A komplex számok

(i) $\forall a,b \in \mathbb{N} \ \exists c \in \mathbb{N} : c = a+b$
(ii) $\forall a,b,c \in \mathbb{N} : (a+b)+c = a+(b+c)$ } félcsoport
(iii) $\exists\, 0 \in \mathbb{N} : \forall a \in \mathbb{N} : a+0 = a$ egységelem
$\forall a,b \in \mathbb{N} : a+b = b+a$ kommutativitás

: A természetes számok összeadásra nézve kommutatív egységelemes félcsoportot alkotnak.

A természetes számok halmazán nem mindig van megoldása az

$$a+x=b$$

egyenletnek. Bővítsük a természetes számok halmazát:

CSOPORTAXIÓMÁK: általában az elemek egy nem üres A halmazát csoportnak nevezzük, ha teljesül a következő négy axióma:

(i) Az A halmaz zárt a halmazban értelmezett bináris műveletre vonatkozóan
(ii) Az A-ban értelmezett bináris művelet asszociatív.
(iii) Az A tartalmaz neutrális elemet a bináris műveletre vonatkozóan.
(iv) Az A minden elemének van inverze a bináris műveletre vonatkozóan.

Az egész számok az összeadásra nézve kommutatív csoportot alkotnak.

Azonban még ekkor is van olyan egyenlet, amit nem tudunk megoldani, például nincs olyan a szám az egész számok között, mely megoldása lenne az

$$a \cdot 2 = 5$$

egyenletnek. Bővíteni kell a halmazt, így kapjuk a racionális számok halmazát. A racionális számok testet alkotnak:

TESTAXIÓMÁK: a $(T,+,*)$ algebrai struktúrát testnek nevezzük, ha

(i) T zárt a + (összeadás) műveletre:
$\forall a,b \in T : a+b \in T$
(ii) a + művelet asszociatív:
$\forall a,b,c \in T : (a+b)+c = a+(b+c)$
(iii) létezik neutrális elem az + műveletre:
$\exists\, 0 \in T, \forall a \in T : a+0 = a$
(iv) minden elemnek van additív inverze:
$\forall a \in T, \exists (-a) \in T : a+(-a) = 0$
(v) az + művelet kommutatív:
$\forall a,b \in T : a+b = b+a$
(vi) T zárt a $*$ műveletre:
$\forall a,b \in T : a*b \in T$
(vii) a $*$ művelet asszociatív:
$\forall a,b,c \in T : (a*b)*c = a*(b*c)$
(viii) létezik neutrális elem a $*$ műveletre:
$\exists\, 1 \in T, \forall a \in T : a*1 = a$
(ix) minden elemnek – (0) kivételével – van multiplikatív inverze:
$\forall a \in T, (a \neq 0), \exists a^{-1} \in T : a*a^{-1} = 1$
(x) a $*$ művelet kommutatív:
$\forall a,b \in T : a*b = b*a$
(xi) a $*$ művelet az + műveletre nézve disztributív:
$\forall a,b,c \in T : a*(b+c) = a*b+a*c$

A disztributivitással vigyázni kell, mert meg kell mondani, hogy melyik művelet melyikre nézve disztributív, például:

$\forall a,b,c \in \mathbb{N}: (a+b)c = (ac)+(bc)$ ez érvényes

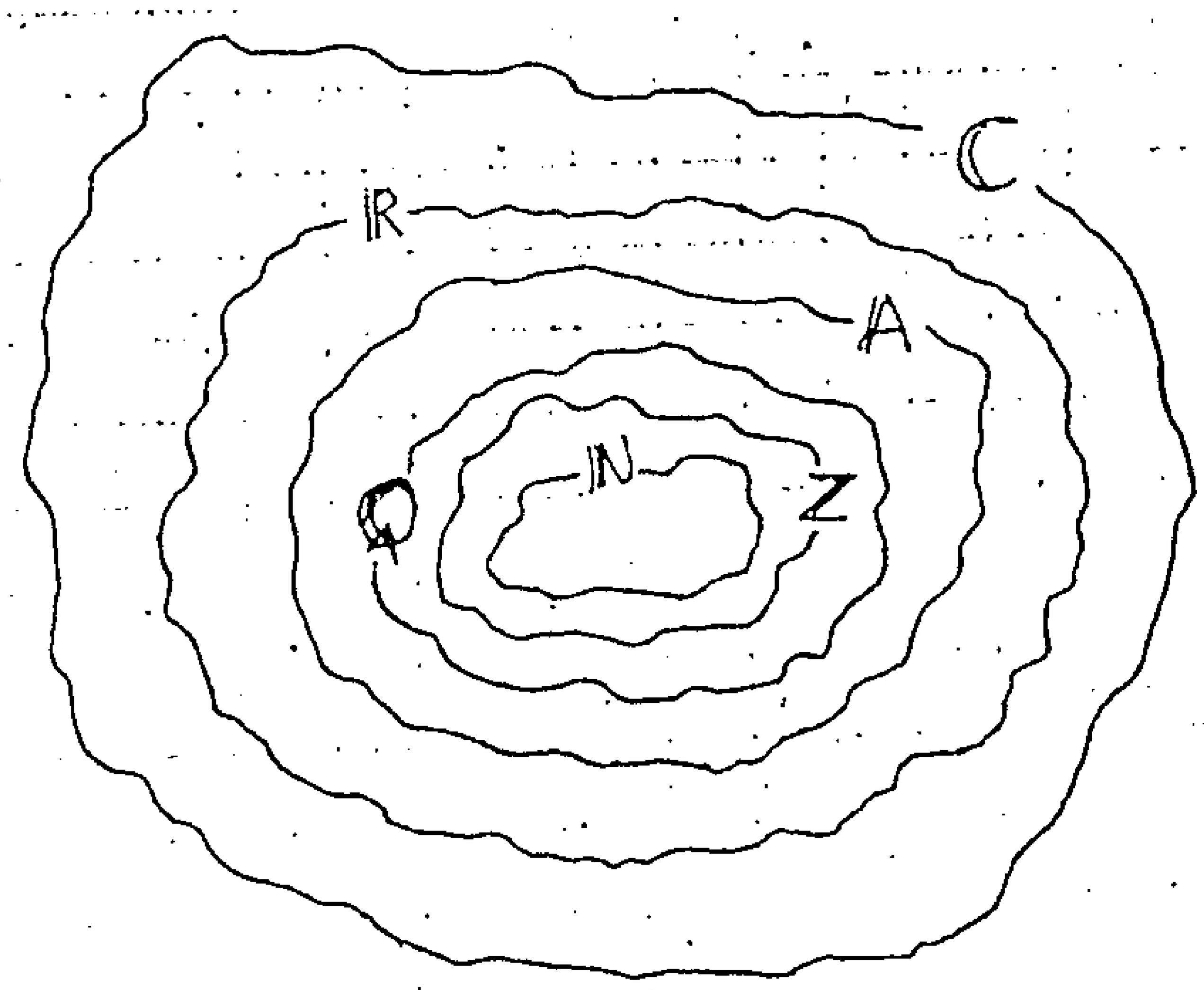
$\forall a,b,c \in \mathbb{N}: (ab)+c = (a+c)(b+c)$ ez nem érvényes

Csak az egyik disztributivitás érvényes.

$(a \cap b) \cup c = (a \cup c) \cap (b \cup c)$

$(a \cup b) \cap c = (a \cap c) \cup (b \cap c)$

Vannak olyan műveletek, melyek esetén mindkét fajta disztributivitás érvényes.



$\mathbb{N}$ természetes számok

$\mathbb{Z}$ egész számok

$\mathbb{Q}$ racionális számok

A algebrai számok (amelyek a másodfokú egyenletek megoldásaként adódnak)

$\mathbb{R}$ valós számok

$\mathbb{C}$ komplex számok

A komplex számok körében bármely egyenletnek van megoldása

A KOMPLEX SZÁMOK:

$i = \sqrt{-1}$

a komplex számok algebrai alakja:

$z = a + bi$

$a = \mathrm{Re}\, z \qquad b = \mathrm{Im}\, z$

A KOMPLEX SZÁMOK ÖSSZEADÁSA ÉS SZORZÁSA:

$z_1 = a_1 + b_1 i$

$z_2 = a_2 + b_2 i$

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i = a_3 + b_3 i = z_3$

$a_3 = a_1 + a_2 \qquad b_3 = b_1 + b_2$

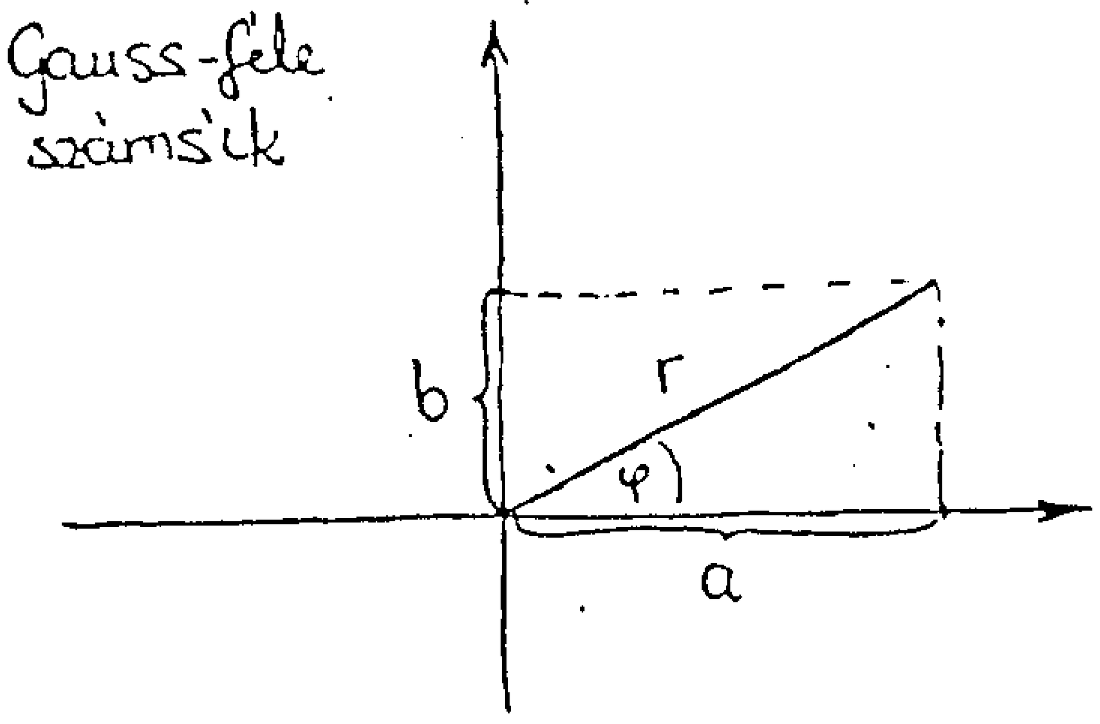
$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i =$

$= a_3 + b_3 i = z_3 \qquad a_3 = a_1 a_2 - b_1 b_2 \quad b_3 = a_1 b_2 + a_2 b_1$

$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$

A KOMPLEX SZÁMOK TRIGONOMETRIAI ALAKJA:

Gauss-féle számsík



Hogyan lehet áttérni az algebrai alakról a trigonometriaira?

$$r = \sqrt{a^2+b^2} \qquad a = r\cos\varphi$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} b/a \qquad b = r\sin\varphi$$

$$\boxed{z = a+ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

- Hogyan lehet elvégezni a szorzást a trigonometriai alakokkal?

$z_1 = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$z_2 = R(\cos\beta + i\sin\beta)$

$$z_1 z_2 = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)R(\cos\beta + i\sin\beta) =$$

$$= rR\left[\cos\alpha\cos\beta + i\sin\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\sin\beta + ii\sin\alpha\sin\beta\right] =$$

$$= rR\left[\underbrace{(\cos\alpha\cos\beta) - \sin\alpha\sin\beta}_{\cos(\alpha+\beta)} + i\underbrace{(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)}_{\sin(\alpha+\beta)}\right] =$$

$$= rR(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))$$

$$\boxed{\begin{array}{c} z_1 \cdot z_2 = \varrho\left[\cos\gamma + i\sin\gamma\right] \\ \varrho = rR \quad \gamma = \alpha+\beta \end{array}}$$

A KOMPLEX SZÁMOK KONJUGÁLTJA:

Vegyük a következő egyenletet: $\frac{1}{a+bi} = x+iy$ Mekkora az x és y?

Beszorzás után $1 = (x+iy)(a+bi)$

$$1 = (ax-by) + (bx+ay)i$$

Ez valójában két egyenlet, hiszen a jobb oldalon álló valós résznek egyenlőnek kell lennie a bal oldalon álló valós résszel, s ugyanez vonatkozik az imaginárius részre.

$(1)\ ax - by = 1 \qquad (2)\ bx + ay = 0$ ez egy egyszerű egyenletrendsze

$(1)\ ax - b\left(-\frac{bx}{a}\right) = 1 \leftarrow (2)\ y = -\frac{bx}{a}$

$(1)\ a^2x + b^2x = a$

$$x = \frac{a}{a^2+b^2} \rightarrow y = \frac{-b}{a^2+b^2}$$

$$x+iy = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{1}{a+ib}$$

$$a^2+b^2 = (a-ib)(a+ib)$$

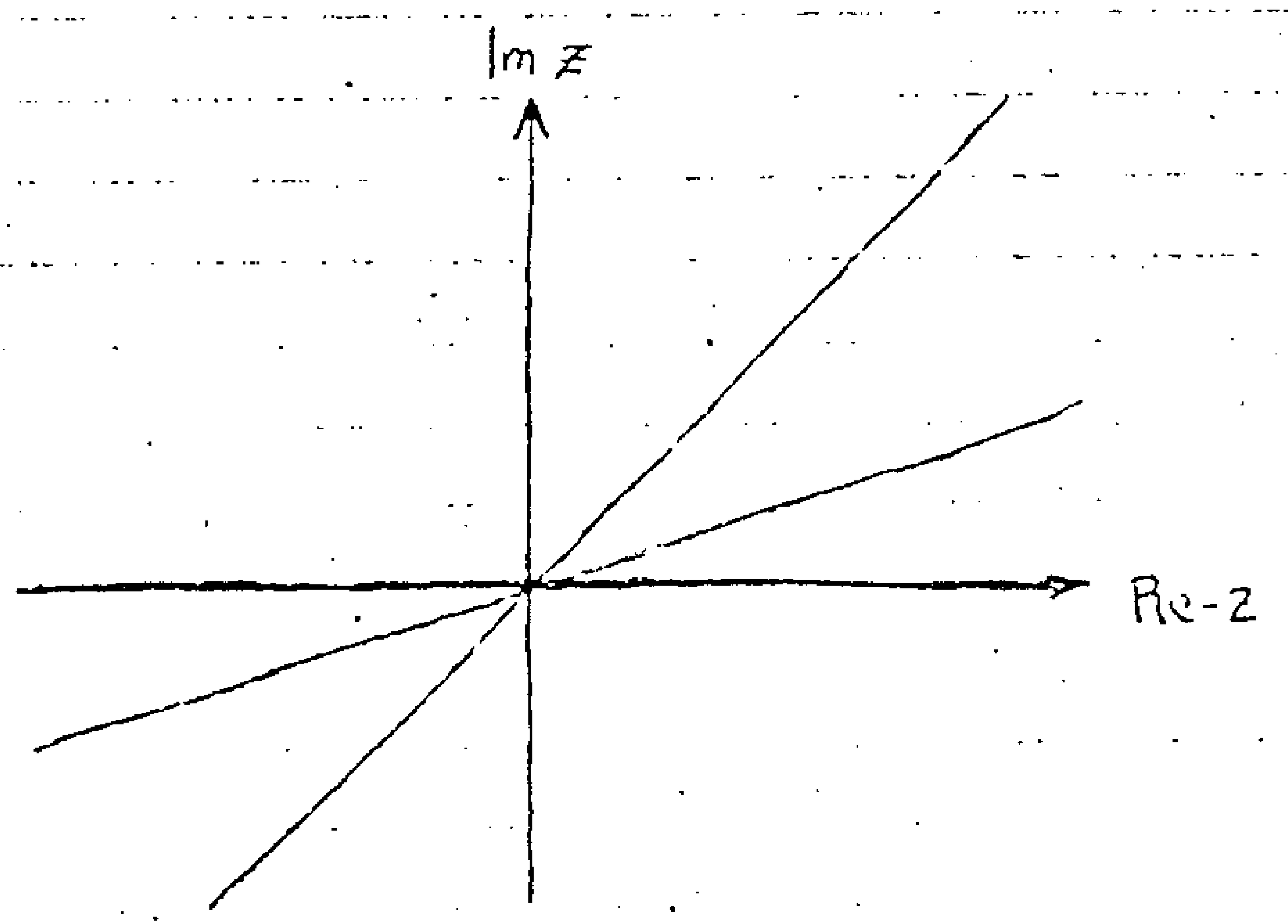
Az $a-ib$ számot az $a+ib$ szám konjugáltjának nevezzük.

$$\boxed{z = a+ib \qquad z^* = a-ib \qquad r = \sqrt{z \cdot z^*}}$$

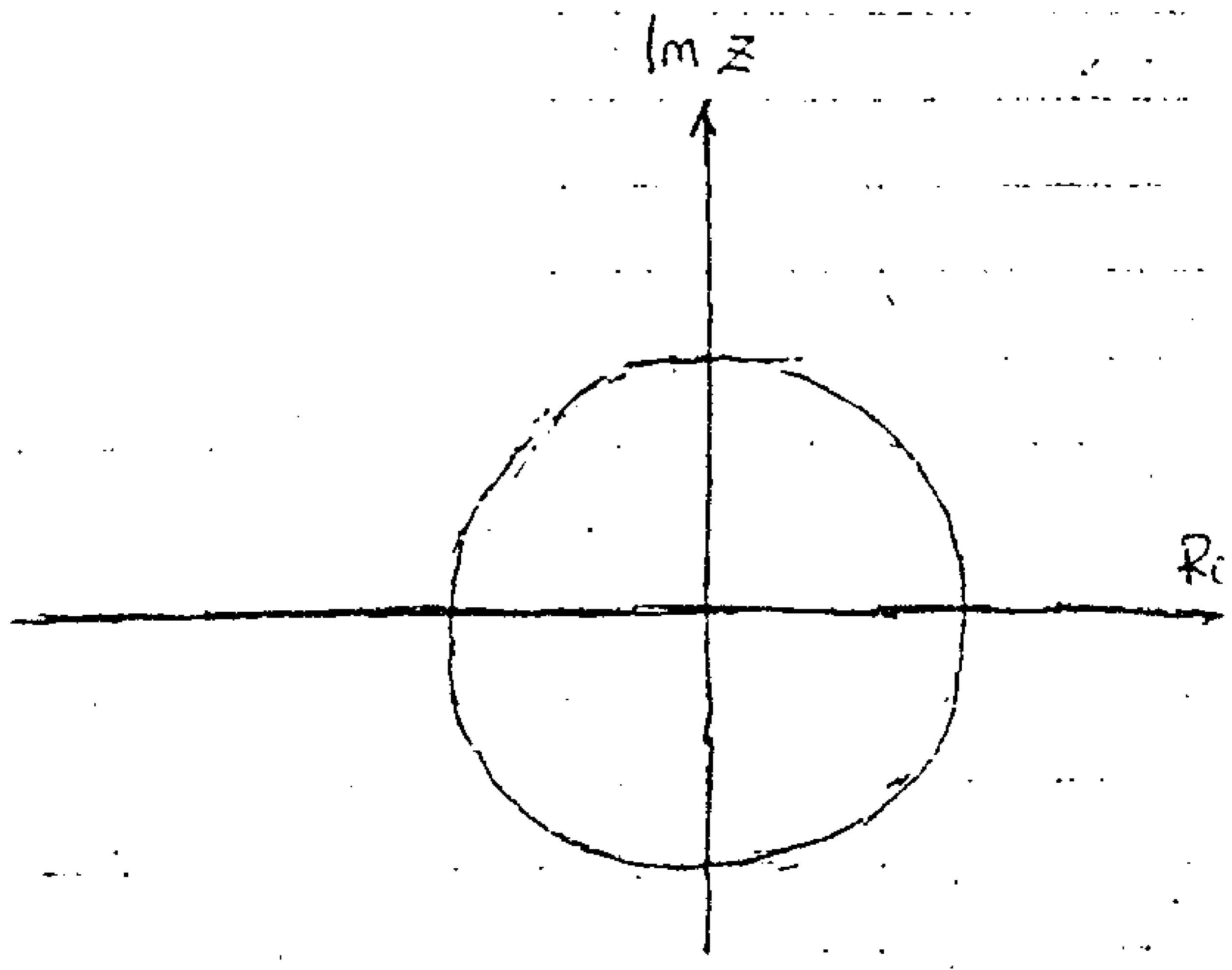
Két, a konjugálttal kapcsolatos tény:

$$z+z^* = 2a \qquad z-z^* = 2ib$$

NÉHÁNY MEGJEGYZÉS:



Gauss-féle számsík



Bármely az origón átmenő egyenes az összeadás műveletére nézve zárt halmazt alkot; méghozzá ezek az egyenesek csoportot alkotnak az összeadás műveletére vonatkozóan.

A szorzás művelete csak a valós számok halmazából és az egységsugarú körből nem visz ki, tehát csak erre a két halmazra vonatkozóan zárt.

(Persze a racionális számok halmazán is igaz ez, itt most csupán azt akartam jelezni, hogy csak az Rez tengely és az egységsugarú kör jók)

Az egységsugarú kör is ilyen, hiszen két, az egységsugarú körön levő komple szám úgy szorzódik, hogy az argumentumok összeadódnak és a hosszok szorzódnak. Mivel egységnyi hosszúak, ezért az eredmény is egységnyi hosszú.

A KOMPLEX SZÁMOK EXPONENCIÁLIS ALAKJA

$a, b \in \mathbb{R}$

$r \geq 0$

$$\boxed{z = a+bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}}$$

A szorzás végrehajtása exponenciális alakú komplex számokkal

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 e^{i\varphi_1})(r_2 e^{i\varphi_2}) = (r_1 r_2)\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

KOMPLEX SZÁMOK LOGARITMUSA:

Felmerülhet a kérdés, hogy mennyi például $\lg(-2)$?

$$\lg(-2) = \frac{\ln(-2)}{\ln 10} = \frac{\ln(2e^{i(\pi+2k\pi)})}{\ln 10} = \frac{\ln 2 + i(\pi+2k\pi)}{\ln 10}$$

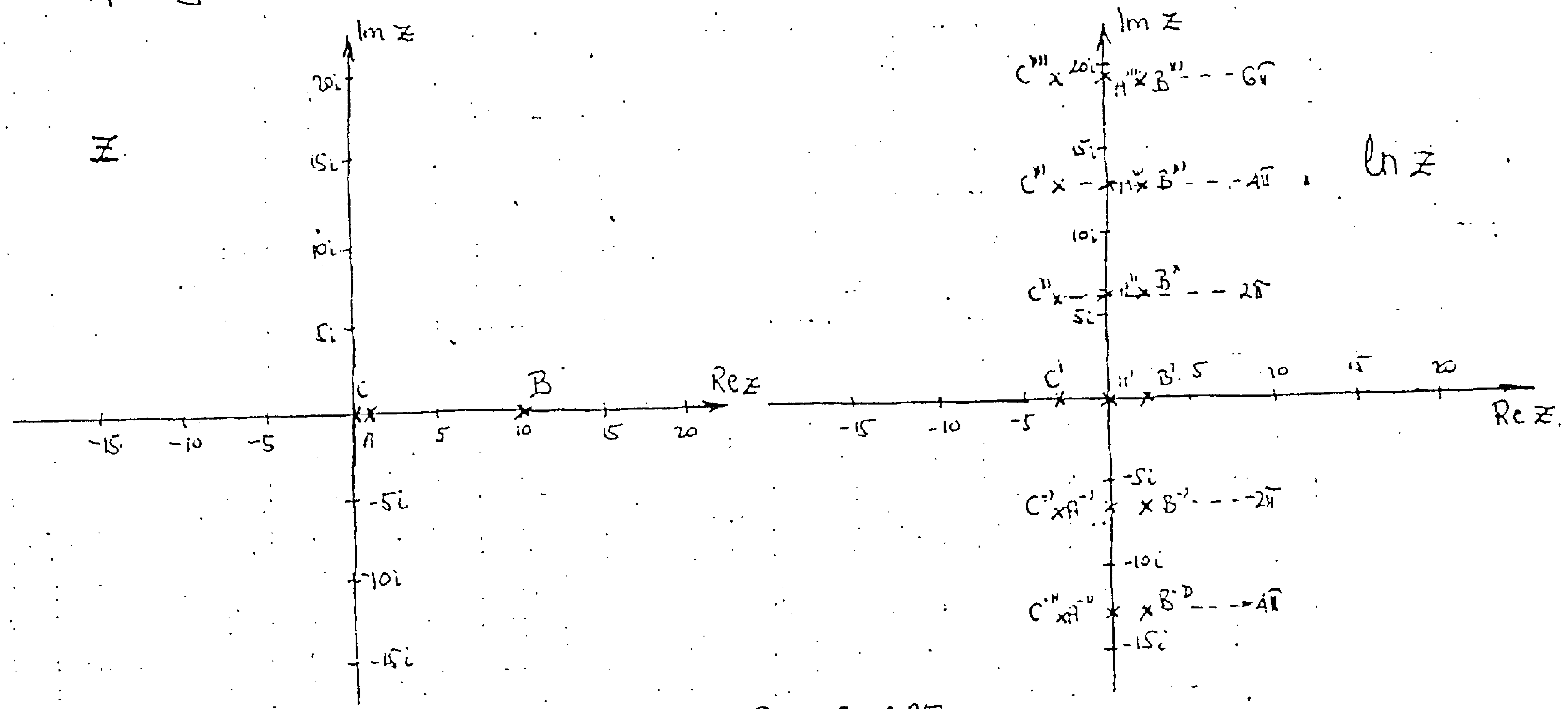
$$\boxed{e^{i(\pi+2k\pi)} = -1 \quad \text{ahol } k \in \mathbb{Z}}$$

Nézzük most az általános esetet

$$\lg z = \frac{\ln z}{\ln 10} = \frac{\ln(re^{i(\varphi+2k\pi)})}{\ln 10} = \frac{\ln r + i(\varphi+2k\pi)}{\ln 10}$$

$$\boxed{\log_a z = \frac{\ln r + i(\varphi+2k\pi)}{\ln a} \quad \text{ahol } r \geq 0 \text{ és } r \in \mathbb{R}}$$

Most pedig lássuk a természetes alapú logaritmusok grafikus ábrázolását.

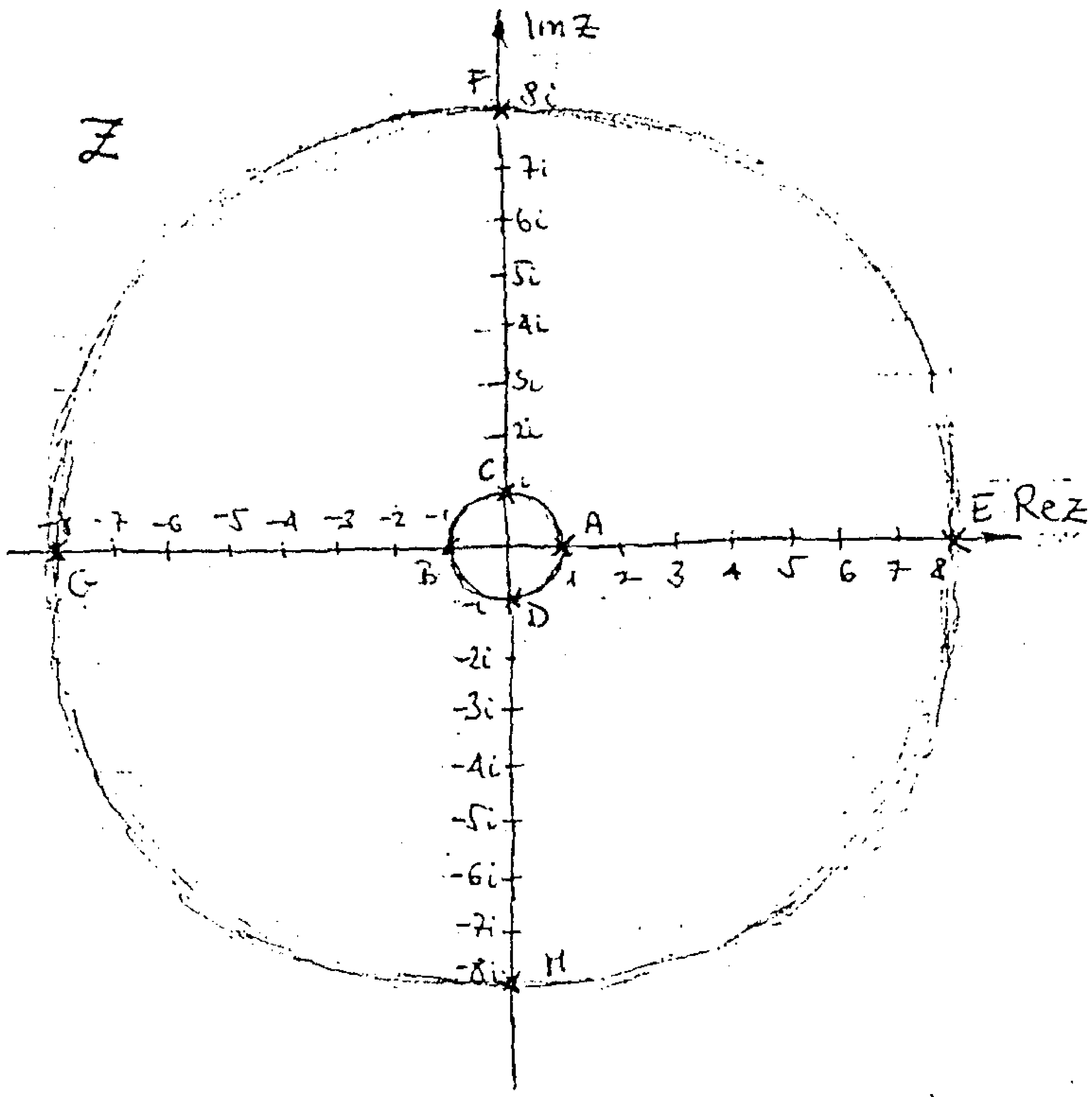


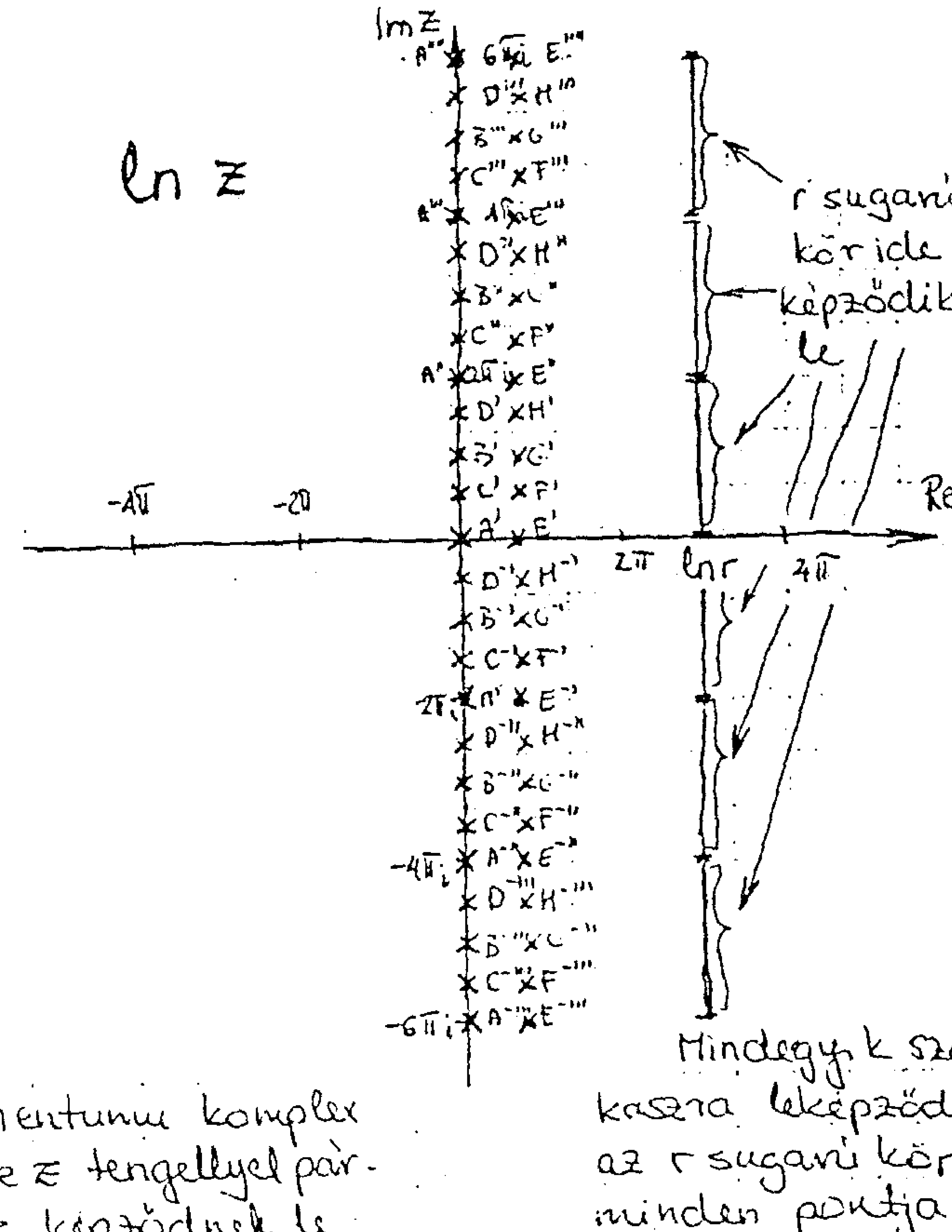
$A = 1 \quad B = 10 \quad C = 0{,}05$

A z grafikonon levő adott ponthoz az $\ln z$ grafikonon végtelen számú pont tartozik. Ez annak a következménye, hogy

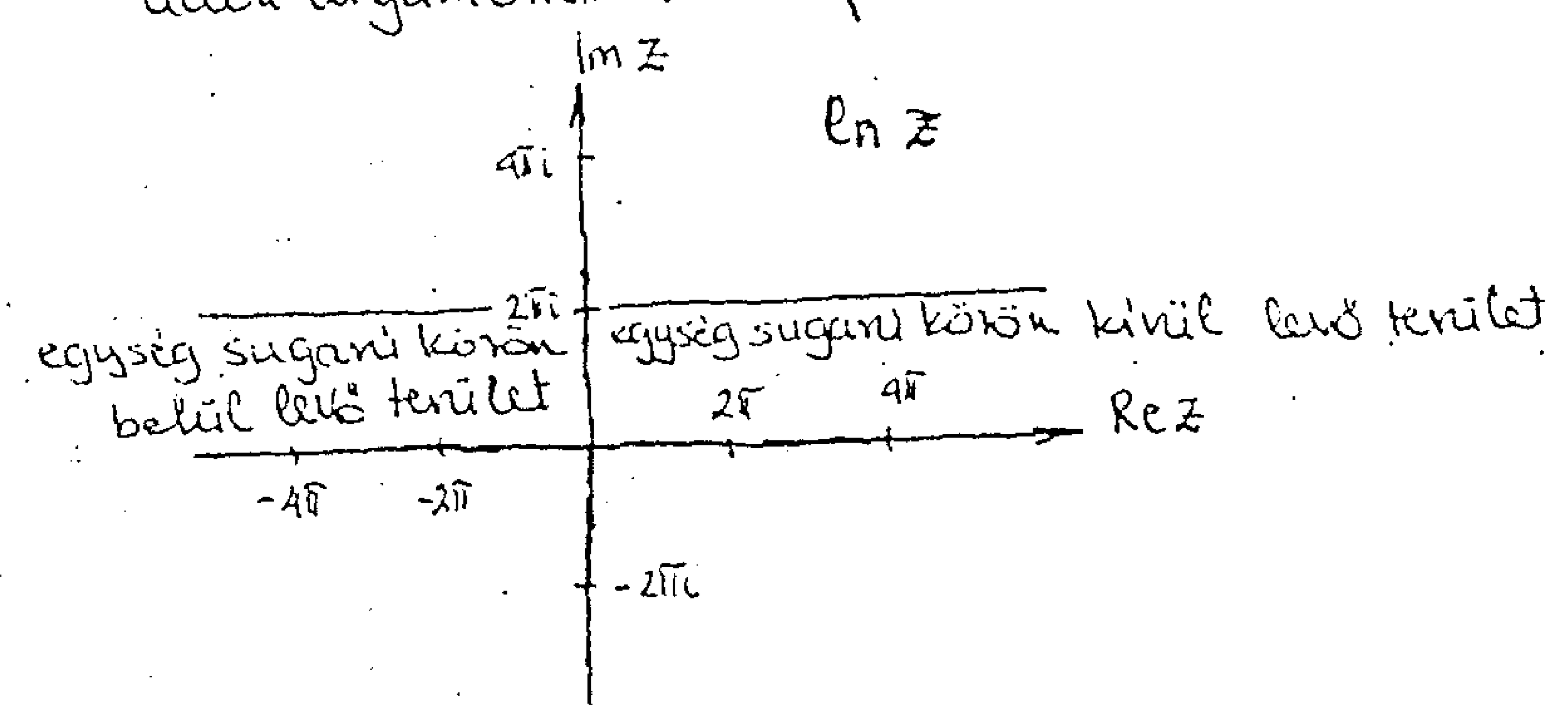
$$\ln z = \ln r + i(\varphi+2k\pi) \quad \text{ahol } k \in \mathbb{Z}.$$

A valós számokhoz tartozó pontok az $\ln z$-t ábrázoló Gauss-féle számsíkon egymástól 2π-re levő egyeneseken találhatók. Bármely egyenesen minden valós számhoz tartozik egy pont.





