

Vektorszámítás — vázlatok

Nagy Márton

2018.

- A szöveget én írtam össze. Vállalom érte a felelősséget, de nyilvánvalóan nem egy-az-egyben saját szülemény: rengeteg máshonnan átvett fogalommal, szófordulattal, tárgyalásmóddal éltem; elvégre én is (elvileg) megtanultam ezeket valahonnan. Sokat merítettem Dávid Gyula és Matolcsi Tamás jegyzeteiből és egykor hallgatott óráiból, Gnädig Péter hajdani óráiból.
- Az ábrák nagy részét én készítettem a **Gnuplot** ill. az **Inkscape** programokkal; ahol nem (azaz valahonnan átvettem ábrát), ott jelzem ezt.
- Próbáltam úgy összeírni a jegyzetet, ahogyan az órán elhangzik (majd). Teljesen nem sikerülhetett ez; de mégha igen is, akkor is az a helyzet, hogy ezen jegyzet elolvasása nem helyettesítheti teljesen az előadáson való részvételt, hanem kiegészíti azt. A gyakorlaton való részvétel (és a gyakorlófeladatok megoldásában való aktív közreműködés) még sokkal fontosabb; ezek nélkül az ismeretek elsajátítása nagyon-nagyon lyukacsos maradna.
- Amennyire tellett, olvasható, ép és értelmes mondatokkal próbáltam leírni a szöveget. Mégis tömörségre kellett törekednem, továbbá magát a folyószöveget is sok beszúrt képlet, összefüggés tarkítja, ami a szokásos „olvasási rutint” eléggé meg tudja törni. Annak, aki nekiáll ezt a jegyzetet olvasni, mindenképpen javaslom, hogy **lassabban haladjon**, szándékosan húzza be a féket olvasás közben; pl. úgy, hogy minden mondatot (a beszúrt képletekkel együtt) fejben hangosan megismétel, kiolvas. Könnyen elveszhet a fonál, ha a szokásos „regényolvasós” módon állunk neki.
- Jellemhibám, hogy sok lábjegyzetet írok. Ezek érintőlegesen kapcsolódnak a szöveghez, érdemes azért elolvasni őket. A legtöbbször plusz magyarázatok, szófejtések, érdekességek... kerültek oda.

Tartalomjegyzék

Fülszöveg	2
Tartalomjegyzék	3
1. Bevezetés	4
1.1. A tantárgy célja	4
1.2. Nyelvi tudnivalók	5
1.3. Jelölési tudnivalók	5
2. Komplex számok	7
2.1. Természetes számok, egész számok, racionális számok	7
2.2. Valós számok, műveleteik	8
2.3. Komplex számok, egyszerű műveleteik	11
2.4. Elemi függvények	15
2.5. Komplex exponenciális, Euler-formula	17
2.6. Komplex számok egyéb függvényei, tudnivalói	20
3. Az euklideszi tér vektorai, a vektortér fogalma	23
3.1. Vektorok a fizikában, alapvető vektorműveletek	23
3.2. A vektortér (lineáris tér) fogalma	25
3.3. Alterek, lineáris kombinációk, bázisok, dimenzió	27
3.4. Euklideszi vektorok skaláris szorzata	31
3.5. Euklideszi vektorok vektoriális szorzása	34
3.6. További műveletek, vegyesszorzat	37
4. Vektorok reprezentációja (ortogonális bázis)	39
4.1. Ortogonális bázis	39
4.2. Kronecker-delta, Lévi-Civita-szimbólum, indexes írásmód	41
4.3. Vektorműveletek reprezentációja	43
4.4. További műveletek, kétszeres vektorszorzás, vegyesszorzat	46
5. Lineáris leképezések	49
5.1. Lineáris leképezések, operátorok	49
5.2. Vetítések, forgatások, tükrözések	52
5.3. Lineáris operátorok reprezentációja, mátrixok, mátrixműveletek	55
5.4. Mátrixok ill. operátorok fontos jellemzői, nyom, determináns	59
5.5. Determinánsok tulajdonságai	64
6. Lineáris egyenletrendszerek	71
6.1. Lineáris leképezések tulajdonságai: magtér, képtér	71
6.2. Lineáris egyenletrendszerek, lehetséges „kimenetek”	73
6.3. A Gauss-elimináció módszere	77
6.4. Mátrixok inverze	81

7. Sajátértékek, sajátvektorok (+közjátékok)	84
7.1. Közjáték: komplex vektorterek, skalárszorzat, transzponálás	84
7.2. Alapfogalmak	88
7.3. Sajátértékek és sajátvektorok meghatározása	90
7.4. „Egyszerű” operátorok (mátrixok), fontos típusok	94
7.5. Közjáték: forgatások	97
7.6. Főtengely-transzformáció	101
7.7. Alkalmazás: kúpszeletek általános egyenletei	103
7.8. Operátorok projektorfelbontása, mátrixfüggvények	108
8. Vektoranalízis-bevezető („ismétlés”)	112
8.1. Differenciálási és integrálási szabályok, elemi függvények	112
8.2. Többváltozós függvények, parciális deriváltak, Young-tétel	118
8.3. Egyszerű görbék és paraméterezéseik	121
8.4. Felületek és paraméterezéseik	126
8.5. Derivált és integrál egyszerű alkalmazásai	132
9. Skalár– és vektorfüggvények integráljai	135
9.1. Mezők	135
9.2. Különböző integráltípusok, példák	136
9.3. Integrálok kiszámítása: bevezető megfontolások	143
9.4. Integrálok kiszámítása: alapszabályok	146
9.5. Integrálok kiszámítása: néhány példa	149

1. Bevezetés

A fizika feladata a természet folyamatainak matematikai nyelven történő megértése. A „Vektorszámítás” tantárgy abban szeretne segítséget nyújtani, hogy a fizika egyetemi szintű tanulmányozásának elején összeszedjen, elmélyítsen és begyakoroltasson sok olyan matematikai ismeretet, tudást, eszközt, amelyek aztán a későbbi tanulmányok során nélkülözhetetlenek lesznek, és sokszor külön magyarázat nélkül hivatkoznak majd rájuk.

1.1. A tantárgy célja

Fizikus szemléletet szeretnénk átadni: a célunk az, hogy a tárgy tanulása során szemléletesen, a későbbi alkalmazásokat szem előtt tartva értsétek meg, sajátítsátok el a matematikai fogalmakat. Felsorolni is nehéz lenne, hogy a későbbiekben milyen sokféle területen hasznosíthatjátok majd az itt megszerzett ismereteket. A tárgy célja nem az, hogy axiomatikusan, szigorú bizonyításokkal építse fel a matematika nagy építményét (ill. az ide vonatkozó részeit); ezt meghagyjuk más matematikai kurzusokra.

A tartalomjegyzék címszavakban kb. tartalmazza az érintett témaköröket. Mint a tárgy neve is mutatja, alapvetően a vektorok és az azokkal végzett műveletek kerülnek itt elő, olyan (a matematika hagyományosnak számító felosztásában) különböző területekről szemezgetve, mint a lineáris algebra, a koordináta geometria, vagy a vektoranalízis.

A *lineáris algebra* az alapvető vektorműveletek általánosításaként bevezeti a *vektortér* fogalmát, és ezzel kapcsolatos tételeket mond ki; a fizika minden területén (sőt, sok más tudományágban is) alkalmazásra kerülnek majd az itt megtanultak.

Számos geometriai trükköt, tudnivalót (egyenesek, síkok, görbék: ellipszisek, hiperbolák, parabolák ill. különféle felületek leírása, kezelése, stb.) segít ez a tárgy készséggé fejleszteni: ezek szintén nemcsak a fizikában hasznosak, hanem bármilyen olyan területen is, ahol analitikus grafikus készségre, térszemléletre van szükség. Ezt az ismeretkört hívhatjuk analitikus geometriának vagy koordináta geometriának.

