right)^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix}$$
- ebből: $\underline{A}^n = \underline{C}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix} \underline{C}$

Kvadratikus alakok

kétváltozós kvadratikus alakok (síkbeli objektumok):

- általánosan fölírva: $\alpha x^2 + \beta xy + \chi y^2 + \delta x + \varepsilon y + c = 0$
- legyen $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\underline{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \chi \end{pmatrix} = \underline{\tilde{A}}$ és $\underline{b} = \begin{pmatrix} \delta \\ \varepsilon \end{pmatrix}$
- ekkor az egyenlet így módosul: $\underline{x}\underline{A}\underline{x} + \underline{b}\underline{x} + c = 0$
- azért választhattam $\underline{A}$-t szimmetrikusnak, mert az antiszimetrikus mátrixokra $\underline{x}\underline{A}\underline{x} = 0$, tehát csak $\underline{A}$ szimmetrikus része számít, ami a fenti mátrix
- végezzünk főtengely transzformációt $\underline{A}$-n: $\underline{\vartheta}\underline{A}\underline{\tilde{\vartheta}} = \underline{A}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, ahol $\underline{\vartheta} = \begin{pmatrix} \underline{s}^{(1)} \\ \underline{s}^{(2)} \end{pmatrix}$

  (a sajátvektorokat úgy választom ki, hogy jobbrendszert alkossanak)
- módosítsuk az egyenletet: $\underline{x}\underline{\tilde{\vartheta}}\underline{\vartheta}\underline{A}\underline{\tilde{\vartheta}}\underline{\vartheta}\underline{x} + \underline{b}\underline{\tilde{\vartheta}}\underline{\vartheta}\underline{x} + c = 0$
- legyen $\underline{x}' = \underline{\vartheta}\underline{x}$, $\underline{b}' = \underline{\vartheta}\underline{b}$ és $c' = c$ (elforgattuk az x, y koordinátarendszert)

- $\underline{x}'\underline{A}'\underline{x}' + \underline{b}'\underline{x}' + c' = 0$
- tegyük fel hogy $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$
  - ha mindkét sajátérték 0 nem kvadratikus, hanem lineáris alak (ha $\delta = \varepsilon = 0$, akkor skaláris alak), ha csak az egyik 0 (x és y szimmetriája miatt elég megvizsgálni az egyik esetet):
    - $\lambda_1 x'^2 + \delta' x + \varepsilon' y' + c' = 0$
    - $\lambda_1 \left(x' - \frac{\delta'}{2} \right)^2 + \varepsilon' y' + c' - \frac{\delta'^2}{4} = 0$
    - $\lambda_1 \left(x' - \frac{\delta'}{2} \right)^2 + \varepsilon' \left(y' + \frac{c'}{\varepsilon'} - \frac{\delta'^2}{4\varepsilon'} \right) = 0$ (ha $\varepsilon' = 0$ egyel kevesebb dimenziós probléma)
    - legyen $x'' = \left(x' - \frac{\delta'}{2} \right)$ és $y'' = \left(y' + \frac{c'}{\varepsilon'} - \frac{\delta'^2}{4\varepsilon'} \right)$ (eltoltuk a koordinátarendszert)
    - $\lambda_1 x''^2 + \varepsilon' y'' = 0$
    - $y'' = \frac{\lambda_1}{\varepsilon'} x''^2$
- $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \delta' x + \varepsilon' y + c' = 0$
- $\lambda_1 \left(x' + \frac{\delta'}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{\varepsilon'}{2\lambda_2} \right)^2 - \frac{\delta'^2}{4\lambda_1^2} - \frac{\varepsilon'^2}{4\lambda_2^2} + c' = 0$
- legyen $x'' = x' + \frac{\delta'}{2\lambda_1}$, $y'' = y' + \frac{\varepsilon'}{2\lambda_2}$ és $c'' = \frac{\delta'^2}{4\lambda_1^2} + \frac{\varepsilon'^2}{4\lambda_2^2} - c'$ (eltoltuk az x, y koordinátarendszert)
- $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = c''$
- tegyük fel, hogy $c'' \neq 0$:
  - ha $c'' = 0$:
    - $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = 0$
    - ha $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, akkor $x'' = y'' = 0$
    - ha $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, akkor $|\lambda_1| x''^2 = |\lambda_2| y''^2$
- $\pm \left(\frac{x''}{\sqrt{\frac{c''}{\lambda_1}}} \right)^2 \pm \left(\frac{y''}{\sqrt{\frac{c''}{\lambda_2}}} \right)^2 = 1$
- legyen $\sqrt{\frac{c''}{\lambda_1}} = p$ és $\sqrt{\frac{c''}{\lambda_2}} = q$:
- $\pm \left(\frac{x''}{p} \right)^2 \pm \left(\frac{y''}{q} \right)^2 = 1$ (kanonikus egyenlet)
- alakzatok:
  - ++: ellipszis ($c'' = 0$ határesetben pont)
  - -+: hiperbola ($c'' = 0$ határesetben két egymást metsző egyenes)

- --: nincs ilyen
- lineáris alak: egyenes
- skaláris alak: pont
- egyik sajátérték nulla: parabola

háromváltozós kvadratikus alakok (térbeli objektumok) kanonikus egyenlete:

- $\pm\left(\frac{x''}{p}\right)^2 \pm\left(\frac{y''}{q}\right)^2 \pm\left(\frac{z''}{r}\right)^2 = 1$ jön ki
- alakzatok:
  - +++: ellipszoid (ha két sajátérték egybeesik, akkor forgási ellipszoid) ($c'' = 0$ határesetben pont)
  - ++-: 2 köpenyű elliptikus hiperboloid ($c'' = 0$ határesetben kúp) (ha két sajátérték egybeesik, akkor forgási elliptikus hiperboloid vagy forgáskúp)
  - +--: 1 köpenyű elliptikus hiperboloid ($c'' = 0$ határesetben kúp) (ha két sajátérték egybeesik, akkor forgási elliptikus hiperboloid vagy forgáskúp)
  - ---: nincs ilyen
  - lineáris alak: egyenes
  - skaláris alak: pont
  - egyik sajátérték nulla: elliptikus paraboloid

Minden differenciálható felület egy adott pontjának megfelelően kicsi környezetében másodrendű felülettel közelíthető.