Az adott argumentumú komplex számok pedig az Re z tengellyel párhuzamos egyenesekre képződnek le: mindegyik egyenesre leképződik minden adott argumentumú komplex szám.



HATVÁNYOZÁS A KOMPLEX SZÁMOK KÖRÉBEN

Nézzük először azt, hogy mennyi e^z?

$$e^z = e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$$

Most vegyük az általánosabb esetet:

$$z_1^{z_2} = \left(r_1 e^{i(\varphi_1+2k\pi)}\right)^{(a_2+ib_2)} = \left(e^{\ln r_1} e^{i(\varphi_1+2k\pi)}\right)^{(a_2+ib_2)} = e^{[\ln r_1 + i(\varphi_1+2k\pi)](a_2+ib_2)} =$$

$$= e^{[a_2\ln r_1 - b_2(\varphi_1+2k\pi) + i[b_2 \ln r_1 + a_2(\varphi_1+2k\pi)]]} = e^{a_2\ln r_1 - b_2(\varphi_1+2k\pi)} e^{i[b_2\ln r_1 + a_2(\varphi_1+2k\pi)]}$$

$$= e^{a_2\ln r_1 - b_2(\varphi_1+2k\pi)}\left[\cos\left(b_2\ln r_1 + a_2(\varphi_1+2k\pi)\right) + i\sin\left(b_2 \ln r_1 + a_2(\varphi_1+2k\pi)\right)\right]$$

$$\boxed{z_1^{z_2} = e^{a_2\ln r_1 - b_2(\varphi_1+2k\pi)}\left[\cos\left[b_2\ln r_1 + a_2(\varphi_1+2k\pi)\right] + i\sin\left[b_2\ln r_1 + a_2(\varphi_1+2k\pi)\right]\right]}$$

Mennyi például i^i?

$$i^i = \left[e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}\right]^i = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

A GYÖKVONÁS:

Mennyi $\sqrt[n]{z}$?
$n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r e^{i(\varphi+2k\pi)}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi}{n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$$

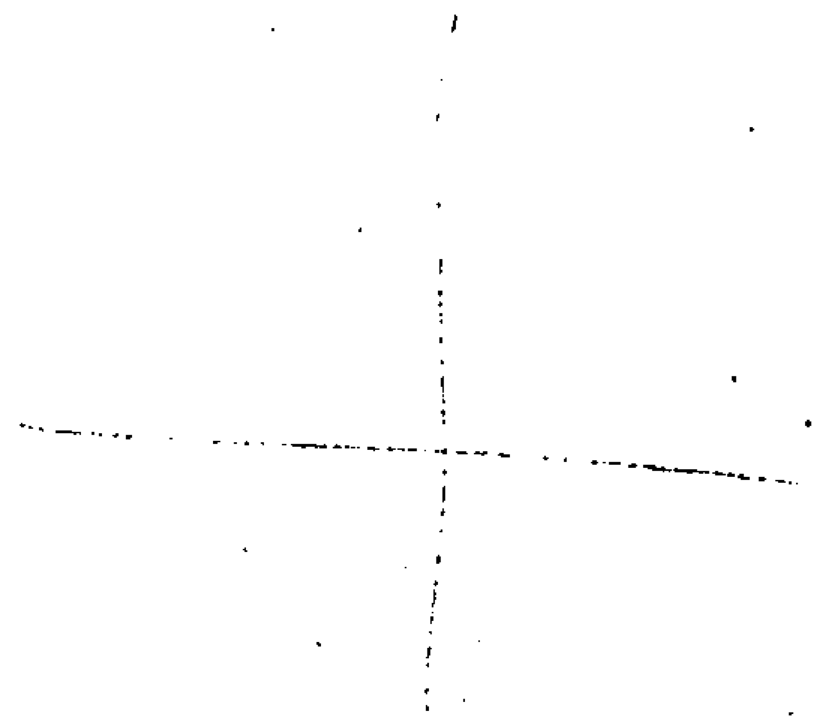
Ez azt jelenti, hogy n db gyök van. Ez az n db gyök egy szabályos n-szöget alkot a Gauss-féle számsíkon. Az n darab gyököt megkaphatjuk úgy, hogy k helyére $0, 1, 2, \ldots, n-1$ számokat helyettesítjük. Ha k helyére valamilyen más egész számot helyettesítünk, akkor a keletkező új gyök meg fog egyezni valamelyik régi gyökkel.

Jelölje ε_n^k a k-dik egységgyököt, tehát

$\varepsilon_n^k = e^{i\frac{2\pi k}{n}}$ ekkor teljesül $\varepsilon_n^k = (\varepsilon_n^1)^k$

két ábra a

[illegible]



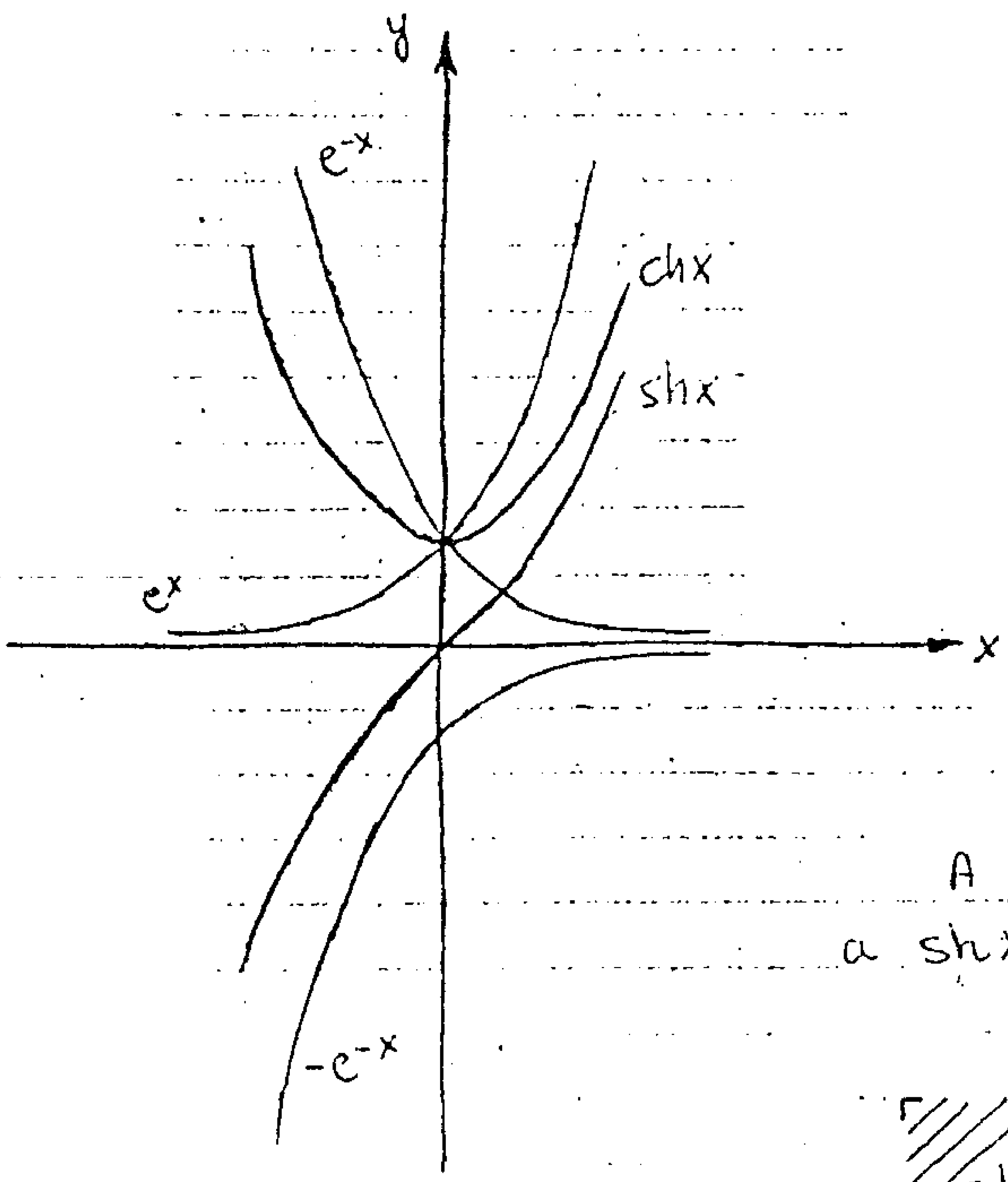
A HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK:

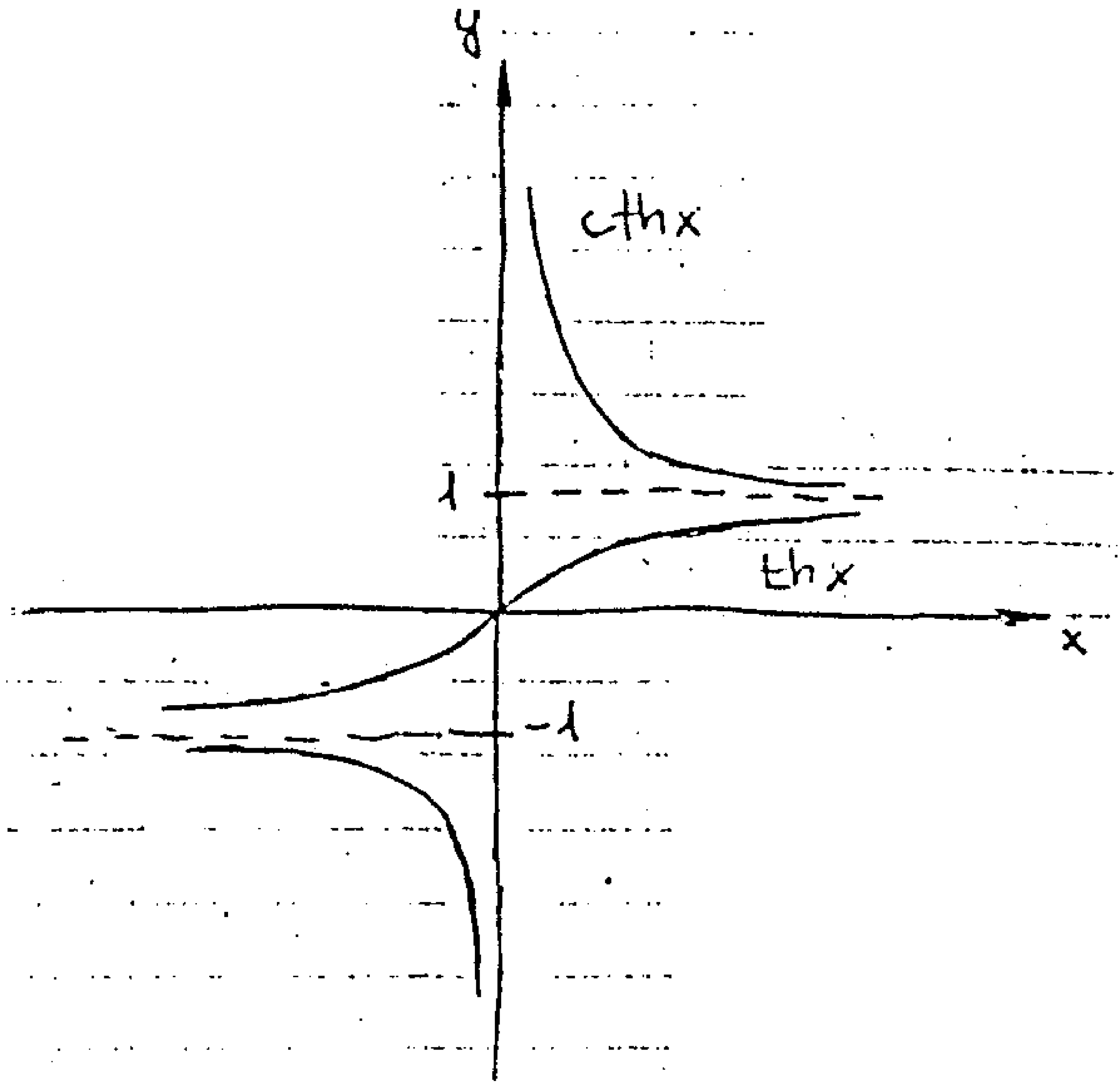
Tudjuk, hogy $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, mennyi $e^{-i\varphi}$?

$e^{-i\varphi} = +\cos\varphi - i\sin\varphi$, de a cos függvény párossága miatt $\cos\varphi = +\cos\varphi(-1)$

Tehát $\dfrac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} = \cos\varphi$ és $\dfrac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} = \sin\varphi$

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$





A sin z és cos z függvényekhez hasonlóan definiáljuk a shx és chx függvényeket:

$$\boxed{\begin{aligned} shx &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ chx &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\ \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \end{aligned}$$

A fenti képleteket jobban megnézve észrevehetjük a következő összefüggéseket:

$$\boxed{\begin{aligned} sh(ix) &= i\sin x \qquad & \sin(ix) &= i\,shx \\ ch(ix) &= \cos x \qquad & \cos(ix) &= chx \end{aligned}}$$

A tgx-hez és ctgx-hez hasonlóan definiáljuk a thx-t és cthx-et:

$$\boxed{thx = \frac{shx}{chx} \;,\; cthx = \frac{chx}{shx}}$$

Oldjuk meg például a sin(2+3i)-t

$$\sin(2+3i) = \frac{e^{i(2+3i)} - e^{-i(2+3i)}}{2i} = \frac{e^{2i-3} - e^{-2i+3}}{2i} = \frac{e^{2i}e^{-3} - e^{-2i}e^{3}}{2i} = \frac{(\cos 2 + i\sin 2)e^{-3} - (\cos 2 - i\sin 2)e^{3}}{2i}$$

$$= \frac{\cos 2(e^{-3} - e^{3}) + i\sin 2(e^{-3} + e^{3})}{2i} = \cos 2 \cdot \frac{e^{-3} - e^{3}}{2i} + \sin 2\, \frac{e^{3} + e^{-3}}{2} = \cos 2 \sin 3i + \sin 2 \cos 3i$$

Mennyi a $\sin z = 2$ egyenlet megoldása?
Vezessük le a képletet általános esetre:

$\sin z = p$, ahol $p \in \mathbb{R}$ tetszőleges szám

Definíció alapján: $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = p$

$$e^{iz} - \frac{1}{e^{iz}} = 2pi$$

$$(e^{iz})^2 - 2pie^{iz} - 1 = 0$$ Ez e^{iz}-re nézve másodfokú egyenlet.

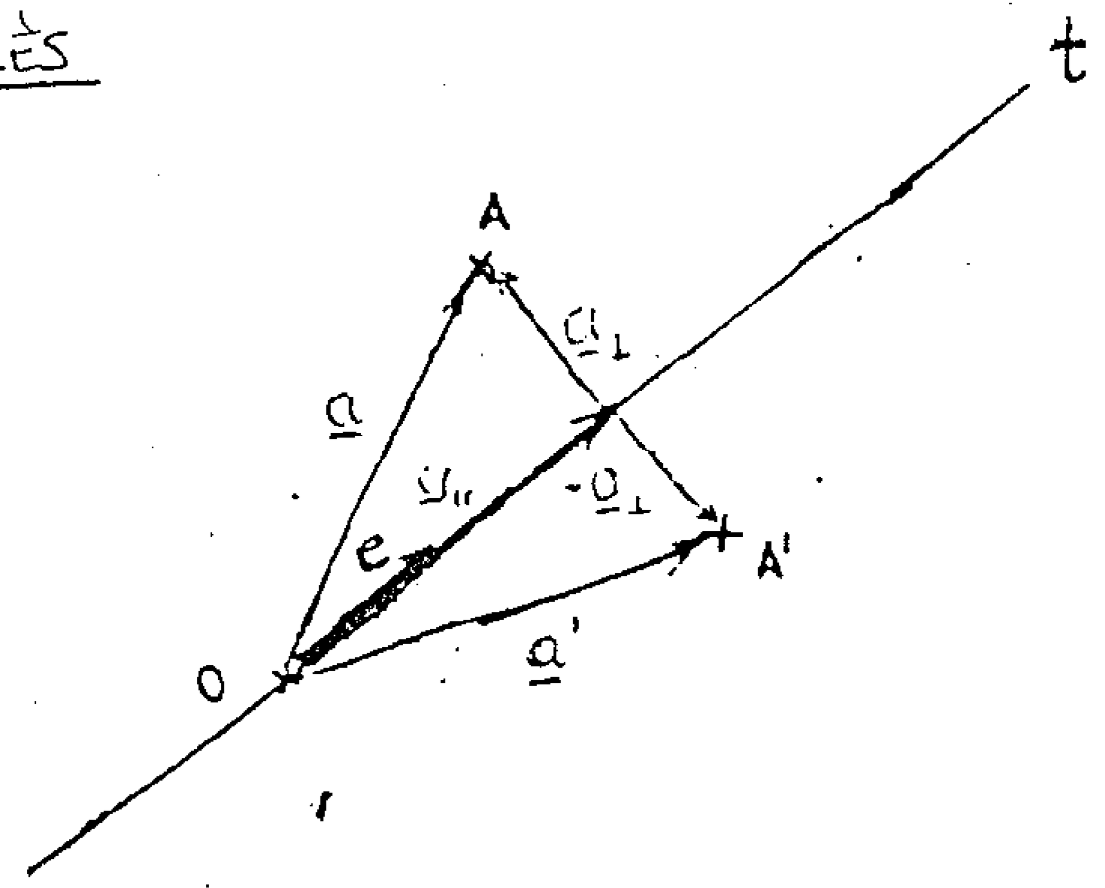
$$e^{iz}_{1,2} = \frac{2pi \pm \sqrt{4p^2i^2 + 4}}{2} = pi \pm \sqrt{1-p^2}$$

$$\ln\left[pi \pm \sqrt{1-p^2}\right] = i(z + 2k\pi) \quad \text{ahol } k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{i}\ln\left[pi \pm \sqrt{1-p^2}\right] - 2k\pi = z$$

Transzformációk

TÜKRÖZÉS



Az egyik legegyszerűbb transzformáció a tükrözés. Vegyük fel a t tengelyt, amelyre nézve a tükrözést végrehajtjuk. Jelöljünk ki egy tetszőleges C pontot a tengelyen.

Legyen $\underline{a}$ az O pontból az A pontba mutató vektor és $\underline{a}_\parallel$ valamint $\underline{a}_\perp$ az $\underline{a}$ vektor t tengellyel párhuzamos valamint merőleges komponensei.

Tehát:

(1) $\underline{a} = \underline{a}_\parallel + \underline{a}_\perp \longrightarrow \underline{a}_\perp = \underline{a} - \underline{a}_\parallel$

Most próbáljuk kifejezni az $\underline{a}'$ vektort, amely A pont tükrözettjébe mutat:

(2) $\underline{a}' = 2\underline{a}_\parallel - \underline{a}$ Behelyettesítve (2)-be $\underline{a}_\perp$ helyére (1)-t

Fejezzük ki az $\underline{a}_\parallel$ másképpen. Vegyük fel a t-vel párhuzamos egységvektort, $\underline{e}$-t. Ekkor:

(3) $\underline{a}_\parallel = |\underline{a}_\parallel|\underline{e} = (\underline{a}\underline{e})\underline{e}$ Behelyettesítve (2)-be

(2) $\underline{a}' = 2(\underline{a}\underline{e})\underline{e} - \underline{a}$

A tükrözést definiáljuk a következőképpen:

$$\boxed{\underline{a}' = 2(\underline{a}\underline{e})\underline{e} - \underline{a} = T\underline{a}}$$

ahol T egy operátor, mely a tükrözést jelzi

A lineáris operátor feltételei

$$\boxed{\begin{array}{c} T(\underline{a}+\underline{b}) = T\underline{a}+T\underline{b} \\ T(\alpha\underline{a}) = \alpha\, T(\underline{a}) \end{array}}$$

A T operátor definícióját úgy ellenőrizhetjük, hogy kétszer alkalmazzuk a T-t, azaz kétszer tükrözünk, ekkor elvileg vissza kell kapnunk az eredeti vektort. Lássuk:

$$(\underline{a}')' = 2(\underline{a}'\underline{e})\underline{e} - \underline{a}' = 2\Big[\big[2(\underline{a}\underline{e})\underline{e}-\underline{a}\big]\underline{e}\Big]\underline{e} - \big[2(\underline{a}\underline{e})\underline{e}-\underline{a}\big] = 2\big[2(\underline{a}\underline{e})(\underline{e}\underline{e})-(\underline{a}\underline{e})\big]\underline{e} - \big[2(\underline{a}\underline{e})\underline{e}-\underline{a}\big] =$$

$$= 2\big[2(\underline{a}\underline{e})-(\underline{a}\underline{e})\big]\underline{e} - 2(\underline{a}\underline{e})\underline{e} + \underline{a} = 2(\underline{a}\underline{e})\underline{e} - 2(\underline{a}\underline{e})\underline{e} + \underline{a} = \underline{a}$$

Tehát valóban $T^2\underline{a} = \underline{a}$ $\forall \underline{a} \in V$. Ezen kívül definiáljuk az ekvivalencia-transzformációt, amely nem csinál semmit az adott alakzattal: $E\underline{a} = \underline{a}$. Összefoglalva:

$$\boxed{\begin{array}{c} T^2\underline{a} = \underline{a} \\ E\underline{a} = \underline{a} \quad \forall \underline{a} \in V \\ T^2 = E \end{array}}$$

PROJEKCIÓ:

Most pedig szóljunk pár szót a vetítésről, azaz projekcióról. A projekciót a következőképpen definiáljuk:

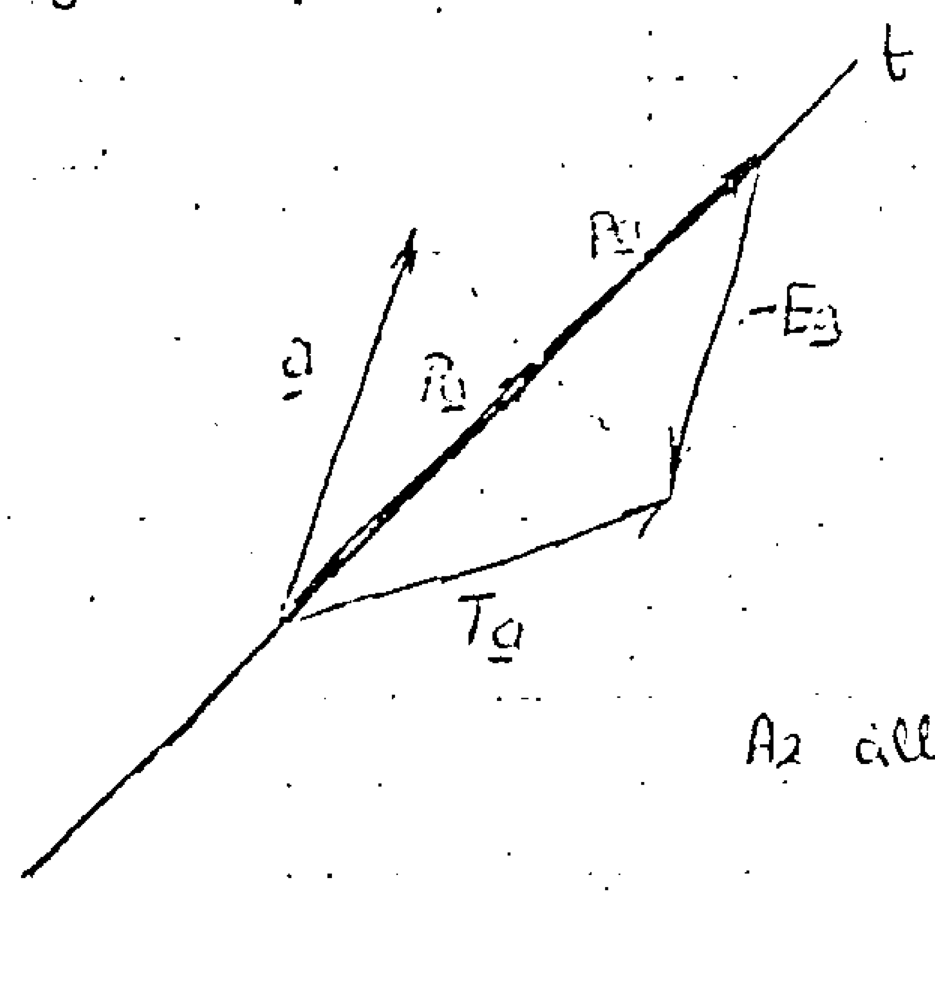
$P\underline{a} = (\underline{a}\underline{e})\underline{e}$ ahol az a vektort az $\underline{e}$ vektor egyenesére vetítjük.

A definíció helyességét könnyen ellenőrizhetjük. Hajtsunk végre egy adott vektoron egy kétszeres projekciót. Értelemszerűen ha egy vektort levetítettünk, akkor a keletkező vektort egy újabb vetítés — ugyanolyan projekcióról van szó — nem változtatja meg:

$$P^2\underline{a} = P(P\underline{a}) = P\big[(\underline{a}\underline{e})\underline{e}\big] = \big[[(\underline{a}\underline{e})\underline{e}]\underline{e}\big]\underline{e} = (\underline{a}\underline{e})(\underline{e}\underline{e})\underline{e} = (\underline{a}\underline{e})\underline{e} = P\underline{a}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} P^2\underline{a} = P\underline{a} \\ \forall \underline{a} \in V \end{array}}$$

Milyen kapcsolatban vannak egymással a projekció és a tükrözés?

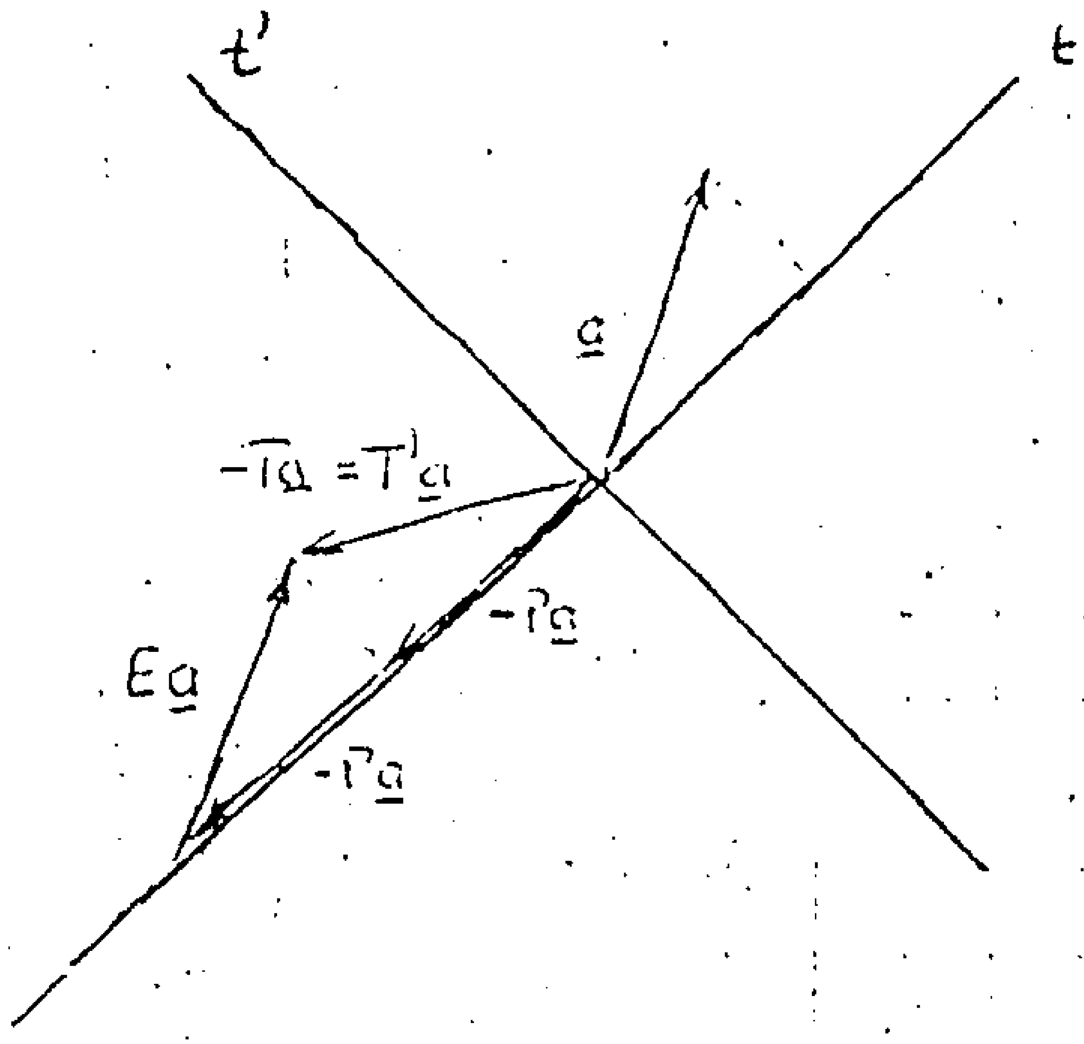


$$T\underline{a} = 2(\underline{a}\underline{e})\underline{e} - \underline{a} = 2P\underline{a} - E\underline{a} = (2P-E)\underline{a}$$

$$\boxed{T = 2P - E}$$

A tükrözés és a projekció azonos egyenesre történik

Az állítás helyessége egyébként az ábrán is ellenőrizhető.



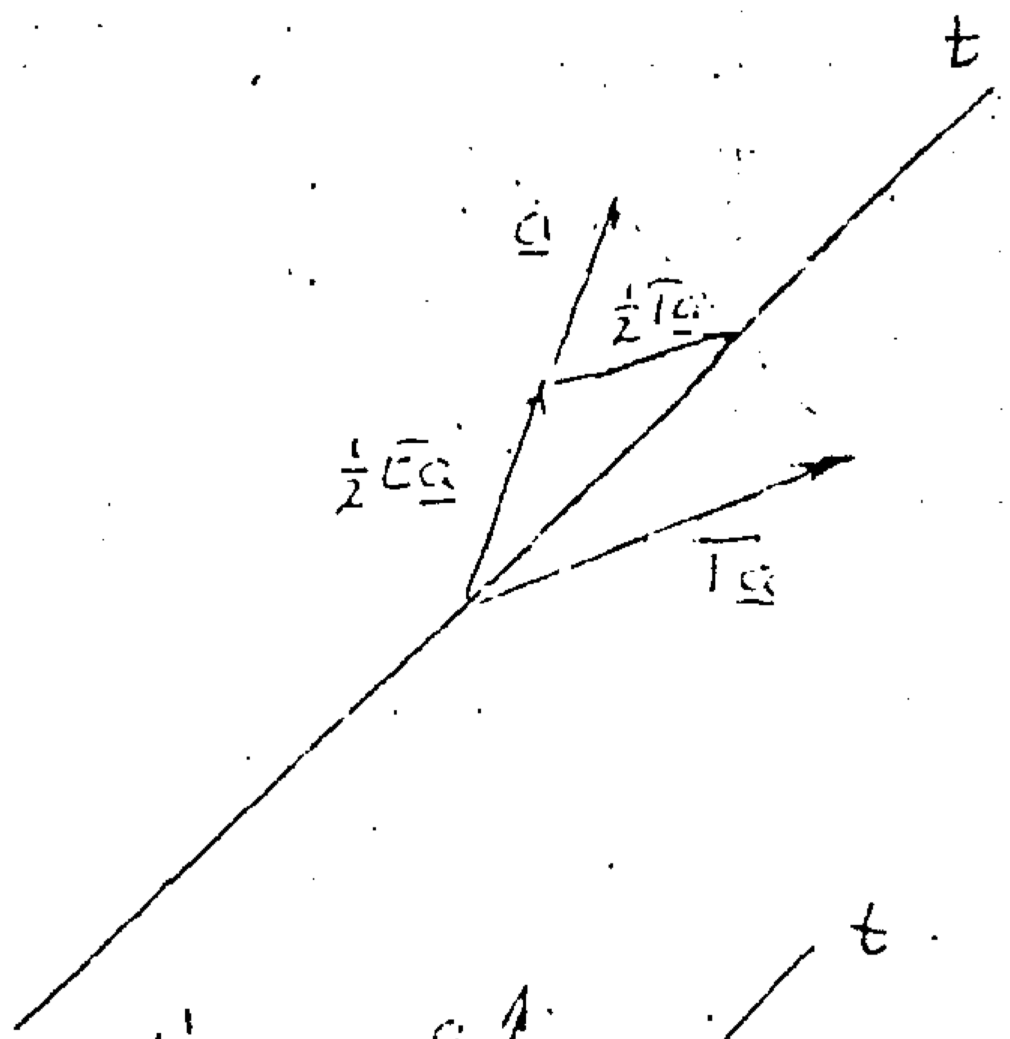
A $T = 2P - E$ egyenletet -1-gyel szorozva azt kapjuk, hogy

$$E - 2P = -T$$

Az $E-2P$ transzformációt végrehajtva kiderül, hogy $-T$ olyan tükrözést jelent, mely az eredeti egyenesre merőleges egyenesre történik.
Ellenőrizzük az eredményt:

$$-T(Ta) = -T^2 a = -Ea = -a$$

Közelítsük meg máshonnan a kérdést. Fejezzük ki a projekciót a másik két transzformációval:

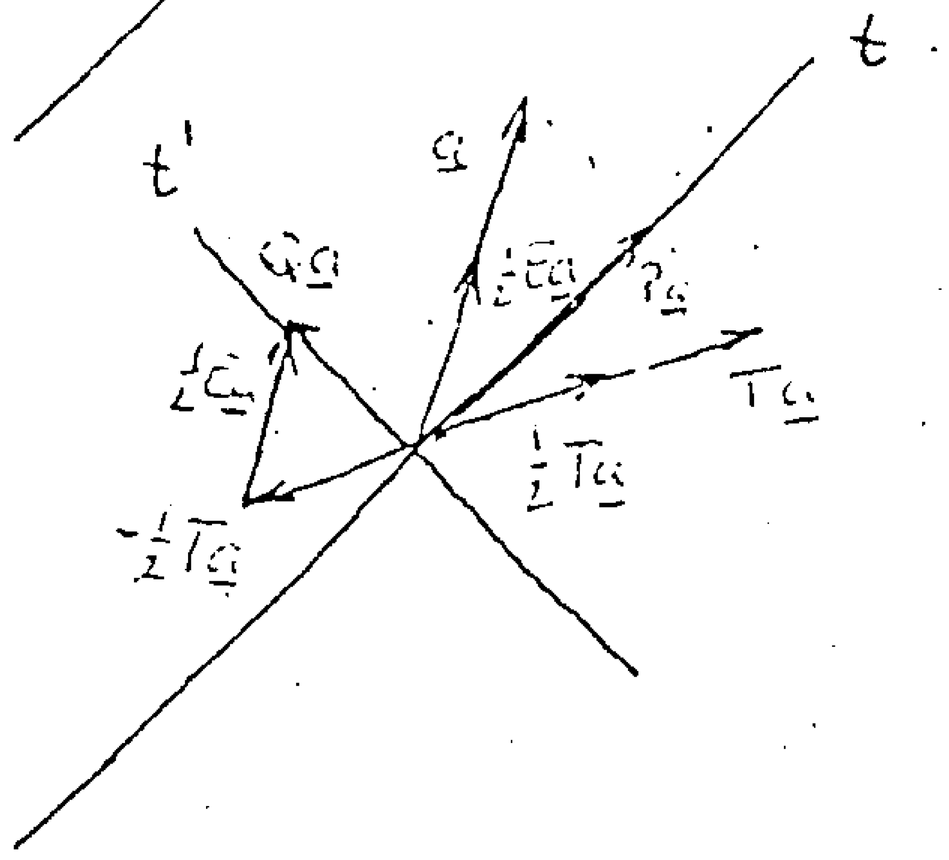


$$P = \frac{1}{2}(E+T)$$

ahol a projekció és a tükrözés azonos egyenesre történik. Tegyünk egy próbát, mennyi P^2?

$$P^2 = \frac{1}{4}(E+T)(E+T) = \frac{1}{4}\left(E^2 + ET + TE + T^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(E+T+T+E) = \frac{1}{2}(E+T) = P$$ jó eredményt kaptunk



Definiáljuk a $Q = \frac{1}{2}(E-T)$ transzformációt

Ha elvégezzük az $\frac{1}{2}(E-T)$ transzformációt, akkor rájönünk hogy ez tulajdonképpen egy projekció, azonban ez a projekció nem arra a tengelyre történik, amelyre a tükrözés és a P projekció, hanem egy arra merőleges tengelyre.
Értelemszerűen:

$$P + Q = E$$

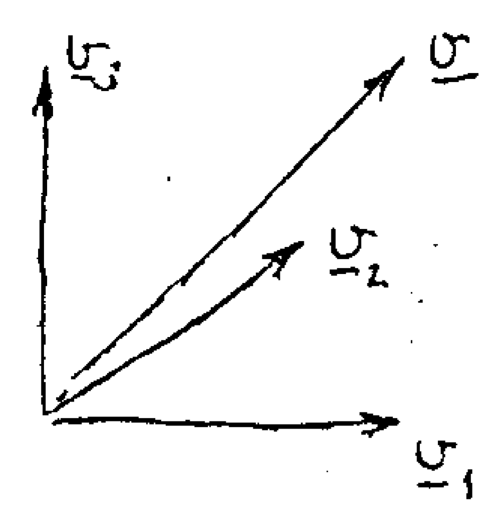
Összefoglalva:

$$\boxed{P = \frac{1}{2}(E+T) \qquad Q = \frac{1}{2}(E-T) \qquad P + Q = E}$$

Mi lesz, ha a P és a Q transzformációkat egymás után hajtjuk végre?