Végül a félév későbbi részében sorra kerülő *vektoranalízis* (melynek célja vektormezők vizsgálata, és részben épít az addigra már elsajátított differenciál- és integrálszámítási ismeretekre) elengedhetetlen a fizika nagyon sok ágának megértéséhez. Ilyenek: az elektromosságtan, a szilárd testek és folyadékok mozgásának tanulmányozása, de később a kvantummechanika vagy a relativitáselmélet is.

Eggyel „hátrébb lépve” azt is mondhatjuk, hogy amivel egy fizika BSc szakot elvégzett hallgató „kitűnhet” a társadalomban (bőven akkor is, ha nem szigorú értelemben a fizika kutató művelésére adja a fejét), az az, ha a mindennapi nyelven megfogalmazott problémákat át tudja ültetni matematikai nyelvre, és a megtalált megoldást értelmezni, szemléltetni tudja. Remélem, hogy a „Vektorszámítás” tárgy ehhez az egyik első és nagy segítség lehet; ezen szellemben kívánok sikeres, az új tudás megszerzésének örömeiben gazdag félévet!

1.2. Nyelvi tudnivalók

• Aki fizikával foglalkozik, nem ússza meg, hogy előbb-utóbb megtanuljon angolul. Nem kell perfektnek lenni; az angolokat kivéve senki sem az¹. Szakmai irodalomból majd úgyis ránk ragad.

Sok „magyar” szakkifejezést is az angolból vettünk/veszünk át; ezek általában ilyenkor valami konkrét(abb) dolgot jelentenek, nem pedig általánosságban azt, amit az angol szótárban a címszó alatt találunk.

• Idegesítő lehet elsőre a sok latin alapú kifejezés is; nemcsak azok, amik konkrétan valami fogalmat jelentenek (asszociativitás, disztributivitás, imaginárius rész...), hanem a „közbeszéd-szerűen” használtak is (definíció, triviális,...). Előbb-utóbb ezekhez is hozzászokunk; nem tudom megígérni, hogy nagy magyarító leszek.

• A „matematikai (logikai) nyelv” és szabályai nem mindig fednek át a „természetes (azaz: beszélt) nyelv” szintaktikájával, erre jó vigyázi. Jót tesz, ha egy matematikai állítást először esetleg magyartalanul, körmonfontan olvasunk ki, majd ezután fogalmazzuk meg rendes nyelvhelyességgel. A tagadásnál, ill. a „vagy”, „és” logikai műveleteknél kerül elő ez sokszor. Például: az „András és Béla fizikusok” állítás logikai értelemben vett tagadása **nem** az, hogy „András és Béla nem fizikusok”, hanem az, hogy „Nem igaz az, hogy András és Béla mindketten fizikusok”, amit úgy is mondhatunk (kicsit már tovább „alakítva”), hogy „András és Béla közül legalább egyikük nem fizikus”.

• Mivel hamar „kifogyunk” a latin ábécéből, a görög ábécé is elengedhetetlen. Alább felsorolom a görög betűket (kis-, nagybetű ill. kiejtés), egészen enyhén szubjektív színkóddal. *Piros*: ezek állandóan előkerülnek matematikai képletekben (ezek között is vannak gyakoribbak és kevésbé azok, de mind „dobogósok”). Jó, ha ezeket megszokjuk (kiolvasni ill. leírni). *Kék*: ezek „jó” görög betűk, mégsem annyira használjuk őket képletekben. *Szürke* (főleg nagybetűk): ezek annyira hasonlítanak egy (néha nem is a megfelelő) latin betűre, hogy görög betűként kezelésük jelölésben értelmetlen.

α	A	alfa	ι	I	ióta	ρ	P	ró
β	B	béta	κ	K	kappa	σ	Σ	szigma
γ	Γ	gamma	λ	Λ	lambda	τ	T	tau
δ	Δ	delta	μ	M	mű	υ	Υ	üpszilon
ε	E	epszilon	ν	N	nű	φ	Φ	fi
ζ	Z	zéta	ξ	Ξ	kszi	χ	X	(k)hi
η	H	éta	$\omicron$	O	omikron	ψ	Ψ	pszi
ϑ	Θ	t(h)eta	π	Π	pí	ω	Ω	omega

1.3. Jelölési tudnivalók

• Használni fogjuk a szokásos halmazelméleti jelöléseket: ha a és X halmazok, akkor $a \in X$ ill. $a \notin X$ jelentése (egyelőre magyartalanul kiolvasva): „ a eleme X -nek” (vagy „ a az X -ben van”), illetve „ a nem eleme X -nek”. Tovább: halmazelméleti unió, metszet, különbség jelei $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$. Fontos az *egyenlőségjel*. Az $A = B$ azt mondja (az = tehát az „**állító egyenlőségjel**”), hogy volt már eddig is két jól értelmezett valamink, A és B , amikről most állítjuk, hogy egyenlőek. Az $A \equiv B$ vagy fordítva: $B := A$ jelölés viszont azt jelenti, hogy A eddig is volt, és B -t most értelmezzük,

¹Ők meg hozzászoknak, hogy a saját nyelvükön idegen anyanyelvűekkel beszéljenek; néha elgondolkodom, vajon ez nem bosszantóbb-e, mint megtanulni egy idegen nyelvet...

úgy, hogy A -val megegyezik (vagy másképp mondva: A -t B -vel is jelölhetjük ezután). Ez az $\equiv$ jel tehát a **definiáló egyenlőségjel**, ami tehát nagyon nem ugyanaz, mint az $=$ állító egyenlőségjel.

- Amikor matematikai összefüggéseket írunk fel, akkor **betűkkel** jelölünk „objektumokat”, pl. számokat. Példa: az $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ismert képletet ugye úgy kell érteni, hogy a és b helyébe bármilyen számot írva igaz összefüggést kapunk, de ezzel a jelöléssel „egyszerre leírtuk mind a végtelen sokat”. Egy képletben eredendően **különböző** objektumokat **nem szabad** ugyebár **ugyanazzal** a betűvel jelölni: ha x -et és y -t látunk, alpból két különböző „dologra” (sokszor: számra) gondolunk. Persze **kiderülhet**, hogy mellesleg $x = y$, de akkor ez egy fontos *állítás*.

- Még a görög és a latin ábécéből együtt is igen hamar „elfogyhatnak” a jelölésre használható betűk, főleg, ha próbáljuk tiszteletben tartani a jó néhány eléggé elterjedt jelölési szokást. Persze egyrészt jó mindig minden jelölést tisztázni (akkor biztos nincs félreértés), de segít, ha emellett a szokásokat is próbáljuk betartani. A **legfontosabb szokás** az, hogy „hasonló kontextusban”, tehát „egyszerre, **egyenjogú** módon” bevezetett objektumok („változók”, azaz: számok, vektorok, halmazok, stb.) jelölésére lehetőleg az (akármelyik) ábécé **hasonló helyen fekvő betűit** használjuk. Ez bizonyára már megszokott dolog, érdemes rá ezután is törekedni.

További szokások (ezek már inkább „áthághatóak”): ha adottnak képzelt valós (vagy komplex) számok kerülnek elő, általában a latin (vagy görög) ábécé elejétől indulva választunk: α , β , γ , ..., illetve a , b , c , d , ..., de „szeretjük” a görög ábécé közepét is: λ , μ , stb. Ha kifejezetten egész számok kerülnek elő, sokszor szeretünk a latin ábécé közepe táján keresgélgni: n , m , k , l , stb. Ha „változók”, azaz valós (vagy komplex) számok mint „ismeretlenek” kerülnek elő, azokra szeretjük az x , y , u , ... betűket használni.