Ellipszisek és hiperbolák:

- a fókuszpontok távolsága legyen c
- az alakzat generálásánál használt állandó (ellipszisnél a fókuszpontoktól való távolság összege, hiperboláknál különbségük) legyen a
- ecccentritás: $\varepsilon = \frac{c}{a}$
  - $\varepsilon < 1$: ellipszis
  - $\varepsilon > 1$: hiperbola
- a sík minden pontján átmegy egy ellipszis és egy ugyanazon fókuszpontokhoz tartozó hiperbola és ezek merőlegesek egymásra
- ezek meghatározzák az adott pont távolságát a fókuszpontoktól

Egy ponttól és egy egyenestől megadott arányú távolságra lévő pontok:

- egyenestől való távolság legyen cx
- ponttól való távolság legyen dx
- eccentritás: $\varepsilon = \frac{d}{c}$
  - $\varepsilon < 1$: ellipszis
  - $\varepsilon = 1$: parabola
  - $\varepsilon > 1$: hiperbola

Megjegyzés: a sok szabadsági fokú rendszerek rezgéseinek leírását lásd a Hullámok és rezgések specinél

Vektorváltozós skalárfüggvények és skalárváltozós vektorfüggvények differenciálása

Skalárváltozós vektorfüggvények ($\underline{\underline{r}}(t)$):

- példa: térgörbe ívhossz szerinti paraméterezése ($\underline{\underline{r}}(s)$):
  - s : ívhossz
  - $d\underline{\underline{r}} = \underline{\underline{r}}(s+ds) - \underline{\underline{r}}(s)$
  - ebből: $|d\underline{\underline{r}}| = |ds|$ (a görbe minden pontjában közelíthető egy egyenessel)
- K koordinátarendszerben: $\underline{\underline{r}} \to \underline{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$, t marad, tehát: $\underline{\underline{r}}(t) \to \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ r_3(t) \end{pmatrix}$
- például: helyvektor az idő függvényében

Differenciálásuk:

- $\underline{\underline{r}}'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \underline{\underline{r}}}{\Delta t}$, ahol $\Delta \underline{\underline{r}} = \underline{\underline{r}}(t + \Delta t) - \underline{\underline{r}}(t)$
- legyen $\underline{\underline{r}}' = \underline{\underline{v}}$, ekkor $\underline{v} = \begin{pmatrix} r_1' \\ r_2' \\ r_3' \end{pmatrix}$, vagyis $v_i = r_i'$
- $(\underline{a}\underline{b})' = \sum_i (a_i b_i)' = \sum_i a_i b_i' + a_i' b_i = \underline{a}\underline{b}' + \underline{b}\underline{a}'$
- ugyanígy igazolható: $(\underline{a} \times \underline{b})' = \underline{a}' \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{b}'$ és $(\lambda(t)\underline{a})' = \lambda'\underline{a} + \lambda\underline{a}'$ is

térgörbék tulajdonságai:

- egységvektor deriváltja rá merőleges egységvektor:
  - $|\underline{\underline{e}}| = 1$-ből $\underline{\underline{e}}^2 = 1$
  - deriválva $2\underline{\underline{e}}'\underline{\underline{e}} = 0$, tehát: $\underline{\underline{e}} \perp \underline{\underline{e}}'$
- $\underline{\underline{r}}'(s) = \underline{\underline{e}}$: érintő
- $\underline{\underline{e}}'\underline{\underline{e}} = 0$ és $\underline{\underline{e}}' = \underline{\underline{r}}''(s) = |\underline{\underline{e}}'|\underline{\underline{n}}$ ($|\underline{\underline{n}}| = 1$)
- $|\underline{\underline{e}}'|$: görbület
- $\underline{\underline{n}}$: normálvektor, normális egységvektor
- $\underline{\underline{e}}$ és $\underline{\underline{n}}$ által kifeszített sík: simulósík
- $R = \dfrac{1}{|\underline{\underline{e}}'|}$: görbületi sugár

- R sugarú kör: simulókör
- $\underline{\underline{e}} \times \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{b}}$ ($|\underline{\underline{b}}| = 1$): binormális egységvektor
- $\underline{\underline{b}}'(s)$-ből torzió képezhető (síkgörbére $\underline{\underline{b}}'(s) = 0$)

Vektorváltozós skalárfüggvény ($\phi(\underline{\underline{r}})$):

- például: hőmérséklet vagy potenciál a hely függvényében
- $\phi(\underline{r}) = \phi(x, y, z)$
- szintfelületekkel szemléltethető a térben (amiken ϕ állandó), példák:
  - $\phi = \underline{\underline{a}}\underline{\underline{r}}$: $\underline{\underline{a}}$-ra merőleges felületek
  - $\phi = \underline{\underline{r}}^2 - \underline{\underline{r}}_0^2$: $\underline{\underline{r}}_0$ középpontú gömbök

iránymenti derivált:

- $\Delta\phi = \phi(\underline{\underline{r}} + \Delta\underline{\underline{r}}) - \phi(\underline{\underline{r}})$
- legyen $\Delta\underline{\underline{r}} = \underline{\underline{e}}\Delta s$ ($|\underline{\underline{e}}| = 1$), ekkor $|\Delta\underline{\underline{r}}| = \Delta s$
- $\dfrac{\Delta\phi}{\Delta s} = \dfrac{\phi(\underline{\underline{r}} + \underline{\underline{e}}\Delta s) - \phi(\underline{\underline{r}})}{\Delta s}$
- $\phi'_{(\underline{\underline{e}})}(\underline{\underline{r}}) = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\phi(\underline{\underline{r}} + \underline{\underline{e}}\Delta s) - \phi(\underline{\underline{r}})}{\Delta s}$

gradiens:

- $\Delta\phi = \underline{\underline{m}}(\underline{\underline{r}})\Delta\underline{\underline{r}} + \underline{\underline{\varepsilon}}\Delta\underline{\underline{r}}$, ahol $\lim\limits_{\Delta\underline{\underline{r}} \to 0} \underline{\underline{\varepsilon}} = 0$: $\underline{\underline{m}}(\underline{\underline{r}}) = \operatorname{grad}\phi(\underline{\underline{r}})$
- példa: $\phi = \underline{\underline{r}}^2$-re $\Delta\phi = (\underline{\underline{r}} + \Delta\underline{\underline{r}})^2 - \underline{\underline{r}}^2 = 2\underline{\underline{r}}\Delta\underline{\underline{r}} + \Delta\underline{\underline{r}}^2$, tehát: $\operatorname{grad}\phi = 2\underline{\underline{r}}$
- $d\phi = d\underline{\underline{r}} \operatorname{grad}\phi = |d\underline{\underline{r}}| |\operatorname{grad}\phi| \cos\alpha$
- adott $d\underline{\underline{r}}$-re $d\phi$ akkor maximális, ha $\alpha = 0$, vagyis $d\underline{\underline{r}} \| \operatorname{grad}\phi$
- ebből $\operatorname{grad}\phi$ iránya ϕ leggyorsabb növekedési iránya
- ha $\alpha = 0$, akkor $|\operatorname{grad}\phi| = \dfrac{d\phi}{|d\underline{\underline{r}}|}$, azaz $\operatorname{grad}\phi$ nagysága a leggyorsabb növekedési irányban vett iránymenti derivált
- a kétféle derivált kapcsolata: $\phi'_{(\underline{\underline{e}})}(\underline{\underline{r}}) = \dfrac{d\phi}{|d\underline{\underline{r}}|} = \underline{\underline{e}} \operatorname{grad}\phi$
- ha $d\underline{\underline{r}} \perp \operatorname{grad}\phi$, akkor $d\phi = 0$ és $\phi'_{(\underline{\underline{n}})}(\underline{\underline{r}}) = 0$, tehát a gradiens mindig merőleges a szintfelületre
- ha $\phi = f(r)$, ahol $r = |\underline{\underline{r}}|$: $\operatorname{grad}\phi = \dfrac{\underline{\underline{r}}}{r} f'(r)$
- skalármező gradiense vektormező, de nem minden vektormező írható fel skalármező gradienseként
- deriválási szabályok:
  - $\operatorname{grad}(\lambda\phi + \delta\psi) = \lambda \operatorname{grad}\phi + \delta \operatorname{grad}\psi$