$$PQ = \frac{1}{2}(E+T)\frac{1}{2}(E-T) = \frac{1}{4}(EE + TE - ET - TT) = \frac{1}{4}(E + T - T - E) = 0$$

ORTOGONÁLIS PROJEKTORRENDSZER:



Az ortogonális projektorrendszer feltételei:

$$\boxed{P_k P_l = \delta_{kl} P_k \qquad \sum_k P_k = E}$$

AZ OPERÁTOROK TULAJDONSÁGAI:

A, B és C operátorok

$A+B=C$ $(5A)\underline{v}=5(A\underline{v})$ $A+0=A$. $(-A)\underline{v}=-(A\underline{v})$

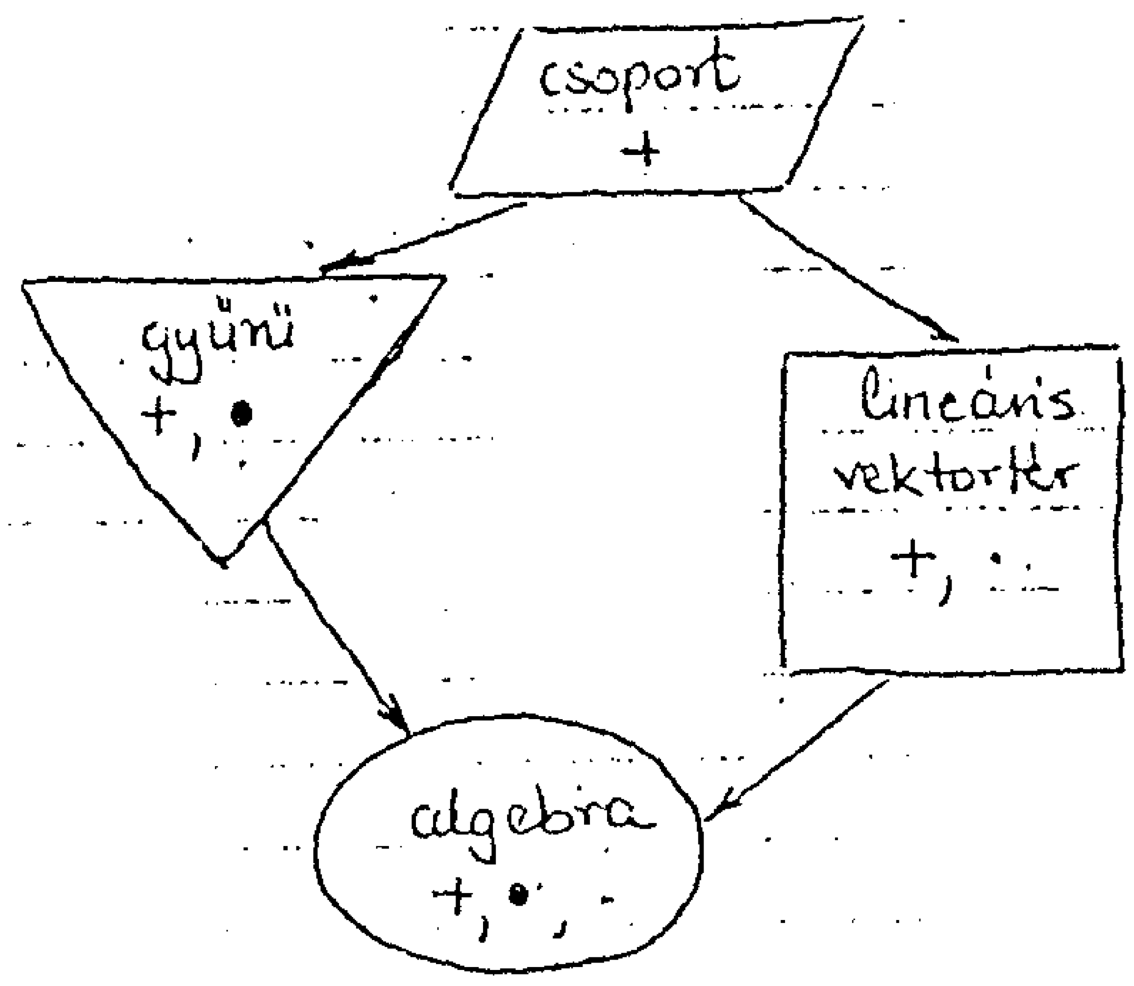
azaz   azaz

$A\underline{v}+B\underline{v}=C\underline{v}$ $A\underline{v}+0\underline{v}=A\underline{v}$

Az operátorok az összeadásra nézve csoportot alkotnak
Azonban például a szorzás nem kommutatív, tehát

$$A(B\underline{v})\neq B(A\underline{v})$$

A CSOPORT ÉS TSAI:



MÁTRIXOK A KÖZGÁZON:

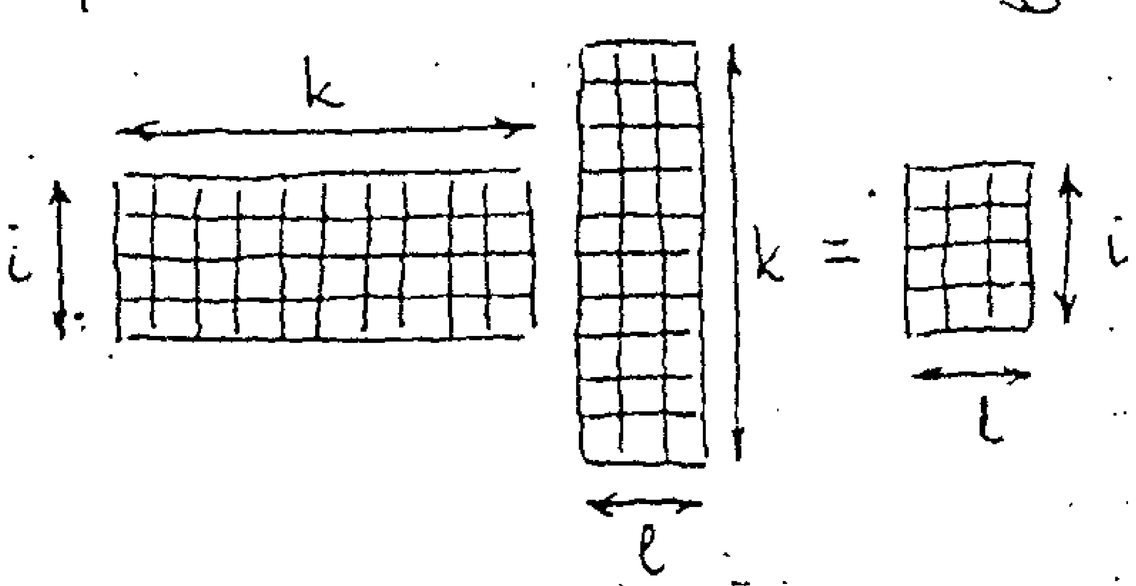
$$\begin{pmatrix} 5\text{kg kenyér} & 2\text{l tej} & 1\text{db konzerv} & 3\text{üveg sör} \\ 3\text{kg kenyér} & 1\text{l tej} & 0\text{db konzerv} & 6\text{üveg sör} \\ 1\text{kg kenyér} & 0\text{l tej} & 0\text{db konzerv} & 10\text{üveg sör} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60\text{Ft} & 7\text{schilling} \\ 34\text{Ft} & 5\text{schilling} \\ 41\text{Ft} & 5{,}5\text{schilling} \\ 52\text{Ft} & 6\text{schilling} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 565\text{Ft} & 68{,}5\text{schilling} \\ 526\text{Ft} & 62\text{schilling} \\ 580\text{Ft} & 67\text{schilling} \end{pmatrix}$$

Vegyünk például egy háziasszonyt. Egy nap vesz 5kg kenyeret, 2l tejet, 1db konzervet és 3üveg sört. Mennyit költött el, ha az árucikkek a megfelelő sorrendben 60Ft, 34Ft, 41Ft, és 52Ft értékűek? A bal oldali mátrix első sorának elemeit kell szorozni a jobb oldali mátrix első oszlopának megfelelő elemeivel.

Mennyit költött a második napon? Az eredményt úgy kapjuk, hogy a bal oldali mátrix második sorának elemeit megszorozzuk a jobb oldali mátrix első oszlopának megfelelő elemeivel.

Tegyük fel, hogy a pesti háziasszonynak van egy Bécsben élő testvére, és ő szintén ugyanezeket az árucikkeket vásárolja. Mennyit költött a bécsi háziasszony például a második nap? Ehhez az első mátrix második sorának elemeit kell megszorozni a második mátrix második oszlopának megfelelő elemeivel.

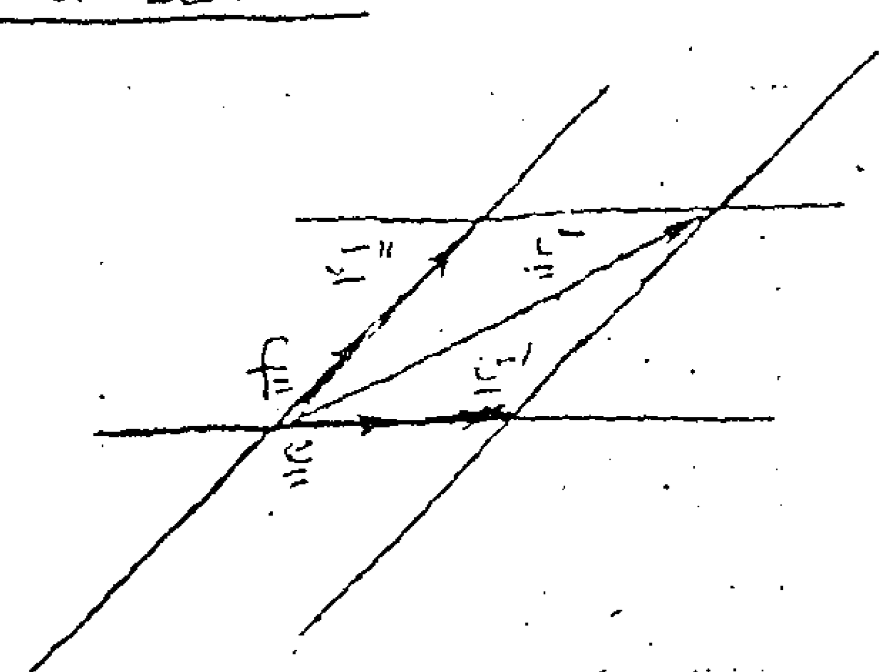
A mátrixszorzást a következőképpen definiáljuk. Csak olyan mátrixok között végezhető el a szorzás, ahol az első mátrixnak ugyanannyi oszlopa van, mint ahány sora a másodiknak:

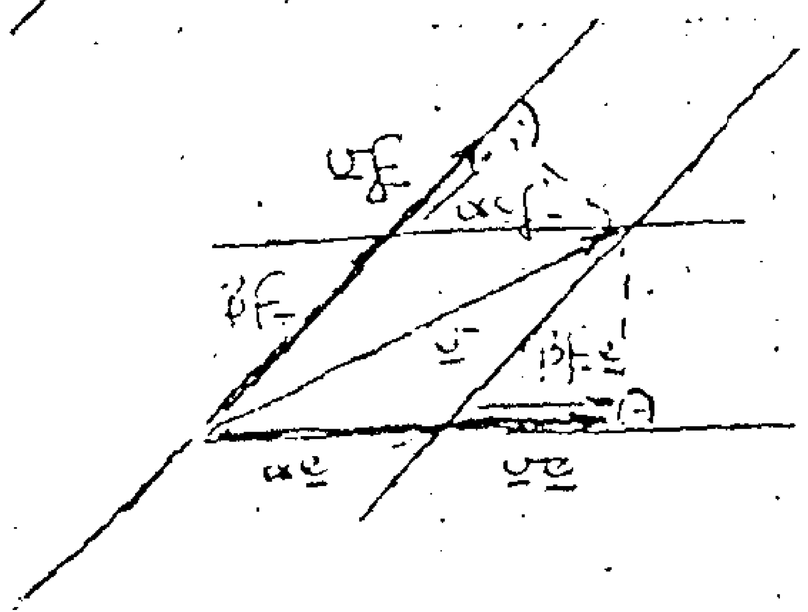


$$c_{il} = a_i b_l$$

ahol c_{il} az eredménymátrix i-dik sorának, l-dik oszlopában levő eleme.

HÁZI FELADAT:





Vegyünk fel egy ferdeszögű koordinátarendszert, melynek két egységvektora $\underline{e}$ és $\underline{f}$. Vegyünk egy tetszőleges $\underline{v}$ vektort. Mekkora a $\underline{v}'$ vetületvektor?

Legyen $\underline{v}' = \alpha\underline{e}$ és $\underline{v}'' = \beta\underline{f}$ ekkor

(1) $\underline{v}\underline{e} = \alpha + \beta\underline{f}\underline{e}$

(2) $\underline{v}\underline{f} = \alpha\underline{e}\underline{f} + \beta$

(1) $\beta = \dfrac{\underline{v}\underline{e} - \alpha}{\underline{e}\underline{f}}$ (2) $\beta = \underline{v}\underline{f} - \alpha\underline{e}\underline{f}$

(1)+(2) $\dfrac{\underline{v}\underline{e} - \alpha}{\underline{e}\underline{f}} = \underline{v}\underline{f} - \alpha\underline{e}\underline{f}$

$$\underline{v}\underline{e} - \alpha = (\underline{v}\underline{f})(\underline{e}\underline{f}) - \alpha(\underline{e}\underline{f})^2$$

$$\alpha\left[(\underline{e}\underline{f})^2 - 1\right] = (\underline{v}\underline{f})(\underline{e}\underline{f}) - \underline{v}\underline{e}$$

$$\alpha = \frac{(\underline{v}\underline{f})(\underline{e}\underline{f}) - \underline{v}\underline{e}}{(\underline{e}\underline{f})^2 - 1}$$

$$\underline{v}' = \frac{(\underline{v}\underline{f})(\underline{e}\underline{f}) - \underline{v}\underline{e}}{(\underline{e}\underline{f})^2 - 1}\,\underline{e}$$

A VEKTORIÁLIS HÁRMASSZORZAT:

$$[(\underline{a}\times\underline{b})\times\underline{c}]_i = \sum_{kl}\varepsilon_{ikl}(\underline{a}\times\underline{b})_k c_l = \sum_{kl}\varepsilon_{ikl}\Big(\sum_{mp}\varepsilon_{kmp}a_m b_p\Big)c_l = \sum_{klmp}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{kmp}a_m b_p c_l =$$

$$= \sum_{klmp}\varepsilon_{kli}\varepsilon_{kmp}a_m b_p c_l = \sum_{lmp}a_m b_p c_l\Big(\sum_k \varepsilon_{kli}\varepsilon_{kmp}\Big) = \sum_{lmp}a_m b_p c_l(\delta_{lm}\delta_{ip} - \delta_{lp}\delta_{im}) =$$

$$= \sum_{lm}\sum_p a_m b_p c_l(\delta_{lm}\delta_{ip} - \delta_{lp}\delta_{im}) = \sum_{lm}(a_m b_i c_l\delta_{lm} - a_m b_l c_l\delta_{im}) = \sum_l\sum_m(a_m b_i c_l\delta_{lm} - a_m b_l c_l\delta_{im})$$

$$= \sum_l(a_l b_i c_l - a_i b_l c_l) = b_i\sum_l a_l c_l - a_i\sum_l b_l c_l = b_i(\underline{a}\underline{c}) - a_i(\underline{b}\underline{c})$$

$$(\underline{a}\times\underline{b})\times\underline{c} = \underline{b}(\underline{a}\underline{c}) - \underline{a}(\underline{b}\underline{c})$$

$$\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) = \underline{b}(\underline{c}\underline{a}) - \underline{c}(\underline{a}\underline{b})$$

VEKTOROK NÉGYESSZORZATAI: a vektorok négyesszorzatait a vektoriális hármasszorzatnál levezetett képlet segítségével lehet kiszámítani.

$(\underline{a}\times\underline{b})\times(\underline{c}\times\underline{d}) =$ legyen $(\underline{c}\times\underline{d}) = \underline{e}$, ekkor $(\underline{a}\times\underline{b})\times(\underline{c}\times\underline{d}) = (\underline{a}\times\underline{b})\times\underline{e} =$

$$= \underline{b}(\underline{a}\underline{e}) - \underline{a}(\underline{b}\underline{e}) = \underline{b}[\underline{a}(\underline{c}\times\underline{d})] - \underline{a}[\underline{b}(\underline{c}\times\underline{d})] = \underline{b}(\underline{a},\underline{c},\underline{d}) - \underline{a}(\underline{b},\underline{c},\underline{d})$$

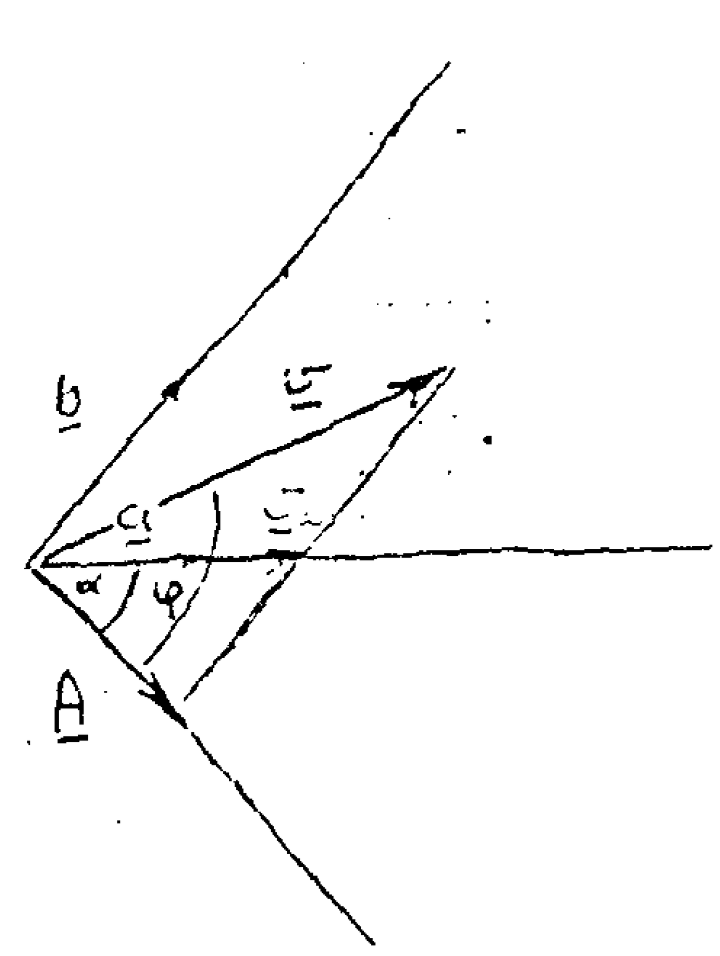
$$(\underline{a}\times\underline{b})\times(\underline{c}\times\underline{d}) = \underline{b}(\underline{a},\underline{c},\underline{d}) - \underline{a}(\underline{b},\underline{c},\underline{d})$$

$(\underline{a}\times\underline{b})(\underline{c}\times\underline{d}) =$ legyen $(\underline{c}\times\underline{d}) = \underline{e}$, ekkor $(\underline{a}\times\underline{b})(\underline{c}\times\underline{d}) = (\underline{a}\times\underline{b})\underline{e} = (\underline{a},\underline{b},\underline{e}) =$

$$= (\underline{e},\underline{a},\underline{b}) = (\underline{e}\times\underline{a})\underline{b} = [(\underline{c}\times\underline{d})\times\underline{a}]\underline{b} = [\underline{d}(\underline{c}\underline{a}) - \underline{c}(\underline{d}\underline{a})]\underline{b} = (\underline{b}\underline{d})(\underline{c}\underline{a}) - (\underline{b}\underline{c})(\underline{a}\underline{d})$$

$$(\underline{a}\times\underline{b})(\underline{c}\times\underline{d}) = (\underline{a}\underline{c})(\underline{b}\underline{d}) - (\underline{a}\underline{d})(\underline{b}\underline{c})$$

A RECIPROK VEKTOROK EGY ALKALMAZÁSA: VETÜLETEK FERDESZÖGŰ KOORDINÁTA RENDSZEREKBEN



Fejezzük ki a $\underline{v}$ vektort $\underline{a},\underline{b}$ és ezek reciprok vektorainak segítségével. Csak egy síkban levő vektorokról van most szó.

(1) $\underline{v}\underline{A} = |\underline{v}||\underline{A}|\cos\varphi = |\underline{A}|\, v_\perp$

(1) $v_\perp = \dfrac{\underline{v}\underline{A}}{|\underline{A}|}$

(2) $|\underline{v}_a| = \dfrac{v_\perp}{\cos\alpha}$

Behelyettesítve $v_\perp$ helyére (1)-t

(2) $|\underline{v}_a| = \dfrac{\underline{v}\underline{A}}{|\underline{A}|\cos\alpha}$

Mekkorák a vetületvektorok, azaz $\underline{v}_a$ és $\underline{v}_b$; alkalmazzuk a reciprokvektorokat.

A reciprokvektorokról tudjuk:

$(3)\quad \underline{v}_a = |\underline{v}_a| \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$

$\underline{A}\underline{b} = 0 \quad \underline{B}\underline{a} = 0$

Behelyettesítve $|\underline{v}_a|$ helyébe (2)-t

$\underline{A}\underline{a} = 1 \quad \underline{B}\underline{b} = 1$

$$(3)\quad \underline{v}_a = \frac{(\underline{v}\underline{A})}{|\underline{A}|\cos\alpha\,|\underline{a}|}\underline{a} = \frac{(\underline{v}\underline{A})}{(\underline{a}\underline{A})}\underline{a} = (\underline{v}\underline{A})\underline{a},$$

Ugyanúgy

$$(4)\quad \underline{v}_b = (\underline{v}\underline{B})\underline{b} \qquad \text{tehát}$$

$$\underline{v} = (\underline{v}\underline{A})\underline{a} + (\underline{v}\underline{B})\underline{b}$$

Most vegyük a háromdimenziós teret, a reciprokvektorokra itt is ugyanaz igaz, mint a kétdimenziós esetben:

$$\underline{A}^{(l)}\underline{a}^{(k)} = \delta_{kl}$$

Az előző képletet is ki lehet terjeszteni háromdimenziós esetre. Legyen $\underline{a}^{(1)}, \underline{a}^{(2)}$ és $\underline{a}^{(3)}$ három nem komplanáris vektor. Mennyi egy adott $\underline{v}$ vektor felbontása ebben a koordinátarendszerben?

$$\underline{v} = \sum_k (\underline{v}\underline{A}^{(k)})\underline{a}^{(k)}$$

$\underline{v}_l = (\underline{v}\underline{A}^{(l)})\underline{a}^{(l)}$ ez tulajdonképpen egy operáció, és így kifejezhető operátor alakban:

$$\underline{v}_l = P_l \underline{v} \qquad \text{természetesen} \quad \sum_l P_l = E \quad \text{így}$$

$$\underline{v} = \sum_l P_l \underline{v} \qquad P_l \underline{v} = (\underline{v}\underline{A}^{(l)})\underline{a}^{(l)}$$

Mi történik, ha két operátort kombinálunk, azaz egymás után két projekciót hajtunk végre?

$$P_l P_k = P_l(P_k \underline{v}) = P_l\left[(\underline{v}\underline{A}^{(k)})\underline{a}^{(k)}\right] = (\underline{v}\underline{A}^{(k)})P_l\underline{a}^{(k)} = (\underline{v}\underline{A}^{(k)})(\underline{a}^{(k)}\underline{A}^{(l)})\underline{a}^{(l)} =$$

$$= (\underline{v}\underline{A}^{(k)})\delta_{kl}\,\underline{a}^{(l)} = (\underline{v}\underline{A}^{(k)})\underline{a}^{(k)}\delta_{kl} = \delta_{kl} P_k \underline{v} \qquad \text{azaz}$$

$$P_k P_l = \delta_{kl} P_k$$

MI A DIMENZIÓ?

Legyen $\underline{a}^{(i)} \in V$. Nyilvánvalóan:

$$\{\underline{a}^{(i)}\}_{i=1}^{n} \text{-hez } \exists \alpha_i \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{a}^{(i)} = 0$$

Ha az egyenletnek csak a triviális $\alpha_i = 0$ megoldása van akkor az $\underline{a}^{(i)}$ vektorokat lineárisan függetlennek hívjuk.

A dimenzió a lineárisan független vektorok maximális száma.

Egy adott n dimenziós térben ndb egymástól lineárisan független vektorral bármely vektor kifejezhető:

$$\underline{v} \quad \{\underline{a}^{(i)}\}_{i=n}^{n} \quad \text{ekkor}$$

$$\alpha_0 \underline{v} + \alpha_1 \underline{a}^{(1)} + \alpha_2 \underline{a}^{(2)} + \ldots + \alpha_n \underline{a}^{(n)} = 0$$

$$\underline{v} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} \underline{a}^{(1)} - \frac{\alpha_2}{\alpha_0} \underline{a}^{(2)} - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_0} \underline{a}^{(n)}$$

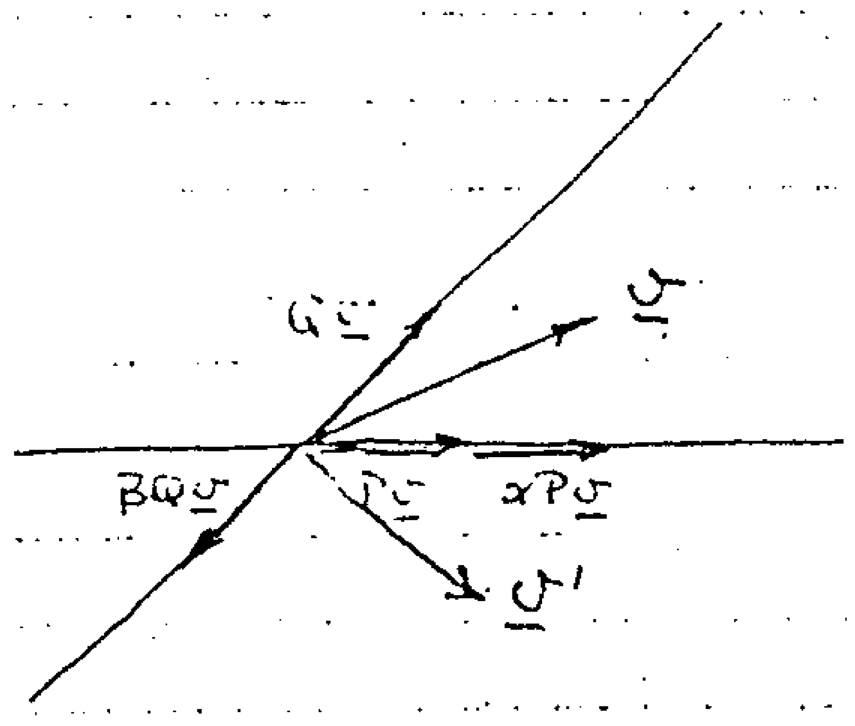
a kifejtés egyértelmű, ezt indirekt módon tudjuk bizonyítani. Tegyük fel ugyanis, hogy a kifejtés nem egyértelmű, ekkor:

$$\underline{v} = \sum_k \alpha_k \underline{a}^{(k)} = \sum_k \beta_k \underline{a}^{(k)}$$

$$\underline{0} = \sum_k (\alpha_k - \beta_k) \underline{a}^{(k)} = \sum_k \gamma_k \underline{a}^{(k)}$$

A lineáris függetlenség miatt $\gamma_k = 0$, tehát $\alpha_k = \beta_k$

KÉT LINEÁRIS OPERÁTOR ÖSSZEGÉRŐL:



P és Q két operátor $P^2 = P$, $Q^2 = Q$, $PQ = QP = 0$, $P + Q = E$

$$P\underline{v} = (\underline{v}\underline{A})\underline{a} \quad \text{és} \quad Q\underline{v} = (\underline{v}\underline{B})\underline{b}$$

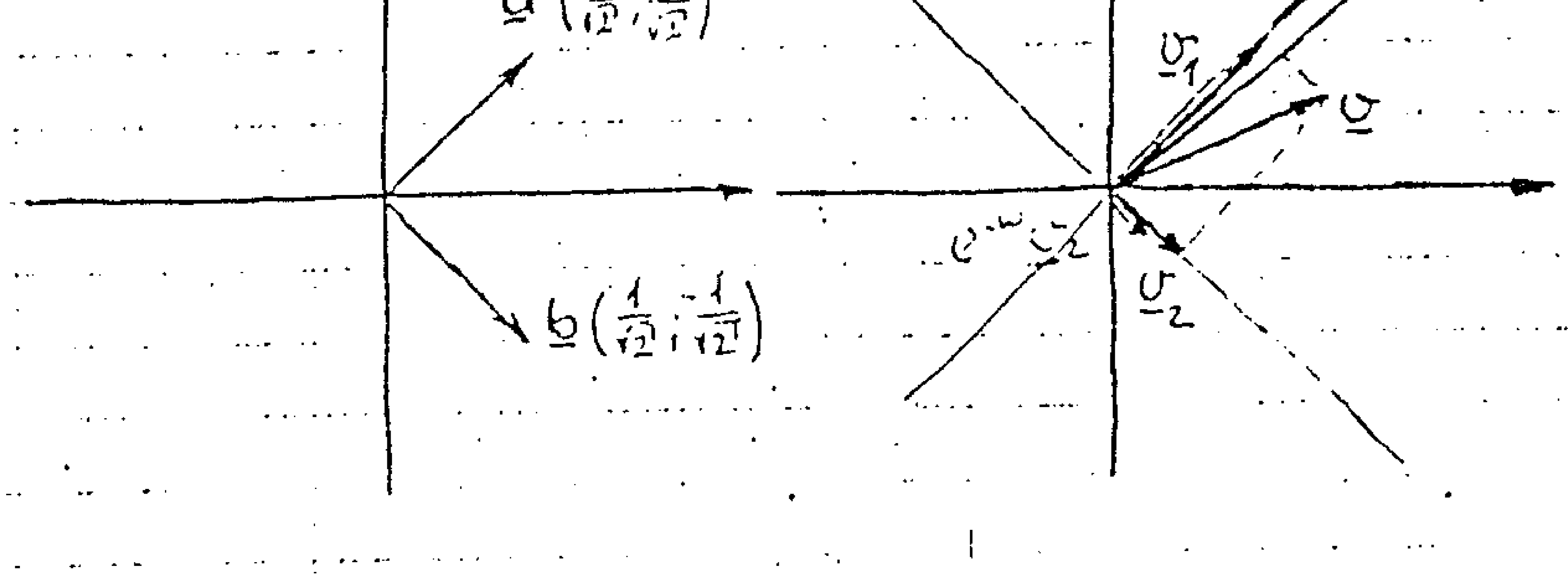
Szorozzuk meg az egyik vetületet 2-vel, a másikat −1-gyel. A keletkező ~~lineáris~~ R operátor szintén lineáris lesz

Ha P és Q lineáris operátorok valamint $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ akkor

$$R = \alpha P + \beta Q$$

szintén lineáris operátor

A LORENTZ TRANSZFORMÁCIÓ:



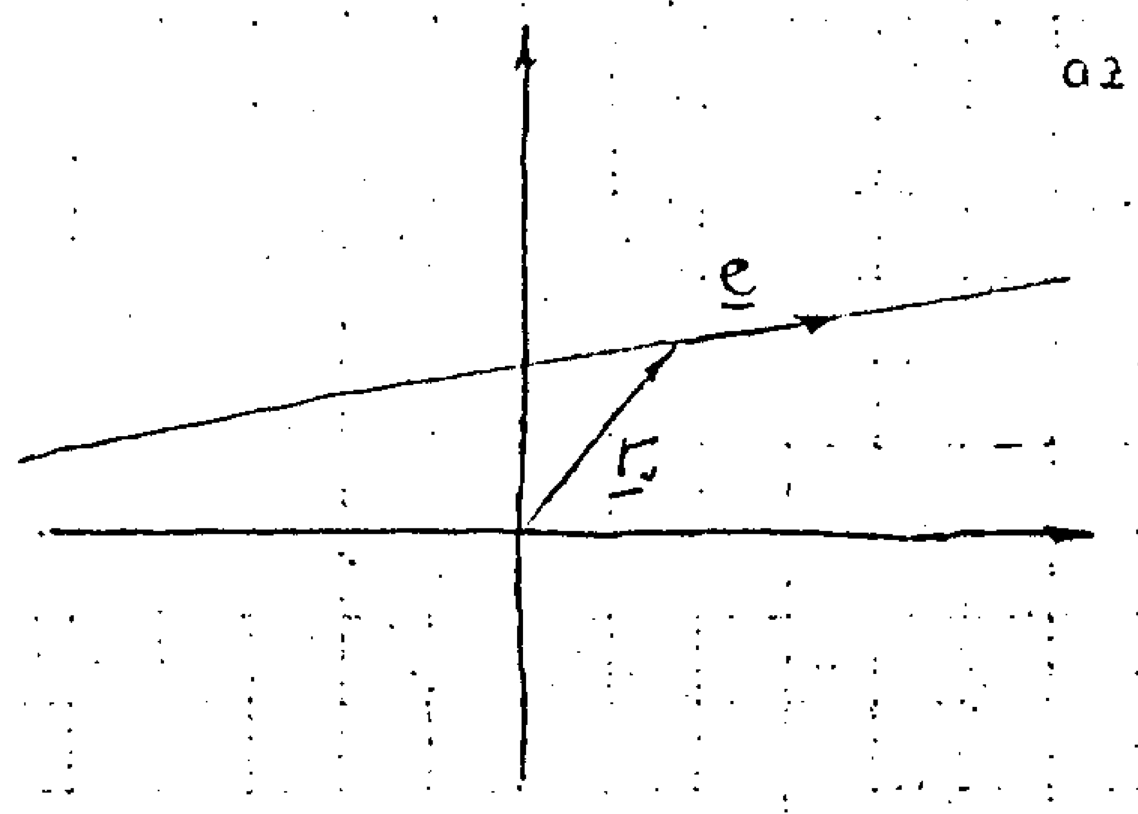
Vegyük fel az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ egységvektorokat a koordinátarendszer szögfelezőin. Ekkor:

$$\underline{v}_1 = (\underline{v}\underline{a})\underline{a} \quad \text{és} \quad \underline{v}_2 = (\underline{v}\underline{b})\underline{b}$$

Definiáljuk a $\underline{v}'$ vektort a következőképpen:

$$\underline{v}' = e^{\omega}(\underline{v}\underline{a})\underline{a} + e^{-\omega}(\underline{v}\underline{b})\underline{b}$$

Mit tudunk erről a transzformációról? Mit csinál e transzformáció egy egyenessel?



az egyenes egyenlete $\underline{r} = \underline{r}_0 + \underline{e}t$ ahol $t \in \mathbb{R}$ $-\infty$ t ∞

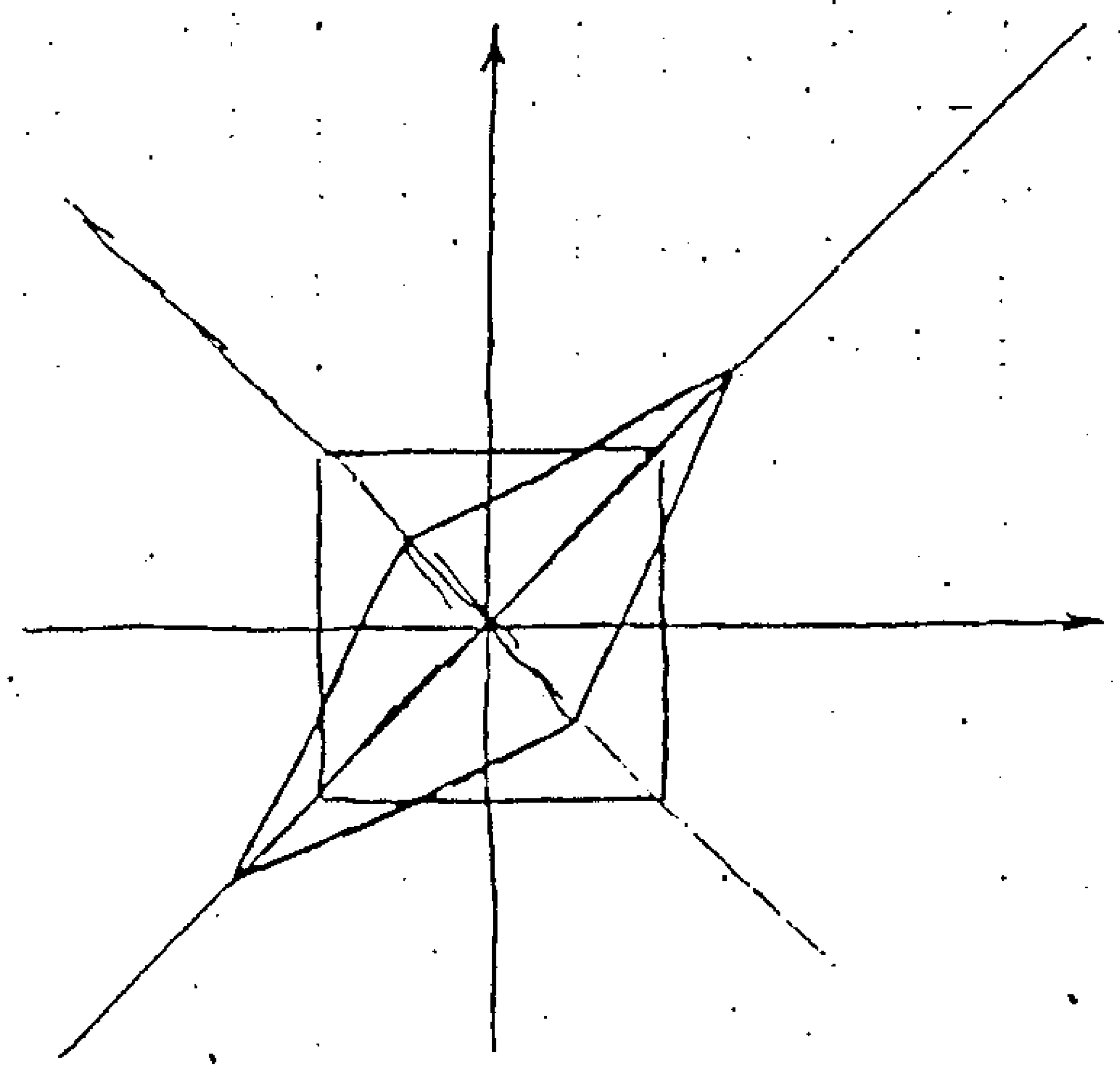
$$\underline{r}' = P\underline{r} = P(\underline{r}_0 + \underline{e}t) =$$

$$= P(\underline{r}_0) + P(\underline{e}t) = P(\underline{r}_0) + tP(\underline{e}) =$$

$$= \underline{r}_0' + t\underline{e}'$$

azaz a transzformáció az egyenesből egyenest csinál.