- Éppen a sok „korlát” miatt, meg azért is, hogy tetszőleges számú objektum jelét rögzíthessük, **indexeket** szoktunk használni, amelyek az objektumainkat megkülönböztetik: általában ezek természetes számok². Tehát pl. λ_1 , λ_2 , λ_3 , λ_4 , λ_5 öt darab „egyenjogú” objektumot jelöl (tipikus szokás szerint: valós vagy akár komplex számot). Ha úgy írjuk: λ_1 , λ_2 , λ_3 , ..., akkor azt is megengedjük, hogy „akárhány” legyen (esetleg nem is megmondva előre, hogy mennyi).

- Akármilyen összegek, de főleg „indexezett objektumok” összegének jelölésére jó a **szummajel**³. Pl. ha ismert, hogy van N darab számunk, akkor

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_N \quad \text{jelölése:} \quad \sum_{k=1}^N \lambda_k, \quad \text{vagy ha nem érthető félre:} \quad \sum_k \lambda_k.$$

Figyeljük meg: van egy „**futóindex**”, amit itt k -val jelöltem: ez „halad” végig az összes „lehetséges” (pontosabban: az összes megkövetelt) értéken, amit a szummajel „köré” (alá-fölé) írunk; a példában tehát k végigfut az 1, 2, ..., N indexeken, és közben összeadjuk a megfelelő λ_k számokat. Ha olyan „környezetben” dolgozunk, ahol egy indexről egyértelmű, hogy milyen értékei lehetnek, (azaz: „milyen értékeken futhat végig”), akkor ha az azzal indexezett objektumokat összegezzük, sokszor ki sem írjuk a szummajel köré az összegzési tartományt (mint az imént a második jelölésben).

²Tényleg általában természetes szám az index, de ha belegondolunk, semmi sem teszi ezt kötelezővé: az index lényege, hogy akárhány véges sok legyen, és megkülönböztethessük őket. Legkézenfekvőbb ilyen „indexhalmaz” persze éppen a természetes számok halmaza.

³A *summus* latinul jelenti azt, hogy „teljes”, „legfelső”, mindenesetre az összeg szóra is kiterjesztődött a jelentése. Cserébe a *görög* nagy S -nek megfelelő szigma-betűvel, Σ -val jelölik.

2. Komplex számok

Elsőéves fizika BSc szakosok matematikai óráján vagyunk; ide jut az a nemes feladat is, hogy a komplex számokat megbeszéljük. Aki most hall először róluk, nem biztos, hogy egyből átérzi, milyen alapvető módon használjuk őket; szavamat adom, hogy nemsokára olyan emlék lesz az, amikor nem ismertük a komplex számokat, mint most az, amikor nem tudtunk beszélni.

2.1. Természetes számok, egész számok, racionális számok

- A következőkben rövidítve megbeszéljük (=„átismételjük”) a számfogalom bővítésének lépéseit. Kiindulunk az újjainkon megszámlálható $0, 1, 2, 3, \dots$ **természetes számokból**, ezek halmazát $\mathbb{N}$ -nel jelöljük⁴. A nullát is a természetes számok közé sorolják; a $\mathbb{N}^+$ jelölés a pozitív (tehát a nullánál *nagyobb*, $1, 2, 3$, stb.) természetes számok halmazát jelöli.

- A természetes számok halmazán értelmes az **összeadás** (jelben $a+b$) és a **szorzás** (jelben $a \cdot b$ vagy egyszerűen ab). Van **rendezés** is: bármelyik két szám közül az egyik biztosan nagyobb vagy egyenlő, mint a másik. Jelben: $a \geq b$, vagy $b \geq a$ biztosan igaz; még az is lehet, hogy mindkettő, pontosan akkor, ha egyenlők: $a \geq b$ és $b \geq a$, ha $a=b$. Az összeadásnak, a szorzásnak és a rendezésnek ismert egyszerű tulajdonságai vannak; egyelőre csak rutinszerűen használjuk ezeket.

- Az összeadás **inverzművelete**⁵ a **kivonás** (jele $-$): ha $a+b=c$, akkor $b=c-a$, és $a=c-b$, azaz pl. mivel $3+5=8$, ezért $8-5=3$, és $8-3=5$. Észrevehető, hogy nincs olyan természetes szám, ami egyenlő volna pl. $2-5$ -tel: a kivonás művelete nem értelmes bármely két természetes számra.

A hiány, az adósság, a fedezetlen többletkiadás leírására utólag már egyszerűnek tűnő dolog bevezetni a **negatív egész számokat**. Ezek és az eddigi természetes számok összességét egyszerűen **egész számoknak** hívjuk: ezek tehát a $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots$ számok. Az egész számok halmazát $\mathbb{Z}$ -vel jelölik⁶, ezen belül a negatív egész számok (tehát a $-1, -2, -3$, stb. számok) halmazának jele $\mathbb{Z}^-$, a nempozitív (nulla vagy negatív) egészeké $\mathbb{Z}_0^-$. A pozitív egészeket már eddig is ismertük: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, azaz a természetes számok halmaza részhalmaza az egész számok halmazának.

- A számfogalmat tehát **kibővíthettük** az egész számokra. Az egész számoknak is van összege, szorzata, rendezettsége, ugyanolyan kellemes tulajdonságokkal, mint a természetes számoknál. Újdonság a természetes számokhoz képest, hogy $\mathbb{Z}$ -ben már a kivonás is bármilyen két egész számra értelmes: ha a és b egész számok (azaz $a, b \in \mathbb{Z}$), $a-b$ mindig létezik, és egész szám. Ez azért nem egészen magától értetődő, mert azzal, hogy pl. „a $2-5$ művelet eredményeként bevezettük a -3 -at”, mint számot, most már azt is le kell ellenőrizni, hogy pl. két (újdonsülten most értelmezett) negatív számnak is van összege, különbsége. Ezt azonban már régen megszoktuk, most nem húzzuk vele az időt. Az egész számok **műveleti szabályait** a még nem eléggé rutinos ember néha eltéveszti; próbáljuk meg minél kevesebbszer. Frissítés: $-5 \cdot (-4 - (-3)) = -5 \cdot (-4 + 3) = -5 \cdot (-1) = 5$.

- A szorzás inverzművelete az **osztás** (jele $/$, vagy $:$, vagy vízszintes törtvonal): ha $a \cdot b = c$, akkor $b = \frac{c}{a}$, és $c = \frac{b}{\frac{1}{a}}$. Például: $3 \cdot 5 = 15$, tehát $3 = \frac{15}{5}$, és $5 = \frac{15}{3}$. Sőt, most már az egész számokra is gondolhatunk: $-3 \cdot -5 = 15$, ebből $\frac{15}{-5} = -3$, és $\frac{15}{-3} = -5$. Az osztás művelete azonban nem mindig értelmes az egész számok körében: pl. nincs olyan egész szám, ami egyenlő volna $\frac{2}{5}$ -tel.

⁴Az $\mathbb{N}$ betű mint jelölés a *naturalis*=természetes latin szóból jön.

⁵Az „inverz” az *invertere*(=kb. „visszaforgatni”) latin szóból jön: egy művelet „visszafelé-csinálása”.

⁶A német (egyszerűen „szám”-ot jelentő) *Zahl* szó első betűjéből.