- $$\operatorname{grad}(\phi\psi) = \phi(\underline{\underline{r}} + d\underline{\underline{r}})\psi(\underline{\underline{r}} + d\underline{\underline{r}}) - \phi(\underline{\underline{r}})\psi(\underline{\underline{r}}) =$$ $$= \psi(\underline{\underline{r}} + d\underline{\underline{r}})\left(\phi(\underline{\underline{r}} + d\underline{\underline{r}}) - \phi(\underline{\underline{r}})\right) + \phi(\underline{\underline{r}})\left(\psi(\underline{\underline{r}} + d\underline{\underline{r}}) - \psi(\underline{\underline{r}})\right) = \phi \operatorname{grad}\psi + \psi \operatorname{grad}\phi$$

a gradiens reprezentálása Descartes-rendszerben:

- $\Delta\phi = \phi(\underline{r} + \Delta\underline{r}) - \phi(\underline{r}) = \underline{m}(\underline{r})\Delta\underline{r} + \underline{\varepsilon}(\underline{r}, \Delta\underline{r})\Delta\underline{r}$, ahol $\Delta\underline{r} \to 0 \Rightarrow \varepsilon \to 0$
- $\operatorname{grad}\phi = \underline{m}(\underline{r})$
- $$\Delta\phi = \phi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \phi(x, y, z) =$$ $$= m_1\Delta x + m_2\Delta y + m_3\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z$$
- $\operatorname{grad}\phi = (m_1, m_2, m_3)$
- legyen $\Delta y = \Delta z = 0$
- ekkor: $m_1 + \varepsilon_1 = \dfrac{\phi(x + \Delta x, y, z) - \phi(x, y, z)}{\Delta x}$
- ebből: $m_1 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\phi(x + \Delta x, y, z) - \phi(x, y, z)}{\Delta x}$
- tehát: $m_1 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left.\dfrac{\Delta\phi}{\Delta x}\right|_{\substack{y=\text{áll.}\\ z=\text{áll.}}} = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}$ parciális derivált
- $(\operatorname{grad}\phi)_i = \dfrac{\partial\phi}{\partial x_i} = \partial_i\phi$

A vonalintegrál

Vonalintegrál (vonal-menti integrál):

- adott G görbét (végpontjait nevezzük el A-val (kezdőpont) és B-vel (végpont)) i egyenlő (nem kell feltétlenül, csak az szükséges, hogy az egyes pontokkal az integrál kiszámításakor egyenletesen tartsunk egymáshoz) részre osztunk (az osztópontok koordinátáit $\underline{\underline{r}}^{(i)}$-vel jelölve)
- $\left(\int\limits_{A\,G}^{B} \underline{\underline{v}}(\underline{\underline{r}})\,d(\underline{\underline{r}}) = \right)\int\limits_{G} \underline{\underline{v}}(\underline{\underline{r}})\,d(\underline{\underline{r}}) = \lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{i} \underline{\underline{v}}\left(\underline{\underline{r}}^{(i)}\right)\Delta\underline{\underline{r}}^{(i)}$, ahol $\Delta\underline{\underline{r}}^{(i)} = \underline{\underline{r}}^{(i+1)} - \underline{\underline{r}}^{(i)}$
- példa: $W = \int\limits_G \underline{\underline{F}}(\underline{\underline{r}})\,d\underline{\underline{r}}$
- vonalintegrál zárt görbére: körintegrál
  - pld: $U = \oint\limits_G \underline{\underline{E}}\,d\underline{\underline{r}}$
- a görbe megadása $G = \underline{\underline{r}}(t)$ módon:

$$\int\limits_G \underline{\underline{v}}(\underline{\underline{r}})\,d\underline{\underline{r}} = \lim_{\Delta\underline{\underline{r}}\to\underline{\underline{0}}}\sum \underline{\underline{v}}(\underline{\underline{r}})\Delta\underline{\underline{r}} = \lim_{\Delta\underline{\underline{r}}\to\underline{\underline{0}}}\sum \underline{\underline{v}}(\underline{\underline{r}})\frac{\Delta\underline{\underline{r}}}{\Delta\underline{\underline{t}}}\Delta\underline{\underline{t}} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\sum \underline{\underline{v}}(\underline{\underline{r}}(t))\underline{\underline{r}}'(t)\Delta t = \int\limits_{t_0}^{t_1} \underline{\underline{v}}(\underline{\underline{r}}(t))\underline{\underline{r}}'(t)\,dt$$

Első gradiens-tétel:

- $\forall G : \int\limits_{\substack{A \\ G}}^{B} (\mathrm{grad}\,\phi)\, d\underline{\underline{r}} = \phi(B) - \phi(A)$
- bizonyítás: $\int\limits_{G} \mathrm{grad}\,\phi d\underline{\underline{r}} = \lim\limits_{\Delta \underline{\underline{r}} \to \underline{\underline{0}}} \sum \mathrm{grad}\,\phi \Delta \underline{\underline{r}} = \sum \Delta\phi = \phi(B) - \phi(A)$
- minden zárt görbére: $\oint \mathrm{grad}\,\phi d\underline{\underline{r}} = 0$
- potenciálos vektormező: $\exists \phi : \underline{\underline{v}}(\underline{\underline{r}}) = \mathrm{grad}\,\phi$
- konzervatív vektormező: $\oint \underline{\underline{v}}(\underline{\underline{r}})\, d\underline{\underline{r}} = 0$
- Egy vektormező, akkor és csakis akkor potenciálos, ha konzervatív
- bizonyítás ($\oint \underline{\underline{v}}(\underline{\underline{r}})\, d\underline{\underline{r}} = 0$):
  - $\forall A, B : \int\limits_{\substack{A \\ G}}^{B} \underline{\underline{v}}(\underline{\underline{r}})\, d\underline{\underline{r}} = \int\limits_{\substack{A \\ G'}}^{B} \underline{\underline{v}}(\underline{\underline{r}})\, d\underline{\underline{r}}$
  - $\forall \underline{\underline{r}}^* : \int\limits_{\underline{\underline{r}}_0}^{\underline{\underline{r}}^*} \underline{\underline{v}}(\underline{\underline{r}})\, d\underline{\underline{r}} = \phi(\underline{\underline{r}}*)$
  - $\phi(\underline{\underline{r}}^* + \Delta \underline{\underline{r}}^*) - \phi(\underline{\underline{r}}^*) = \int\limits_{\underline{\underline{r}}^*}^{\underline{\underline{r}}^* + \Delta \underline{\underline{r}}^*} \underline{\underline{v}}(\underline{\underline{r}})\, d\underline{\underline{r}} = \underline{\underline{v}}(\underline{\underline{r}}^*)\, \Delta \underline{\underline{r}}^*$
  - ebből: $\mathrm{grad}\,\phi = \underline{\underline{v}}(\underline{\underline{r}}^*)$
- ha $\phi(\underline{\underline{r}})$ a potenciálos energia egy vektormezőben (erőtérben), akkor:
  $\underline{\underline{F}}(\underline{\underline{r}}) = -\mathrm{grad}\,\phi(\underline{\underline{r}})$