Mit művel ez a transzformáció egy négyzettel, amelynek középpontja egybeesik az origóval?



Ha a négyzet átlójának hossza d, akkor a keletkező rombusz egyik átlójának hossza

$$d_1 = e^{\omega} d$$

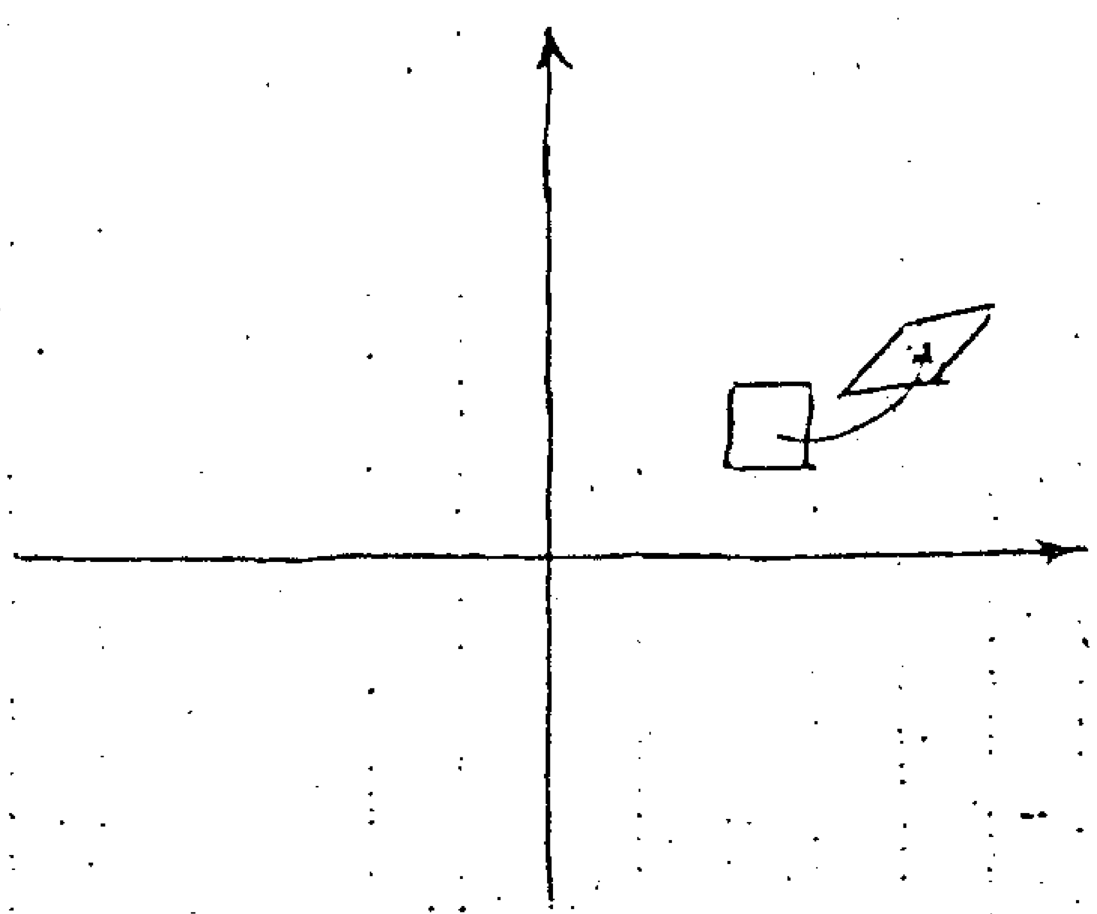
a másiké

$$d_2 = e^{-\omega} d$$

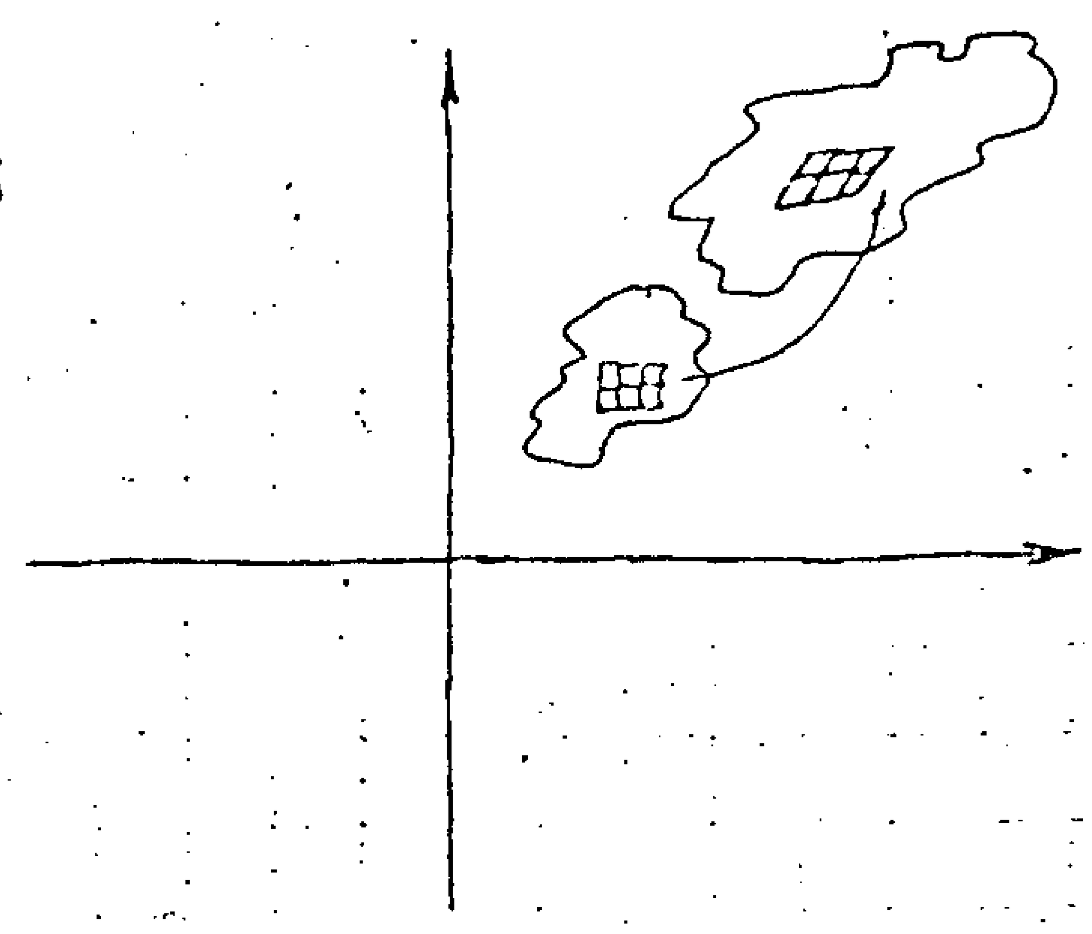
a rombusz területe

$$T = \frac{1}{2}\left(e^{\omega} d * e^{-\omega} d\right) = \frac{d^2}{2}$$

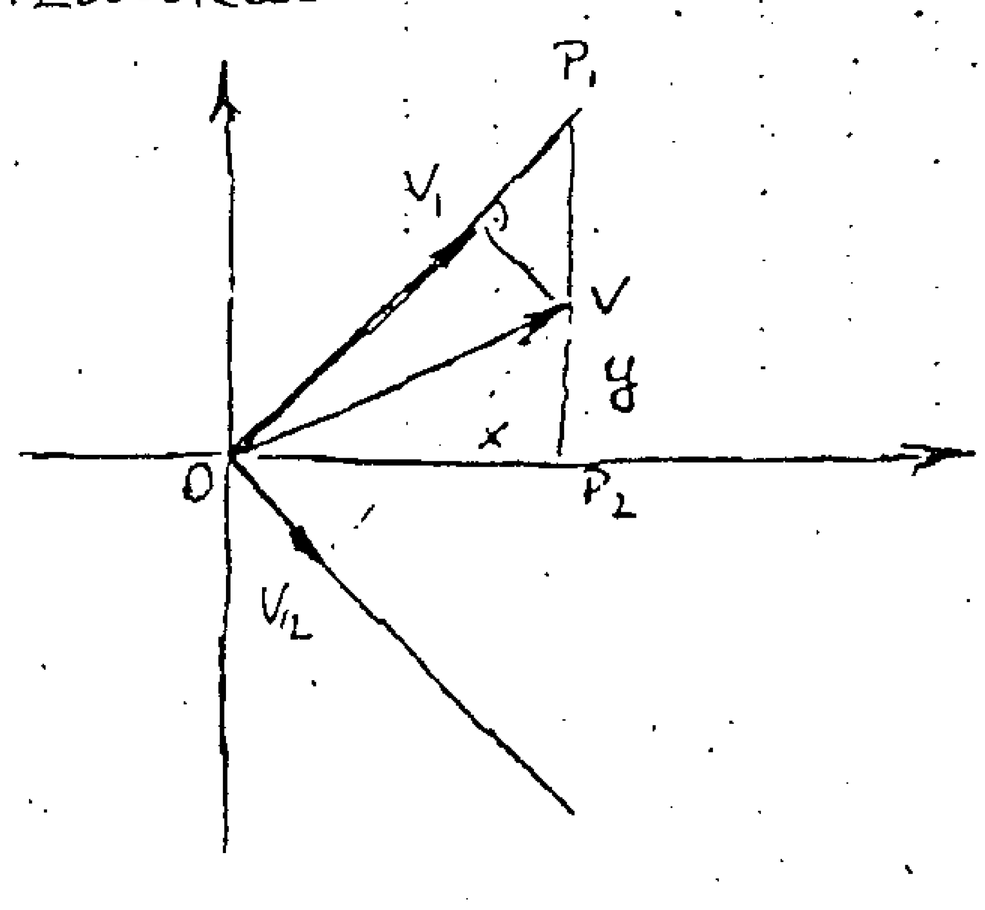
azaz a Lorentz-transzformáció területtartó



Kicsit hosszabb számolással belátható, hogy bármely helyzetben levő négyzetből e transzformáció ugyanolyan területű négyszöget képez. Bármely alakzatot fel lehet osztani infinitezimálisan kicsi négyzetekre, s így a Lorentz transzformáció valóban területtartó.



A további számolások megkönnyítése céljából számítsuk ki az $(\underline{v}\underline{a})$ és $(\underline{v}\underline{b})$ skaláris szorzatokat:



$$(\underline{v}\underline{a}) = OV_1$$

$$(OV_1)^2 = (OV)^2 - (VV_1)^2$$

$$(OV_1)^2 = (OV)^2 - \frac{(P_1V)^2}{2}$$

$$(OV_1)^2 = x^2 + y^2 - \frac{(x-y)^2}{2} = \frac{(x+y)^2}{2}$$

$$(\underline{v}\underline{a}) = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$$

$$(\underline{v}\underline{b}) = OV_2 = V_1V$$

$$(\underline{v}\underline{b}) = V_1V = \sqrt{\frac{(P_1V)^2}{2}} = \sqrt{\frac{(x-y)^2}{2}}$$

$$(\underline{v}\underline{b}) = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$$

$\underline{v}' = e^{\omega}(\underline{v}\underline{a})\underline{a} + e^{-\omega}(\underline{v}\underline{b})\underline{b}$ Fejezzük ki $\underline{a}$-t és $\underline{b}$-t a következő alakban

$$\underline{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\underline{v}' = e^{\omega}\frac{x+y}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + e^{-\omega}\frac{x-y}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = e^{\omega}\frac{x+y}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + e^{-\omega}\frac{x-y}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} =$$

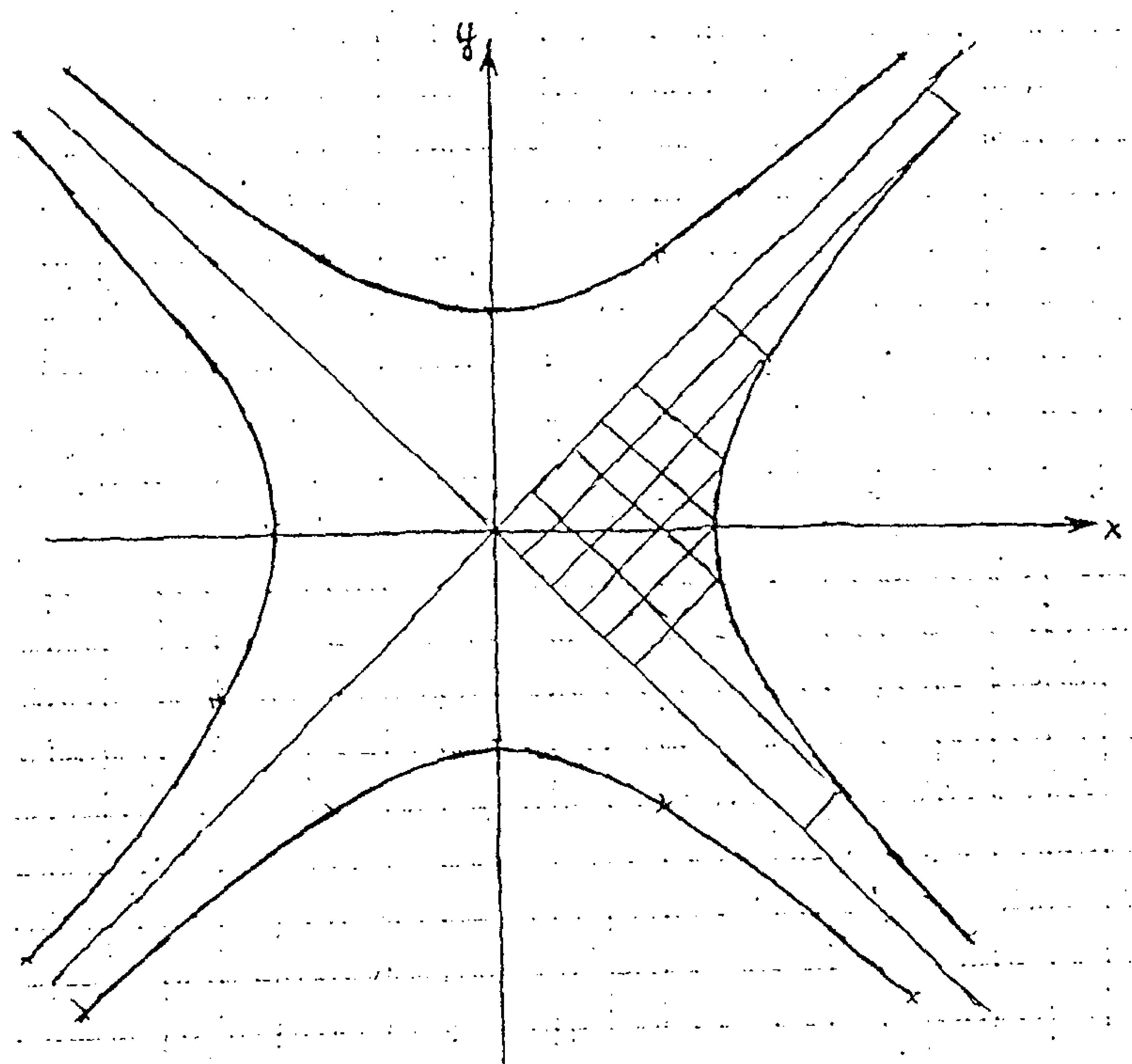
$$= \begin{pmatrix}\frac{x+y}{2}e^{\omega}\\ \frac{x+y}{2}e^{\omega}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{x-y}{2}e^{-\omega}\\ -\frac{x-y}{2}e^{-\omega}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{x+y}{2}e^{\omega} + \frac{x-y}{2}e^{-\omega}\\ \frac{x+y}{2}e^{\omega} - \frac{x-y}{2}e^{-\omega}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\frac{e^{\omega}+e^{-\omega}}{2} + y\frac{e^{\omega}-e^{-\omega}}{2}\\ x\frac{e^{\omega}-e^{-\omega}}{2} + y\frac{e^{\omega}+e^{-\omega}}{2}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}x\operatorname{ch}\omega + y\operatorname{sh}\omega\\ x\operatorname{sh}\omega + y\operatorname{ch}\omega\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

LORENTZ TRANSZFORMÁCIÓ

$$x' = x\operatorname{ch}\omega + y\operatorname{sh}\omega$$

$$y' = x\operatorname{sh}\omega + y\operatorname{ch}\omega$$



A Lorentz transzformációt a következőképpen is jelölhetjük:

$$\underline{v}' = A(\omega)\underline{v}$$

Mi történik, ha egy vektoron először egy ω_1, majd egy ω_2 paraméterű Lorentz transzformációt hajtunk végre?

$$\underline{v}'' = A(\omega_2)\underline{v}' \quad \text{és} \quad \underline{v}' = A(\omega_1)\underline{v}$$

$$x'' = x'ch\omega_2 + y'sh\omega_2 = (xch\omega_1 + ysh\omega_1)ch\omega_2 + (xsh\omega_1 + ych\omega_1)sh\omega_2 =$$

$$= xch\omega_1 \cdot ch\omega_2 + ysh\omega_1 ch\omega_2 + xsh\omega_1 sh\omega_2 + ych\omega_1 sh\omega_2 =$$

$$= x(ch\omega_1 ch\omega_2 + sh\omega_1 sh\omega_2) + y(sh\omega_1 ch\omega_2 + ch\omega_1 sh\omega_2) = x\,ch(\omega_1+\omega_2) + y\,sh(\omega_1+\omega_2)$$

hasonlóan $\quad y'' = x\,sh(\omega_1+\omega_2) + y\,ch(\omega_1+\omega_2)$

$$\boxed{A(\omega_1+\omega_2)\underline{v} = A(\omega_2)A(\omega_1)\underline{v}}$$

A Lorentz-transzformációk kommutatív csoportot alkotnak. Ugyanis a halmaz zárt a műveletre nézve. Van egységeleme:

$$A(\omega) = E \quad \text{ha } \omega = 0$$

$$A(0) = E$$

És az inverz is értelmezve van: $\quad A(-\omega) = [A(\omega)]^{-1} \quad$ s a művelet asszociatív.

Most nézzünk egy adott x', y' értékpárt, mekkora lesz az $(x')^2 - (y')^2$ kifejezés?

$$(x')^2 - (y')^2 = (xch\omega + ysh\omega)^2 - (xsh\omega + ych\omega)^2 = x^2ch^2\omega + 2xych\omega sh\omega +$$

$$+ y^2sh^2\omega - x^2sh^2\omega - 2xysh\omega ch\omega - y^2ch^2\omega = x^2(ch^2\omega - sh^2\omega) + y^2(sh^2\omega - ch^2\omega) =$$

$$= x^2(ch^2\omega - sh^2\omega) - y^2(ch^2\omega - sh^2\omega) = x^2 - y^2$$

A LORENTZ TRANSZFORMÁCIÓ INVARIÁNS

$$(x')^2 - (y')^2 = x^2 - y^2$$

Az $A(\omega_1+\omega_2) = A(\omega_2)A(\omega_1)$ összefüggés emlékeztet a kitevők összeadódására hatványfüggvények szorzása esetén. Joggal adódik a kérdés, nem lehet-e a Lorentz-transzformációt a kényelmebb kezelhetőség kedvéért exponenciális alakban írni? Például ilyen alakban:

$$A(\omega) = e^{\omega B} \quad \text{ekkor} \quad A(\omega_1)A(\omega_2) = e^{\omega_1 B}e^{\omega_2 B} = e^{(\omega_1+\omega_2)B}$$

Tegyük fel először az egyszerűség kedvéért, hogy $|\omega| \ll 1$, ekkor $ch\omega \sim 1$ és $sh\omega \sim \omega$, így

$$x' \approx x + y\omega \qquad y' \approx x\omega + y$$

ha $|\omega| \ll 1$ akkor $\quad x' \approx x + y\omega \quad y' \approx x\omega + y$

$$e^{\omega B} \approx 1 + \omega B$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y\omega \\ x\omega + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(\omega)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\omega B}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (E + \omega B)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= E\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \omega B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

A két kifejezés ekvivalens, tehát

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \omega B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \omega\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Ily módon megkaptuk azt a B operátort, amelynek segítségével kifejezhetjük a Lorentz-transzformációt exponenciális alakban. Ezek szerint van olyan B, amely kielégíti az $A(\omega) = e^{\omega B}$ egyenletet. A bizonyítás egyetlen szépséghibája az volt, hogy feltételeztük azt, hogy a B együtthatója kicsi. Ezt ügyes fogással küszöbölhetjük ki:

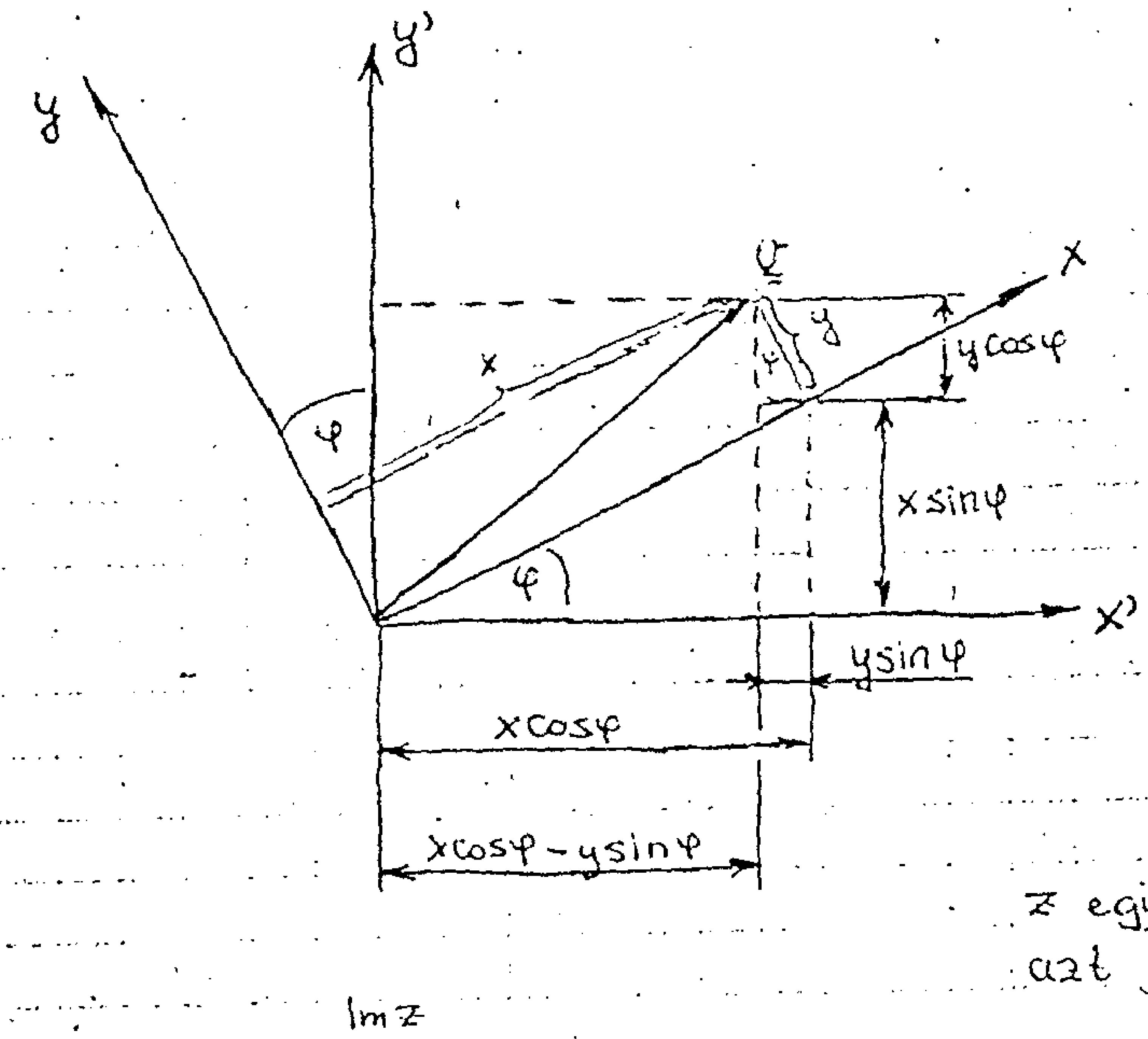
$$A(\omega) = \left[A\left(\tfrac{\omega}{n}\right)\right]^n \qquad e^{\omega B \frac{n}{n}} = \left[e^{\frac{\omega}{n}B}\right]^n$$

Mivel jelen esetben n tetszőleges egész szám $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{\omega}{n}B} = 1 + \frac{\omega}{n}B$, azaz

$$e^{\omega B} \xleftarrow[\infty]{n} \left(1 + \tfrac{\omega}{n}B\right)^n \xrightarrow[\infty]{n} \left[A\left(\tfrac{\omega}{n}\right)\right]^n = A(\omega) \quad \text{tetszőleges } \omega \text{ esetén}$$

Így tehát tetszőleges ω esetén a Lorentz-transzformáció kifejezhető exponenciális alakban.

A SÍKBELI FORGATÁS:



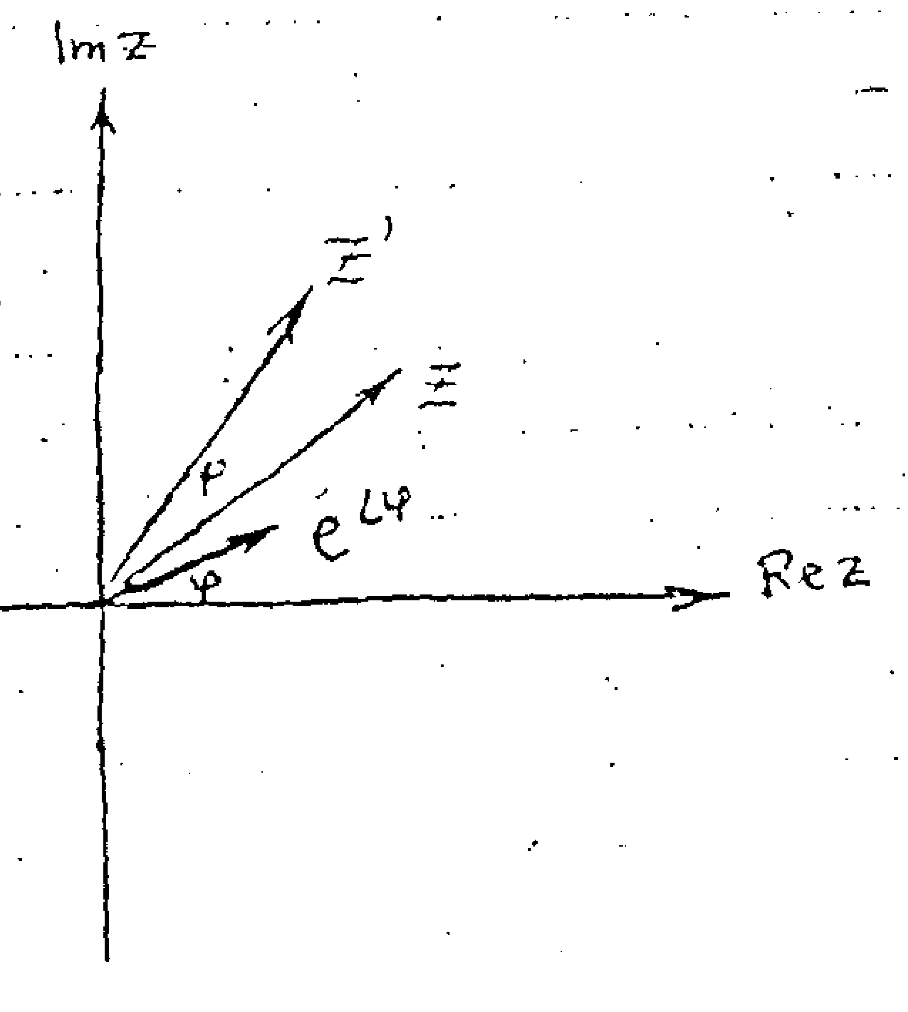
Mik lesznek egy φ szöggel elforditott vektor új koordinátái?

Ennek kiszámításához ne a vektort forgassuk el φ szöggel, hanem a koordinátarendszert −φ szöggel. Végrehajtva a passzív transzformációt a vektor x'y' koordinátarendszerbeli koordinátái meg fognak egyezni azon koordinátákkal, melyeket úgy kapnánk, hogy xy koordinátarendszerben φ szöggel forgatnánk el a vektort:

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi$$

$$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi$$

Most pedig lássunk egy alternatív levezetést. Legyen z egy komplex szám. A z φ szöggel való elforgatása azt jelenti, hogy z-t $e^{i\varphi}$-vel szorozzuk:



$$z' = ze^{i\varphi} = x' + iy'$$

$$z' = ze^{i\varphi} = (x+iy)e^{i\varphi} = (x+iy)(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$

$$= \underbrace{(x\cos\varphi - y\sin\varphi)}_{x'} + i\,\underbrace{(x\sin\varphi + y\cos\varphi)}_{y'}$$

tehát

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi$$

$$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi$$

A síkbeli forgatást a következő operátorral fejezhetjük ki:

$$\underline{v}' = F(\varphi)\underline{v}$$

A forgatások kommutatív csoportot alkotnak.

(i) $F(\beta)F(\alpha)\underline{v} = F(\alpha+\beta)\underline{v} = F(\gamma)\underline{v}$

(ii) $[F(\gamma)F(\beta)]F(\alpha) = F(\gamma)[F(\beta)F(\alpha)]$

(iii) a neutrális elem $F(0)$

(iiii) az inverz: $F(\alpha)$ inverze $F(-\alpha)$, $F(\alpha)F(-\alpha) = F(0)$

Az a kérdés, hogy nem lehet-e eme transzformációt a könnyebb kezelhetőség kedvéért exponenciális alakban kifejezni? Például ilyen alakban:

$$F(\varphi) = e^{\varphi M} \quad \text{ekkor} \quad F(\alpha)F(\beta) = e^{\alpha M}e^{\beta M} = e^{(\alpha+\beta)M}$$

Tegyük fel először az egyszerűség kedvéért azt, hogy $\varphi \sim 0$, azaz az elforgatás szöge igen kicsi, ekkor:

$$\underline{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{pmatrix}$$ mivel $\varphi \sim 0$, ezért $\cos\varphi \sim 1$ és $\sin\varphi \sim \varphi$, ezért

$$\underline{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y\varphi \\ x\varphi + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y\varphi \\ x\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Mivel $\varphi \sim 0$, így $e^{\varphi M} \sim (1+\varphi M)$, tehát

$$\underline{v}' = (1+\varphi M)\underline{v}$$ és az előbbiek szerint $$\underline{v}' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$$\underline{v} + \varphi M\underline{v} = \underline{v} + \varphi\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$$\varphi M\underline{v} = \varphi\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

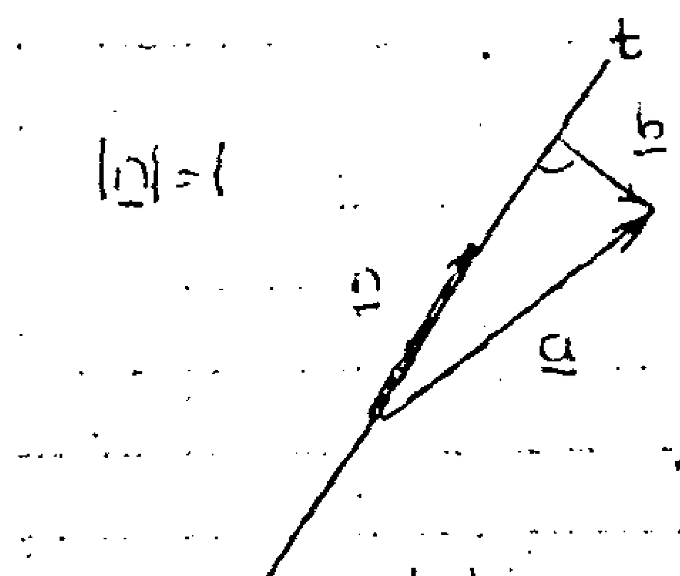
$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$ ez egy lineáris operátor

Mit tesz az M^2 operátor?

$$M^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M\left[M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = M\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

TÉRBELI FORGATÁS:

Legyen az elforgatás tengelye t, s e tengelyen levő egységnyi hosszúságú vektor $\underline{n}$. Az $\underline{a}$ vektort e tengely körül φ szöggel forgatjuk el. Mi lesz a forgatási operátor mátrixa?

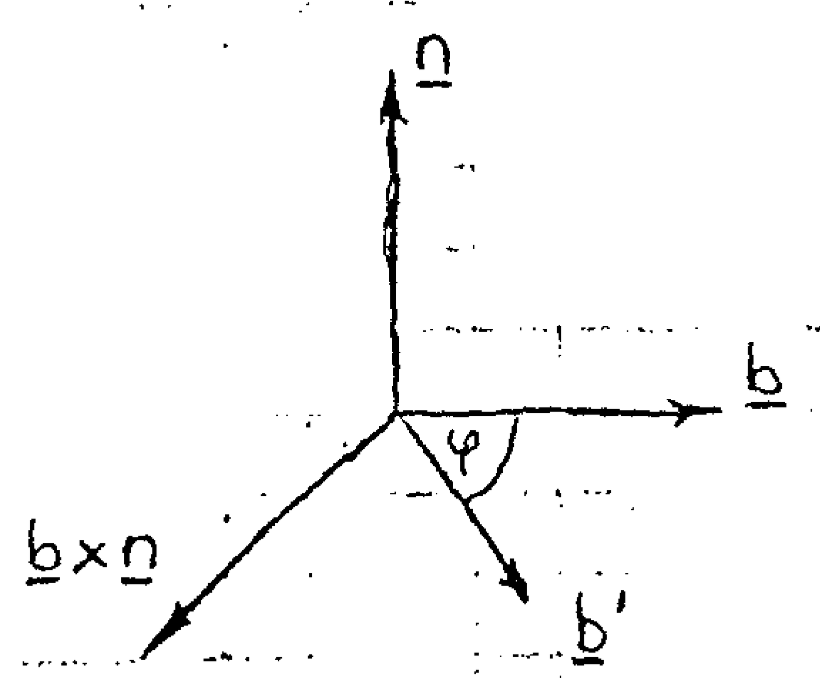


1. ábra

Fejezzük ki a $\underline{b}$ vektort:

(1) $\underline{n}(\underline{a}\underline{n}) + \underline{b} = \underline{a}$

(1) $\underline{b} = \underline{a} - \underline{n}(\underline{a}\underline{n})$



Próbáljuk meg kifejezni a $\underline{b}'$ vektort.
A $\underline{b}'$ vektort nyilvánvalóan ki lehet fejezni a $\underline{b}, \underline{n}$ és $\underline{b}\times\underline{n}$ vektorokkal, hiszen $(\underline{b}, \underline{n}, (\underline{b}\times\underline{n})) \neq 0$, sőt, mi több, ezek a vektorok merőlegesek egymásra, tehát:

(2) $\underline{b}' = \alpha\underline{b} + \beta\underline{n} + \gamma(\underline{b}\times\underline{n})$

Próbáljuk meg meghatározni az α, β és γ együtthatókat.