• Utólag egyszerűnek tűnő lépés az „osztzkodás értelmességének” érdekében bevezetni a **tört-számokat**: ha ezekkel is kibővítjük a számfogalmat, akkor az osztás is (szinte) mindig értelmes lesz. A törtszámokat pl. $\frac{a}{b}$ alakban írhatjuk, ahol a és b egész számok: $\frac{a}{b}$ az a szám, amit b -vel megszorozva éppen a -t kapunk. Két különböző alakban felírt törtszám persze lehet ugyanaz: pl. $2/3 = 4/6 = 8/12$, stb. Az egész és törtszámok összessége lesz az ún. **racióális számok** halmaza⁷, ezt $\mathbb{Q}$ -val jelöljük⁸. Használjuk a $\mathbb{Q}_0^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}_0^-$, $\mathbb{Q}^-$ jelöléseket is, találjuk ki, mit jelentenek.

• Racionális számok körében minden (nem nullával való) osztásnak van értelmes eredménye: $a, b \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0$ -ra $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Itt is hasonló érvényes, mint a negatív egészeknél: a racionális számokat „azért vezettük be”, hogy két egész számnak (majdnem) mindig legyen hányadosa, de egyúttal azt is elértük, hogy két akármilyen racionális (tehát tört) számnak is értelmes lesz a hányadosa. A törtszámok műveleti szabályait (összeadásuk, kivonásuk, közös nevezőre hozás, stb.) is legyünk szívesek egyre kevesebbszer elvéteni. Frissítés: $\frac{3}{4} - \frac{-5}{7} = \frac{3}{4} + \frac{5}{7} = \frac{21}{28} + \frac{20}{28} = \frac{41}{28}$, illetve $\frac{7/6}{4/5} = \frac{35}{24}$.

• A racionális számok körében tehát (a nullával osztást kivéve) bármely két számra értelmesek az **összeadás, kivonás, szorzás, osztás** műveletei, továbbá a számok nagyság szerinti **rendezése**. Ezekre érvényesek a megszokott tulajdonságok, melyek (ahol csak a műveletek értelmesek) a korábbi, „leszűkített” verziókban is (mint pl. a természetes számok összeadása) érvényesek voltak. Lentebb, a valós számok kapcsán soroljuk fel részletesen a műveleti tulajdonságokat.

• A számfogalom iménti $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ és $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ **bővítései** tehát **algebrai** jellegűek. Azért „találtuk ki” a (pozitívak mellé a negatív) egész számokat ill. a(z egészek mellé a tört) racionális számokat, hogy bizonyos **műveletek** (az összeadás ill. a szorzás) **inverzeinek** (a kivonásnak ill. a nem nullával osztásnak) mindig legyen értelmes végeredménye. **További algebrai** (=műveletek értelmességét kiterjesztő) **bővítések** is vannak: pl. az ún. algebrai számok halmaza; ez tartalmazza a mindenféle egyenletek gyökeit, pl. az $(1+\sqrt{5})/2$ stb. típusú számokat. Ezekre visszatérünk.

• A **hatványozás** művelete is ismert: a, b **természetes számokra** a^b az a számnak b számúszor önmagával vett szorzatát jelenti (a a *hatványalap*, b a *kitevő*). A hatványozás **alaptulajdonságai**: $a^{x+y} = a^x a^y$, illetve $(ab)^x = a^x b^x$, $(a/b)^x = a^x / b^x$, $(a^x)^y = a^{xy}$, stb., ha minden alap és kitevő itt még egyelőre természetes szám. Hatványozásra általában $a^b \neq b^a$, **kétféle inverz** is van tehát. Az egyik a **gyökvonás**: ha $a^b = c$, akkor ugyebár $a = \sqrt[b]{c}$ (speciálisan: ha $a^2 = b$, akkor $b = \sqrt{a}$ a négyzetgyök, ahova a 2-est nem írjuk ki). A hatványozás másik fajta inverze a **logaritmus**: ha $a^b = c$, akkor $b = \log_a c$. Egyelőre a, b, c csak természetes számok lehetnek itt.

2.2. Valós számok, műveleteik

• A racionális számokkal elvagyunk egy darabig: felrajzolhatjuk őket egy (végtelen hosszú) **szám-egyenesre**. Kijelöljük a 0-t és az 1-et, majd ezt a szakaszt n -szer odamérve megkapjuk az n természetes számot, felezve megkapjuk az $1/2$ -et, és így tovább. Az összes **racióális** számot berajzolva (később tisztázandó értelemben) **sűrűn** betöltjük a számegyeneset. Hogy „vannak-e nem racionális számok”, az akkor értelmes kérdés, ha megmondjuk, miért szeretnénk ilyeneket.

⁷ A *ratio* arányt, aránypárt jelent, de értelmet, eszet is. *Racionális*: értelmes, ésszel felfogható. A „racióális számok” elnevezése inkább az „arányként felírható”-t jelenti; remélem, az *irracióális* számok is „felfoghatók”...

⁸Egy másik latin szóból, ami hányadost jelent: *quotiens*.

• Az első nyom: kiderül, hogy nincs olyan racionális szám, aminek négyzete 2 volna⁹. Ugyanakkor azt gondolnánk, hogy $\sqrt{2} = 1,41423562\dots$, vagyis a következő racionális számok sorozata: 1 1,4 1,41 1,414 1,4142 (stb., egyre több tizedesjegyet kiírva) „egyre jobban megközelíti a $\sqrt{2}$ -t”. Másképp mondva: temérdek (konkrétan: végtelen sok) pozitív racionális szám van, aminek négyzete kisebb, mint 2, és ha ezeket „bejelöljük” a számegyenesen, akkor látszik, hogy a bejelölt (igen sűrű) halmaznak van valamiféle „felső határa”. Ez azonban nem egy racionális szám.

• A **valós számok** bevezetése lényegében azt jelenti, hogy a racionális számokkal „sűrűn teleírált” számegyenesen **„kitöltjük a maradék helyeket”**. El lehet egytel pontosabban is mesélni, hogy hogyan is kell a valós számokat (halmazelméletileg) bevezetni, de a lényeg ez. A valós számok halmazának jele¹⁰ $\mathbb{R}$, a nem racionális valós számokat **irracionálisaknak** hívjuk, ezek halmazának jele néha $\mathbb{Q}^*$. A valós számok tehát *kitöltik a számegyeneset*, így $\mathbb{R}$ -ben **minden felülről korlátos részhalmaznak van felső határa**. Ez nem volt igaz a racionális számokra: ugye pl. nincs közöttük olyan, ami a felső határa volna annak a halmaznak, hogy $\{„azok a racionális számok, amelyek négyzete 2-nél kisebb”\}$. A valós számok között viszont definíciószerűen van ilyen: ez a $\sqrt{2}$.

• A valós számok között megtalálhatjuk az egészeket, a racionálisakat, meg még csomó mást, pl. mindenféle gyökvonások eredményeit is ($\sqrt[19]{43}$, $\sqrt[3]{124}$, stb). Mégis, a $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ **bővítés nem algebrai jellegű**. Ez alatt azt értjük, hogy nem egyszerűen a műveletek (jelesül: a gyökvonások) értelmezési tartományát akartuk kibővíteni. A fentebbi kitétel, hogy „kitöltik a számegyeneset”, a valós számok *definiáló tulajdonsága*. A valós számok bevezetése a **folytonosság** fogalmát vetíti előre, ami nem egy algebrai (azaz: műveletekkel kapcsolatos) fogalom, hanem a matematikai **analízis** egyik alapfogalma.