Young-tétel:

- második parciális deriváltak:
  - legyen $f(x, y) = \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x}$, ekkor: $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$
  - legyen $g(x, y) = \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y}$, ekkor: $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}$
- $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}$, ha ezek a deriváltak léteznek és folytonosak
- ha $\underline{V} = \mathrm{grad}\,\phi$: $V_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ és $V_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}$
- tehát: $\frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x}$

Határozott integrál kiszámítása közelítő képletekkel:

- téglalapformula
- trapézformula
- parabolaformula
- a függvény érintett szakaszát belefoglaljuk egy ismert területű síkidomba, aztán véletlenszerűen generálunk pontokat (számpárok formájában) a síkidomból és elegendően sok után megnézzük, hogy mennyi esik be a függvény alá, az arányik az összes számpárral kiadják az integrál arányát a síkidomhoz képest

A rotáció

- ha $\underline{\underline{V}}\left(\underline{\underline{r}}\right)=\text{grad}\,\phi$: $\partial_1 V_2=\partial_2 V_1$, $\partial_1 V_3=\partial_3 V_1$ és $\partial_2 V_2=\partial_2 V_3$

$$\partial_2 V_3-\partial_3 V_2=0$$

- átrendezve: $\partial_3 V_1-\partial_1 V_3=0$

$$\partial_1 V_2-\partial_2 V_1=0$$

$$W_1=\partial_2 V_3-\partial_3 V_2$$

- legyen: $W_2=\partial_3 V_1-\partial_1 V_3$

$$W_3=\partial_1 V_2-\partial_2 V_1$$

- $\text{rot}\,\underline{V}=\underline{W}\left(\underline{r}\right)=\left(W_1,W_2,W_3\right)$ (rotáció, vagy örvényerősség)
- $\left(\text{rot}\,\underline{V}\right)_i=W_i=\sum_{jk}\varepsilon_{ijk}\partial_j V_k$
- ha $\underline{\underline{V}}\left(\underline{\underline{r}}\right)=\text{grad}\,\phi$: $\text{rot}\,\underline{V}=0$ (örvénymentesség)

A nabla-vektor (nabla-operátor):

- $\underline{\nabla}=\left(\partial_1,\partial_2,\partial_3\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$
- $\text{rot}\,\underline{V}=\underline{\nabla}\times\underline{V}$
- $\text{grad}\,\phi=\underline{\nabla}\phi$
- A Young-tétel miatt: $\underline{\nabla}\times\underline{\nabla}=0$
- $\text{rotgrad}\,\phi=\underline{\nabla}\times\left(\underline{\nabla}\phi\right)=\left(\underline{\nabla}\times\underline{\nabla}\right)\phi$

A rotáció szemléletes jelentése:

- legyen $\underline{\underline{V}}\left(\underline{\underline{r}}\right)=\underline{\underline{\omega}}\times\underline{\underline{r}}$ ahol $\underline{\underline{\omega}}$ adott
- $\underline{V}=\begin{pmatrix}\omega_2 x_3-\omega_3 x_2\\ \omega_3 x_1-\omega_1 x_3\\ \omega_1 x_2-\omega_2 x_1\end{pmatrix}$
- $\left(\text{rot}\,\underline{V}\right)_1=\partial_2 V_3-\partial_3 V_2=2\omega_1$
- hasonlóképpen: $\left(\text{rot}\,\underline{V}\right)_2=2\omega_2$ és $\left(\text{rot}\,\underline{V}\right)_3=2\omega_3$
- tehát: $\text{rot}\left(\underline{\omega}\times\underline{r}\right)=rot\underline{V}=2\underline{\omega}$
- a rotáció olyan mintha a vízfelületen a sebességet tekintve a kiinduló vektormezőnek, az egyes pontokban a jégtáblák forgását vizsgálnánk

példa a fizikai alkalmazásra:

- áram által keltett mágneses tér, ahol $\underline{j}$ az áramsűrűség
- $\underline{j}\left(\underline{r}\right)\sim\text{rot}\,\underline{B}\left(\underline{r}\right)$

egy érdekes vektormező (így viselkedik pld. a fürdőkádban a lefolyó víz):

- $\underline{V}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\underline{V}\underline{r} = 0$ és $|\underline{V}| = \frac{1}{|\underline{r}|}$
- origó középpontú körre: $\oint_O \underline{V} d\underline{r} = \sum |\underline{V}||\Delta \underline{r}| = \frac{1}{|R|} \sum |\Delta \underline{r}| = 2\pi$
- általánosan: $\oint \underline{V} d\underline{r} = 2\pi x$, ahol x-szer kerüljük meg az origót
- $(\mathrm{rot}\,\underline{V})_1 = (\mathrm{rot}\,\underline{V})_2 = 0$
- $(\mathrm{rot}\,\underline{V})_3 = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2) - 2x^2 + (x^2+y^2) - 2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$
- tehát $\mathrm{rot}\,\underline{V} = 0$
- ok: $\underline{V} = \mathrm{grad}\left(\mathrm{arctg}\frac{y}{x}\right)$ 2π erejéig határozatlan
- az örvénymentes vektormező potenciálos is

konzervativitás és örvénymentesség:

- legyen $\underline{V} = \begin{pmatrix} x + 0{,}000000001 \\ y \\ z \end{pmatrix}$
- $\mathrm{rot}\,\underline{V} \neq 0$, tehát $\exists G : \oint \underline{V} d\underline{r} \neq 0$ és $\underline{v} \neq \mathrm{grad}\,\phi$
- $\mathrm{rot}\,\underline{V} \approx 0$, tehát $\oint \underline{V} d\underline{r} \approx 0$ (a majdnem örvénymentes mező majdnem konzervatív)
- egy Δx és Δy oldalú (x_0, y_0) koordinátájú kis téglalapra:
- $\oint \underline{V} d\underline{r} \approx V_x \Delta x + V_y \Delta y - V_x \Delta x - V_y \Delta y$
- $\oint \underline{V} d\underline{r} \approx -\frac{V_x(y_0+\Delta y) - V_x(y_0)}{\Delta y}\Delta x \Delta y + \frac{V_y(x_0+\Delta x) - V_y(x_0)}{\Delta x}\Delta x \Delta y \approx$
  $\approx \left(-\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right)\Delta x \Delta y = (\mathrm{rot}\,\underline{V})_3 \, \Delta A$
- tehát egy vektormező csakis akkor konzervatív ($\oint \underline{V} d\underline{r} = 0$), ha örvénymentes ($\mathrm{rot}\,\underline{V} = 0$)

a rotáció definíciója másképpen:

- legyen az előző Δx és Δy oldalú téglalaphoz tartozó irányított felületvektor $\Delta \underline{A}$ (az irányítás jobbcsavar szerint az integrál irányától függően)
- legyen $\Delta \underline{A} = \underline{e}|\Delta \underline{A}|$
- ekkor $\underline{e}\,\mathrm{rot}\,\underline{V} = \lim_{\Delta \underline{A} \to 0} \frac{1}{|\underline{A}|} \oint_{\underline{A}} \underline{V} d\underline{r}$

a nablás írásmód:

- $\mathrm{rot}\,\phi\underline{a} = \underline{\nabla}\times\phi\underline{a} = \underline{\nabla}\phi\times\underline{a} + \phi\left(\underline{\nabla}\times\underline{a}\right) = \mathrm{grad}\,\phi\times\underline{a} + \phi\,\mathrm{rot}\,\underline{a}$
- $\mathrm{rot}\left(\underline{a}\times\underline{b}\right) = \underline{\nabla}\times\left(\underline{a}\times\underline{b}\right) = \left(\underline{b}\underline{\nabla}\right)\underline{a} + \underline{b}\left(\underline{\nabla}\underline{a}\right) + \underline{a}\left(\underline{\nabla}\underline{b}\right) + \left(\underline{a}\underline{\nabla}\right)\underline{b}$
- $\left(\underline{b}\underline{\nabla}\right)\underline{a} = \left(\underline{b}\,\mathrm{grad}\right)\underline{a}$

A divergencia

A Young-tétel következményei:

- $\underline{v}\left(\underline{r}\right)$ pontosan akkor írható fel $\underline{v} = \mathrm{grad}\,\phi$ alakban, ha $\mathrm{rot}\,\underline{v} = 0$
- $\underline{v}\left(\underline{r}\right)$ pontosan akkor írható fel $\underline{v} = \mathrm{rot}\,\underline{w}$ alakban, ha $\mathrm{div}\,\underline{v} = 0$

A divergencia definíciója:

- legyen $\underline{v} = \mathrm{rot}\,\underline{w}$, ekkor $v_i = \sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}\partial_j w_k$, tehát $\begin{matrix} v_1 = \partial_2 w_3 - \partial_3 w_2 \\ v_2 = \partial_3 w_1 - \partial_1 w_3 \\ v_3 = \partial_1 w_2 - \partial_2 w_1 \end{matrix}$
- ebből: $\begin{matrix} \partial_1 v_1 = \partial_1\partial_2 w_3 - \partial_1\partial_3 w_2 \\ \partial_2 v_2 = \partial_2\partial_3 w_1 - \partial_2\partial_1 w_3 \\ \partial_3 v_3 = \partial_3\partial_1 w_2 - \partial_3\partial_2 w_1 \end{matrix}$, tehát $\sum_i \partial_i v_i = 0$
- divergencia (széttartás, forráserősség): $\mathrm{div}\,\underline{v} = \sum_i \partial_i v_i = \underline{\nabla}\underline{v}$ (skalár)
- pld.: $\mathrm{div}\,\underline{r} = 3$ (táguló rendszer)
- fizikai példa: $\mathrm{div}\,\underline{E}\left(\underline{r}\right) = 0$

egy vektormező szemléltetése erővonalakkal:

- vektormező iránya: érintőirány
- nagysága: egységnyi keresztmetszetű az irányra merőleges felületen áthaladó erővonalak száma
- csak a divergenciamentes vektormezőt lehet erővonalakkal szemléltetni

a divergencia szemléletes jelentése folyadékáramlásnál:

- $\underline{v}\left(\underline{r}\right)$ a sebességmező
- kicsiny ΔV térfogatból az egységnyi idő alatt kiáramló folyadék térfogata:
- $$\frac{v\left(z_0+\Delta z\right)-v\left(z_0\right)}{\Delta z}\Delta z\Delta x\Delta y + \frac{v\left(z_0+\Delta z\right)-v\left(z_0\right)}{\Delta z}\Delta z\Delta x\Delta y +$$ $$+\frac{v\left(z_0+\Delta z\right)-v\left(z_0\right)}{\Delta z}\Delta z\Delta x\Delta y = \Delta V\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = \Delta V\,\mathrm{div}\,\underline{v}$$
- ugyanez igaz a mágneses fluxusra ($\Delta V\,\mathrm{div}\,\underline{B} = 0$)

másfajta definíció:

- egy kicsiny felületekkel határolt kis térfogatra: $\sum \underline{v}\Delta\underline{A} \approx \Delta V\,\mathrm{div}\,\underline{v}\left(\underline{r}_0\right)$
- ebből: $\mathrm{div}\,\underline{v}\left(\underline{r}_0\right) = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\sum \underline{v}\Delta\underline{A}$

A kontinuitási (anyagmegmaradási) egyenlet (a többi megmaradási törvény is hasonló formájú):

- $\rho\left(\underline{r},t\right) = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\sum\frac{\Delta m}{\Delta V}$

- $\underline{\underline{v}}\left(\underline{\underline{r}},t\right)$: áramlási sebesség
- $m(t)=\rho\left(\underline{\underline{r}},t\right)\Delta V$ és $m(t+\Delta t)=\rho\left(\underline{\underline{r}},t+\Delta t\right)\Delta V$
- $m(t+\Delta t)-m(t)=\dfrac{\rho\left(\underline{\underline{r}},t+\Delta t\right)-\rho\left(\underline{\underline{r}},t\right)}{\Delta t}\Delta t\Delta V=\dfrac{\partial\rho}{\partial t}\Delta V\Delta t$
- $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}\Delta V\Delta t=m(t+\Delta t)-m(t)=-m_{ki}=-\sum\rho\underline{\underline{V}}\Delta\underline{\underline{F}}\Delta t=-\operatorname{div}\left(\rho\underline{\underline{v}}\right)\Delta t\Delta V$
- ebből: $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\left(\rho\underline{\underline{v}}\right)=0$
- ha ρ térben és időben állandó, akkor: $\operatorname{div}\underline{v}=0$ (összenyomhatatlan folyadék)

Fizikai alkalmazása (a Maxwell-egyenletek differenciális alakja):