$\underline{b}' = \alpha\underline{b} + \beta\underline{n} + \gamma(\underline{b}\times\underline{n}) \;/\cdot\underline{b}$

$\underline{b}'\underline{b} = \alpha\underline{b}\underline{b} + \beta\underline{n}\underline{b} + \gamma(\underline{b}\times\underline{n})\underline{b}$

Mivel $\underline{b}\perp\underline{n}$ és $\underline{b}\perp(\underline{b}\times\underline{n})$

$\underline{b}'\underline{b} = \alpha\underline{b}\underline{b}$

$b^2\cos\varphi = \alpha b^2$

(3) $\alpha = \cos\varphi$

$\underline{b}' = \alpha\underline{b} + \beta\underline{n} + \gamma(\underline{b}\times\underline{n}) \;/\cdot\underline{n}$

$\underline{b}'\underline{n} = \alpha\underline{b}\underline{n} + \beta\underline{n}\underline{n} + \gamma(\underline{b}\times\underline{n})\underline{n}$

Mivel $\underline{b}'\perp\underline{n}$, $\underline{b}\perp\underline{n}$ és $(\underline{b}\times\underline{n})\perp\underline{b}$

$0 = \beta n^2$

(4) $\beta = 0$

$\underline{b}' = \alpha\underline{b} + \beta\underline{n} + \gamma(\underline{b}\times\underline{n}) \;/\cdot(\underline{b}\times\underline{n})$

$\underline{b}'(\underline{b}\times\underline{n}) = \alpha\underline{b}(\underline{b}\times\underline{n}) + \beta\underline{n}(\underline{b}\times\underline{n}) + \gamma(\underline{b}\times\underline{n})$

Mivel $\underline{b}\perp(\underline{b}\times\underline{n})$ és $\underline{n}\perp(\underline{b}\times\underline{n})$

$\underline{b}'(\underline{b}\times\underline{n}) = \gamma(\underline{b}\times\underline{n})^2$

$|\underline{b}'|\cdot|\underline{b}\times\underline{n}|\cos(90-\varphi) = \gamma(\underline{b}\times\underline{n})$

$b\cdot b\sin\varphi = \gamma b^2$

(5) $\gamma = \sin\varphi$

Mindezen egyenletek eredményét (2)-be helyettesítve

(2) $\underline{b}' = \underline{b}\cos\varphi + (\underline{b}\times\underline{n})\sin\varphi$

Most pedig helyettesítsük be $\underline{b}$ helyére (1)-t

(2) $\underline{b}' = [\underline{a} - \underline{n}(\underline{a}\underline{n})]\cos\varphi + [(\underline{a} - \underline{n}(\underline{a}\underline{n}))\times\underline{n}]\sin\varphi$

A vektoriális szorzat disztributív, tehát $(\underline{e}+\underline{f})\times\underline{g} = \underline{e}\times\underline{g} + \underline{f}\times\underline{g}$, ezért:

(2) $\underline{b}' = \underline{a}\cos\varphi - \underline{n}(\underline{a}\underline{n})\cos\varphi + (\underline{a}\times\underline{n})\sin\varphi - [(\underline{n}(\underline{a}\underline{n}))\times\underline{n}]\sin\varphi$

Ám $\underline{n}(\underline{a}\underline{n})$ egy $\underline{n}$ irányú vektor lesz, ezért $[(n(\underline{a}\underline{n}))\times\underline{n}] = 0$

(2) $\underline{b}' = \underline{a}\cos\varphi - \underline{n}(\underline{a}\underline{n})\cos\varphi + (\underline{a}\times\underline{n})\sin\varphi$

A fentebbi ábrák tanulmányozásából kiderül, hogy az $\underline{a} = \underline{b} + \underline{n}(\underline{a}\underline{n})$-hez hasonló összefüggés érvényes az $\underline{a}'$-re is:

(6) $\underline{a}' = \underline{b}' + \underline{n}(\underline{a}\underline{n})$

Helyettesítsünk (6)-ban $\underline{b}'$ helyére (2)-t

(6) $\underline{a}' = \underline{a}\cos\varphi - \underline{n}(\underline{a}\underline{n})\cos\varphi + \underline{n}(\underline{a}\underline{n}) + (\underline{a}\times\underline{n})\sin\varphi$

(6) $\underline{a}' = \underline{a}\cos\varphi + \underline{n}(\underline{a}\underline{n})(1-\cos\varphi) + (\underline{a}\times\underline{n})\sin\varphi$

$$\boxed{\underline{a}' = \underline{a}\cos\varphi + \underline{n}(\underline{a}\underline{n})(1-\cos\varphi) + (\underline{a}\times\underline{n})\sin\varphi}$$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $\underline{e}^{(k)}$-val, azaz a k-dik egységvektorral, hogy megkapjuk a k-dik koordinátát:

(7) $a'_k = a_k\cos\varphi + n_k(\underline{a}\underline{n})(1-\cos\varphi) + \underline{e}^{(k)}(\underline{a}\times\underline{n})\sin\varphi$

Tudjuk, hogy $(\underline{a}\times\underline{n})_k = \sum_{lm} \varepsilon_{klm} a_m n_l$, ezt behelyettesítve (7)-be

(7) $a'_k = a_k\cos\varphi + n_k(\underline{a}\underline{n})(1-\cos\varphi) + \sum_{lm} \varepsilon_{klm} a_m n_l \cdot \sin\varphi$

Valamely isteni szikra folytán az a gondolatunk támadt, hogy a jobb oldalon álló összegből ki kellene emelni $\sum_m a_m$-t. Az a_k-t kifejezhetjük a következőképpen:

(8) $a_k = \sum_m \delta_{km} a_m$

Most már csak a középső tagban nincs $\sum_m a_m$, de ezt könnyen pótolhatjuk, hiszen:

(9) $(\underline{a}\underline{n}) = \sum_m a_m n_m$

Behelyettesítve (8)-t és (9)-t (7)-be:

(7) $a'_k = \cos\varphi \sum_m a_m \delta_{km} + n_k(1-\cos\varphi)\sum_m a_m n_m + \sum_m\sum_l \varepsilon_{klm} a_m n_l \sin\varphi$

(7) $a'_k = \sum_m a_m \left[\delta_{km}\cos\varphi + n_k n_m(1-\cos\varphi) + \sum_l \varepsilon_{klm} n_l \sin\varphi\right]$

Legyen

(10) $F_{km} = \delta_{km}\cos\varphi + n_k n_m(1-\cos\varphi) + \sum_l \varepsilon_{klm} n_l \sin\varphi$

Ekkor

(7) $a'_k = \sum_m F_{km} a_m$

Írjuk ki az a'_k-kat:

$$a'_1 = F_{11}a_1 + F_{12}a_2 + F_{13}a_3$$
$$a'_2 = F_{21}a_1 + F_{22}a_2 + F_{23}a_3$$
$$a'_3 = F_{31}a_1 + F_{32}a_2 + F_{33}a_3$$

Ez a séma emlékeztet a mátrixszorzásra, s valóban a fenti egyenletrendszer ekvivalens az alábbival:

$$\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{F_{km} = \delta_{km}\cos\varphi + n_k n_m(1-\cos\varphi) + \sum_l \varepsilon_{klm} n_l \sin\varphi}$$

Ellenőrizzük a kapott eredményt. Ha $\underline{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, akkor pont a síkbeli forgatás mátrixát kell visszakapnunk $\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$-t.

$$\underline{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$F_{11} = \delta_{11}\cos\varphi + n_1^2(1-\cos\varphi) + \sum_l \varepsilon_{1l1} n_l \sin\varphi = \cos\varphi$$

$$F_{12} = \delta_{12}\cos\varphi + n_1 n_2(1-\cos\varphi) + \sum_3 \varepsilon_{132} n_3 \sin\varphi = \varepsilon_{132} n_3 \sin\varphi = -\sin\varphi$$

$$F_{13} = \delta_{13}\cos\varphi + n_1 n_3(1-\cos\varphi) + \sum_l \varepsilon_{1l3} n_l \sin\varphi = \varepsilon_{123} n_2 \sin\varphi = 0$$

$$F_{21} = \delta_{21}\cos\varphi + n_2 n_1(1-\cos\varphi) + \sum_l \varepsilon_{2l1} n_l \sin\varphi = \varepsilon_{231} n_3 \sin\varphi = \sin\varphi$$

$$F_{22} = \delta_{22}\cos\varphi + n_2 n_2(1-\cos\varphi) + \sum_l \varepsilon_{2l2} n_l \sin\varphi = \cos\varphi$$

$$F_{23} = \delta_{23}\cos\varphi + n_2 n_3(1-\cos\varphi) + \sum_l \varepsilon_{2l3} n_l \sin\varphi = \varepsilon_{213} n_1 \sin\varphi = 0$$

$$F_{31} = \delta_{31}\cos\varphi + n_3 n_1(1-\cos\varphi) + \sum_l \varepsilon_{3l1} n_l \sin\varphi = \varepsilon_{321} n_2 \sin\varphi = 0$$

$$F_{32} = \delta_{32}\cos\varphi + n_3 n_2(1-\cos\varphi) + \sum_l \varepsilon_{3l2} n_l \sin\varphi = \varepsilon_{312} n_1 \sin\varphi = 0$$

$$F_{33} = \delta_{33}\cos\varphi + n_3^2(1-\cos\varphi) + \sum_l \varepsilon_{3l3} n_l \sin\varphi = \cos\varphi + (1-\cos\varphi) = 1$$

Tehát

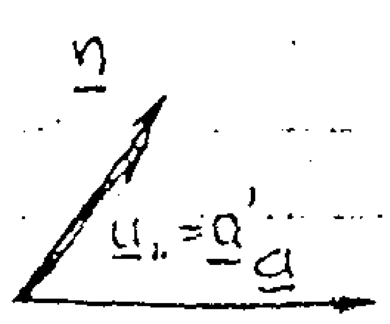
$$\underline{F} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

ez pedig megegyezik a síkbeli forgatás mátrixával

A PROJEKCIÓ ÉS A TÜKRÖZÉS MÁTRIXAI:

Számítsuk ki először a projekció operátorának mátrix

$$(1)\quad \underline{a}' = \underline{a}_{\parallel} = \underline{n}(\underline{a}\underline{n}) = \underline{P}\underline{a}$$



Az $\underline{a}'$ vektor k-dik komponense:

$$(2)\quad a_k' = (\underline{n}\underline{a}) n_k = \left(\sum_l n_l a_l\right) n_k = \sum_l (n_k n_l) a_l$$

Legyen (3) $P_{kl} = n_k n_l$ akkor

$$(2)\quad a_k' = \sum_l P_{kl} a_l$$

HA A PROJEKCIÓ AZ $\underline{n}$ VEKTORRA TÖRTÉNIK

$$a_k' = \sum_{l=1}^{3} P_{kl} a_l \quad \text{ahol} \quad P_{kl} = n_k n_l$$

Most számítsuk ki gyakorlásképpen az $n = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$ vektorra történő projekció mátrixát:

$$n = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} \quad \begin{matrix} n_1 = 1/\sqrt{2}\\ n_2 = 1/\sqrt{2}\\ n_3 = 0\end{matrix}$$

$$P_{11} = n_1 n_1 = \frac{1}{2} \qquad P_{12} = n_1 n_2 = \frac{1}{2} \qquad P_{13} = n_1 n_3 = 0$$

$$P_{21} = n_2 n_1 = \frac{1}{2} \qquad P_{22} = n_2 n_2 = \frac{1}{2} \qquad P_{23} = n_2 n_3 = 0$$

$$P_{31} = n_3 n_1 = 0 \qquad P_{32} = n_3 n_2 = 0 \qquad P_{33} = n_3 n_3 = 0$$

Tehát a $\underline{P}$ mátrix:

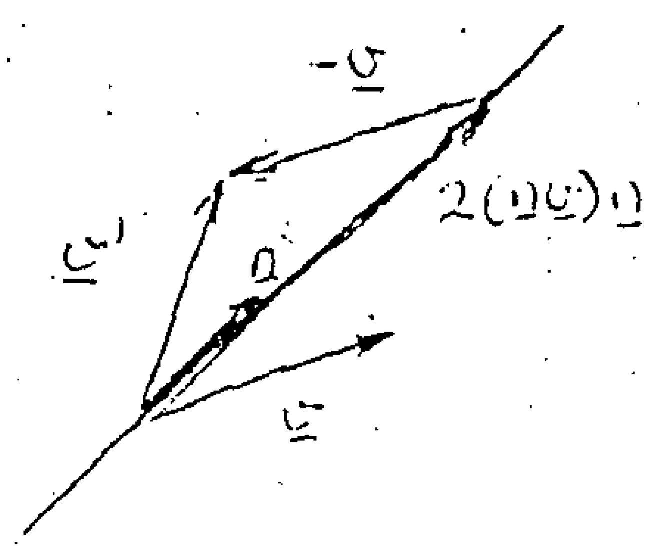
$$\underline{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gyakorlásképpen hajtsunk végre az $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ vektoron projekciót:

$$\underline{a}' = \underline{P}\,\underline{a} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Most pedig számítsuk ki a tükrözés operátorának mátrixát:

$$(4) \quad \underline{v}' = 2(\underline{n}\underline{v})\underline{n} - \underline{v}$$



E vektor k-dik komponense:

$$(5) \quad v'_k = 2(\underline{n}\underline{v})n_k - v_k = 2\Big(\sum_l n_l v_l\Big) n_k - v_k$$

Behelyettesítve (5)-be v_k helyére $v_k = \sum_l \delta_{kl} v_l$ -t

$$(5) \quad v'_k = 2\sum_l n_l n_k v_l - \sum_l \delta_{kl} v_l = \sum_l (2n_k n_l - \delta_{kl}) v_l$$

HA A TÜKRÖZÉS AZ $\underline{n}$ VEKTORRA TÖRTÉNIK

$$v'_k = \sum_{l=1}^{3} T_{kl}\, a_l \quad \text{ahol} \quad T_{kl} = 2n_k n_l - \delta_{kl}$$

Számoljuk ki egy konkrét esetre e mátrixot. Legyen az $n = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, mint az előbb. Megtehetnénk azt, hogy a T_{kl} tagokat egyenként számoljuk ki, ám használjuk fel inkább az azonos $\underline{n}$ vektorra történő projekció és tükrözés közötti összefüggést:

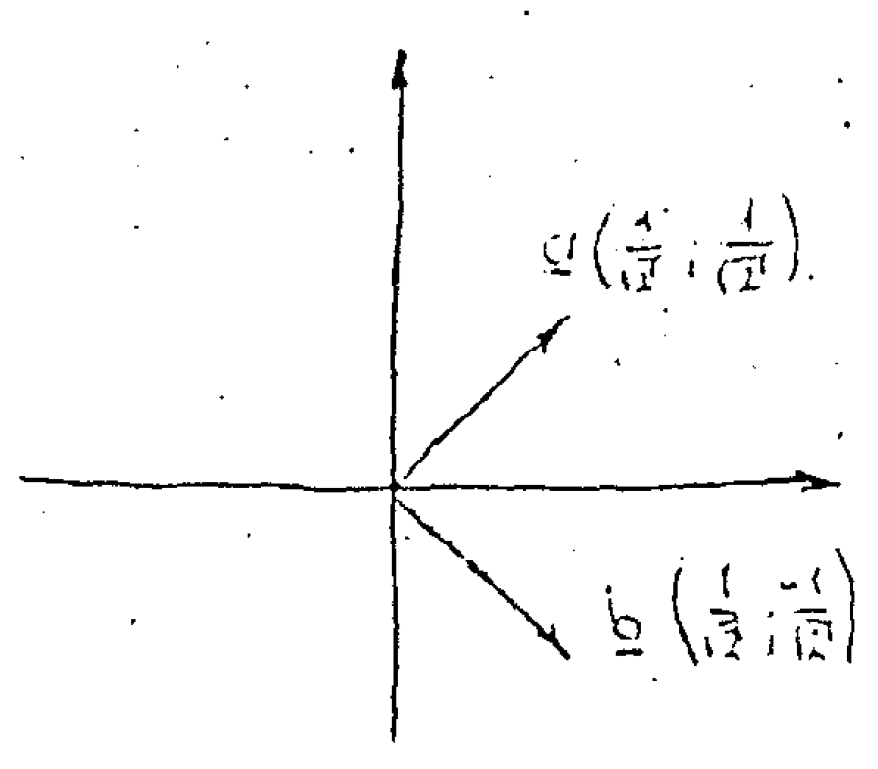
$$(6) \quad T_{kl} = 2n_k n_l - \delta_{kl} = 2P_{kl} - E_{kl}$$

$$\underline{T} = 2\underline{P} - \underline{E} = 2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Számítsuk ki $\underline{a}'$-t, ha $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\underline{a}' = \underline{T}\,\underline{a} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

A LORENTZ-TRANSZFORMÁCIÓ MÁTRIX-REPREZENTÁCIÓJA



Mint már a korábbiak során láttuk a Lorentz-transzformáció a $\underline{v}$ vektorból a $\underline{v}'$ vektort a következőképpen alakítja:

$$(1) \quad \underline{v}' = e^{\omega}(\underline{v}\underline{a})\underline{a} + e^{-\omega}(\underline{v}\underline{b})\underline{b}$$

Ezt kifejezhetjük a következőképpen is

$$(1) \quad \underline{v}' = \underline{L}\,\underline{v} = e^{\omega}\underline{P}\,\underline{v} + e^{-\omega}\underline{Q}\,\underline{v}$$

Ekkor P és Q is egy-egy projekció lesz, csak az $\underline{n}$ vektor különböző:

$$P_{kl} = n_k n_l \quad \text{ahol} \quad \underline{n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{ekkor} \quad \underline{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$Q_{kl} = n'_k n'_l \quad \text{ahol} \quad \underline{n}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{ekkor} \quad \underline{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az L operátort:

$$L = e^{\omega}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + e^{-\omega}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{\omega}}{2} & \frac{e^{\omega}}{2} \\ \frac{e^{\omega}}{2} & \frac{e^{\omega}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{e^{-\omega}}{2} & -\frac{e^{-\omega}}{2} \\ -\frac{e^{-\omega}}{2} & \frac{e^{-\omega}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{\omega}+e^{-\omega}}{2} & \frac{e^{\omega}-e^{-\omega}}{2} \\ \frac{e^{\omega}-e^{-\omega}}{2} & \frac{e^{\omega}+e^{-\omega}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\,\omega & sh\,\omega \\ sh\,\omega & ch\,\omega \end{pmatrix}$$

MÁTRIXALGEBRA

MÁTRIXSZORZÁS: Adott A és B operátor, Számítsuk ki a $BA = C$ operátort.

$$(1)\ \underline{v}' = \underline{A}\,\underline{v} \qquad \text{és} \qquad (2)\ \underline{v}'' = \underline{B}\,\underline{v}'$$

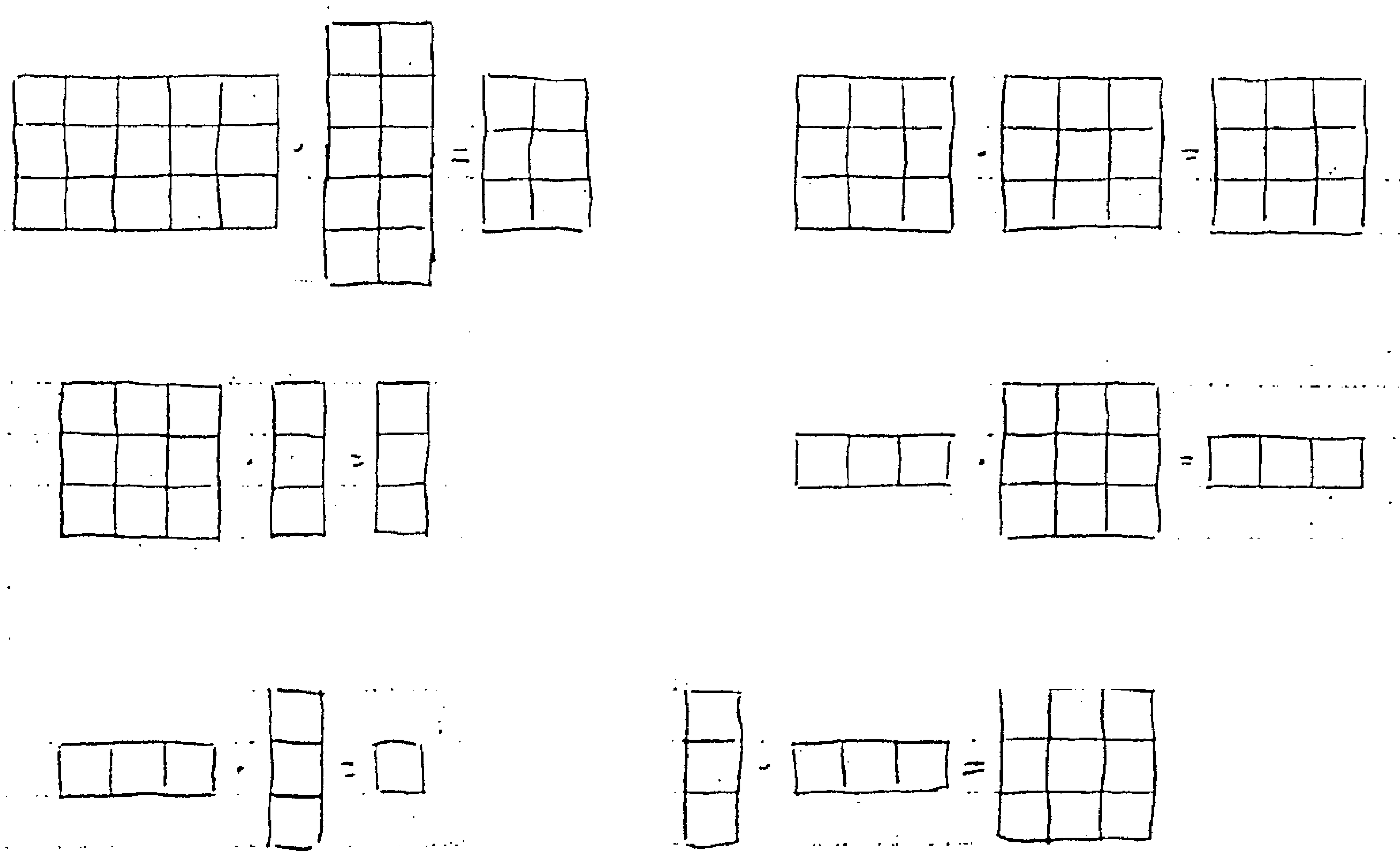
(3) $v''_k = \sum_l B_{kl} v'_l$ ugyanakkor tudjuk, hogy (4) $v'_l = \sum_m A_{lm} v_m$

Helyettesítsük be (3)-ba v'_l helyére (4)-et:

$$(3)\ v''_k = \sum_l B_{kl} v'_l = \sum_l B_{kl}\Big(\sum_m A_{lm} v_m\Big) = \sum_m \sum_l B_{kl} A_{lm} v_m = \sum_m \Big(\sum_l B_{kl} A_{lm}\Big) v_m = \sum_m C_{km} v_m$$

$$\boxed{C_{km} = \sum_{l=1}^{3} B_{kl} A_{lm}}$$

Vázlatszerűen nézzük meg, hogy különböző alakú mátrixokat szorozva milyen mátrixokat kapunk:

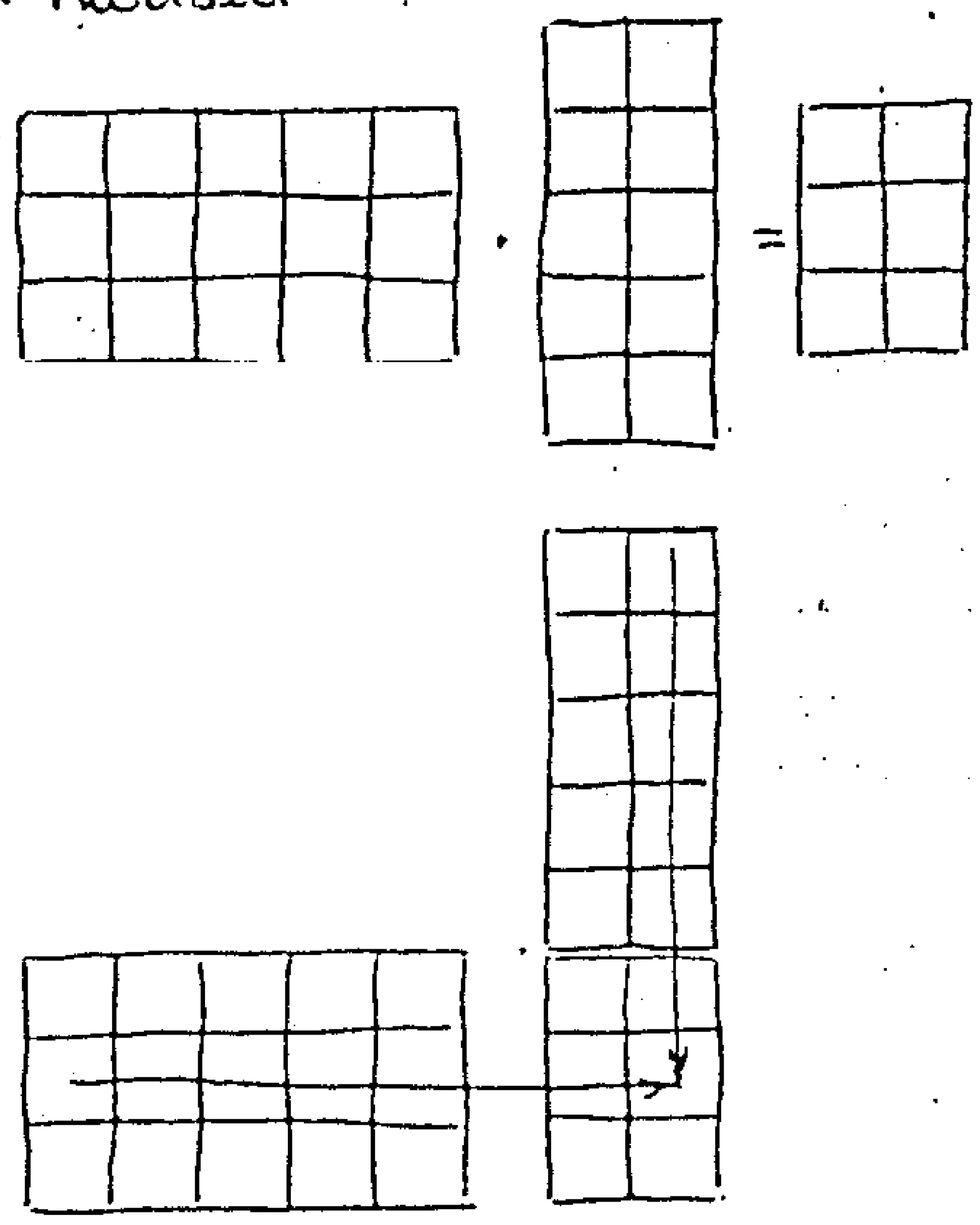


Mint látható a mátrixszorzás nem kommutatív

Legyen A és B két különböző adott mátrix. Szorozzuk össze a két mátrixot mindkét sorrendben. Két mátrixot úgy egyszerű összeszorozni, hogy a két mátrixot az ábrán látható módon helyezzük el. Az eredménymátrix egy adott elemét úgy kapjuk meg, hogy azt a két sort szorozzuk meg egymással, melyek metszetében az adott elem elhelyezkedik.

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

A módszer



$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 21 & 2 & 18 \\ 38 & 32 & 36 \\ 23 & 21 & 21 \end{pmatrix} = \underline{AB} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 9 & 6 & 12 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 14 \\ 9 & 10 & 7 & 8 \\ 16 & 0 & 20 & 60 \end{pmatrix} = \underline{BA} \end{array}$$

<u>A KOMMUTÁTOR ÉS AZ ANTIKOMMUTÁTOR:</u> a kommutátort és antikommutátort a következőképpen definiáljuk:

KOMMUTÁTOR

$$[A;B] = AB - BA$$

ANTIKOMMUTÁTOR

$$\{A;B\} = AB + BA$$

Legyen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$[A;B] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 16 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -16 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Érdekes, hogy a kommutátor főátlójában levő elemek összege zérus. Igaz-e ez minden kommutátorra?

$$C_{kl} = (AB)_{kl} - (BA)_{kl} = \sum_m A_{km} B_{ml} - \sum_m B_{km} A_{ml}$$

A sejtés az, hogy $\sum_k C_{kk} = 0$, ekkor

$$\sum_k C_{kk} = \sum_k \left[(AB)_{kk} - (BA)_{kk}\right] = \sum_k \left(\sum_m A_{km} B_{mk} - \sum_m B_{km} A_{mk}\right) = \sum_{km} \left(A_{km} B_{mk} - A_{mk} B_{km}\right) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{3} [A;B]_{kk} = 0$$

NÉHÁNYSZÓ A MÁTRIXOK CSOPORTELMÉLETI TULAJDONSÁGAIRÓL

A lineáris operátorok algebrát alkotnak, azaz értelmezve van az összeadás, a skalárral szorzás és az egymással való szorzás. Sőt, mivel az egymással való szorzás asszociatív, ezér a lineáris operátorok asszociatív algebrát alkotnak.

A négyzetes mátrixok szintén asszociatív algebrát alkotnak.

MÁTRIXOK INVERZE: Tegyük fel, hogy minden mátrixnak van inverze. Legyen $\underline{B}$ inverze $\underline{A}$-nak:

$$\underline{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \quad \& \quad \underline{B}=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$$

A feltevés szerint $\underline{A}\,\underline{B}=\underline{E}$ ahol $\underline{E}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

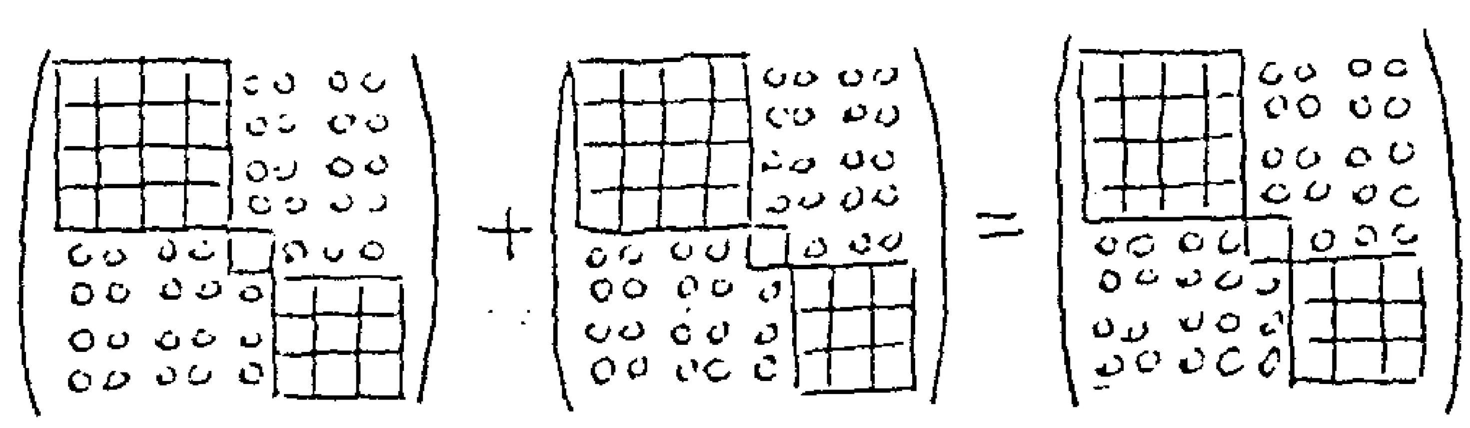
$$\underline{A}\underline{B}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma&\delta\\0&0\end{pmatrix}\overset{?}{=}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

A két mátrix nyilvánvalóan sohasem lehet egyenlő; tehát az $\underline{A}$ mátrixnak nincs inverze. Tehát nincs minden mátrixnak inverze a négyzetes mátrixok között. Szorzásra nézve a négyzetes mátrixok nem alkotnak csoportot.

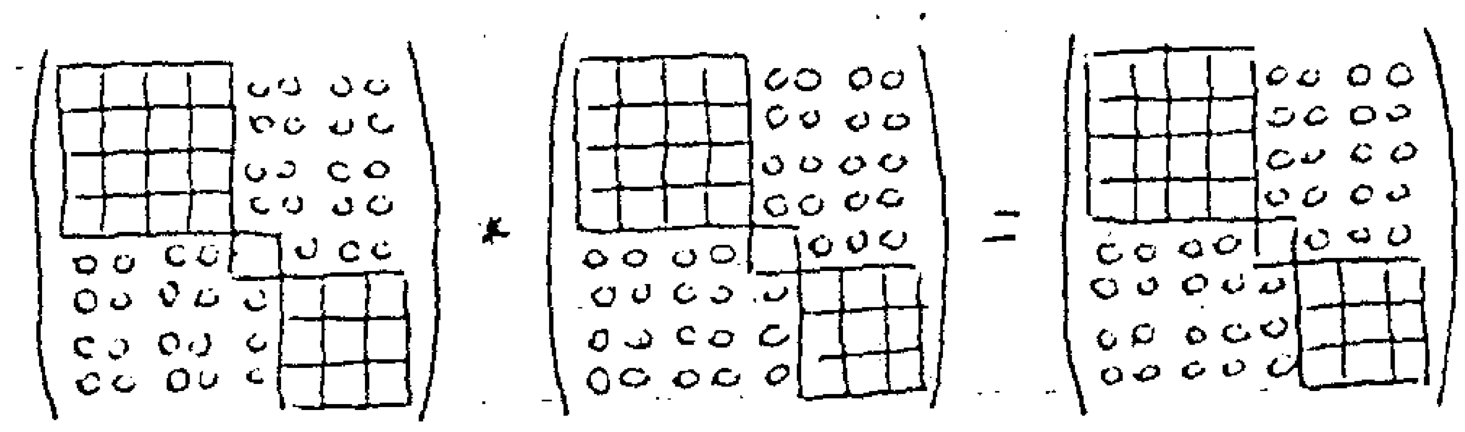
Téglalap alakú mátrixok inverzét nem szokták definiálni.

BLOKKDIAGONÁLIS MÁTRIXOK: diagonális mátrixnak az olyan mátrixot hívjuk, amelynek csak a főátlójában vannak nem nulla értékű elemek.

A blokkdiagonális mátrix egy olyan mátrix, melyben nem 0 értékű elemek csak a főátlóval megegyező átlójú négyzetekben vannak. Két azonos típusú blokkdiagonális mátrix összege és szorzata is ugyanolyan típusú blokkdiagonális mátrix:



azaz $\begin{pmatrix}\underline{A}_1&0\\0&\underline{B}_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\underline{A}_2&0\\0&\underline{B}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\underline{A}_1+\underline{A}_2&0\\0&\underline{B}_1+\underline{B}_2\end{pmatrix}$



azaz $\begin{pmatrix}\underline{A}_1&0\\0&\underline{B}_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\underline{A}_2&0\\0&\underline{B}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\underline{A}_1\underline{A}_2&0\\0&\underline{B}_1\underline{B}_2\end{pmatrix}$

A blokkdiagonális mátrixok egyes „alnégyzetei" tehát egymástól függetlenül szorzódnak és adódnak össze.

ALTEREK

Az altér egy sajátos halmazt alkot, mely zárt a téren értelmezett adott műveletre. Tehát V_1 és V_2 két altér, melyekre az igaz:

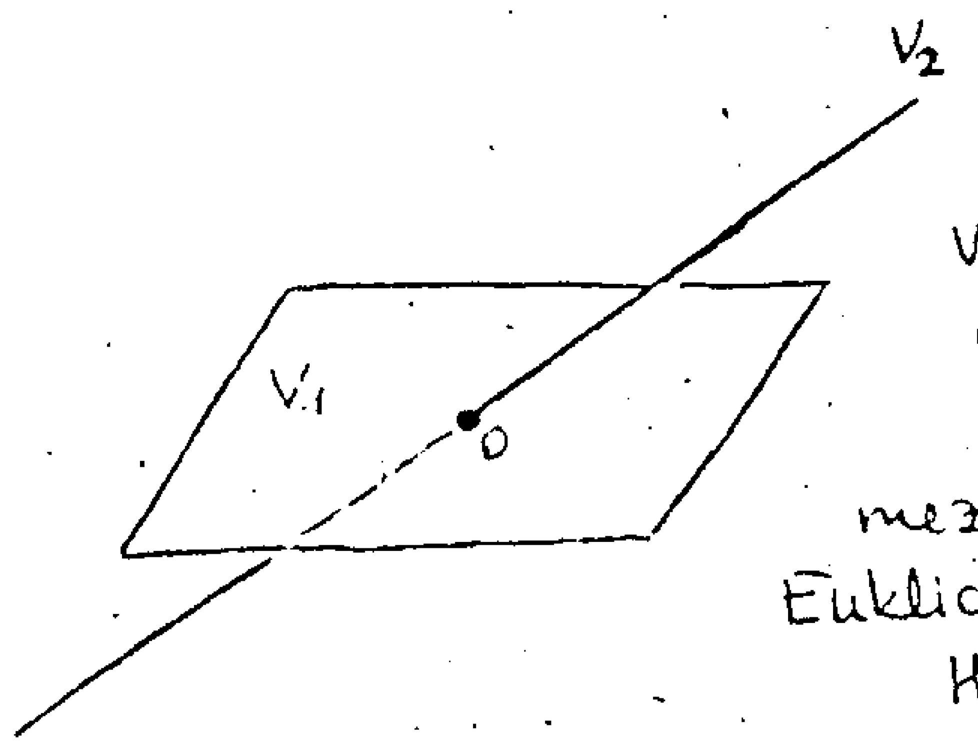
$$\forall \underline{v}\in\mathbb{V}\ \ \exists\, \underline{v}_1\in V_1 \wedge \exists\, \underline{v}_2\in V_2 \ :\ \underline{v}=\underline{v}_1+\underline{v}_2 \qquad \begin{matrix}\mathbb{V}\triangleright V_1\\ \mathbb{V}\triangleright V_2\end{matrix} \qquad V_1\cap V_2=\{\underline{0}\}$$

Ekkor a tér V_1 és V_2 direkt összegeként állítható elő:

DIREKT ÖSSZEG

$$\mathbb{V}=V_1\oplus V_2$$

A HÁROMDIMENZIÓS TÉR ALTEREI: Legyen V_1 egy altér, például egy sík. Bármely sík nyilvánvalóan zárt a vektori összeadásra nézve, ezért altér.