Más oldalról megvilágítva: az olyan (valós) számokat, amelyek valamilyen egész együtthatós egyenletnek a megoldásai, **algebrai számoknak** nevezik. A $\sqrt{2}$ (noha nem racionális szám) például ilyen algebrai szám: ő az $x^2 - 2 = 0$ egyenletnek a megoldása¹¹. Valamilyen értelemben azonban „a legtöbb” valós szám **nem algebrai** szám. (Még úgy is, hogy egyébként a $\sqrt{2}$ példáján volt egyszerű látni, hogy „miért van szükség” a racionális számok halmazán kívüli számokra.)

• Most felsoroljuk a valós számokon értelmezett összeadás, szorzás és rendezés alaptulajdonságait, amelyeket (pl. középiskolából) ismertnek tételezünk fel.

Összeadás (latinosan: „addíció”): a, b -re $a+b$ módon jelöljük, alaptulajdonságai:

→ **A1**: Az összeadás **asszociatív**¹²: $(a+b)+c = a+(b+c)$ bármely három $a, b, c \in \mathbb{R}$ számra¹³.

→ **A2**: Az összeadás **kommutatív**¹⁴: bármely két a, b valós számra $a+b = b+a$.

→ **A3**: Van pontosan egy darab **nulla** nevű szám, amire igaz, hogy minden $a \in \mathbb{R}$ számra $a+0 = a$.

→ **A4**: Minden $a \in \mathbb{R}$ számnak van pontosan egy **ellentettje**, $-a$, amire $a + (-a) = 0$.

Szorzás (latinosan: „multiplikáció”): a, b -re $a \cdot b$ vagy ab módon jelöljük, alaptulajdonságai:

→ **M1**: A szorzás **asszociatív**: $(ab)c = a(bc)$ bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ számokra; jelölhetjük tehát abc -vel is a hármas szorzatot.

⁹Ha volnának a, b egészek, amikre $(a/b)^2 = 2$ lenne, akkor $a^2 = 2b^2$ lenne, ami a prímtényezősz felbontás egyértelműsége miatt lehetetlen. Általában is egy pozitív egész szám egészedik gyöke vagy egész, vagy nem racionális.

¹⁰A *realis* = „valós” latin szó kezdőbetűjéből.

¹¹A racionális számok is algebrai számok, hiszen pl. a $7/9$ szám a $9x - 7 = 0$ egyenletnek a megoldása.

¹²A latin eredetű szó jelentése kb.: „összetársítható”.

¹³Ez a tulajdonság (az *asszociativitás*) teszi tulajdonképpen lehetővé, hogy az előbbi akármelyik jelölés helyett egyszerűen $a+b+c$ -t írjunk, azaz könnyen értelmezzük három (vagy akkor már: akárhány véges sok) szám összegét.

¹⁴A latin eredetű szó jelentése: „felcserélhető”.

→ **M2**: A szorzás *kommutatív*: bármely két a, b valós számra $ab = ba$.

→ **M3**: Van pontosan egy darab **egy** nevű szám, $1 \neq 0$, amivel minden $a \in \mathbb{R}$ számra $a \cdot 1 = a$.

→ **M4**: Minden nemnulla $a \neq 0$ számnak van pontosan egy **reciproka**, $\frac{1}{a}$, amire $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

Összeadás és szorzás kapcsolata:

→ **AM**: Az összeadásra nézve a szorzás **disztributív**¹⁵: minden a, b, c számra $a(b+c) = ab+ac$.

Rendezés (latinosan: „ordináció”): a, b -re $a \leq b$ vagy $a \geq b$ a jelölése; alaptulajdonságok:

→ **O1**: A rendezés alaptulajdonságai (hogyan tényleg „rendezésnek” hívhatjuk):

a.) minden szám kisebb-vagy-egyenlő mint önmaga: $a \leq a$,

b.) két számra $a \leq b$ és $b \leq a$ egyszerre akkor és csak akkor teljesül, ha $a=b$,

c.) három számra ha $a \leq b$ és $b \leq c$, akkor $a \leq c$ is igaz.

→ **O2**: Bármely két a, b szám összehasonlítható: $a \leq b$ vagy $b \leq a$ biztos igaz.

Rendezés és összeadás, szorzás kapcsolata:

→ **OA**: Bármely a, b, c számokra ha $a \leq b$, akkor $a+c \leq b+c$.

→ **OM**: Bármely $a, b, c \geq 0$ számokra ha $a \leq b$, akkor $ac \leq bc$.

Az eddigi tulajdonságok már a racionális számok szűkebb halmazán is mind igazak voltak. Csak a valós számokra vonatkozik viszont a **rendezés teljessége**:

→ **OC**: Bármely felülről (vagy alulról) korlátos számhalmaznak van felső (vagy alsó) határa.

• Ha csak a valós számok lebegnek a szemünk előtt, akkor esetleg ezen fenti tulajdonságok megfogalmazása fölöslegesnek tűnhet, hiszen annyira megszoktuk őket. Azért érdemes mégis megfogalmazni őket, mert találkozunk majd olyan „objektumokkal”, és azokon értelmezett „műveletekkel” (sőt, némely ilyen műveletet esetleg akár ezen objektumok *szorzásának* is fogunk hívni), amikor ezen „objektum-műveletekre” egyik-másik fentebbi tulajdonság nem fog teljesülni. Akkor jó lesz majd emlékezni, hogy pontosan mik is voltak a (számoknál már megszokott) jó tulajdonságok.

A felsorolt műveleti tulajdonságokról belátható, hogy *logikailag függetlenek*: egyik sem következik logikailag a többiből. A valós számokon értelmezett műveleteknek persze számtalan egyéb hasznos tulajdonsága van, amelyek ezekből következnek; nem soroljuk fel az összeset.

• Páros egész kitevőjű (a kitevőt $2n$ -nel jelöljük) hatványozás minden valós számhoz pozitív valósat rendel, még hozzá x -hez és $-x$ -hez ugyanannyit. Megegyezés szerint egy y **pozitív valós szám** $2n$ -edik gyöke, $\sqrt[2n]{y}$ az a pozitív valós szám, amire $(\sqrt[2n]{y})^{2n} = y$. Speciálisan négyzetgyökre: csak nemnegatív valós számnak van négyzetgyöke, és az nemnegatív szám lesz. Jelesül: nincsen olyan valós szám, aminek a négyzete -1 volna.

• A **hatványozás** fentebb is említett tulajdonságai egyelőre csak a természetes számok között voltak értelmesek: $a^{x+y} = a^x a^y$, $(ab)^x = a^x b^x$, $(a/b)^x = a^x / b^x$, $(a^x)^y = a^{xy}$, stb. Ezekhez hozzávehetjük azt, hogy $(\sqrt[n]{a})^n = a$, mindig, amikor ez utóbbi értelmes. Ezek együtt indokolják, hogy (bizonyos fenntartásokkal) kiterjesszük a hatványozás műveletét, tehát x^y értelmességét. Konkrétan: a **kitevőben megengedünk törtszámokat és negatívakat** is, azaz bármilyen racionális számot, az **alapban** pedig bármilyen **pozitív valós** számot. Összefoglalva: x^y értelmes, ha $x \in \mathbb{R}^+$, $y \in \mathbb{Q}$. A legfontosabb szabályok: $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$, $x^{-a} = 1/x^a$, $x^0 = 1$. A hatványozásnak ezen szabályaiban való jártasságot szintén „hozott anyagnak” tételezzük fel. Fontos, hogy **nem értelmes** 0^0 , és **nem hatványozhatunk negatív valós** számot. Ugyan pl. $(-5)^2 = 25$, de ha egységesen

¹⁵A *disztributív* jelentése kb. „szétdarabolható”, „szétosztható”.

bármilyen racionális kitevőt meg akarunk engedni, akkor negatív számok hatványozásánál előke-
rülhetne negatív szám párosadik (pl. négyzet)gyöke, ami nem létezik.