- negyedik Maxwell-egyenlet:
  - mágneses fluxus: $\underline{\underline{B}}d\underline{\underline{F}}$
  - $\sum\underline{\underline{B}}d\underline{\underline{F}}=0$
  - $\operatorname{div}\underline{\underline{B}}\Delta V=0$
  - ebből: $\operatorname{div}\underline{\underline{B}}=0$
- második Maxwell-egyenlet (Gauss-törvény):
  - $\sum\underline{\underline{E}}d\underline{\underline{F}}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}Q$
  - $\operatorname{div}\underline{\underline{E}}\Delta V=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho\Delta V$
  - $\operatorname{div}\underline{\underline{E}}\left(\underline{\underline{r}},t\right)=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho\left(\underline{\underline{r}},t\right)$
  - bizonyítás:
    - gömb alakú (R sugarú) homogén töltéseloszlású töltött test elektromos tere:
    - $\underline{\underline{E}}\left(\underline{\underline{r}}\right)=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\underline{\underline{r}}}{r}$ ha $\left|\underline{\underline{r}}\right|>R$, ekkor $\operatorname{div}\underline{\underline{E}}=0$
    - $\underline{\underline{E}}\left(\underline{\underline{r}}\right)=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{R^3}\underline{\underline{r}}$ ha $\left|\underline{\underline{r}}\right|>R$, ekkor $\operatorname{div}\underline{\underline{E}}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{R^3}\operatorname{div}\underline{\underline{r}}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho$
    - tehát: $\operatorname{div}\underline{\underline{E}}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho$
    - több gömbre a térerősség divergenciái összeadódnak, csakúgy, mint az áramsűrűségek és így igaz marad az egyenlet
    - folytonos töltéseloszlást fel tudok bontani pici gömbökre
- harmadik Maxwell-egyenlet (Faraday-törvény):
  - $-\dfrac{\Delta\phi}{\Delta t}=U=\oint\underline{\underline{E}}d\underline{\underline{r}}$
  - $\sum\underline{\underline{E}}\Delta\underline{\underline{r}}=-\dfrac{\Delta\underline{\underline{B}}}{\Delta t}\Delta\underline{\underline{F}}$
  - $\operatorname{rot}\underline{\underline{E}}\Delta\underline{\underline{F}}=-\dfrac{\partial\underline{\underline{B}}}{\partial t}\Delta\underline{\underline{F}}$

- $\operatorname{rot}\underline{\underline{E}}\left(\underline{\underline{r}},t\right)=-\frac{\partial \underline{\underline{B}}\left(\underline{\underline{r}},t\right)}{\partial t}$
- első Maxwell-egyenlet (Amper törvény kijavítva):
  - $\sum \underline{\underline{B}}\Delta\underline{\underline{r}}=\mu_0 I=\mu_0\underline{\underline{j}}\Delta\underline{\underline{F}}$
  - $\operatorname{rot}\underline{\underline{B}}\Delta\underline{\underline{F}}=\mu_0\underline{\underline{j}}\Delta\underline{\underline{F}}$
  - $\operatorname{rot}\underline{\underline{B}}=\mu_0\underline{\underline{j}}$ (nem igaz mindig, Maxwell kijavítja)
  - olyan vektort kell választani, aminek divergenciája $0=\operatorname{div}\underline{\underline{j}}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\operatorname{div}\underline{\underline{E}}\right)\mu_0$
  - ez: $\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\underline{\underline{E}}}{\partial t}$
  - tehát $\operatorname{rot}\underline{\underline{B}}\left(\underline{\underline{r}},t\right)=\mu_0\underline{\underline{j}}\left(\underline{\underline{r}},t\right)+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\underline{\underline{E}}\left(\underline{\underline{r}},t\right)}{\partial t}$

Az indexes deriválás:

Az indexes írásmód alapjai:

- $\underline{\nabla}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial_1\\ \partial_2\\ \partial_3\end{pmatrix}$
- $\operatorname{grad}\phi\left(\underline{r}\right)=\underline{\nabla}\phi$, $\left(\operatorname{grad}\phi\left(\underline{r}\right)\right)_i=\partial_i\phi$
- $\operatorname{div}\underline{v}\left(\underline{r}\right)=\underline{\nabla}\underline{v}$, $\operatorname{div}\underline{v}\left(\underline{r}\right)=\partial_k v_k$
- $\operatorname{rot}\underline{v}\left(\underline{r}\right)=\underline{\nabla}\times\underline{v}$, $\left(\operatorname{rot}\underline{v}\left(\underline{r}\right)\right)_i=\varepsilon_{ijk}\partial_j v_k$
- $\operatorname{divgrad}\phi=\underline{\nabla}\left(\underline{\nabla}\phi\right)=\left(\underline{\nabla}\right)^2\phi=\Delta\phi$ (Laplace operátor), $\operatorname{divgrad}\phi=\partial_k\partial_k\phi$
- Descartes-féle koordinátarendszerben: $\left(\Delta\underline{v}\right)_k=\Delta v_k=\partial_l\partial_l v_k$
- $\operatorname{rotgrad}\phi=\underline{\nabla}\times\underline{\nabla}\phi=0$, $\left(\operatorname{rotgrad}\phi\right)_i=\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\phi=0$
- $\operatorname{divrot}\underline{v}=\varepsilon_{klm}\partial_k\partial_l v_m=0$
- $\operatorname{graddiv}\underline{v}=\operatorname{rotrot}\underline{v}+\Delta\underline{v}$, $\left(\operatorname{graddiv}\underline{v}\right)_k=\partial_k\partial_l v_l$
- iránymenti derivált: $\left(\underline{a}\underline{\nabla}\right)\phi=a_k\partial_k\phi$, $\left(\left(\underline{a}\underline{\nabla}\right)\underline{v}\right)_l=a_k\partial_k v_l$

Alapösszefüggések:

- $\left(\underline{r}\right)_k=x_k$
- $\left|\underline{r}\right|=r$
- $\underline{e}=\frac{\underline{r}}{r}$
- $e_k=\frac{x_k}{r}$
- $x_k x_k=r^2$
- $e_k e_k=1$
- $\partial_k x_l=\delta_{kl}$

- $\partial_k r = e_k$
- $\partial_k e_l = \dfrac{\delta_{kl} - e_k e_l}{r}$

A megoldás menete:
- átírás indexes alakba
- konstansok kihozása előre
- deriválások elvégzése
- a műveletek elvégzése
- visszaírás vektoros alakba
- $\iint \operatorname{rot} \underline{\underline{v}} d\underline{\underline{F}} = \lim\limits_{\Delta \underline{\underline{F}} \to 0} \sum \operatorname{rot} \underline{\underline{v}} d\underline{\underline{F}} = \lim\limits_{\Delta \underline{\underline{r}} \to 0} \sum \underline{\underline{v}}\left(\underline{\underline{r}}\right) \Delta \underline{\underline{r}} = \oint \underline{\underline{v}}\left(\underline{\underline{r}}\right) d\underline{\underline{r}}$