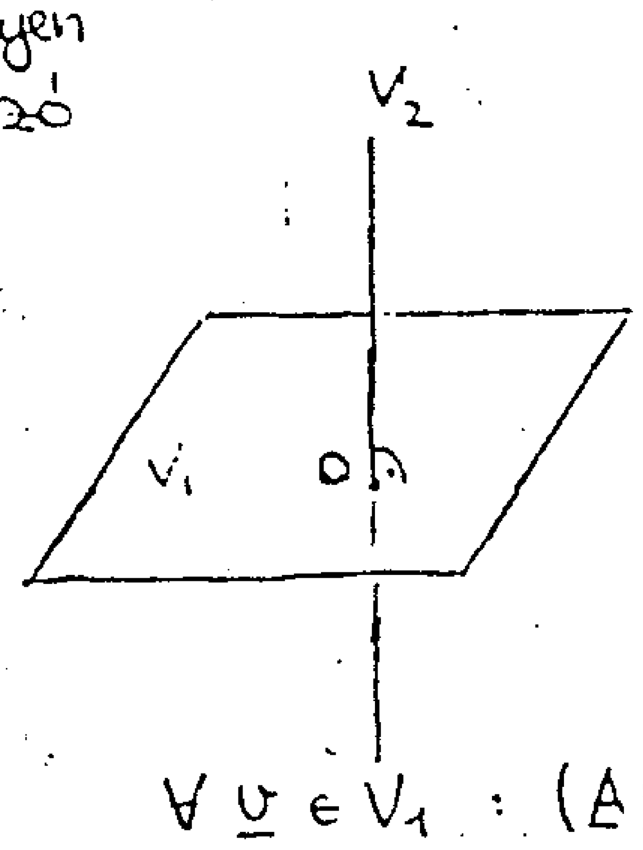


Most egy V_2 alteret kell keresni, amelyre az igaz, hogy $V_1 \cap V_2 = \{\underline{0}\}$ és $V = V_1 \oplus V_2$. Ilyen V_2 altér bármely a V_1 síkot metsző egyenes, ami átmegy az 0-n.

Ha a lineáris téren értelmezve van a skaláris szorzás, akkor Euklidesz-i térről beszélünk.

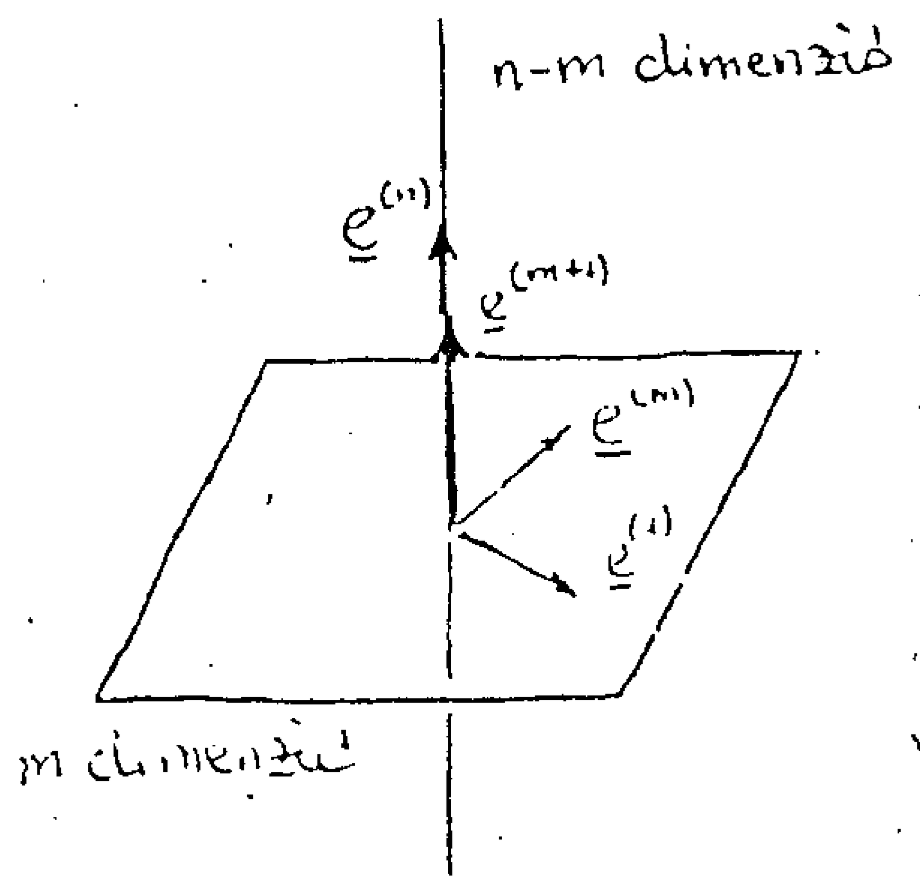
Ha V_2 merőleges a V_1 síkra, akkor V_1 és V_2 ortogonális komplementerek, azaz

$$\forall \underline{v}_1 \in V_1 \wedge \forall \underline{v}_2 \in V_2 : \underline{v}_1 \underline{v}_2 = 0$$



$\forall \underline{v} \in V_1 : (\underline{\underline{A}}\,\underline{v}) \in V_1$
invariáns altér

N-DIMENZIÓS TÉR ALTEREI: Ebben az n-dimenziós térben egy triviális felbontás a következő:



$$\begin{array}{c} m\left\{\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right. \\ n-m\left\{\begin{matrix}\\ \\ \end{matrix}\right. \end{array} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta \\ \varepsilon \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m \\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \end{matrix}\right\} n-m \end{array}$$

A két altérnek megfelelően bármely vektor felbontható.

Tegyük fel, hogy a két altér invariáns, s nézzük egy adott operáció mátrixával vett szorzatát a két altérnek megfelelően felbontott vektornak:

$$\left(\begin{array}{c|c} m \times m & (n-m) \times m \\ \hline m \times (n-m) & (n-m) \times (n-m) \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} m \times m & (n-m) \times m \\ \hline m \times (n-m) & (n-m) \times (n-m) \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta' \\ \varepsilon' \end{pmatrix}$$

Mivel a két altér invariáns, ezért az $(n-m) \times m$ és $m \times (n-m)$-es téglalapokban csak 0-k állhatnak. Csak így kerülhető el, hogy a kívánt helyeken csak 0-k álljanak.

Az $m \times m$-es rész elemeit az első egyenlet alapján, az $n \times n$-es rész elemeit pedig a második egyenlet alapján számolhatjuk ki.

Nyilvánvalóan blokkdiagonális mátrixot kapunk.

A FORGATÁS MÁTRIXÁNAK EXPONENCIÁLIS ALAKJA

AZONOS TENGELY KÖRÜLI KÉTSZERES ELFORGATÁS: Legyen a forgatás tengelye $\underline{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Az egyik elforgatás szöge α, a másiké β. Mi lesz a két elforgatás eredménymátrixa?

$$\underline{\underline{E}}(\alpha)\,\underline{\underline{E}}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \underline{\underline{E}}(\alpha+\beta)$$

A K MÁTRIX KISZÁMÍTÁSA:

$$\underline{E}(\alpha+\beta) = \underline{E}(\alpha)\underline{E}(\beta)$$

Ez a képlet az exponenciális függvény kitevőinek összeadására emlékeztet:

$$e^{(\alpha+\beta)K} = e^{\alpha K} e^{\beta K}$$

Mekkora a K? Ehhez egy segédtétel kell, miszerint mátrixot úgy deriválunk, hogy a mát. elemeit deriváljuk:

$$\left[\underline{A}(x)'\right]_{kl} = \left[A_{kl}(x)\right]'$$

A K-t az $\underline{E}(\alpha) = e^{\alpha K}$ egyenletből igen nehéz kifejezni, viszont ha deriválunk α szerint, akkor a K kijön szorzónak

$$\frac{d}{d\alpha}\underline{E}(\alpha) = K e^{\alpha K}$$

A kitevőben levő K-ból úgy szabadulhatunk meg, hogy az E mátrix értékét az α=0 helyen vesszük, tehát:

$$K = \left.\frac{d}{d\alpha}\underline{E}(\alpha)\right|_{\alpha=0}$$

$$\underline{E}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{alkalmazzuk a segédtételt} \quad \frac{d}{d\alpha}\underline{E}(\alpha) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tehát α=0 esetén a K értéke:

$$\underline{K}_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ezt a mátrixot egyszerűsíthetjük 2x2-es mátrix-szá $\quad \underline{K} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Azonban ez csak az α=0 esetre bizonyítás, viszont arra alkalmas volt, hogy megsejts. a K értékét. Most tetszőleges α értékre bizonyítsuk, hogy valóban ez K értéke tetszőleges α-ra. Kétféleképpen lehet bizonyítani, az e^x kétféle definíciójának megfelelően:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Először használjuk az első definíciót, ha az alábbi képletbe behelyettesítünk $\underline{K} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ és visszakapjuk a forgatási mátrixot, akkor helyes volt a K-ra vonatkozó sejtése.

$$\underline{E} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\alpha\underline{K}\right)^n$$

$$\underline{E} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\alpha\underline{K}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\underline{E}+\frac{\alpha}{n}\underline{K}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\alpha}{n}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]^n = \lim_{n\to\infty}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha}{n} \\ \frac{\alpha}{n} & 0 \end{pmatrix}\right]^n = \lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{n} \\ \frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}$$

Most pedig hirtelen gondolattól vezérelve a következő ekvivalens átalakítást végezzük: a mátrix elé kiemelünk $\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}$-t, és a mátrix elemeit pedig ezzel egyidejűleg elosztjuk eme együtthatóval:

$$\underline{E} = \lim_{n\to\infty}\left[\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{n} \\ \frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}\right]^n = \left[\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}} & \frac{-\alpha/n}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}} \\ \frac{\alpha/n}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}} \end{pmatrix}\right]^n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}\right)^n \lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}} & \frac{-\alpha/n}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}} \\ \frac{\alpha/n}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}} \end{pmatrix}^n$$

Nyilvánvaló, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}\right)^n=1$, ezért

$$\underline{E}=\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}} & \frac{-\alpha/n}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}}\\ \frac{\alpha/n}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}}\end{pmatrix}^n$$

Tudjuk, hogy létezik olyan φ_n, hogy $\cos\varphi_n=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}}$ és $\sin\varphi_n=\frac{\alpha/n}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}}$. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy $\cos^2\varphi_n+\sin^2\varphi_n=1$. Helyettesítsünk be:

$$\underline{E}=\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix}\cos\varphi_n & -\sin\varphi_n\\ \sin\varphi_n & \cos\varphi_n\end{pmatrix}^n$$

Ismert, hogy $\underline{E}(\alpha)\underline{E}(\beta)=\underline{E}(\alpha+\beta)$, ezért $[\underline{E}(\alpha)]^n=\underline{E}(n\alpha)$, ezért

$$\underline{E}=\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix}\cos\varphi_n & -\sin\varphi_n\\ \sin\varphi_n & \cos\varphi_n\end{pmatrix}^n=\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix}\cos(n\varphi_n) & -\sin(n\varphi_n)\\ \sin(n\varphi_n) & \cos(n\varphi_n)\end{pmatrix}$$

Most már csak $n\varphi_n$-t kellene egyenlővé tenni α-val. Ha $n\gg1$, azaz nagy értéket vesz fel, akkor $\frac{\alpha/n}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}}$ majdnem 0, azaz nagyon kicsi, ekkor pedig igaz az, hogy $\sin\varphi_n\sim\varphi_n$, összefoglalva:

ha $n\gg1$ $\quad n\varphi_n\sim n\sin\varphi_n=n\frac{\alpha/n}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}}=\frac{\alpha}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\alpha$, tehát

$$\underline{E}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

Most pedig bizonyítsuk a tételt az $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ segítségével

$$\underline{K}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\qquad \underline{K}^2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-\underline{E}\quad \underline{K}^3=\underline{K}^2\underline{K}=-\underline{E}\underline{K}=-\underline{K}\quad \underline{K}^4=\underline{E}$$

$$e^{\alpha\underline{K}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha\underline{K})^n}{n!}=\underline{E}+\frac{\alpha\underline{K}}{1!}+\frac{\alpha^2\underline{K}^2}{2!}+\frac{\alpha^3\underline{K}^3}{3!}+\frac{\alpha^4\underline{K}^4}{4!}+\frac{\alpha^5\underline{K}^5}{5!}+\frac{\alpha^6\underline{K}^6}{6!}+\dots=$$

$$=\underline{E}+\alpha\underline{K}-\frac{\alpha^2}{2!}\underline{E}-\frac{\alpha^3}{3!}\underline{K}+\frac{\alpha^4}{4!}\underline{E}+\frac{\alpha^5}{5!}\underline{K}-\frac{\alpha^6}{6!}\underline{E}-\dots=\underline{E}\left(1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-\frac{\alpha^6}{6!}+\dots\right)+\underline{K}\left(\alpha-\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}-\frac{\alpha^7}{7!}+\dots\right)$$

A zárójelben az $\underline{E}$ együtthatójaként pont a ~~sin~~ $\cos\alpha$ sorfejtése áll, a $\underline{K}$ együtthatójaként pedig a $\sin\alpha$-é:

$$e^{\alpha\underline{K}}=\underline{E}\cos\alpha+\underline{K}\sin\alpha=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cos\alpha+\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\sin\alpha=\begin{pmatrix}\cos\alpha&0\\0&\cos\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-\sin\alpha\\ \sin\alpha&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\ \sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$$

Tehát megkaptuk $\underline{E}$-t

$$\underline{K}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

A $\underline{K}$ operátor mátrixa hasonló szerepet tölt be a mátrixok között, mint az i a számok között, hiszen például $\underline{K}^2=-\underline{E}$, mint ahogy $i^2=-1$.

TÉRBELI FORGATÁS TETSZŐLEGES TENGELY KÖRÜL

Mint arról a füzet korábbi részén már szó esett, tetszőleges forgatás esetén:

$$F_{km} = \delta_{km}\cos\varphi + n_k n_m (1-\cos\varphi) + \sum_l \varepsilon_{klm} n_l \sin\varphi$$

Számítsuk ki az összes F_{km} komponenst:

$$F_{11} = \cos\varphi + n_1^2(1-\cos\varphi) = n_1^2 + (1-n_1^2)\cos\varphi = n_1^2 + (n_2^2+n_3^2)\cos\varphi$$

$$F_{22} = \cos\varphi + n_2^2(1-\cos\varphi) = n_2^2 + (1-n_2^2)\cos\varphi = n_2^2 + (n_1^2+n_3^2)\cos\varphi$$

$$F_{33} = \cos\varphi + n_3^2(1-\cos\varphi) = n_3^2 + (1-n_3^2)\cos\varphi = n_3^2 + (n_1^2+n_2^2)\cos\varphi$$

$$F_{12} = n_1 n_2 (1-\cos\varphi) + \varepsilon_{132} n_3 \sin\varphi = n_1 n_2 (1-\cos\varphi) - n_3 \sin\varphi$$

$$F_{21} = n_1 n_2 (1-\cos\varphi) + \varepsilon_{231} n_3 \sin\varphi = n_1 n_2 (1-\cos\varphi) + n_3 \sin\varphi$$

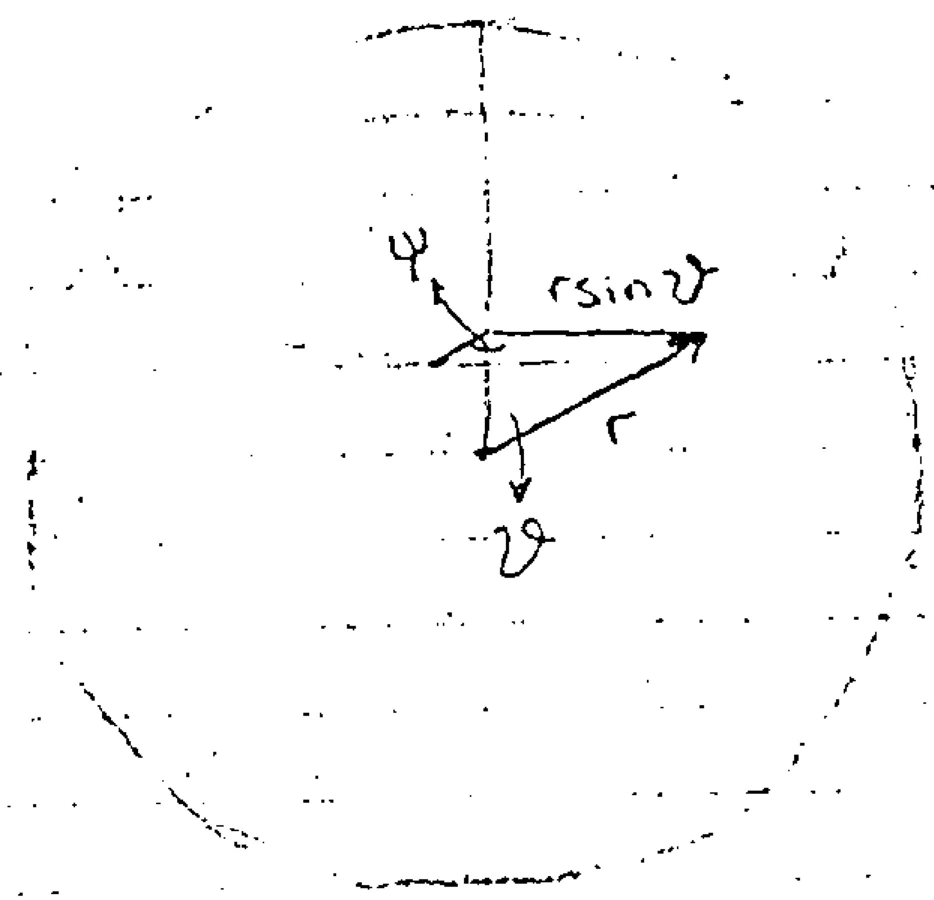
$$F_{13} = n_1 n_3 (1-\cos\varphi) + \varepsilon_{123} n_2 \sin\varphi = n_1 n_3 (1-\cos\varphi) + n_2 \sin\varphi$$

$$F_{31} = n_3 n_1 (1-\cos\varphi) + \varepsilon_{321} n_2 \sin\varphi = n_1 n_3 (1-\cos\varphi) - n_2 \sin\varphi$$

$$F_{23} = n_2 n_3 (1-\cos\varphi) + \varepsilon_{213} n_1 \sin\varphi = n_2 n_3 (1-\cos\varphi) - n_1 \sin\varphi$$

$$F_{32} = n_3 n_2 (1-\cos\varphi) + \varepsilon_{312} n_1 \sin\varphi = n_2 n_3 (1-\cos\varphi) + n_1 \sin\varphi$$

Tehát ezek a komponensek fejezik ki az $\underline{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ tengely körüli forgatás mátrixát. Fejezzük ki a forgatás mátrixát térbeli polárkoordináta-rendszerben:



$$x = r\sin\vartheta\cos\psi$$

$$y = r\sin\vartheta\sin\psi$$

$$z = r\cos\vartheta$$

Az egységvektor:

$$n_1 = \sin\vartheta\cos\psi$$

$$n_2 = \sin\vartheta\sin\psi$$

$$n_3 = \cos\vartheta$$

Az eredménymátrix – mivel kissé terjedelmes – a jobb oldalon látható:

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} \sin^2\vartheta\cos^2\psi + (1-\sin^2\vartheta\cos^2\psi)\cos\varphi & \sin^2\vartheta\cos\psi\sin\psi(1-\cos\varphi) - \cos\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta\cos\psi\cos\vartheta(1-\cos\varphi) + \sin\vartheta\sin\psi\sin\varphi \\ \sin^2\vartheta\cos\psi\sin\psi(1-\cos\varphi) + \cos\vartheta\sin\varphi & \sin^2\vartheta\sin^2\psi + (1-\sin^2\vartheta\sin^2\psi)\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\psi\cos\vartheta(1-\cos\varphi) - \sin\vartheta\cos\psi\sin\varphi \\ \sin\vartheta\cos\psi\cos\vartheta(1-\cos\varphi) - \sin\vartheta\sin\psi\sin\varphi & \sin\vartheta\sin\psi\cos\vartheta(1-\cos\varphi) + \sin\vartheta\cos\psi\sin\varphi & \cos^2\vartheta + (1-\cos^2\vartheta)\cos\varphi \end{pmatrix}$$

A SPUR ÉS A PAULI-MÁTRIXOK

A PAULI MÁTRIXOK: A Pauli mátrixokat a következőképpen definiáljuk

$$\underline{\sigma}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\sigma}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\sigma}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\sigma}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Definiáljuk két Pauli-mátrix szorzatát, mert a jövőben szükség lesz rájuk, így érdemes megpróbálni tömör formában kifejezni két tetszőleges Pauli mátrix szorzatát. Mivel az indexek túlnyomórészt 1-től 3-ig futnak, ezért a $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$ és $\sigma^{(3)}$ Pauli-mátrixokról lesz szó. (a $\sigma^{(0)}$ tulajdonképpen egységmátrix, ezért a vele való szorzás nem változtat semmit):

$$\underline{\sigma}^{(1)}\underline{\sigma}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\sigma}^{(0)} \quad \underline{\sigma}^{(1)}\underline{\sigma}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\underline{\sigma}^{(3)} \quad \underline{\sigma}^{(2)}\underline{\sigma}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -i\underline{\sigma}^{(3)}$$

$$\underline{\sigma}^{(2)}\underline{\sigma}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\sigma}^{(0)} \quad \underline{\sigma}^{(1)}\underline{\sigma}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\underline{\sigma}^{(2)} \quad \underline{\sigma}^{(3)}\underline{\sigma}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\underline{\sigma}^{(2)}$$

$$\underline{\sigma}^{(3)}\underline{\sigma}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\sigma}^{(0)} \quad \underline{\sigma}^{(2)}\underline{\sigma}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\underline{\sigma}^{(1)} \quad \underline{\sigma}^{(3)}\underline{\sigma}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -i\underline{\sigma}^{(1)}$$

Összefoglalva:

$$\underline{\sigma}^{(k)}\underline{\sigma}^{(l)} = \delta_{kl}\underline{\sigma}^{(0)} + i\sum_m \varepsilon_{klm}\underline{\sigma}^{(m)}$$

$$\sum_{\gamma=1}^{2} \sigma^{(k)}_{\alpha\gamma}\sigma^{(l)}_{\gamma\beta} = \delta_{kl}\,\delta_{\alpha\beta} + i\sum_m \varepsilon_{klm}\sigma^{(m)}_{\alpha\beta}$$

A SPUR: egy mátrix spurjának, a főátlóban levő elemek összegét nevezzük

$$\sum_k M_{kk} = \mathrm{Spur}\,\underline{M} = \mathrm{Trace}\,\underline{M}$$

TÉRBELI VEKTOROK 2x2-ES MÁTRIXOKKAL VALÓ KIFEJEZÉSE: tegyük fel, hogy olyan világban élünk, hogy csak 2x2-es mátrixokat használhatók. Bármely

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$ vektort kifejezhetünk a következő alakban $$\underline{M}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix}$$

Az $\underline{M}(\underline{r})$ típusú mátrixok alteret alkotnak a mátrixok körében. Az $\underline{M}(\underline{r})$ típusú mátrixok felbonthatók Pauli mátrixok összegére

$$\underline{M}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = x\underline{\sigma}^{(1)} + y\underline{\sigma}^{(2)} + z\underline{\sigma}^{(3)}$$

Tehát bármely vektor felfogható Pauli mátrixok összegeként

$$\underline{M}(\underline{r}) = \sum^{3} x_k \underline{\sigma}^{(k)}$$

Mi történik, ha két $\underline{M}(\underline{r})$ alakú vektort összeszorzunk:

$$\underline{M}(\underline{a})\cdot\underline{M}(\underline{b})=\left(\sum_k a_k\underline{\sigma}^{(k)}\right)\left(\sum_l b_l\underline{\sigma}^{(l)}\right)=\sum_k\sum_l a_k b_l\underline{\sigma}^{(k)}\underline{\sigma}^{(l)}$$

A $\underline{\sigma}^{(k)}\underline{\sigma}^{(l)}$ helyére írjuk be a korábban levezetett $\delta_{kl}\underline{\sigma}^{(0)}+i\sum_m\varepsilon_{klm}\underline{\sigma}^{(m)}$ összefüggést

$$\underline{M}(\underline{a})\cdot\underline{M}(\underline{b})=\sum_{kl}a_kb_l\underline{\sigma}^{(k)}\underline{\sigma}^{(l)}=\sum_{kl}a_kb_l\left(\delta_{kl}\underline{\sigma}^{(0)}+i\sum_m\varepsilon_{klm}\underline{\sigma}^{(m)}\right)=$$

$$=\left(\sum_{kl}a_kb_l\delta_{kl}\right)\underline{\sigma}^{(0)}+i\sum_m\left(\sum_{kl}\varepsilon_{klm}a_kb_l\right)\underline{\sigma}^{(m)}$$

Vegyük észre, hogy $\sum_{kl}a_kb_l\delta_{kl}=(\underline{a}\underline{b})$, ezen kívül $\sum_{kl}\varepsilon_{klm}a_kb_l=(a\times b)_m$, tehát

$$\underline{M}(\underline{a})\cdot\underline{M}(\underline{b})=\left(\sum_{kl}a_kb_l\delta_{kl}\right)\underline{\sigma}^{(0)}+i\sum_m\left(\sum_{kl}\varepsilon_{klm}a_kb_l\right)\underline{\sigma}^{(m)}=$$

$$=(\underline{a}\underline{b})\underline{\sigma}^{(0)}+i\sum_m(\underline{a}\times\underline{b})_m\underline{\sigma}^{(m)}=(\underline{a}\underline{b})\underline{\sigma}^{(0)}+i\underline{M}(\underline{a}\times\underline{b})$$

Összefoglalva:

$$\boxed{\underline{M}(\underline{a})\cdot\underline{M}(\underline{b})=(\underline{a}\underline{b})\underline{\sigma}^{(0)}+i\underline{M}(\underline{a}\times\underline{b})}$$

Tegyük fel, hogy olyan emberrel találkozunk, aki nem ismeri a skaláris szorzást viszont ismeri az $\underline{M}(\underline{r})$ típusú mátrixokat és a Spur fogalmát. Ekkor a skaláris szorzást a következőképpen definiálhatjuk:

$$\boxed{(\underline{a}\underline{b}):=\frac{1}{2}\mathrm{Spur}\left[\underline{M}(\underline{a})\cdot\underline{M}(\underline{b})\right]}$$

Miért van ez így?

$$\mathrm{Spur}\left[\underline{M}(\underline{a})\cdot\underline{M}(\underline{b})\right]=\mathrm{Spur}\left[(\underline{a}\underline{b})\underline{\sigma}^{(0)}+i\underline{M}(\underline{a}\times\underline{b})\right]$$

$$\mathrm{Spur}\left[\underline{M}(\underline{a})\cdot\underline{M}(\underline{b})\right]=\mathrm{Spur}\left[(\underline{a}\underline{b})\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]+\mathrm{Spur}\left[i\sum_m\left(\sum_{kl}\varepsilon_{klm}a_kb_l\right)\underline{\sigma}^{(m)}\right]$$

Mivel a jobb oldali tagban levő $\underline{\sigma}^{(m)}$ lehetséges értékei $m=1,2,3$, így a jobboldali tag spurja 0, hiszen a $\underline{\sigma}^{(1)}$, $\underline{\sigma}^{(2)}$ és $\underline{\sigma}^{(3)}$ főátlóiban csupa 0 áll. Tehát:

$$\mathrm{Spur}\left[\underline{M}(\underline{a})\cdot\underline{M}(\underline{b})\right]=\mathrm{Spur}\left[(\underline{a}\underline{b})\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]$$

$$\mathrm{Spur}\left[\underline{M}(\underline{a})\cdot\underline{M}(\underline{b})\right]=2(\underline{a}\underline{b})$$

S ebből már csak egy lépés az $(\underline{a}\underline{b})$ definíciója. Most próbáljuk meg ugyanúgy definiálni a vektoriális szorzatot. Ehhez felhasználjuk a kommutátor definícióját:

$$[\underline{A},\underline{B}]=\underline{A}\underline{B}-\underline{B}\underline{A}$$

$$[\underline{M}(\underline{a}),\underline{M}(\underline{b})]=\underline{M}(\underline{a})\underline{M}(\underline{b})-\underline{M}(\underline{b})\underline{M}(\underline{a})=(\underline{a}\underline{b})\underline{\sigma}^{(0)}+i\underline{M}(\underline{a}\times\underline{b})-(\underline{b}\underline{a})\underline{\sigma}^{(0)}-i\underline{M}(\underline{b}\times\underline{a})=$$

$$=i\underline{M}(\underline{a}\times\underline{b})-i\underline{M}(\underline{b}\times\underline{a})=i\underline{M}(\underline{a}\times\underline{b})+i\underline{M}(\underline{a}\times\underline{b})=2i\underline{M}(\underline{a}\times\underline{b})$$

Tehát:

$$\boxed{\underline{M}(\underline{a}\times\underline{b})=\frac{1}{2i}\left[\underline{M}(\underline{a}),\underline{M}(\underline{b})\right]}$$

PAULI MÁTRIXOK KOMMUTÁTORAI ÉS ANTIKOMMUTÁTORAI:

$$[\underline{\sigma}^{(k)},\underline{\sigma}^{(l)}] = \underline{\sigma}^{(k)}\underline{\sigma}^{(l)} - \underline{\sigma}^{(l)}\underline{\sigma}^{(k)} = \delta_{kl}\underline{\sigma}^{(0)} + i\sum_m \varepsilon_{klm}\underline{\sigma}^{(m)} - \delta_{lk}\underline{\sigma}^{(0)} - i\sum_m \varepsilon_{lkm}\underline{\sigma}^{(m)} =$$

$$= i\sum_m \varepsilon_{klm}\underline{\sigma}^{(m)} - i\sum_m \varepsilon_{lkm}\underline{\sigma}^{(m)} = i\sum_m \varepsilon_{klm}\underline{\sigma}^{(m)} + i\sum_m \varepsilon_{klm}\underline{\sigma}^{(m)} = 2i\sum_m \varepsilon_{klm}\underline{\sigma}^{(m)}$$

$$\boxed{[\underline{\sigma}^{(k)},\underline{\sigma}^{(l)}] = 2i\sum_m \varepsilon_{klm}\underline{\sigma}^{(m)}}$$

$$\{\underline{\sigma}^{(k)},\underline{\sigma}^{(l)}\} = \underline{\sigma}^{(k)}\underline{\sigma}^{(l)} + \underline{\sigma}^{(l)}\underline{\sigma}^{(k)} = \delta_{kl}\underline{\sigma}^{(0)} + i\sum_m \varepsilon_{klm}\underline{\sigma}^{(m)} + \delta_{lk}\underline{\sigma}^{(0)} + i\sum_m \varepsilon_{lkm}\underline{\sigma}^{(m)} =$$

$$= 2\delta_{kl}\underline{\sigma}^{(0)} + i\sum_m \varepsilon_{klm}\underline{\sigma}^{(m)} - i\sum_m \varepsilon_{klm}\underline{\sigma}^{(m)} = 2\delta_{kl}\underline{\sigma}^{(0)}$$

$$\boxed{\{\underline{\sigma}^{(k)},\underline{\sigma}^{(l)}\} = 2\delta_{kl}\underline{\sigma}^{(0)}}$$

UNITÉR MÁTRIXOK

EGY SPURTARTÓ MŰVELET: vegyünk egy olyan $\underline{U}$ mátrixot, amelynek létezik inverze. Definiáljuk az $\underline{M}'(\underline{a})$ és $\underline{M}'(\underline{b})$ mátrixokat a következőképpen:

$$\underline{M}'(\underline{a}) = \underline{U}\,\underline{M}(\underline{a})\,\underline{U}^{-1} \qquad \text{és} \qquad \underline{M}'(\underline{b}) = \underline{U}\,\underline{M}(\underline{b})\,\underline{U}^{-1}$$

Mi az $\underline{M}'(\underline{a})$ és $\underline{M}'(\underline{b})$ szorzata?

$$\underline{M}'(\underline{a})\cdot\underline{M}'(\underline{b}) = (\underline{U}\,\underline{M}(\underline{a})\underline{U}^{-1})(\underline{U}\,\underline{M}(\underline{b})\underline{U}^{-1}) = \underline{U}\,\underline{M}(\underline{a})(\underline{U}^{-1}\underline{U})\underline{M}(\underline{b})\underline{U}^{-1} = \underline{U}(\underline{M}(\underline{a})\underline{M}(\underline{b}))\underline{U}^{-1}$$

A műveletet konjugálásnak hívjuk. Ezek szerint mindegy, hogy előbb konjugáljuk a mátrixokat és aztán szorozzuk össze, vagy előbb szorozzuk össze a két mátrixot és azután konjugálunk.

Mit tesz ez a művelet a spurral?

$$\text{Spur}\,\underline{M}' = \sum_k M'_{kk} = \sum_{klm} U_{kl}M_{lm}U^{-1}_{mk} = \sum_{lm} M_{lm}\Big(\sum_k U^{-1}_{mk}U_{kl}\Big) = \sum_{lm} M_{lm}(\underline{U}^{-1}\underline{U})_{ml} =$$

$$= \sum_{lm} M_{lm}(\underline{U}^{-1}\underline{U})_{ml} = \sum_{lm} M_{lm}(\underline{E})_{ml} = \sum_{lm} M_{lm}\delta_{lm} = \sum_l M_{ll} = \text{Spur}\,\underline{M}$$

HOGYAN LEHET KISZÁMÍTANI $\underline{M}(\underline{x})$-BŐL AZ x_k KOMPONENSEKET: szorozzuk meg az $\underline{M}(\underline{x})$-t $\underline{\sigma}^{(k)}$-val:

$$\underline{\sigma}^{(k)}\underline{M}(\underline{x}) = \underline{\sigma}^{(k)}\sum_l x_l\underline{\sigma}^{(l)} = \sum_l x_l(\underline{\sigma}^{(k)}\underline{\sigma}^{(l)}) = \sum_l x_l\Big[\delta_{kl}\underline{\sigma}^{(0)} + i\sum_m \varepsilon_{klm}\underline{\sigma}^{(m)}\Big]$$

Ebből kellene kifejezni x_l-t. Ezt a Spur segítségével tehetjük meg.

$$\text{Spur}\,\underline{\sigma}^{(k)}\underline{M}(\underline{x}) = \sum_l x_l\Big[\delta_{kl}\,\text{Spur}\,\underline{\sigma}^{(0)} + i\sum_m \varepsilon_{klm}\,\text{Spur}\,\underline{\sigma}^{(m)}\Big] = \sum_l x_l\Big[2\delta_{kl} + i\sum_m \varepsilon_{klm}\cdot 0\Big] = 2\sum_l x_l\delta_{kl} =$$

$= 2x_k$ tehát

$$\boxed{x_k = \frac{1}{2}\,\text{Spur}[\underline{\sigma}^{(k)}\underline{M}(\underline{x})]}$$

A KOMPLEX KONJUGÁLT MÁTRIX:

$$\underline{M}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix} \text{ mátrix komplex konjugáltja } \underline{M}^*(\underline{r}) = \begin{pmatrix} z & x+iy \\ x-iy & -z \end{pmatrix}$$

Mint látható az $\underline{M}(\underline{r})$ típusú mátrixok esetén a transzponált megegyezik a komplex konjugálttal:

$$\boxed{\tilde{\underline{M}} = \underline{M}^*}$$

AZ ADJUNGÁLT MÁTRIX: kétféle adjungált mátrix létezik: Adjungált mátrixnak nevezik egyrészt azt a mátrixot, amelynek elemei egy adott mátrix elemeihez tartozó aldeterminánsok értékei.

Másrészt létezik egy másképpen definiált adjungált mátrix, melynek semmi köze az előzőhöz. Most erről az adjungált mátrixról lesz szó. Definíció szerint adjungált mátrixnak nevezük a transzponált komplex konjugáltját, és $\underline{M}^+$-szal jelöljük:

$$\boxed{\underline{M}^+ = \tilde{\underline{M}}^*}$$

Az $\underline{M}(\underline{r})$ típusú mátrixok esetén $\tilde{\underline{M}} = \underline{M}^*$, ezért

$$\underline{M}^+ = \underline{M}$$

S ugyanígy Pauli mátrixok esetén is

$$\underline{\sigma}^{(k)+} = \underline{\sigma}^{(k)}$$

HERMITIKUS MÁTRIX: hermitikusnak nevezzük az olyan mátrixot, melynek transzponáltjának komplex konjugáltja önmaga

HERMITIKUS MÁTRIX

$$\boxed{\underline{M} = \tilde{\underline{M}}^*}$$

Ezt már az előbb levezettük, itt csupán az elnevezés definiálásáról van szó. Vigyázat nem minden mátrixra igaz $\underline{M}^+ = \underline{M}$ azonosság, de az $\underline{M}(\underline{r})$ típusúakra igen, s így definíció szerint az $\underline{M} = \tilde{\underline{M}}^*$ is igaz, tehát hermitikusak.