- Még nem értelmeztünk irracionális kitevőt, pl. $2^{\sqrt{2}}$ -t, hiszen a kitevőt itt nem lehet két egész szám hányadosaként felírni, hogy az $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ szabályt alkalmazhassuk. Gondolnánk, hogy va-
lós kitevőjű hatványozást (azaz x^y -t, ahol $x \in \mathbb{R}^+$, $y \in \mathbb{R}$ akármilyen), olyasmi módon értelmezhetnénk,
hogy „a kitevőt egyre jobban megközelítjük racionális számokkal”, stb. Ez működő módszer, de
nemsokára „egyszerűbben” bevezetjük x^y -t akármilyen számokra. Egyelőre tehát elfogadjuk, hogy
minden pozitív valós x és valós y számra egyértelműen létezik x^y .

2.3. Komplex számok, egyszerű műveleteik

- A **valós számok** között bármely két szám összege, szorzata, különbsége, hányadosa ill. pozitív
valós számok valós kitevőjű hatványa (ez a gyököket is magában foglalja) létezik, értelmes és valós
számot ad eredményül. A valós számok között azonban **nem létezik pl. $\sqrt{-6}$** . Felmerül az igény,
hogy legyenek negatív számoknak is gyökei. Ehhez tovább kell bővíteni a „számok” fogalmát.
- Az a (valós számokénál bővebb) számhalmaz, amelyben értelmes pl. $\sqrt{-1}$, vagy éppen a $\sqrt{-9}$, a
komplex számok halmaza, jelben¹⁶ $\mathbb{C}$. Kiderül, hogy a komplex számokkal nemcsak azt nyerjük,
hogy negatív számokból lehet gyököt vonni (pedig ez a motiváció), hanem szinte bármilyen művelet
(összeadás, szorzás, hatványozás, gyökvonás, logaritmus, stb.) szinte mindig értelmes lesz.
- A valós számok kitöltik a számegyenest; hiába próbálnánk „további számokat suvasztani közéjük”.
Ahogyan a **valós számok** halmazához, $\mathbb{R}$ -hez a **számegyenest** társítjuk geometriai elképzelésként,
úgy a **komplex számokhoz** (azaz a $\mathbb{C}$ halmazhoz) egy síkot, az ún. **komplex számsíkot** társít-
juk¹⁷. Egy valós számra mint a számegyenes egy pontjára gondolhatunk; hasonlóan, egy komplex
számra gondolhatunk úgy, mint a komplex számsík egy pontjára. Természetesen a komplex számok
között ott vannak a valósak is: megállapodás szerint a komplex számsíkon egy vízszintesen ábrázolt
koordinátatengelyt rajzolunk be (és **valós tengelynek** hívjuk), a valós számok ezen vannak.
- A komplex számokon értelmezett műveletek azon alapulnak, hogy egyszerűen **bevezetjük azt
a számot, ami egyenlő $\sqrt{-1}$ -gyel**. Ennek **jele i** , neve **képzetes egység**, vagy latinosan *ima-
ginárius egység*. (A „képzetes” szó itt az eddigi „valós” nyelvi ellenpontja¹⁸). Tehát:

$$i^2 = -1.$$

Az i tehát nem valós szám. A komplex számsíkon úgy ábrázoljuk az i -t, mint a nullától (amit
az origóba teszünk) a valós tengelyre merőleges tengelyen (amit ezentúl **képzetes tengelynek**
hívunk) egységnyi távolságra lévő pontot. A sík pontjait pedig komplex számokkal azonosítjuk:
egy z komplex szám tehát felírható, mint

$$z \in \mathbb{C} : \quad z = a + b \cdot i, \quad \text{ahol } a \text{ és } b \text{ valós számok.}$$

A z szám tehát az, ahova a nullából (origóból) a valós tengely irányában („vízszintesen”) a -nyit,
majd a képzetes tengely irányában („függőlegesen”) b -nyit odébb menve jutunk.

¹⁶Nyilván a *complex* szó kezdőbetűjéből.

¹⁷A komplex számsíkot egyik megalkotójáról időnként *Argand-síknak* is nevezik.

¹⁸Az i jelölés nyilván az „imaginárius” szó kezdőbetűje. Megjegyzés: a villamosmérnökök teljesen érthetetlen
okból különködnek: j -vel jelölik a képzetes egységet; igazán leszokhatnának erről...

• Fontos elnevezések és fogalmak: a $z = a + b \cdot i$ alakban felírt komplex számnak a **valós része** a , jelben $a = \operatorname{Re} z$, a **képzetes része** b , jelben $b = \operatorname{Im} z$, az **abszolútértéke** (ami itt is a „nullától való távolsága”) jelben $|z|$, értéke $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, Pitagorasz-tétellel kigondolva. Továbbá egy z komplex szám **komplex konjugáltjának**¹⁹ hívjuk (és z^* -gal jelöljük²⁰) azt a komplex számot, amit a képzetes rész ellentettre cserélésével kapunk: ha $z = a + bi$, akkor $z^* = a - bi$. Még egy fontos fogalom: a z komplex szám **argumentuma**, vagy **fázisa** az a φ szög, amit az origóból a komplex síkon z -be mutató szakasz bezár a valós tengellyel, jelben: $\varphi = \arg z$. Összefoglalva:

Komplex szám:	$z = a + bi$,	z valós része:	$\operatorname{Re} z = a$,
z konjugáltja:	$z^* = a - bi$,	z képzetes része:	$\operatorname{Im} z = b$,
z abszolútértéke:	$ z = \sqrt{a^2 + b^2}$.	z argumentuma:	$\varphi = \arg z$.

• **Fontos megjegyzések:**

1. Vigyázat: a képzetes rész is egy **valós** szám!! Ez néha eltévesztődik.
2. **Vigyázat!!!** Megszokásból $z = a+bi$ alakban írtuk (és fogjuk is még többször) a komplex számokat, és legtöbbször ilyenkor hallgatólagosan hozzáértjük, hogy a és b valósak, azaz a a valós rész és b a képzetes rész. Mindjárt értelmezzük a komplex számok műveleteit; akármilyen z_1 és z_2 komplex számokra is képezhetjük a $z = z_1 + iz_2$ **összeget**. Ennek **egyáltalán nem** z_1 és z_2 **a valós és képzetes részei** (ha z_1 vagy z_2 nem valósak)!!!
3. Nyilvánvaló, hogy a konjugált konjugáltja ugyanaz: $(z^*)^* = z$.
4. Esetleg „bejeddünk” a négyzetgyökkel kapcsolatban, de a $|z|$ -nél nincs gond: a^2+b^2 valós számok négyzetösszege, így ő biztosan nemnegatív valós szám, és négyzetgyöke egy egyértelmű nemnegatív valós szám. **Csak a $z=0$ abszolútértéke nulla, minden más z -re $|z|>0$ valós!**
5. Valós szám abszolútértéke persze ugyanaz, mint eddig.
6. Az alábbiak nyilvánvalóak (de azért memorizáljuk, **olvassuk ki szavakkal, hangosan** őket!):

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z^*, \quad \operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} z^*, \quad |z| = |z^*|, \quad |z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}.$$

7. A komplex számok között gondolva a **nulla** számra annak a **valós és képzetes része is nulla!**
8. Ha egy z komplex számról tudjuk, hogy $\operatorname{Im} z=0$, akkor annyit tudunk, hogy ő valós. Tehát:

$$\text{ha } z \text{ valós (azaz } z \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \operatorname{Im} z = 0 \Leftrightarrow z = z^*,$$

ahol (itt és később is) az $\Leftrightarrow$ jel „egyenértékű”-t, „egymásból következnek”-et jelent.