Többszörös integrálok

Többszörös integrálok bevezetése:

egydimenziós:
- eddig is ismert integrál
- $\int\limits_a^b \rho(x)\, dx = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum \rho(x) \Delta x$

kétdimenziós (felületi integrál):
- $\iint\limits_F \rho(x, y)\, dF = \lim\limits_{\Delta F \to 0} \rho(x, y) \Delta F = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \rho(x, y) \Delta x \Delta y$

vektormező felületi integrálja:
- $\iint\limits_F \underline{\underline{v}}\left(\underline{\underline{r}}\right) d\underline{\underline{F}} = \lim\limits_{\forall i: \Delta \underline{\underline{F}}^{(i)} \to 0} \underline{\underline{v}}\left(\underline{\underline{r}}^{(i)}\right) \Delta \underline{\underline{F}}^{(i)}$
- értelmezhető görbült felületre is
- síkfelületre: $\iint\limits_F \underline{\underline{v}}\left(\underline{\underline{r}}\right) d\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{n}} \iint\limits_F \underline{\underline{v}}\left(\underline{\underline{r}}\right) dF$

háromdimenziós (térfogati integrál):
- $\iiint\limits_K \rho\left(\underline{r}\right) dV = \iiint\limits_K \rho(x, y, z)\, dx dy dz = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \rho(x, y, z) \Delta V = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \\ \Delta z \to 0}} \rho(x, y, z) \Delta x \Delta y \Delta z$

n-dimenziós:
- $$\underbrace{\int \ldots \iiint}_{\substack{n \\ V^{(n)}}} f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) dV^{(n)} = \underbrace{\int \ldots \iiint}_{\substack{n \\ V^{(n)}}} f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$
  $$= \lim\limits_{\forall i: \Delta x_i \to 0} \sum f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \Delta x_1 \Delta x_2 \ldots \Delta x_n$$
- alkalmazás (egy galaxisban a gravitációs potenciál):
  $$\phi = \tfrac{1}{2} \sum -\gamma \frac{\rho(x, y, z) \Delta x \Delta y \Delta z \rho(x', y', z') \Delta x' \Delta y' \Delta z'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} =$$
  $$= \tfrac{1}{2} \sum -\gamma \frac{\rho(x_1, x_2, x_3) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \rho(x_4, x_5, x_6) \Delta x_4 \Delta x_5 \Delta x_6}{\sqrt{(x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_5)^2 + (x_3 - x_6)^2}} = \iiint \iiint f\left(\underline{x}\right) dV^{(6)}$$
- tört, negatív és komplex dimenziójú integrálokra is kiterjeszthetők, de ezeket nem tanuljuk

A többszörös integrálok fajtái:
egydimenziós:
- $\int f(s)\,ds$
- $\int \phi(\underline{r}(s))\,ds$
- $\int \underline{v}(\underline{r}(s))\,ds$
- $\int \phi(\underline{r})\,d\underline{r}$
- $\int \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r}$
- $\int \underline{v}(\underline{r})\times d\underline{r}$
- $\int \underline{v}(\underline{r})\circ d\underline{r}$
- hossz-számítás: $\int\limits_S 1ds$

kétdimenziós:
- $\iint \phi(\underline{r})\,dA$
- $\iint \underline{v}(\underline{r})\,dA$
- $\iint \phi(\underline{r})\,d\underline{F}$
- $\iint \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{F}$
- $\iint \underline{v}(\underline{r})\times d\underline{F}$
- $\iint \underline{v}(\underline{r})\circ d\underline{F}$
- felületszámítás: $\iint\limits_F 1dF$

háromdimenziós:
- $\iiint \phi(\underline{r})\,dV$
- $\iiint \underline{v}(\underline{r})\,dV$
- térfogatszámítás: $\iiint\limits_V 1dV$

A nem görbült többszörös integrálok kiszámítása:
Két dimenziós:
téglalapba foglalás:
- az integrációs felületen kívül a függvényt definiáljuk 0-nak
- legyen: $\forall x : a \le x \le b$ és $\forall y : c \le y \le d$
- $$\iint\limits_T \rho(x,y)\,dF = \iint\limits_{T^*} \rho(x,y)\,dF = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \sum \rho(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \sum_{k=1}^{M} \Delta y \sum_{i=1}^{N} \rho(x_i, y_k)\Delta x =$$
  $$= \lim_{\Delta y\to 0} \sum_{k=1}^{M} \Delta y \int_a^b \rho(x, y_k)\,dx = \int_c^d \left(\int_a^b \rho(x,y)\,dx \right) dy = \int_c^d dy \int_a^b dx\,\rho(x,y)$$
- $$\int_c^d dy \int_a^b dx\,\rho(x,y) = \int_a^b dx \int_c^d dy\,\rho(x,y)$$

magukkal a határokkal számolás:

- $\iint_T \rho(x,y)dF = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} dy \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx\rho(x,y) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dy\rho(x,y)$

Háromdimenziós integrál (a módszer hasonló):

- legyen: $\forall x : a \le x \le b, \forall y : c \le y \le d$ és $\forall z : e \le z \le f$
- $\iiint \rho(x,y,z)dV = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz\rho(x,y,z)$

Többdimenziós integrál:

- $\underbrace{\int \ldots \iiint}_{n} \rho(\underline{x})dV^{(n)} = \int_a^b dx_1 \int_c^d dx_2 \ldots \int_p^q dx_n \rho(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- n dimenziós gömb térfogata: $\int_a^b dx_1 \int_c^d dx_2 \ldots \int_p^q dx_n 1$

Más koordináta-rendszerek:

- görbült integrálokat ki lehet számítani és a nem görbülteket egyszerűsíteni, úgy, hogy más koordináta-rendszerbe helyezem

henger koordináta-rendszer:

- $\underline{r}(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$
- $d\underline{F} = R\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi dz$
- $dA = Rd\varphi dz$
- $dV = rdrd\varphi dz$

síkbeli polárkoordináta-rendszer:

- $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$
- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

térbeli polárkoordináta-rendszer:

- $\underline{r} = \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$
- $d\underline{F} = r^2\sin\vartheta\begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} d\vartheta d\varphi$
- $dA = r^2\sin\vartheta d\vartheta d\varphi$
- $dV = r^2\sin\vartheta drd\vartheta d\varphi$
- spec. eset, kúp: $\underline{r} = \begin{pmatrix} r\sin\alpha\cos\varphi \\ r\sin\alpha\sin\varphi \\ r\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\operatorname{tg}\vartheta\cos\gamma \\ z\operatorname{tg}\alpha\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$

síkbeli elliptikus koordináta-rendszer:

- két rögzített ponttól vett távolságok összegei és különbségei a koordináták

ellipszoid:

- $\underline{r} = \begin{pmatrix} ar\sin\vartheta\cos\varphi \\ br\sin\vartheta\sin\varphi \\ cr\cos\vartheta \end{pmatrix}$
- $dV = abcr^2 dr d\vartheta d\varphi$

elliptikus hiperboloid (egyköpenyű):

- $\underline{r} = \begin{pmatrix} ar\,\mathrm{ch}\,\vartheta\cos\varphi \\ br\,\mathrm{ch}\,\vartheta\sin\varphi \\ cr\,\mathrm{sh}\,\vartheta \end{pmatrix}$

elliptikus hiperboloid (kétköpenyű):