AZ UNITÉR MÁTRIX MEGJELENÉSE: az előbb bevezetett $\underline{M}'$ mátrix, amelyet $\underline{U}$-val és $\underline{U}^{-1}$-nel való konjugálással nyertünk lehet-e hermitikus? Mi a feltétele annak, hogy hermitikus legyen? Milyen feltételt jelent ez az $\underline{U}$-ra nézve?

Ennek belátásához fel kell használni egy az adjungáltakra vonatkozó segédtételt. A transzponáltakra vonatkozó $\widetilde{\underline{A}\underline{B}} = \tilde{\underline{B}}\tilde{\underline{A}}$ szabály miatt:

$$\boxed{(\underline{A}\underline{B})^+ = \underline{B}^+\underline{A}^+}$$

A cél tehát az, hogy $(\underline{M}')^+ = \underline{M}'$ teljesüljön. Ekkor lesz $\underline{M}'$ hermitikus mátrix

$$(\underline{M}')^+ = (\underline{U}\underline{M}\underline{U}^{-1})^+ = (\underline{U}^{-1})^+\underline{M}^+(\underline{U})^+ = (\underline{U}^{-1})^+\underline{M}(\underline{U})^+$$

Azt szeretnénk tehát, hogy

$$(\underline{U}^{-1})^+\underline{M}(\underline{U})^+ = \underline{U}\underline{M}\underline{U}^{-1}$$

legyen. Ehhez szükséges és elegendő feltétel

$$(\underline{U}^{-1})^+ = \underline{U} \quad \text{és} \quad (\underline{U})^+ = \underline{U}^{-1}$$

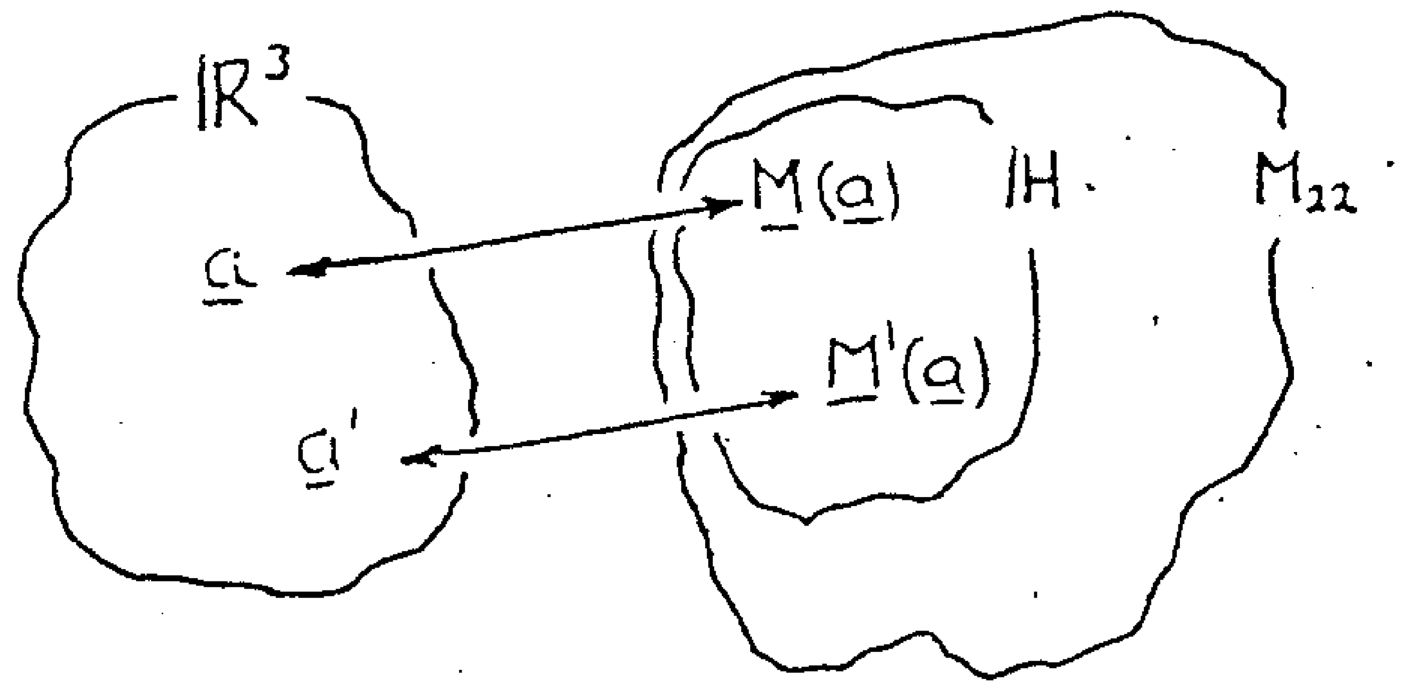
A kettő tulajdonképpen ugyanazt jelenti. Tehát $\underline{M}'$ akkor lesz hermitikus, ha az $\underline{U}$-ra az igaz, hogy $(\underline{U})^+ = \underline{U}^{-1}$. Az ilyen típusú mátrixokat unitér mátrixoknak nevezzük:

UNITÉR MÁTRIX

$$\boxed{\underline{U}^+ = \underline{U}^{-1}}$$

Az nxn-es unitér mátrixok csoportot alkotnak. Halmazukat $U(n)$-nel jelöljük.

A FORGATÁS MÁTRIXÁNAK UNITÉR MÁTRIXOKKAL VALÓ KIFEJEZÉSE: ha $\underline{U}$ eleme az $\underline{U}(2)$ halmaznak, akkor $\underline{M}'(\underline{a})$ nyilvánvalóan hermitikus mátrix. Nyilvánvaló, hogy



$$\forall\ \underline{M}'(\underline{a}) \in \mathbb{H}\ \exists\ \underline{a}' \in \mathbb{R}^3 : \underline{M}'(\underline{a}) = \underline{M}(\underline{a}')$$

Ilyen $\underline{a}'$-t találhatunk. Mit tudunk elmondani $\underline{a}$ és $\underline{a}'$ kapcsolatáról. Számoljuk ki az egyenlet két oldalán levő mátrixok determinánsát.

$$\det[\underline{M}'(\underline{a})] = \det(\underline{U}\underline{M}(\underline{a})\underline{U}^{-1}) = [\det \underline{U}][\det(\underline{M}(\underline{a}))][\det \underline{U}^{-1}] = [\det \underline{U}^{-1}][\det \underline{U}][\det(\underline{M}(\underline{a}))] =$$

$$= [\det \underline{U}^{-1}\underline{U}][\det(\underline{M}(\underline{a}))] = [\det \underline{E}][\det(\underline{M}(\underline{a}))] = \det(\underline{M}(\underline{a}))$$

Természetesen a levezetés folyamán felhasználtuk a $\det(\underline{A}\underline{B}) = (\det \underline{A})(\det \underline{B})$ azonosságot. A $\det(\underline{M}(\underline{a}))$ kiszámításához elevenítsük fel az $\underline{M}(\underline{a})$ definícióját:

$$\underline{M}(\underline{a}) = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\underline{M}(\underline{a})) = -a_3 - (a_1+ia_2)(a_1-ia_2) = -a_3^2 - (a_1^2 + a_2^2) =$$

$$\det(\underline{M}(\underline{a})) = -(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = -|\underline{a}|^2$$

Tehát

$$\det[\underline{M}'(\underline{a})] = \det(\underline{M}(\underline{a})) = -|\underline{a}|^2$$

$$\det[\underline{M}(\underline{a}')] = -|\underline{a}'|^2$$

Az $\underline{a}'$ vektort úgy választottuk, hogy $\underline{M}'(\underline{a}) = \underline{M}(\underline{a}')$, azaz $\det[\underline{M}'(\underline{a})] = \det[\underline{M}(\underline{a}')]$ legyen:

$$\det[\underline{M}'(\underline{a})] = \det[\underline{M}(\underline{a}')]$$

$$-|\underline{a}|^2 = -|\underline{a}'|^2$$

Tehát az $\underline{a}$ és az $\underline{a}'$ vektorok azonos hosszúságúak. Mivel e transzformáció hossz tartó, nevezzük el forgatásnak, ekkor

$$\underline{a}' = \underline{F}\,\underline{a}$$

Lapozzunk vissza kettőt, és ott a jobb oldal alján egy olyan képletet találunk mi szerint:

$$a_k' = \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\left[\underline{\sigma}^{(k)}\underline{M}(\underline{a}')\right]$$

Csak annyi a változás, hogy x_k helyére a_k', $\underline{x}$ helyére $\underline{a}'$ került. Az előbbiek értelmében $\underline{M}'(\underline{a}) = \underline{M}(\underline{a}')$, helyettesítsünk az egyenletben $\underline{M}(\underline{a}')$ helyére $\underline{M}'(\underline{a})$-t:

$$a_k' = \frac{1}{2}\mathrm{Spur}\left[\underline{\sigma}^{(k)}\underline{M}'(\underline{a})\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Spur}\left[\underline{\sigma}^{(k)}\underline{U}\,\underline{M}(\underline{a})\underline{U}^{-1}\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Spur}\left[\underline{\sigma}^{(k)}\underline{U}\left(\sum_l a_l\underline{\sigma}^{(l)}\right)\underline{U}^{-1}\right] =$$
$$= \sum_l a_l\,\frac{1}{2}\mathrm{Spur}\left[\underline{\sigma}^{(k)}\underline{U}\,\underline{\sigma}^{(l)}\underline{U}^{-1}\right]$$

A korábban tanultak szerint forgatások esetén $a_k' = \sum_l F_{kl}a_l$; az előbbi levezetés alapján:

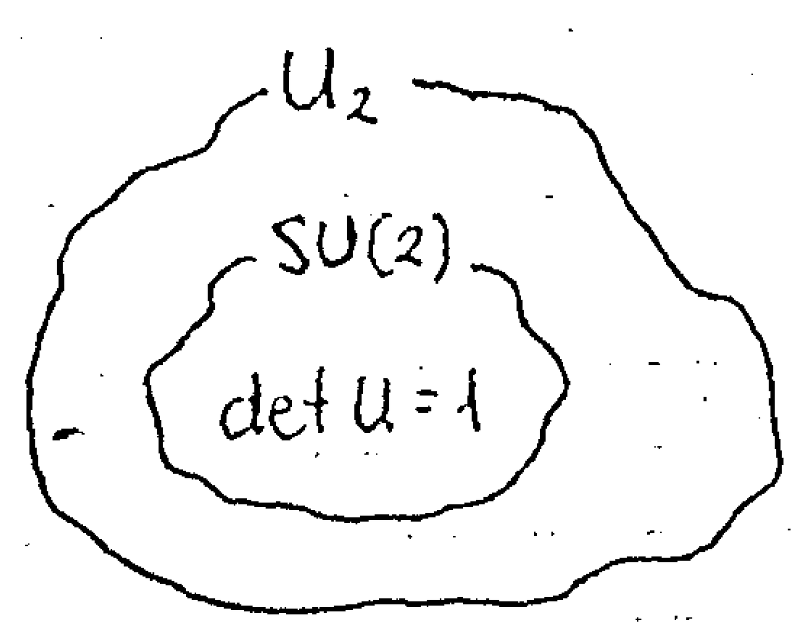
$$a_k' = \sum_l\left[\frac{1}{2}\mathrm{Spur}\left(\underline{\sigma}^{(k)}\underline{U}\,\underline{\sigma}^{(l)}\underline{U}^{-1}\right)\right]a_l = \sum_l F_{kl}a_l$$

Tehát

$$F_{kl} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\left[\underline{\sigma}^{(k)}\underline{U}\,\underline{\sigma}^{(l)}\underline{U}^{-1}\right]$$

AZ SU(2) RÉSZCSOPORT: az unitér mátrix definíciójából ($\underline{U}^+ = \underline{U}^{-1}$) következik, hogy

$$|\det \underline{U}| = 1$$



Az unitér mátrixok tulajdonképpen az egységnyi abszolútértékű komplex számok általánosítása.

Mielőtt rátérnénk az SU(2) részcsoportra következzen egy bizonyítás, miszerint a szorzás nem visz ki az unitér mátrixok halmazából:

$$\underline{U}^+ = \underline{U}^{-1} \text{ miatt } \underline{U}^+\underline{U} = \underline{E}$$

Legyen $\underline{U}_1$ és $\underline{U}_2$ unitér mátrix, ekkor $\underline{U}_1^+\underline{U}_1 = \underline{E}$ és $\underline{U}_2^+\underline{U}_2 = \underline{E}$. Most nézzük az $\underline{U}_3 = \underline{U}_1\underline{U}_2$ mátrixot:

$$\underline{U}_3^+\underline{U}_3 = (\underline{U}_1\underline{U}_2)^+(\underline{U}_1\underline{U}_2) = (\underline{U}_2^+\underline{U}_1^+)(\underline{U}_1\underline{U}_2) = \underline{U}_2^+(\underline{U}_1^+\underline{U}_1)\underline{U}_2 = \underline{U}_2^+\underline{E}\,\underline{U}_2 = \underline{U}_2^+\underline{U}_2 = \underline{E}$$

Azaz a szorzás valóban nem visz ki az unitér mátrixok halmazából.
Az SU(2) részcsoportra az igaz, hogy a determináns értéke 1:

SU(2)

$$\det U = 1$$

Könnyen belátható, hogy az SU(2) részcsoport zárt a mátrixszorzásra nézve.

Most vezessünk le egy olyan összefüggést, ami jellemzi az SU(2) részcsoport elemeit:

$$1 = \det \underline{E} = \det(\underline{U}^{+}\underline{U}) = (\det \underline{U}^{+})(\det \underline{U}) = (\det \underline{\tilde{U}}^{*})(\det \underline{U}) = (\det \underline{U}^{-1})(\det \underline{U})$$

azaz

$$1 = (\det \underline{U}^{-1})(\det \underline{U})$$

SU(2) MÁTRIXOK

$$\det \underline{U}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{U}}$$

<u>AZ SU(2) JELLEMZŐI:</u> mit mondhatunk egy általános SU(2) elemről? Az ilyen mátrixok 8 dimenziós lineáris teret alkotnak:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

ennek a 8 mátrixnak a lineáris kombinációjaként állítható elő bármely SU(2) mátrix.

Legyen

$$SU(2) \ni \underline{U} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Milyen kapcsolat áll fenn az a, b, c és d mátrixelemek között? Tudjuk azt, hogy $\underline{U}^{+}\underline{U} = \underline{E}$

$$\underline{U} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \underline{\tilde{U}} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \underline{\tilde{U}}^{*} = \begin{pmatrix} a^{*} & c^{*} \\ b^{*} & d^{*} \end{pmatrix} = \underline{U}^{+} \qquad \underline{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Most írjuk fel az $\underline{U}^{+}\underline{U}$ mátrixszorzatot:

$$\begin{pmatrix} a^{*} & c^{*} \\ b^{*} & d^{*} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{*} & c^{*} \\ b^{*} & d^{*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa^{*}+bb^{*} & ac^{*}+bd^{*} \\ ca^{*}+db^{*} & cc^{*}+dd^{*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ebből az alábbi feltételek adódnak:

$$(1)\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \qquad (2)\ ac^{*} + bd^{*} = 0$$

$$(3)\ ca^{*} + db^{*} = 0 \qquad (4)\ |c|^2 + |d|^2 = 1$$

A (2) és (3) as egyenletek tulajdonképpen ugyanazt jelentik, azaz:

$$\frac{|a|}{|b|} = \frac{|d|}{|c|}$$

Persze ennek az egyenletnek milliónyi megoldása lehet, de vegyük a legegyszerűbb megoldást, amikor

$$|a| = |d| \quad \text{és} \quad |b| = |c|$$

Ekkor d^{*} és c^{*} a következőképpen fejezhetők ki:

$$(5)\ d^{*} = a e^{-i\gamma} \qquad (6)\ c^{*} = -b e^{-i\delta}$$

Persze, másképpen is kifejezhetnénk, a (6) egyenletben pedig $-b$ helyett $+b$ is lehetne, és így tovább. Azonban ez így szokás. A fontos az, hogy bármely a-hoz és d-hez található olyan δ, hogy az (5) egyenlet igaz legyen.

Most vegyük a (2) egyenletet:

$$(2)\ ac^* + bd^* = 0$$

Most helyettesítsünk be c^* és d^* helyére az (5) és (6) egyenletekből

$$(2)\ a(-be^{-i\delta}) + b(ae^{-i\gamma}) = 0$$

$$(2)\ ab(e^{-i\gamma} - e^{-i\delta}) = 0$$

Ez akkor, és csak akkor teljesül tetszőleges a-ra és b-re, ha $\gamma = \delta$, így

$$(5)\ d^* = ae^{-i\delta} \quad \text{és} \quad (6)\ c^* = -be^{-i\delta}$$

A következő számításokban nem d^*-ra és c^*-ra lesz szükség, hanem d-re és c-re. Fejezzük ki d-t és c-t (5)-ből és (6)-ból:

$$(5)\ d = a^* e^{i\delta} \quad \text{és} \quad (6)\ c = -b^* e^{i\delta}$$

Ekkor az $SU(2) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ kezdeti mátrixunk a következő alakot ölti

$$\underline{U} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* e^{i\delta} & a^* e^{i\delta} \end{pmatrix}$$

Szeretnénk még többet megtudni, például mi δ értéke? Például még semmire sem használtuk az (1) egyenletet, s még azt a tényt sem használtuk fel, hogy $\underline{U} \in SU(2)$-re $\det \underline{U} = 1$:

$$\det \underline{U} = a(a^* e^{i\delta}) - b(-b^* e^{i\delta}) = e^{i\delta}(aa^* + bb^*) = e^{i\delta}(|a|^2 + |b|^2) = e^{i\delta}$$

Mivel $\det \underline{U} = 1$, ezért $e^{i\delta} = 1$ tehát $\delta = 0$, ha $\underline{U} \in SU(2)$

Tehát tetszőleges $\underline{U} \in SU(2)$ mátrix felírható a következő alakban:

$$SU(2)$$

$$\underline{U} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$$

$\underline{U} \in SU(2)$ TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNNYEL VALÓ KIFEJEZÉSE

AZ $\underline{U} \in SU(2)$ PAULI MÁTRIXOKKAL VALÓ KIFEJEZÉSE: legyen $\underline{U}$ tetszőleges $SU(2)$-beli elem. Írjuk $\underline{U}$-t a következő alakban:

$$\underline{U} = \begin{pmatrix} a'+ia'' & b'+ib'' \\ -b'+ib'' & a'-ia'' \end{pmatrix}$$

Alakítsuk egy kicsit ezt a mátrixot:

$$\underline{U} = \begin{pmatrix} a'+ia'' & b'+ib'' \\ -b'+ib'' & a'-ia'' \end{pmatrix} = a'\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a''\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + b'\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b''\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= a'\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i\left[b''\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b'\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + a''\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] = a'\underline{\sigma}^{(0)} + i\left(b''\underline{\sigma}^{(1)} + b'\underline{\sigma}^{(2)} + a''\underline{\sigma}^{(3)}\right)$$

No ez már pozitív jelenség, ez emlékeztet valamire. Mire is? $\underline{M}(\underline{r}) = \sum_k x_k \underline{\sigma}^{(k)}$. Ilyen alakra kellene alakítani a zárójelben található részt. Először egy váratlan fogáshoz folyamodunk; legyen

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} b'' \\ b' \\ a'' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Nem ez volt a váratlan fogás még. Mint két lappal előbb le van írva

$$(1)\ |a|^2 + |b|^2 = 1$$

$$(1)\ (a')^2 + (a'')^2 + (b')^2 + (b'')^2 = 1$$

$$(1)\ (a')^2 + |\underline{v}|^2 = 1$$

Ha ez utóbbi egyenlet teljesül, akkor létezik olyan $\frac{\varphi}{2}$, hogy

$$(2)\ a' = \cos\frac{\varphi}{2} \quad \text{és} \quad (3)\ |\underline{v}| = \sin\frac{\varphi}{2}$$

Még egy utolsó fogás. $\underline{v}$ vektort a $\underline{v} = |\underline{v}|\underline{n}$ alakban akarjuk megkapni, ahol $\underline{n}$ a $\underline{v}$ irányába mutató egységvektor. Egységvektorokkal mindig könnyebb dolgozni, s ennek haszna a következő levezetésben fog kitűnni. Tehát:

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} \dfrac{b''}{\sqrt{(b'')^2+(b')^2+(a'')^2}} \\ \dfrac{b'}{\sqrt{(b'')^2+(b')^2+(a'')^2}} \\ \dfrac{a''}{\sqrt{(b'')^2+(b')^2+(a'')^2}} \end{pmatrix}$$

Térjünk vissza az eredeti egyenlethez:

$$\underline{U} = a'\underline{\sigma}^{(0)} + i\left(b''\underline{\sigma}^{(1)} + b'\underline{\sigma}^{(2)} + a''\underline{\sigma}^{(3)}\right) = \cos\frac{\varphi}{2}\underline{\sigma}^{(0)} + i\sum_k v_k \underline{\sigma}^{(k)} = \cos\frac{\varphi}{2}\underline{\sigma}^{(0)} + i|\underline{v}|\sum_k n_k \underline{\sigma}^{(k)} =$$

$$= \cos\frac{\varphi}{2}\underline{\sigma}^{(0)} + i\sin\frac{\varphi}{2}\sum_k n_k \underline{\sigma}^{(k)} = \cos\frac{\varphi}{2}\underline{\sigma}^{(0)} + i\sin\frac{\varphi}{2}(\underline{n}\underline{\sigma})$$

Bármely $\underline{U} \in SU(2)$ kifejezhető a következő alakban:

$$\boxed{\underline{U} = \cos\frac{\varphi}{2}\underline{\sigma}^{(0)} + i\sin\frac{\varphi}{2}(\underline{n}\underline{\sigma})}$$

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \underline{\sigma}^{(1)} \\ \underline{\sigma}^{(2)} \\ \underline{\sigma}^{(3)} \end{pmatrix}$$

A FORGATÁS MÁTRIXA: UNITÉR MÁTRIXOS ALAKRÓL HOGYAN LEHET ÁTTÉRNI A NORMÁLIS ALAKRA:

Mielőtt rátérnénk a feladat megoldásának fő részére, ki kell számolni néhány apróságot. Mennyi a $\mathrm{Spur}[\underline{\sigma}^{(k)}\underline{\sigma}^{(m)}]$, $\mathrm{Spur}[\underline{\sigma}^{(k)}\underline{\sigma}^{(m)}\underline{\sigma}^{(l)}]$, $\mathrm{Spur}[\underline{\sigma}^{(k)}\underline{\sigma}^{(m)}\underline{\sigma}^{(l)}\underline{\sigma}^{(p)}]$?

$$\mathrm{Spur}[\underline{\sigma}^{(k)}\underline{\sigma}^{(m)}] = \mathrm{Spur}\left[\delta_{km}\underline{\sigma}^{(0)} + i\sum_l \varepsilon_{kml}\underline{\sigma}^{(l)}\right] = \mathrm{Spur}[\delta_{km}\underline{\sigma}^{(0)}] + \mathrm{Spur}\left[i\sum_l \varepsilon_{kml}\underline{\sigma}^{(l)}\right]$$

Mivel $l=1,2,3$, így $\mathrm{Spur}[i\sum_l \varepsilon_{kml}\underline{\sigma}^{(l)}]=0$, hiszen a $\underline{\sigma}^{(1)}, \underline{\sigma}^{(2)}$ és $\underline{\sigma}^{(3)}$ Pauli mátrixok spurja

tehát

$$\mathrm{Spur}[\underline{\sigma}^{(k)}\underline{\sigma}^{(m)}] = \mathrm{Spur}[\delta_{km}\underline{\sigma}^{(0)}] = 2\delta_{km}$$

$$\boxed{\mathrm{Spur}[\underline{\sigma}^{(k)}\underline{\sigma}^{(m)}] = 2\delta_{km}}$$

Most számoljuk ki a háromtagú Pauli mátrixokból álló szorzat spurját:

$$\mathrm{Spur}[\underline{\sigma}^{(k)}\underline{\sigma}^{(m)}\underline{\sigma}^{(l)}] = \mathrm{Spur}\left[\left(\delta_{km}\underline{\sigma}^{(0)} + i\sum_q \varepsilon_{kmq}\underline{\sigma}^{(q)}\right)\underline{\sigma}^{(l)}\right] = \mathrm{Spur}\left[\delta_{km}\underline{\sigma}^{(0)}\underline{\sigma}^{(l)} + i\sum_q \varepsilon_{kmq}\underline{\sigma}^{(q)}\underline{\sigma}^{(l)}\right]$$

$$= \mathrm{Spur}\left[\delta_{km}\underline{\sigma}^{(l)} + i\sum_q \varepsilon_{kmq}\left(\delta_{ql}\underline{\sigma}^{(0)} + i\sum_s \varepsilon_{qls}\underline{\sigma}^{(s)}\right)\right] =$$

$$= \mathrm{Spur}\left[\delta_{km}\underline{\sigma}^{(l)} + i\sum_q \varepsilon_{kmq}\delta_{ql}\underline{\sigma}^{(0)} + i\sum_q \varepsilon_{kmq}\, i\sum_s \varepsilon_{qls}\underline{\sigma}^{(s)}\right] =$$

$$= \mathrm{Spur}\left[\delta_{km}\underline{\sigma}^{(l)} + i\varepsilon_{kml}\underline{\sigma}^{(0)} - \sum_s\left(\sum_q \varepsilon_{kmq}\varepsilon_{qls}\right)\underline{\sigma}^{(s)}\right] =$$

$$= \mathrm{Spur}\left[\delta_{km}\underline{\sigma}^{(l)} + i\varepsilon_{kml}\underline{\sigma}^{(0)} - \sum_s\left(\sum_q \varepsilon_{kmq}\varepsilon_{lsq}\right)\underline{\sigma}^{(s)}\right] =$$

$$= \mathrm{Spur}\left[\delta_{km}\underline{\sigma}^{(l)} + i\varepsilon_{kml}\underline{\sigma}^{(0)} - \sum_s\left(\delta_{kl}\delta_{ms} - \delta_{ks}\delta_{ml}\right)\underline{\sigma}^{(s)}\right] =$$

$$= \mathrm{Spur}\left[i\varepsilon_{kml}\underline{\sigma}^{(0)} + \delta_{km}\underline{\sigma}^{(l)} - \sum_s \delta_{kl}\delta_{ms}\underline{\sigma}^{(s)} + \sum_s \delta_{ks}\delta_{ml}\underline{\sigma}^{(s)}\right] =$$

$$= \mathrm{Spur}\left[i\varepsilon_{kml}\underline{\sigma}^{(0)} + \delta_{km}\underline{\sigma}^{(l)} - \delta_{kl}\underline{\sigma}^{(m)} + \delta_{ml}\underline{\sigma}^{(k)}\right] =$$

$$= \mathrm{Spur}[i\varepsilon_{kml}\underline{\sigma}^{(0)}] + \mathrm{Spur}[\delta_{km}\underline{\sigma}^{(l)}] + \mathrm{Spur}[-\delta_{kl}\underline{\sigma}^{(m)}] + \mathrm{Spur}[\delta_{ml}\underline{\sigma}^{(k)}] = 2i\varepsilon_{kml}$$

$$\boxed{\mathrm{Spur}[\underline{\sigma}^{(k)}\underline{\sigma}^{(m)}\underline{\sigma}^{(l)}] = 2i\varepsilon_{kml}}$$

S végül lássuk a négytagú Pauli-mátrix szorzat spurját:

$$\underline{\sigma}^{(k)}\underline{\sigma}^{(m)}\underline{\sigma}^{(l)}\underline{\sigma}^{(p)} = \left(\underline{\sigma}^{(k)}\underline{\sigma}^{(m)}\underline{\sigma}^{(l)}\right)\underline{\sigma}^{(p)} = \left[i\varepsilon_{kml}\underline{\sigma}^{(0)} + \delta_{km}\underline{\sigma}^{(l)} - \delta_{kl}\underline{\sigma}^{(m)} + \delta_{ml}\underline{\sigma}^{(k)}\right]\underline{\sigma}^{(p)}$$

A $\underline{\sigma}^{(k)}\underline{\sigma}^{(m)}\underline{\sigma}^{(l)}$ helyére beírt összeg az előző levezetés utolsóelőtti sorában található,

tehát:

$$\underline{\sigma}^{(k)}\underline{\sigma}^{(m)}\underline{\sigma}^{(l)}\underline{\sigma}^{(p)} = i\varepsilon_{kml}\underline{\sigma}^{(p)} + \delta_{km}\underline{\sigma}^{(l)}\underline{\sigma}^{(p)} - \delta_{kl}\underline{\sigma}^{(m)}\underline{\sigma}^{(p)} + \delta_{ml}\underline{\sigma}^{(k)}\underline{\sigma}^{(p)}$$

Két Pauli mátrix szorzatának spurja csak akkor nem 0, ha ez a szorzat az egységmátrix, azaz $\underline{\sigma}^{(0)}$; ez csak akkor teljesülhet, ha a szorzat két tagja azonos, tehát:

$$\mathrm{Spur}[\underline{\sigma}^{(k)}\underline{\sigma}^{(m)}\underline{\sigma}^{(l)}\underline{\sigma}^{(p)}] = \mathrm{Spur}[i\varepsilon_{kml}\underline{\sigma}^{(p)}] + \mathrm{Spur}[\delta_{km}\underline{\sigma}^{(l)}\underline{\sigma}^{(p)}] + \mathrm{Spur}[-\delta_{kl}\underline{\sigma}^{(m)}\underline{\sigma}^{(p)}] + \mathrm{Spur}[\delta_{ml}\underline{\sigma}^{(k)}\underline{\sigma}$$

$$= 2\delta_{km}\delta_{lp} - 2\delta_{kl}\delta_{mp} + 2\delta_{ml}\delta_{kp}$$

$$\mathrm{Spur}\left[\underline{\sigma}^{(k)}\underline{\sigma}^{(m)}\underline{\sigma}^{(l)}\underline{\sigma}^{(p)}\right]=2\delta_{km}\delta_{lp}-2\delta_{kl}\delta_{mp}+2\delta_{ml}\delta_{kp}$$

Mivel $\underline{U}=\cos\frac{\varphi}{2}\underline{\sigma}^{(0)}+i\sin\frac{\varphi}{2}(\underline{n}\underline{\sigma})$, így

$$\underline{U}^{+}=\cos\frac{\varphi}{2}\underline{\sigma}^{(0)}-i\sin\frac{\varphi}{2}(\underline{n}\underline{\sigma})$$

Most már térjünk rá a feladat lényegére:

$$F_{kl}=\frac{1}{2}\mathrm{Spur}\left[\underline{\sigma}^{(k)}\underline{U}\underline{\sigma}^{(l)}\underline{U}^{-1}\right]=\frac{1}{2}\mathrm{Spur}\left[\underline{\sigma}^{(k)}\underline{U}\underline{\sigma}^{(l)}\underline{U}^{+}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Spur}\left[\underline{\sigma}^{(k)}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\underline{\sigma}^{(0)}+i\sin\frac{\varphi}{2}(\underline{n}\underline{\sigma})\right)\underline{\sigma}^{(l)}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\underline{\sigma}^{(0)}-i\sin\frac{\varphi}{2}(\underline{n}\underline{\sigma})\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Spur}\left[\underline{\sigma}^{(k)}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\underline{\sigma}^{(0)}+i\sin\frac{\varphi}{2}\sum_m n_m\underline{\sigma}^{(m)}\right)\underline{\sigma}^{(l)}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\underline{\sigma}^{(0)}-i\sin\frac{\varphi}{2}\sum_p n_p\underline{\sigma}^{(p)}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Spur}\left[\underline{\sigma}^{(k)}\cos\frac{\varphi}{2}\underline{\sigma}^{(0)}\underline{\sigma}^{(l)}\cos\frac{\varphi}{2}\underline{\sigma}^{(0)}\right]+\frac{1}{2}\mathrm{Spur}\left[\underline{\sigma}^{(k)}i\sin\frac{\varphi}{2}\sum_m n_m\underline{\sigma}^{(m)}\underline{\sigma}^{(l)}\cos\frac{\varphi}{2}\underline{\sigma}^{(0)}\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{Spur}\left[\underline{\sigma}^{(k)}\cos\frac{\varphi}{2}\underline{\sigma}^{(0)}\underline{\sigma}^{(l)}(-i)\sin\frac{\varphi}{2}\sum_p n_p\underline{\sigma}^{(p)}\right]+\frac{1}{2}\mathrm{Spur}\left[\underline{\sigma}^{(k)}i\sin\frac{\varphi}{2}\sum_m n_m\underline{\sigma}^{(m)}\underline{\sigma}^{(l)}(-i)\sin\frac{\varphi}{2}\sum_p n_p\underline{\sigma}^{(p)}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}\mathrm{Spur}\left[\underline{\sigma}^{(k)}\underline{\sigma}^{(0)}\underline{\sigma}^{(l)}\underline{\sigma}^{(0)}\right]+\frac{1}{2}i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sum_m n_m\mathrm{Spur}\left[\underline{\sigma}^{(k)}\underline{\sigma}^{(m)}\underline{\sigma}^{(l)}\underline{\sigma}^{(0)}\right]+$$

$$+\frac{1}{2}(-i)\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sum_p n_p\mathrm{Spur}\left[\underline{\sigma}^{(k)}\underline{\sigma}^{(0)}\underline{\sigma}^{(l)}\underline{\sigma}^{(p)}\right]+\frac{1}{2}(-i)i\sin^2\frac{\varphi}{2}\sum_{mp}n_m n_p\mathrm{Spur}\left[\underline{\sigma}^{(k)}\underline{\sigma}^{(m)}\underline{\sigma}^{(l)}\underline{\sigma}^{(p)}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}\mathrm{Spur}\left[\underline{\sigma}^{(k)}\underline{\sigma}^{(l)}\right]+\frac{1}{2}i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sum_m n_m\mathrm{Spur}\left[\underline{\sigma}^{(k)}\underline{\sigma}^{(m)}\underline{\sigma}^{(l)}\right]-$$

$$-\frac{1}{2}i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sum_p n_p\mathrm{Spur}\left[\underline{\sigma}^{(k)}\underline{\sigma}^{(l)}\underline{\sigma}^{(p)}\right]+\frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\sum_{mp}n_m n_p\mathrm{Spur}\left[\underline{\sigma}^{(k)}\underline{\sigma}^{(m)}\underline{\sigma}^{(l)}\underline{\sigma}^{(p)}\right]=$$

Alkalmazzuk a Pauli mátrixok szorzatainak spurjaira az imént levezetett összefüggéseket:

$$=\frac{1}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}\cdot 2\delta_{kl}+\frac{1}{2}i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sum_m n_m 2i\varepsilon_{kml}-\frac{1}{2}i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sum_p n_p 2i\varepsilon_{klp}+$$

$$+\frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\sum_{mp}n_m n_p 2\left(\delta_{km}\delta_{lp}-\delta_{kl}\delta_{mp}+\delta_{ml}\delta_{kp}\right)=$$

$$=\cos^2\frac{\varphi}{2}\delta_{kl}-\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sum_m n_m\varepsilon_{kml}+\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sum_p n_p\varepsilon_{klp}+\sin^2\frac{\varphi}{2}\sum_{mp}n_m n_p\left(\delta_{km}\delta_{lp}-\delta_{kl}\delta_{mp}+\delta_{ml}\delta_{kp}\right)=$$

Most foglalkozzunk egy kicsit az összeg jobboldali tagjával:

$$\sum_{mp}n_m n_p\left(\delta_{km}\delta_{lp}-\delta_{kl}\delta_{mp}+\delta_{ml}\delta_{kp}\right)=\sum_{mp}n_m n_p\delta_{km}\delta_{lp}-\sum_{mp}n_m n_p\delta_{kl}\delta_{mp}+\sum_{mp}n_m n_p\delta_{ml}\delta_{kp}=$$

$$=\sum_m n_m n_l\delta_{km}-\sum_{mp}n_m n_p\delta_{kl}\delta_{mp}+\sum_m n_m n_k\delta_{ml}=n_k n_l-\delta_{kl}+n_l n_k$$

Tehát:

$$F_{kl}=\cos^2\frac{\varphi}{2}\delta_{kl}-\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sum_m n_m\varepsilon_{kml}+\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sum_p n_p\varepsilon_{klp}+\sin^2\frac{\varphi}{2}\left(n_k n_l-\delta_{kl}+n_l n_k\right)=$$

$$=\cos^2\frac{\varphi}{2}\delta_{kl}+\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sum_m n_m\varepsilon_{klm}+\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sum_m n_m\varepsilon_{klm}+\sin^2\frac{\varphi}{2}\left(2n_k n_l-\delta_{kl}\right)=$$

$$=\left(\cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\delta_{kl}+2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sum_m n_m\varepsilon_{klm}+2\sin^2\frac{\varphi}{2}n_k n_l=$$

$$=\cos\varphi\,\delta_{kl}+\sin\varphi\sum_m n_m\varepsilon_{klm}+\left(\sin^2\frac{\varphi}{2}+\cos^2\frac{\varphi}{2}-\left(\cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\right)n_k n_l=$$

$$=\delta_{kl}\cos\varphi+\sum_m\varepsilon_{klm}n_m\sin\varphi+(1-\cos\varphi)n_k n_l$$

DETERMINÁNSSZÁMÍTÁS

Mennyi a következő determináns értéke

$$D_n(a,b)=\begin{vmatrix} a & b & b & b & b & b \\ b & a & b & b & b & b \\ b & b & a & b & b & b \\ \cdots & & & & & \cdots \\ b & b & b & b & a & b \\ b & b & b & b & b & a \end{vmatrix}_{n\times n} = b^n \begin{vmatrix} \frac{a}{b} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \frac{a}{b} & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{a}{b} & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & & & & & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \frac{a}{b} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{a}{b} \end{vmatrix}_{n\times n} = b^n \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & & & & & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}_{n\times n} =$$

Ha $a=b$, akkor a determináns értéke nyilvánvalóan 0, hiszen van két azonos sor. Ha $b=0$, akkor a determináns értéke a^n.