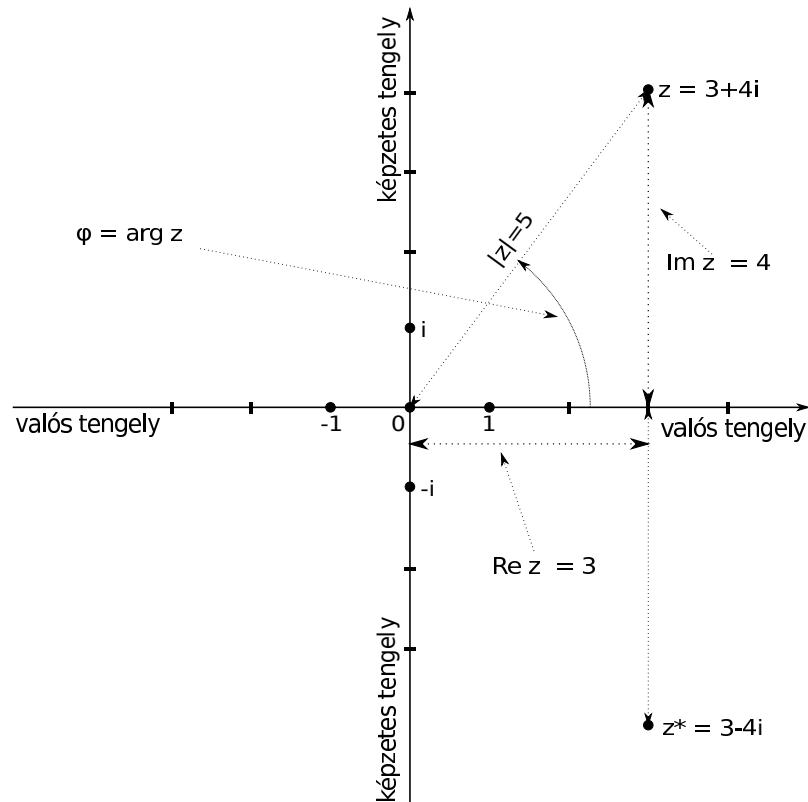
9. Az olyan z számokat, amikre $\operatorname{Re} z = 0$, azaz $z = i \cdot b$, $b \in \mathbb{R}$ alakba írhatók, vagyis rajta vannak a képzetes tengelyen, **tiszta képzeteseknek** szoktuk hívni. Ezekre:

$$\text{ha } z \text{ tiszta képzetes} \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = 0 \Leftrightarrow z = -z^*.$$

10. **Az argumentumot**, azaz a z irányának „szögét” radiában, azaz **számokban** mérjük! (Azaz: nem fokokban, meg ilyesmikben.) A pozitív valós számok argumentuma tehát nulla, a pozitív képzetes részű tiszta képzeteseké $\pi/2$, stb.

¹⁹A „konjugált”, „konjugálás” szó sokszor sokféle értelemben előkerül; latin jelentése kb. konjugál=„összekapcsol”. Egy komplex szám és konjugáltja tényleg intim módon „össze vannak kapcsolva”; egyik meghatározza a másikat.

²⁰Ez talán a legelterjedtebb jelölés, de néhány könyvben pl. felülvonással is jelölik a komplex konjugálást.



1. ábra. A komplex számsík és a komplex számokkal kapcsolatos egyszerű fogalmak illusztrációja.

11. Az **argumentum**, $\arg z$ **nem egyértelmű**: a **teljesszöget**, azaz 2π -t egész számúszor (negatívszor is) **hozzáadhatjuk**. Ez kellemetlen tud lenni; szeretnénk egyértelművé tenni $\arg z$ -t. Ezért **megállapodunk**²¹, hogy $\arg z \in]-\pi, \pi]$. Vagyis az argumentum a pozitív valós tengelyről körbe elindulva nő, egészen π -ig²², ezt a negatív valós tengelyen rajta veszi fel. Ott hirtelen visszaugrik $-\pi$ „fölé egy kicsivel”, majd ahogy körben haladunk, onnan tovább nő, amíg csak visszaér az $\arg z = 0$ -ra, amikor körben visszajutottunk a pozitív valós tengelyhez.
12. Egy **komplex számot** a $z = a + b \cdot i$ alak helyett **megadhatunk** úgy is, hogy megmondjuk $|z|$ -t és $\arg z$ -t. Ez utóbbi a komplex szám ún. **trigonometrikus alakja**; visszatérünk erre.

Az 1. ábra próbálja szemléltetni a komplex számsíkot és az eddig említett fogalmakat. • Szeretnénk, ha a valós számok műveleti tulajdonságai (összeadás és szorzás asszociativitása, kommutativitása, a disztributivitás, stb.) a komplex számok között is érvényesek lennének. Komplex számok (amiket most u -val és v -vel jelölünk) **összeadása** elég nyilvánvaló:

$$u = a+bi, \quad v = A+Bi \quad \Rightarrow \quad u+v = (a+A) + (b+B)i.$$

Vagyis két komplex szám összegét úgy kapjuk, hogy külön a valós és külön a képzetes részeit összeadjuk. Ezt a komplex számsíkon úgy lehet szemléltetni, hogy az origóból az u és a v komplex számokba mutató vektorok összegét képezve kapjuk az összeget, $u+v$ -be mutató vektort.

A **kivonás** a kivonandó szám -1 -szeresének hozzáadását jelenti, tehát

$$u = a+bi, \quad v = A+Bi \quad \Rightarrow \quad u-v = (a-A) + (b-B)i.$$

²¹Gyakorlatilag mindenki, továbbá minden számítógépes programcsomag is így csinálja.

²²Ne feledjük: π radián 180° -nak felel meg.

- A **szorzás** sem különösebben bonyolult: az u és v komplex számok szorzatát mint az $u = a+bi$ és a $v = A+Bi$ kéttagú összegek szorzatát kell kiszámítani, közben figyelve, hogy $i^2 = -1$:

$$u = a+bi, \quad v = A+Bi \quad \Rightarrow \quad u \cdot v = (a+bi)(A+Bi) = aA + (aB+Ab)i + (bB) \cdot i^2,$$

$$\text{vagyis összegyűjtve a valós és képzetes részeket: } u \cdot v = (aA-bB) + (aB+Ab)i.$$

Az utolsó egyenlőség tehát megadja, hogy hogyan kapjuk a szorzat valós és képzetes részeit a szorzandókéiból. Ez némi rutinszerzés után beidegződéssé válik. Komplex számot valóssal szorozni igen egyszerű: ha λ valós (azaz $\lambda \in \mathbb{R}$), és $u = a+b \cdot i$ komplex szám, akkor $\lambda \cdot u = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b \cdot i$. Ez tehát a z számhoz mutató vektor λ -szorozására nyújtásának felel meg, ha λ valós. Majd visszatérünk arra, hogy hogyan kell „igazi” komplex számok szorzását elképzelni a komplex síkon.

- Mi komplex számok szorzatának abszolútértéke? Válasz: $|u \cdot v| = |u| \cdot |v|$, azaz **szorzáskor az abszolútértékek is szorzódnak**. Lássuk ezt be! Meginthet legyen $u = a+ib$ és $v = A+iB$ a valós és képzetes részeikkel megadva. A négyzetekre lesz egyszerűbb; a szorzatot fentebbről behelyettesítve

$$\text{egyrészt } |u \cdot v|^2 = (aA-bB)^2 + (aB+Ab)^2 = a^2A^2 + b^2B^2 + a^2B^2 + A^2b^2,$$

$$\text{másrészt } |u|^2 \cdot |v|^2 = |a+bi|^2 \cdot |A+Bi|^2 = (a^2+b^2)(A^2+B^2) = a^2A^2 + a^2B^2 + b^2A^2 + b^2B^2,$$

azaz **tényleg** $|uv|^2 = |u|^2|v|^2$. Mivel az abszolútértékek nemnegatív valósak, $|uv| = |u| \cdot |v|$ is igaz.