- $\underline{r} = \begin{pmatrix} ars\,\mathrm{h}\,\vartheta\cos\varphi \\ br\,\mathrm{sh}\,\vartheta\sin\varphi \\ cr\,\mathrm{ch}\,\vartheta \end{pmatrix}$

tórusz:

- $\underline{r}(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} (a+r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ (a+r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$

Felhasználásuk az integrálásnál:

két dimenzióban:

- $\Delta\underline{\underline{r}}^{(v)} = \underline{\underline{r}}(u,v+\Delta v) - \underline{\underline{r}}(u,v) = \frac{\partial \underline{\underline{r}}}{\partial v}\Delta v$
- $\Delta\underline{\underline{r}}^{(u)} = \underline{\underline{r}}(u+\Delta u,v) - \underline{\underline{r}}(u,v) = \frac{\partial \underline{\underline{r}}}{\partial u}\Delta u$
- $\Delta F = \left|\Delta\underline{\underline{r}}^{(u)} \times \Delta\underline{\underline{r}}^{(v)}\right| = \left|\frac{\partial \underline{\underline{r}}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{\underline{r}}}{\partial v}\right| \Delta u \Delta v$
- $\iint \phi(\underline{\underline{r}})dF = \lim_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta v\to 0}} \sum \phi(\underline{\underline{r}}(u,v)) \left|\frac{\partial \underline{\underline{r}}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{\underline{r}}}{\partial v}\right| \Delta u \Delta v = \iint f(u,v)\,dudv$
- ahol: $f(u,v) = (\underline{\underline{r}}(u,v)) \left|\frac{\partial \underline{\underline{r}}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{\underline{r}}}{\partial v}\right|$
- $\Delta\underline{\underline{F}} = \Delta\underline{\underline{r}}^{(u)} \times \Delta\underline{\underline{r}}^{(v)}$
- zárt felületnél a felületvektort egyezményesen kifele irányítjuk

három dimenzióban:

- $\Delta\underline{\underline{r}}^{(u)} = \frac{\partial \underline{\underline{r}}}{\partial u}\Delta u$, $\Delta\underline{\underline{r}}^{(v)} = \frac{\partial \underline{\underline{r}}}{\partial v}\Delta v$ és $\Delta\underline{\underline{r}}^{(w)} = \frac{\partial \underline{\underline{r}}}{\partial w}\Delta w$
- $\Delta V = \left(\frac{\partial \underline{\underline{r}}}{\partial u}, \frac{\partial \underline{\underline{r}}}{\partial v}, \frac{\partial \underline{\underline{r}}}{\partial w}\right)\Delta u \Delta v \Delta w = J \Delta u \Delta v \Delta w$
- Jacoby-determináns: $J = \left(\frac{\partial \underline{\underline{r}}}{\partial u}, \frac{\partial \underline{\underline{r}}}{\partial v}, \frac{\partial \underline{\underline{r}}}{\partial w}\right)$

A feladatmegoldás általános menete:

0. dimenzió számának megállapítása
1. paraméterezés
2. határok megadása
3. szimbólumok feloldása
   - $d\underline{r} = \dot{\underline{r}}(t)dt$
   - $ds = \left|\dot{\underline{r}}(t)\right|dt$
   - $d\underline{F} = \left(\frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial v}\right)dudv$
   - $dA = \left|\frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial v}\right|dudv$
   - $dV = \left(\frac{\partial \underline{r}(u,v,w)}{\partial u}, \frac{\partial \underline{r}(u,v,w)}{\partial v}, \frac{\partial \underline{r}(u,v,w)}{\partial w}\right)dudvdw$
4. deriválás
5. vektorműveletek
6. behelyettesítés az integrandusba
7. vektorműveletek
8. integrálás

Gulden tételei (forgástestekre):

I. $A = K2\pi R_K$ (K a kerülete a megforgatott síkidomnak, R_K a kerületi súlypontjának a távolsága a forgástengelytől)

II. $V = T2\pi R_T$ (T a területe a megforgatott síkidomnak, R_T a területi súlypontjának a távolsága a forgástengelytől)

A vektorszámítás integráltételei:

Gauss-Osztrogackij tétel:

- $\oiint \underline{\underline{v}} d\underline{\underline{F}} = \iiint \left(\operatorname{div} \underline{\underline{v}}\right) dV$
- csak akkor igaz, ha a divergencia-mező a térfogat belsejében nem szinguláris
- $\iiint\limits_V \left(\operatorname{div} \underline{\underline{v}}\right) dV = \lim\limits_{\forall i:\Delta V^{(i)}\to 0} \sum \left(\operatorname{div} \underline{\underline{v}}\right) \underline{\underline{r}}^{(i)} \Delta V^{(i)} = \lim\limits_{\forall \Delta F \to 0} \sum\limits_i \sum\limits_1^6 \underline{\underline{v}} \Delta \underline{\underline{F}}^{(i)} = \oiint \underline{\underline{v}} d\underline{\underline{F}}$
- $\forall \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{c}} \oiint\limits_F \phi\left(\underline{\underline{r}}\right) d\underline{\underline{F}} = \oiint\limits_F \underline{\underline{c}}\phi\left(\underline{\underline{r}}\right) d\underline{\underline{F}} = \iiint\limits_V \operatorname{div}\left(\underline{\underline{c}}\phi\left(\underline{\underline{r}}\right)\right) dV = \underline{\underline{c}} \iiint\limits_V \operatorname{grad} \phi dV$
- ebből: $\oiint\limits_F \phi\left(\underline{\underline{r}}\right) d\underline{\underline{F}} = \iiint\limits_V \operatorname{grad} \phi dV$ (II. gradiens-tétel)
- $\oiint\limits_F \phi\left(\underline{\underline{r}}\right) dF_i = \iiint\limits_V \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dV$
- $\oiint\limits_F v_i dF_i = \iiint\limits_V \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dV$
- legyen $\phi = \sigma_{ki}$ ($\underline{\underline{\sigma}}$ másodrendű tenzor)
- $\oiint\limits_F \left(\underline{\sigma} d\underline{F}\right)_k = \iiint\limits_V \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_i} dV$
- ebből: $\left(\operatorname{div} \underline{\sigma}\right)_k = \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_i}$
- $\oiint \underline{\underline{\sigma}} d\underline{\underline{F}} = \iiint \left(\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}\right) dV$

Stokes-tétel:

- $\oint \underline{\underline{v}}\left(\underline{\underline{r}}\right) d\underline{\underline{r}} = \iint \operatorname{rot} \underline{\underline{v}} d\underline{\underline{F}}$
- csak akkor igaz, ha a rotáció-mező a felszínen nem szinguláris
- következmény: $\operatorname{rot} \underline{\underline{v}} = 0 \Leftrightarrow \oint \underline{\underline{v}}\left(\underline{\underline{r}}\right) d\underline{\underline{r}} = 0$ (az örvénymentes vektormező konzervatív is és fordítva)