1, emeljünk ki minden sorból b-t

2, az egyszerűbb írásmód kedvéért legyen $\frac{a}{b}=x$

$$= b^n \begin{vmatrix} x-1 & 1-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & & & & & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}_{n\times n} = b^n \begin{vmatrix} x-1 & 1-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & 1-x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-1 & 1-x \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}_{n\times n} = b^n(x-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}_{n\times n} =$$

3, vonjuk le az első sorból a másodikat

4, ismételjük ezt meg az összes többi sorral: azaz vonjuk le a sorokból az utánuk levő sort; az utolsó sor változatlan marad

5, emeljünk ki az első $(n-1)$ db sorból $(x-1)$-et

$$= b^n(x-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & x \end{vmatrix}_{n\times n} = b^n(x-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & (n-1+x) \end{vmatrix}_{n\times n} = b^n(x-1)^{n-1}(n-1+x)$$

6, adjuk hozzá a második oszlophoz az elsőt, ezután a harmadik oszlophoz a másodikat, ..., $(n-1)$-dik oszlophoz az $(n-2)$-dik oszlopot

7, végül adjuk hozzá az utolsó oszlophoz az utolsóelőttit

A főátló fölött most csak 0-k állnak, így a determináns értéke a főátlóban levő elemek szorzata, azaz $(n-1+x)$

Tehát:

$$D_n=(a,b)=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ b & a & b & \cdots & b & b \\ b & b & a & \cdots & b & b \\ \cdots & & & & & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a & b \\ b & b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}_{n\times n} = b^n\left(n-1+\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}-1\right)^{n-1}$$

A VANDERMONDE-DETERMINÁNS: Tekintsük a következő n-edrendű determinánst

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \ldots & a_3^{n-2} & a_3^{n-1} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \ldots & a_{n-1}^{n-2} & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-2} & 0 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-2} & (a_2^{n-1}-a_2^{n-2}a_1) \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \ldots & a_3^{n-2} & (a_3^{n-1}-a_3^{n-2}a_1) \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \ldots & a_{n-1}^{n-2} & (a_{n-1}^{n-1}-a_{n-1}^{n-2}a_1) \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-2} & (a_n^{n-1}-a_n^{n-2}a_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-2} & 0 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-2} & (a_2-a_1)a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \ldots & a_3^{n-2} & (a_3-a_1)a_3^{n-2} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \ldots & a_{n-1}^{n-2} & (a_{n-1}-a_1)a_{n-1}^{n-2} \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-2} & (a_n-a_1)a_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

ezt az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemek által generált n-edrendű Vandermonde-determinánsnak nevezzük.

1, vonjuk le az utolsó oszlopból az utolsóelőtti oszlop a_1-szeresét, és emeljünk ki

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-2}-a_2^{n-3}a_1 & (a_2-a_1)a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \ldots & a_3^{n-2}-a_3^{n-3}a_1 & (a_3-a_1)a_3^{n-2} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \ldots & a_{n-1}^{n-2}-a_{n-1}^{n-3}a_1 & (a_{n-1}-a_1)a_{n-1}^{n-2} \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-2}-a_n^{n-3}a_1 & (a_n-a_1)a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & (a_2-a_1)a_2^{n-3} & (a_2-a_1)a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \ldots & (a_3-a_1)a_3^{n-3} & (a_3-a_1)a_3^{n-2} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \ldots & (a_{n-1}-a_1)a_{n-1}^{n-3} & (a_{n-1}-a_1)a_{n-1}^{n-2} \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & (a_n-a_1)a_n^{n-3} & (a_n-a_1)a_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

2, vonjuk le az (n-1)-dik oszlopból az (n-2)-dik oszlop a_1-szeresét

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & (a_2-a_1) & (a_2-a_1)a_2 & \ldots & (a_2-a_1)a_2^{n-3} & (a_2-a_1)a_2^{n-2} \\ 1 & (a_3-a_1) & (a_3-a_1)a_3 & \ldots & (a_3-a_1)a_3^{n-3} & (a_3-a_1)a_3^{n-2} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & (a_{n-1}-a_1) & (a_{n-1}-a_1)a_{n-1} & \ldots & (a_{n-1}-a_1)a_{n-1}^{n-3} & (a_{n-1}-a_1)a_{n-1}^{n-2} \\ 1 & (a_n-a_1) & (a_n-a_1)a_n & \ldots & (a_n-a_1)a_n^{n-3} & (a_n-a_1)a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & (a_2-a_1) & \ldots & (a_2-a_1)a_2^{n-3} & (a_2-a_1)a_2^{n-2} \\ 1 & (a_3-a_1) & \ldots & (a_3-a_1)a_3^{n-3} & (a_3-a_1)a_3^{n-2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & (a_{n-1}-a_1) & \ldots & (a_{n-1}-a_1)a_{n-1}^{n-3} & (a_{n-1}-a_1)a_{n-1}^{n-2} \\ 1 & (a_n-a_1) & \ldots & (a_n-a_1)a_n^{n-3} & (a_n-a_1)a_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

3, folytassuk ezt: vonjuk le mindegyik oszlopból az őt megelőző oszlop a_1-szeresét. Így módon az első sorban az első elem kivételével csupa 0-k fognak állni.

$$= 1 \begin{vmatrix} (a_2-a_1) & (a_2-a_1)a_2 & \ldots & (a_2-a_1)a_2^{n-1} \\ (a_3-a_1) & (a_3-a_1)a_3 & \ldots & (a_3-a_1)a_3^{n-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ (a_{n-1}-a_1) & (a_{n-1}-a_1)a_{n-1} & \ldots & (a_{n-1}-a_1)a_{n-1}^{n-2} \\ (a_n-a_1) & (a_n-a_1)a_n & \ldots & (a_n-a_1)a_n^{n-2} \end{vmatrix} = (a_2-a_1)(a_3-a_1)\ldots(a_n-a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \ldots & a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 & \ldots & a_3^{n-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \ldots & a_{n-1}^{n-2} \\ 1 & a_n & \ldots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

4, fejtsük ki a determinánst az első sora szerint

5, emeljünk ki az első sorból (a_2-a_1)-t, a második sorból (a_3-a_1)-t, ..., az (n-1)-dik sorból (a_n-a_1)-t.

A kapott (n-1)-edrendű determináns szintén Vandermonde-determináns, amely az $a_2, a_3, \ldots, a_n$ elemek által van generálva, így tehát:

$$V_n = V_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_2-a_1)(a_3-a_1)\ldots(a_n-a_1)\, V_{n-1}(a_2, a_3, \ldots, a_n)$$

Ha ezen (n-1)-edrendű Vandermonde-determinánssal ugyanúgy járunk el, mint az eredetivel, azt kapjuk, hogy

$$V_{n-1} = (a_3-a_2)(a_4-a_2)\ldots(a_n-a_2)\, V_{n-2}(a_3, a_4, \ldots, a_n)$$

és így tovább. Végül a másodrendű Vandermonde-determinánsra jutunk:

$$V_2(a_{n-1}, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_{n-1} \\ 1 & a_n \end{vmatrix} = a_n - a_{n-1}$$

Ezek szerint:

$$V_n(a_1,a_2,\dots,a_n)=(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)\dots(a_{n-1}-a_1)(a_n-a_1)$$
$$(a_3-a_2)(a_4-a_2)\dots(a_{n-1}-a_2)(a_n-a_2)$$
$$\cdot(a_4-a_3)\dots(a_{n-1}-a_3)(a_n-a_3)\cdot$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\cdot(a_{n-1}-a_{n-2})(a_n-a_{n-2})\cdot$$
$$\cdot(a_n-a_{n-1})=\prod_{1\le k<i\le n}(a_i-a_k)$$

$$V_n(a_1,a_2,\dots,a_n)=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1}\\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1}\\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le k<i\le n}(a_i-a_k)$$

<u>A WRONSKI-DETERMINÁNS</u>: erre majd csak a későbbiekben lesz szükség

$$W(x)=W\left[f_1(x),f_2(x),\dots,f_n(x)\right]=\begin{vmatrix} f_1 & f_2\\ f_1' & f_2'\\ f_1'' & f_2''\\ & \end{vmatrix}$$

? mi van az utolsó sorban

<u>HOMOGÉN KONTINUÁLIS DETERMINÁNS</u>: kontinuális determinánsnak hívjuk az olyan determinánst, ahol csak a főátlóban, és a főátló mellett közvetlenül levő két átlóban vannak nullától különböző elemek. Homogénnek nevezzük, ha egy-egy átlóban az elemek azonosak. Tekintsük a következő homogén kontinuális determinánst:

$$D_n(x)=\begin{vmatrix} 2-x & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ -1 & 2-x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2-x & -1 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 2-x & -1 & 0 & 0\\ \dots & & & & & & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2-x & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2-x\end{vmatrix}=(2-x)\underbrace{\begin{vmatrix} 2-x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ -1 & 2-x & -1 & \dots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2-x & \dots & 0 & 0\\ \dots & & & & & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2-x & -1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2-x\end{vmatrix}}_{D_{n-1}(x)}-(-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ -1 & 2-x & -1 & \dots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2-x & \dots & 0 & 0\\ \dots & & & & & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2-x & -1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2-x\end{vmatrix}=$$

Fejtsük ki a determinánst az első oszlopa szerint. Ekkor az első tag $(x-2)D_{n-1}(x)$ lesz a másik tagot pedig fejtsük ki az első sora szerint. Azt kapjuk, hogy a második tag $-D_{n-2}(x)$

$$=(2-x)\begin{vmatrix} 2-x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ -1 & 2-x & -1 & \dots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2-x & \dots & 0 & 0\\ \dots & & & & & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2-x & -1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2-x\end{vmatrix}-(-1)(-1)\underbrace{\begin{vmatrix} 2-x & -1 & \dots & 0 & 0\\ -1 & 2-x & \dots & 0 & 0\\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0\\ \dots & & & & \dots\\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2-x\end{vmatrix}}_{D_{n-2}(x)}=(2-x)D_{n-1}(x)-D_{n-2}(x)$$

Kaptunk tehát egy rekurzív formulát. Ám az a célunk, hogy egy nem rekurzív, hanem direkt formulát kapjunk. Először számoljuk ki az első néhány $D_n(x)$-t:

$$D_1 = |2-x| = 2-x$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2-x & -1 \\ -1 & 2-x \end{vmatrix} = (2-x)^2-1$$

Számoljuk ki a D_0-t és D_{-1}-t is

$$D_2 = (2-x)D_1 - D_0 \Rightarrow D_0 = (2-x)D_1 - D_2 = (2-x)^2-(2-x)^2+1 = 1$$

$$D_1 = (2-x)D_0 - D_{-1} \Rightarrow D_{-1} = (2-x)D_0 - D_1 = (2-x)-(2-x) = 0$$

$$D_{-1} = 0$$

$$D_0 = 1$$

$$D_1 = 2-x$$

$$D_2 = (2-x)^2-1$$

Tegyük fel először azt, hogy $x \in [0,4]$ — a többi eset később jön. Ekkor az x-et a következőképpen fejezhető ki:

$$x = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

Fejezzük ki a $(2-x)$-t:

$$2-x = 2-4\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = 2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= 2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos\alpha$$

Ekkor a rekurzív képlet a következőképpen néz ki:

$$D_n(\alpha) = 2\cos\alpha\, D_{n-1}(\alpha) - D_{n-2}(\alpha)$$

Most egy merész fogáshoz folyamodunk. Tételezzük fel, hogy $D_n = S^n$. Ez cseppet sem tűnik ésszerűnek, ám megpróbálkozhatunk vele. Ha a feltételezés nem helytálló ez a későbbi behelyettesítésekből ki fog derülni. Ha pedig a feltételezés helyes, akkor nyert ügyünk van.

Szóval a rekurzív képlet a következő alakot ölti:

$$S^n = 2\cos\alpha\, S^{n-1} - S^{n-2}$$

$$S^2 = 2\cos\alpha\, S - 1$$

$$S^2 - 2\cos\alpha\, S + 1 = 0$$

Ez egy másodfokú egyenlet:

$$S = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{4\cos^2\alpha - 4}}{2} = \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1} = \cos\alpha \pm \sqrt{-\sin^2\alpha} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha = e^{\pm i\alpha}$$

Ekkor két megoldás:

$$D_n = S^n = (e^{i\alpha})^n \quad \text{és} \quad D_n = S^n = (e^{-i\alpha})^n$$

Az általános megoldás nyilvánvalóan a kettő lineárkombinációja:

$$D_n = A(e^{i\alpha})^n + B(e^{-i\alpha})^n$$

Most derítsük ki, hogy mi az A és B értéke. A-t és B-t legkönnyebben a D_0-ból és D_1-ből számolhatjuk ki.

$$D_0 = 1 \qquad \text{és} \qquad D_1 = 2\cos\alpha$$

Tehát:

(1) $A(e^{i\alpha})^0 + B(e^{-i\alpha})^0 = 1$ (2) $A(e^{i\alpha})^1 + B(e^{-i\alpha})^1 = 2\cos\alpha$

(1) $A+B=1 \quad / \cdot e^{-i\alpha}$ (2) $Ae^{i\alpha} + Be^{-i\alpha} = 2\cos\alpha$

(1) $Ae^{-i\alpha} + Be^{-i\alpha} = e^{-i\alpha}$

(2)-(1) $A(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) = 2\cos\alpha - e^{-i\alpha}$

Mivel $2\cos\alpha - e^{-i\alpha} = 2\cos\alpha - (\cos\alpha - i\sin\alpha) = \cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$, így

(2)-(1) $A(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) = e^{i\alpha}$

Mivel $\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$, ezért $(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) = 2i\sin\alpha$, behelyettesítve (2)-(1)-be

(2)-(1) $A\,2i\sin\alpha = e^{i\alpha}$

(2)-(1) $A = \frac{e^{i\alpha}}{2i\sin\alpha}$

Most számoljuk ki a B-t, térjünk vissza az (1) és (2) egyenletek kezdeti alakjá

(1) $A+B = 1 \quad / \cdot e^{i\alpha}$ (2) $Ae^{i\alpha} + Be^{-i\alpha} = 2\cos\alpha$

(1) $Ae^{i\alpha} + Be^{i\alpha} = e^{i\alpha}$

(2)-(1) $B(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}) = 2\cos\alpha - e^{i\alpha}$

Mivel $2\cos\alpha - e^{i\alpha} = 2\cos\alpha - (\cos\alpha + i\sin\alpha) = \cos\alpha - i\sin\alpha = e^{-i\alpha}$, ezért

(2)-(1) $B(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}) = e^{-i\alpha}$

Mivel $\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$, ezért $(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}) = -2i\sin\alpha$, behelyettesítve (2)-(1)-be

(2)-(1) $-B\,2i\sin\alpha = e^{-i\alpha}$

(2)-(1) $B = \frac{e^{-i\alpha}}{-2i\sin\alpha}$

Tetszőleges D_n-re

$$D_n(\alpha) = \frac{e^{i\alpha}}{2i\sin\alpha}(e^{i\alpha})^n + \frac{e^{-i\alpha}}{-2i\sin\alpha}(e^{-i\alpha})^n$$

$$D_n(\alpha) = \frac{e^{i(n+1)\alpha}}{2i\sin\alpha} - \frac{e^{-i(n+1)\alpha}}{2i\sin\alpha}$$

$$D_n(\alpha) = \frac{1}{\sin\alpha}\,\frac{e^{i(n+1)\alpha} - e^{-i(n+1)\alpha}}{2i}$$

$$D_n(\alpha) = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$$

Ez volt az $x \in [0,4]$ esetben. Most nézzük az $x<0$ esetet. Ekkor legyen:

$$2-x=2\operatorname{ch}\beta$$

Az előzőekhez hasonlóan:

$$S^n=2\operatorname{ch}\beta S^{n-1}-S^{n-2}$$

$$S^2=2\operatorname{ch}\beta S-1$$

$$S^2-2\operatorname{ch}\beta S+1=0$$

Ez egy másodfokú egyenlet:

$$S=\frac{2\operatorname{ch}\beta\pm\sqrt{4\operatorname{ch}^2\beta-4}}{2}=\operatorname{ch}\beta\pm\sqrt{\operatorname{ch}^2\beta-1}=\operatorname{ch}\beta\pm\operatorname{sh}\beta=\frac{e^\beta+e^{-\beta}}{2}\pm\frac{e^\beta-e^{-\beta}}{2}=e^{\pm\beta}$$

Az általános megoldás

$$D_n=C(e^\beta)^n+D(e^{-\beta})^n$$

Az C és D értékét, mint előbb, szintén a $D_0=1$ és $D_1=2\operatorname{ch}\beta$ egyenletekből a legegyszerűbb kiszámolni

(1) $C(e^\beta)^0+D(e^{-\beta})^0=1$ (2) $C(e^\beta)^1+D(e^\beta)^1=2\operatorname{ch}\beta$

(1) $C+D=1 \quad / \cdot e^{-\beta}$ (2) $Ce^\beta+De^{-\beta}=2\operatorname{ch}\beta$

(1) $Ce^{-\beta}+De^{-\beta}=e^{-\beta}$

(2)-(1) $C(e^\beta-e^{-\beta})=2\operatorname{ch}\beta-e^{-\beta}$

Mivel $2\operatorname{ch}\beta-e^{-\beta}=e^\beta+e^{-\beta}-e^{-\beta}=e^\beta$ és $(e^\beta-e^{-\beta})=2\operatorname{sh}\beta$

(2)-(1) $C(e^\beta-e^{-\beta})=e^\beta$

(2)-(1) $C=\dfrac{e^\beta}{2\operatorname{sh}\beta}$

Most térjünk rá a D kiszámolására:

(1) $C+D=1 \quad / \cdot e^\beta$ (2) $Ce^\beta+De^{-\beta}=2\operatorname{ch}\beta$

(1) $Ce^\beta+De^\beta=e^\beta$

(2)-(1) $D(e^{-\beta}-e^\beta)=2\operatorname{ch}\beta-e^\beta$

Mivel $2\operatorname{ch}\beta-e^\beta=e^\beta+e^{-\beta}-e^\beta=e^{-\beta}$ és $(e^{-\beta}-e^\beta)=-2\operatorname{sh}\beta$

(2)-(1) $D(e^{-\beta}-e^\beta)=e^{-\beta}$

(2)-(1) $D=\dfrac{e^{-\beta}}{-2\operatorname{sh}\beta}$

Tetszőleges D_n-re

$$D_n(\beta)=\frac{e^\beta}{2\operatorname{sh}\beta}(e^\beta)^n+\frac{e^{-\beta}}{-2\operatorname{sh}\beta}(e^{-\beta})^n$$

$$D_n(\beta) = \frac{e^{\beta(n+1)}}{2\,\mathrm{sh}\,\beta} - \frac{e^{-\beta(n+1)}}{2\,\mathrm{sh}\,\beta}$$

$$D_n(\beta) = \frac{1}{\mathrm{sh}\,\beta}\,\frac{e^{\beta(n+1)} - e^{-\beta(n+1)}}{2}$$

$$D_n(\beta) = \frac{\mathrm{sh}(n+1)\beta}{\mathrm{sh}\,\beta}$$

S végül, ha $x > 4$, akkor legyen

$$2 - x = -2\,\mathrm{ch}\,\gamma$$

Az előzőekhez hasonlóan:

$$S^n = -2\,\mathrm{ch}\,\gamma\, S^{n-1} - S^{n-2}$$

$$S^2 = -2\,\mathrm{ch}\,\gamma\, S - 1$$

$$S^2 + 2\,\mathrm{ch}\,\gamma\, S + 1 = 0$$

Ez egy másodfokú egyenlet

$$S = \frac{-2\,\mathrm{ch}\,\gamma \pm \sqrt{4\,\mathrm{ch}^2\gamma - 4}}{2} = -\mathrm{ch}\,\gamma \pm \mathrm{sh}\,\gamma = -\frac{e^{\gamma}+e^{-\gamma}}{2} \pm \frac{e^{\gamma}-e^{-\gamma}}{2} = -e^{\pm\gamma}$$

Az általános megoldás:

$$D_n = E(-e^{\gamma})^n + F(-e^{-\gamma})^n$$

Az E és F értékét a $D_0 = 1$ és $D_1 = -2\,\mathrm{ch}\,\gamma$ egyenletekből a legegyszerűbb kiszámolni

(1) $E(-e^{\gamma})^0 + F(-e^{-\gamma})^0 = 1$ (2) $E(-e^{\gamma})^1 + F(-e^{-\gamma})^1 = -2\,\mathrm{ch}\,\gamma$

(1) $E + F = 1$ (2) $-Ee^{\gamma} - Fe^{-\gamma} = -2\,\mathrm{ch}\,\gamma$

(2) $Ee^{\gamma} + Fe^{-\gamma} = 2\,\mathrm{ch}\,\gamma$

E két egyenlet pedig azonos az $x<0$, $\mathrm{ch}\,\beta$-nál tárgyaltakkal, tehát:

$$D_n(\gamma) = \frac{\mathrm{sh}(n+1)\gamma}{\mathrm{sh}\,\gamma}.$$

Tehát a következő determináns értéke:

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} 2-x & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2-x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2-x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2-x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2-x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2-x \end{vmatrix}$$

HA $x<0$ LEGYEN $2-x = 2\,\mathrm{ch}\,\beta$ EKKOR $D_n(\beta) = \frac{\mathrm{sh}(n+1)\beta}{\mathrm{sh}\,\beta}$

HA $0 \le x \le 4$ LEGYEN $2-x = 2\cos\alpha$ EKKOR $D_n(\alpha) = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$

HA $x>4$ LEGYEN $2-x = -2\,\mathrm{ch}\,\gamma$ EKKOR $D_n(\gamma) = \frac{\mathrm{sh}(n+1)\gamma}{\mathrm{sh}\,\gamma}$

Bizonyos esetekben arra lehet szükségünk, hogy a determináns értéke 0 legyen. Milyen x értékek esetén következik ez be?

Vizsgáljuk az $0 \le x \le 4$ esetet:

$$D_n(x) = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha} = 0$$

akkor, ha:

$$\alpha(n+1) = k\pi \qquad \text{ahol } k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \frac{k}{n+1}\pi$$

tehát a zérushelyek: $$X_k = 4\sin^2\left(\frac{k}{n+1}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

ez, mint az könnyen belátható n db gyököt (különböző gyökökről van szó) jelent.

Sh esetben nincs gyök? Kissen számoló is keverő csak / egyszerre lehet 0

EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA

Az egyenletrendszerek megoldásánál használt módszert legegyszerűbb egy példán keresztül bemutatni. Íme egy négy egyenletből álló egyenletrendszer.

$$\begin{aligned}
(1)\quad & 5x + 8y + 3z = 11 \\
(2)\quad & x + 3y + 2z = 5 \\
(3)\quad & 3x + 2y - z = 1 \\
(4)\quad & x + y = 1
\end{aligned}$$

Az egyenletre jellemző kibővített mátrix:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|c}
5 & 8 & 3 & 11 \\
1 & 3 & 2 & 5 \\
3 & 2 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1
\end{array}\right)
\end{array}$$

Ezt a mátrixot egyszerűen úgy készítjük, hogy leírjuk egymás alá az azonos ismeretlenhez tartozó együtthatókat — természetesen egy adott egyenlet ismeretleneihez tartozó együtthatók egy sorban találhatók —, és a jobb szélső ~~sorba~~ oszlopba — melyet a jobb áttekinthetőség kedvéért egy függőleges vonallal határolunk el a többitől — az egyenletek jobb oldalára rendezett konstansokat írjuk.

Az egyenletre jellemző kibővített mátrixszal szabad mindazt csinálni, amit egy egyenletrendszerrel: sort szabad szorozni számmal, sort sorhoz hozzá szabad adni, sőt sor számszorosát is szabad hozzáadni sorhoz, a sorokat szabad cserélni. Tehát tulajdonképpen ugyanazt végezzük az egyenletre jellemző kibővített mátrix rendezésekor, mint amit amúgy az egyenletekkel tennénk, de a mátrixszal sokkal egyszerűbb számolni, mint az a következőkben kiderül.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}
5 & 8 & 3 & 11 \\
1 & 3 & 2 & 5 \\
3 & 2 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1
\end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 0 & 1 \\
5 & 8 & 3 & 11 \\
3 & 2 & -1 & 1 \\
1 & 3 & 2 & 5
\end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 3 & 3 & 6 \\
0 & -1 & -1 & -2 \\
0 & 2 & 2 & 4
\end{array}\right)$$

Az cél, hogy minél több 0-t gyártsunk (később látni fogjuk, hogy miért). Először próbáljunk az első oszlopban minél több 0-t gyártani. Értelemszerűen kell maradnia legalább egy nem nulla elemnek is (ha nem, eme esetet lásd később). Cseréljük fel először a sorokat, hogy felülre kerüljön az (11011) sor. Ez lesz az a sor, amelyet kivonogatunk a többiből: vonjuk le az első sor 5-szörösét a másodikból, 3-szorosát a harmadikból, s 1-szeresét az utolsóból. Praktikus, ha abban a sorban, amelyet kivonogatunk 1-es áll azon a helyen, amelyik oszlopban 0-kat akarunk, ekkor ugyanis nem jönnek be törtszámok.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Ezután szorozzuk meg a második sort $\frac{1}{3}$-dal, a harmadikat -1-gyel és a negyediket $\frac{1}{2}$-del. Ekkor három azonos sor tűnik fel. Ez azt jelenti, ho valójában a négyből csak két egyenlet független.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Vonjuk le a harmadik és a negy dik sorból az ~~első~~ másodikat. Ekko a két utolsó sor csupa 0-kból fog á ni, tehát semmilyen információta talmuk sincsen, tehát nyugodtan hagyhatjuk őket. Amennyiben olyan sort kaptunk volna, ahol a vonaltól balra csu 0 áll, jobbra pedig egy nem 0 szám (pl 000|2), akkor nyilvánvaló ellentmondásr van szó, tehát az egyenletrendszernek nincsen megoldása, és nem is kell folytatni a s molást.

Jelen esetben ellentmondásról szó sincs, viszont csak két egyenlet van és hár ismeretlen. Legyen az egyik ismeretlen rögzített paraméter: $z = p$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Ekkor a vonalat eggyel balrább toljuk és az új helyre került számokat -1-gyel sz rozzuk. Tulajdonképpen az egyenletek jobb oldalára visszük az újdonsült konstanst.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Vonjuk le az első sorból a másodikat: s íme, célbaértünk. Ugyanis az a cél, hogy a bal oldali részben csak az átlóban álljanak 1-esek, máshol pedig minden 0-k. Ekkor ugyanis az ismeretleneket könnyű kifejezni:

$$x = z - 1 \qquad \text{és} \qquad y = -z + 2 \qquad \text{ahol } z = p$$

$$x = p - 1, \quad y = 2 - p, \quad z = p$$

Ez tulajdonképpen egy egyenes egyenletének is tekinthető, ha szemléletesek akarun lenni:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-1 \\ 2-p \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ -p \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

egyenes egyenlete: $\underline{r} = \underline{a} + p\underline{b}$

<u>Példa</u>: Lássunk egy újabb egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} (1)\quad & x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \\ (2)\quad & 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 = 6 \\ (3)\quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 8 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszert jellemző kibővített mátrix:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & -3 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Vonjuk le a második sorból az első háromszorosát, és a harmadikból az első kétszeresét. Ezután vonjuk le a harmadik sorból a másodikat. Ekkor az utolsó sor a következő egyenletet jelenti: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 4$ azaz $0 = 4$. Ez nyilvánvaló ellentmondás, tehát az egyenletrendszernek nincs megoldása.

T2

És még egy példa:

$$\begin{aligned} (1)\quad & 3x+2y-3z+4v=1 \\ (2)\quad & 2x+3y-2z+3v=2 \\ (3)\quad & 4x+2y-3z+2v=3 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszerre jellemző kibővített mátrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -3 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -3 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 1 & -2 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & -2 & 7 \end{array}\right) \sim$$

Vonjuk le az első sorból a másodikat. Vonjuk le az első sor kétszeresét a második sorból és négyszeresét a harmadik sorból. Ezután vonjuk le a harmadik sort a másodikból.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & -2 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 16 & -11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -16 & -11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 5 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & -5 & -15 & -15 \\ 0 & 0 & -5 & -16 & -11 \end{array}\right) \sim$$

Adjuk hozzá a második sor hatszorosát a harmadik sorhoz. Mivel eggyel több az ismeretlen, mint az egyenlet rögzítsük v-t, legyen $v=t$. Vigyük át a v-hez tartozó értékeket az elválasztó vonal jobb oldalára (ne felejtsünk el szorozni -1-gyel). Kényelmi szempontból szorozzuk meg az első és a második sort öttel.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 5 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & -5 & -15 & -15 \\ 0 & 0 & -5 & -16 & -11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 5 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & 5 & 15 & 15 \\ 0 & 0 & 5 & 16 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 5 & -5 & 0 & 11 & 6 \\ 0 & 5 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 16 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 5 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 5 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 16 & 11 \end{array}\right)$$

Csökkentsük a mínusz előjelek számát: szorozzuk meg az utolsó két sort -1-gyel. Kezdjük el írtani a jobb oldalon levő nem nulla elemeket: vonjuk le az utolsó sort az utolsóelőttiből és adjuk hozzá az utolsó sort az elsőhöz. Ezután adjuk hozzá a második sort az elsőhöz. Most már csak az átlóban vannak nem 0 elemek, könnyen leolvashatjuk a megoldást:

$$x=2t+2, \quad y=-\frac{1}{5}t+\frac{4}{5}, \quad z=\frac{16}{5}t+\frac{11}{5} \quad \text{valamint } v=t$$

Homogén lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} (1)\quad & 5x+8y+3z=0 \\ (2)\quad & x+3y+2z=0 \\ (3)\quad & 3x+2y-z=0 \\ (4)\quad & x+y=0 \end{aligned}$$

Íme egy homogén lineáris egyenletrendszer. Az ilyen típusú egyenletrendszerekre az a jellemző hogy csak ismeretlenek vannak bennük, azaz ha rendezzük az egyenleteket a jobb oldalon 0-k állnak.

Az egyenleteknek nyilvánvalóan van megoldása: $x=y=z=0$. Ez a triviális megoldás. Ám mi természetesen a nemtriviális megoldásokra vagyunk kíváncsiak. Egy szinte ugyanilyen egyenletrendszert már megoldottunk. Használjuk fel ennek az eredményét, az egyenletrendszerre jellemző mátrix némi átalakítás után:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Legyen z rögzített, azaz $z=p$. Vigyük át a z-hez tartozó együtthatókat a jobboldalra. Ezután vonjuk le az első sorból a másodikat. A keletkező mátrixból már könnyen leolvashatjuk a megoldást:

$$x=p \quad y=-p \quad z=p$$

A KVATERNIÓK

A kvaterniókat Hamilton vezette be. A kvaterniók a komplex számok általánosítása.

jelölés $1 \quad i \quad j \quad k$

Egy kvaterniót a következőképpen írhatunk le:

$$q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$$

Az i, j és k egységekre a következő a jellemző:

$$\begin{array}{lll} ii = -1 & ij = k & ji = -k \\ jj = -1 & jk = i & kj = -i \\ kk = -1 & ki = j & ik = -j \end{array}$$

A kvaterniók rendkívül hasonlatosak a komplex számokhoz, hiszen azok kiterjesztése

$$q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$$

$$\bar{q} = \alpha - \beta i - \gamma j - \delta k$$

EKKOR

$$q\bar{q} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$$

* Ez utóbbit egy kis — itt mellőzött — számolással ellenőrizhetjük. A kvaterniók tes alkotnak, 4 dimenziós lineáris teret, sőt, algebrát.

A kvaterniók szorzása nem kommutatív:

$$q_1 = \alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k \qquad \text{és} \qquad q_2 = \alpha_2 + \beta_2 i + \gamma_2 j + \delta_2 k$$

$$\begin{aligned} q_1 q_2 = {} & \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2 i + \alpha_1\gamma_2 j + \alpha_1\delta_2 k + \alpha_2\beta_1 i + \beta_1\beta_2 ii + \beta_1\gamma_2 ij + \beta_1\delta_2 ik + \\ & + \alpha_2\gamma_1 j + \beta_2\gamma_1 ji + \gamma_1\gamma_2 jj + \gamma_1\delta_2 jk + \alpha_2\delta_1 k + \beta_2\delta_1 ki + \gamma_2\delta_1 kj + \delta_1\delta_2 kk = \\ = {} & (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 - \gamma_1\gamma_2 - \delta_1\delta_2) + i(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \gamma_1\delta_2 - \delta_1\gamma_2) + \\ & + j(\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1 + \beta_2\delta_1 - \beta_1\delta_2) + k(\alpha_1\delta_2 + \alpha_2\delta_1 + \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2 q_1 = {} & \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2 i + \alpha_1\gamma_2 j + \alpha_1\delta_2 k + \alpha_2\beta_1 i + \beta_1\beta_2 ii + \beta_1\gamma_2 ji + \beta_1\delta_2 ki + \\ & + \alpha_2\gamma_1 j + \beta_2\gamma_1 ij + \gamma_1\gamma_2 jj + \gamma_1\delta_2 kj + \alpha_2\delta_1 k + \beta_2\delta_1 ik + \gamma_2\delta_1 jk + \delta_1\delta_2 kk = \\ = {} & (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 - \gamma_1\gamma_2 - \delta_1\delta_2) + i(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \gamma_2\delta_1 - \gamma_1\delta_2) + \\ & + j(\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1 + \beta_1\delta_2 - \beta_2\delta_1) + k(\alpha_1\delta_2 + \alpha_2\delta_1 + \beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2) \end{aligned}$$

A kvaterniók körében a kommutátor és antikommutátor fogalma:

KOMMUTÁTOR

$$[q_1;q_2]=q_1q_2-q_2q_1$$

ANTIKOMMUTÁTOR

$$\{q_1;q_2\}=q_1q_2+q_2q_1$$

Az előző oldal alján levő levezetések felhasználásával, a kommutátor és antikommutátor:

$$\frac{1}{2}[q_1;q_2]=i(\gamma_1\delta_2-\gamma_2\delta_1)+j(\beta_2\delta_1-\beta_1\delta_2)+k(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)$$

$$\frac{1}{2}\{q_1;q_2\}=(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2-\gamma_1\gamma_2-\delta_1\delta_2)+i(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)+j(\alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1)+k(\alpha_1\delta_2+\alpha_2\delta_1)$$

<u>A vektoriális szorzás és a skaláris szorzás:</u>

Legyen:

$$\frac{1}{2}[q_1;q_2]=q_1 * q_2 \qquad \text{valamint} \qquad -\frac{1}{2}\{q_1;q_2\}=q_1 \star q_2$$

Vegyük észre azt, hogy:

$$q_1 * q_2=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \gamma_1\\ \delta_1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\beta_2\\ \gamma_2\\ \delta_2\end{pmatrix} \qquad q_1 \star q_2=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \gamma_1\\ \delta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_2\\ \gamma_2\\ \delta_2\end{pmatrix}$$

a vektoriális szorzás — a skaláris szorzás

A kvaterniók segítségével könnyen bizonyíthatjuk a következő két azonosságot:

$$\underline{b}(\underline{a}\,\underline{c})-\underline{a}(\underline{b}\,\underline{c})+\underline{c}(\underline{b}\,\underline{a})-\underline{b}(\underline{c}\,\underline{a})+\underline{a}(\underline{c}\,\underline{b})-\underline{c}(\underline{a}\,\underline{b})=0$$

$$(\underline{a}\times\underline{b})\times\underline{c}+(\underline{c}\times\underline{a})\times\underline{b}+(\underline{b}\times\underline{c})\times\underline{a}=0$$

tényleg így van?

Ezek bizonyítása nem nehéz, de túl hosszadalmas ahhoz, hogy itt le legyen írva.

<u>A Jacobi-azonosság:</u>

A JACOBI-AZONOSSÁG

$$[[A;B];C]+[[B;C];A]+[[C;A];B]=0$$

Lie-algebra: ha az adott csoport elemeire teljesül az, hogy lineáris teret alkotnak a köztük értelmezett szorzásnak nevezett műveletre teljesül az antikommutativitás és a Jacobi-azonosság.

kvaterniókra teljesül-e a Jacobi azonosság?

kiszámolni!

ADOTT PONTOKHOZ HATVÁNYFÜGGVÉNY ILLESZTÉSE LAGRANGE-MÓDSZERREL

Adottak az $A_1(x_1;y_1)$, $A_2(x_2;y_2)$, ..., $A_n(x_n;y_n)$ pontok. Keressük meg azt az n-ed függvényt, amely átmegy ezen pontokon. Természetesen ilyen függvény több is lehet, d künk elég egy is.