SAJÁTÉRTÉK-PROBLÉMA gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg az alábbi mátrixok sajátérték-problémáját, azaz számítsuk ki a sajátértékeket, a jobb- és baloldali sajátvektorokat (, ellenőrizzük a biortogonakitást, ügyeljünk a normálásra!), konstruáljuk meg a projektorokat (ellenőrizzük, hogy összegük az egységmátrixot adja), és adjuk meg a mátrix projektor-felbontását (ellenőrizzük!)! Ezután számítsunk ki néhány egyszerű mátrixfüggvényt!

$$\begin{pmatrix}4 & 28 & -20\\ 8 & 29 & -22\\ 48 & -42 & 12\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}-5 & 18 & 5\\ 18 & -7 & -18\\ 5 & -18 & -5\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}0 & -45 & 9\\ -40 & 4 & -16\\ 19 & -1 & 22\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}-11 & -2 & 5\\ -17 & 4 & 3\\ -15 & -6 & 9\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 7 & 7 & -1\\ -4 & -4 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ 4 & 0 & 5\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}0 & -2 & 2\\ -5 & 3 & -5\\ -6 & 6 & -8\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}3 & 6 & 0\\ 6 & 0 & 6\\ 0 & 6 & -3\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}5 & 1 & -1\\ 0 & 6 & 0\\ -6 & -2 & 4\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}6 & 1 & 2\\ 0 & 7 & 2\\ -1 & 1 & 8\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}7 & 4 & -4\\ 4 & 7 & -4\\ 6 & 6 & -3\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}2 & 5 & 3\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & -6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 7 & 8 & -1\\ -4 & -40 & 3\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 2\\ -1 & 1 & 4\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}3 & 1 & 8\\ 0 & 4 & 0\\ 8 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 6 & 4 & 2\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}1 & -8 & 4\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3 & 7 & -4\\ 2 & 8 & -4\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}1 & 6 & 3\\ 1 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ -6 & -2 & 1\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

2. Az alábbi mátrixokban helyettesítsünk a paraméterek helyébe (nem túl nagy) egész számokat, és úgy oldjuk meg a feladatot! Merészebbek paraméteres alakban is megpróbálhatják...

$$\begin{pmatrix}-4-k & 8 & 10+2k\\ 8 & 2+k & -2-2k\\ 10+2k & -2-2k & 73\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}0 & k & 1\\ -k & k^2+1 & 1\\ k^2-k & k^2-k^3 & 1\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}1+2k^2 & -2k & -k-k^3\\ k+k^3 & -k^2 & -k^2-k^4\\ 2k & -2 & -k^2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-k^2 & 0 & 1+k\\ -k+k^2 & -k^3 & 1-k\\ 0 & 0 & k\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}k-1 & -1 & -1\\ -1 & k-1 & -1\\ -1 & -1 & k-1\end{pmatrix}$$

3. Az alábbi kétismeretlenes másodfokú egyenletek kúpszeletek egyenletei. (Az egyenletben szereplő paraméter helyébe helyettesítsünk tetszés szerinti kis egész számot!) A gyakorlaton tanult módszerrel hozzuk standard alakra az egyenletet, és állapítsuk meg, milyen kúpszeletről van szó! Keressük meg a jellegzetes pontok (középpont, tengelyek végpontjai, fókuszok) koordinátáit az eredeti koordinátarendszerben! Vázoljuk fel a görbe elhelyezkedését az eredeti koordinátarendszerben! (Haladók paraméteresen is végigszámolhatják a feladatot, és diszkutálhatják a görbe típusát a paraméter függvényében.)

$$x^2 + 2y^2 - 3xy - x + y = c$$

$$19x^2 - 12xy + 10y^2 - 8x = c$$

$$8y^2 + 6xy - 12x + 26y = c$$

$$2xy - 6x + 4y = c$$

$$-4x^2 + 4xy - y^2 + x - cy + 3 = 0$$

$$17x^2 - 12y + 8y^2 - cx + 40y + 80 = 0$$

$$(9t^2 - 1)(1 + t^2)(9x^2 + 24xy + 16y^2) = 180x(9t^3 + 4t^2 - t) + 60y(36t^3 - 9t^2 - 4t)$$

$$(7c + 144)x^2 - 24cxy + 144y^2 + 120(c^2 - 7c - 144)x = 0$$

$$(1 + c^2 + c^4)x^2 + y^2 - 2c^3xy - 2c^2(1 + c^2)x - 2c(1 + c^2)y = 1 + 2c^2 + c^4$$

$$(c^2 - 1)y^2 + 2cky = \frac{2}{\sqrt{c^2 + 1}}(y - kx)$$

$$x^2(16c - 350) + 9cy^2 + 24(50 - c)xy = 2250cx$$

Az utolsó feladatnál az ügyesek paraméteresen számolhatnak, és meghatározhatják a kúpszeletek origóinak mértani helyét, miközben a c paraméter $-\infty$-től ∞-ig változik.

4. Válassz egy szívednek kedves k egész számot! Konstruálj olyan 2×2-es mátrixot, melynek:
   (a) egyik jobboldali sajátvektora $(1,\, k)$
   (b) egyik baloldali sajátvektora $(k,\, 1)$
   (c) sajátértékeinek összege k
   (d) jobb felső eleme 1

   Legyen a fentebb megkonstruált mátrix $\mathbf{A}$! Számítsd ki a $\mathbf{B} = \sin(\frac{2\pi}{3}\mathbf{A})$ mátrixot!

Sikeres gyakorlást!

dgy

\end{document}