- Az osztással ismerkedés előtt az (előzőekből következő, de amúgy is fontos) alábbi formulát **véssük az eszünkbe**:

$$|z|^2 = zz^*. \quad \text{Hiszen: } z = a+bi \quad \Rightarrow \quad zz^* = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 = |z|^2.$$

Egy komplex szám abszolútérték-négyzetét tehát úgy kapjuk, hogy őt a konjugáltjával szorozzuk. Egy z **komplex szám négyzete**, z^2 **nem ugyanaz, mint az abszolútérték-négyzete**, $|z|^2$! Erre nagyon figyeljünk, mert igen sokszor eltévesztődik.

- Az előző képletet tudva komplex számok **reciprokát** kézzelfoghatóbb alakra hozhatjuk, ha a **nevező konjugáltjával bővítünk**. Számpélda:

$$z = \frac{1}{3+7i}, \quad \begin{array}{l} \text{Re } z = ? \\ \text{Im } z = ? \end{array} \quad z = \frac{1}{3+7i} = \frac{1}{3+7i} \cdot \frac{3-7i}{3-7i} = \frac{3-7i}{3^2+7^2} = \frac{3-7i}{58} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{3}{58} - \frac{7}{58}i.$$

Így tehát minden $z \neq 0$ komplex számra kellemesen értelmes az $\frac{1}{z}$ reciprok; egy z_1 és egy $z_2 \neq 0$ szám $\frac{z_1}{z_2}$ **hányadosa** pedig egyszerűen a $z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$ lesz. Gyakoroljuk ezt sokat! Keressük meg pl. $\frac{15+3i}{2+3i}$ valós és képzetes részeit! Eredmény: $\frac{15+3i}{2+3i} = 3 - 3i$.

- Jegyezzünk meg néhány egyszerű összefüggést: $i^2 = -1$, $\frac{1}{i} = -i$, $i \cdot (-i) = 1$, $i^4 = 1$.
- Egyszerűen (de kissé hosszadalmas módon, konkrétan leellenőrizve mindent) beláthatjuk, hogy a komplex számok imént megbeszélte módon értelmezett összeadása, szorzása, kivonása, osztása tudja ugyanazokat a kellemes tulajdonságokat, mint a valós számoknál (ezeket ld. fentebb, a 2.2. szakaszban). A valós számoknál megszokott **rendezésnek** persze **nincs értelme** $\mathbb{C}$ -ben: nem tudjuk egyértelműen „nagyság szerint összehasonlítani” a komplex számokat, azaz a $\mathbb{C}$ sík bármely két pontját²³. **További műveletekre** gondolva: tudni véljük, hogy $\sqrt{-1} = i$, mert tényleg, $i^2 = -1$. De: mivel egyenlő pl. $\sqrt{i}$ (sőt, létezik-e egyáltalán)? Előbb egy kis kitérő.

²³Persze két komplex szám abszolútértékét összehasonlíthatjuk, de ez nem az, amire mint rendezésre gondolnánk; már csak azért sem, mert sok különböző komplex számnak ugyanaz az abszolútértéke.

2.4. Elemi függvények

• Hogy tovább haladhassunk, ismerkedjünk meg néhány **elemi függvénnyel**, amelyek lépten-nyomon előkerülnek a matematikában, a fizikában, vagy mindezek akármilyen alkalmazásaiban. Ezek: a **szögfüggvények**, a **hiperbolikus függvények**, illetve az **exponenciális függvény**.

• A szögfüggvények (sinus/szinusz, jelben: $\sin x$, cosinus/koszinus, jelben: $\cos x$, és a többi: tangens, kotangens, stb.) geometriai jelentései és alaptulajdonságai ismerősek középiskolából:

1. Valós **számok** szögfüggvényeire a **szög radiánban** értendő: pl. $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ (mivel $90^\circ = \pi/2$).
2. A $\sin$ és a $\cos$ függvények minden valós számra értelmezettek, értékészletük a $[-1, 1]$ halmaz, és 2π szerint periodikusak.
3. A $\sin$ páratlan függvény: $\sin(-x) = -\sin x$. Nevezetes értékei: $\sin(0)=0$, $\sin(\pi/2)=1$. Zérushelyei: $\sin(n\pi) = 0$, ahol $n \in \mathbb{Z}$. A $\sin$ függvény monoton nő $x = 0$ és $x = \pi/2$ között.
4. A $\cos$ páros függvény: $\cos(-x) = \cos x$. Nevezetes értékei: $\cos(0)=1$, $\cos(\pi/2)=0$, $\cos(\pi) = -1$. A $\cos$ függvény monoton csökken 0 és π között.
5. A differenciálszámításban kiderül, most higgyük el, hogy a $\sin x$ függvény grafikonjának meredeksége $x=0$ -ban 1 , azaz nagyon kicsi x -ekre: $\sin x \approx x$. A $\cos$ meredeksége $x=0$ -ban 0 .
6. Rendkívül fontosak az **addíciós tételek**: bármilyen x, y számokra

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

és a **pitagoraszai összefüggés**: minden x -re

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1. \quad \text{Szokásos jelölésmóddal: } \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

7. A többi szögfüggvény (tangens= tg , kotangens= ctg) a $\sin$ -ből és a $\cos$ -ból épül fel²⁴:

$$\text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \text{ctg } x = \frac{1}{\text{tg } x} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

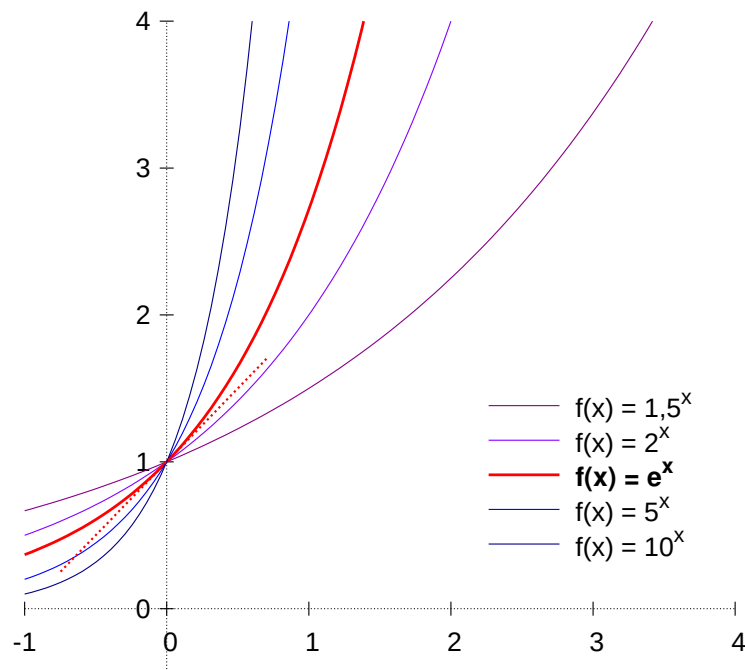
• Az x valós változó **exponenciális** függvényeinek tágabb értelemben az olyan $f(x)$ függvényeket hívjuk, ahol x a kitevőben van²⁵, tehát az $f(x) = a^x$ alakúakat, ahol a valami adott pozitív valós szám. Tehát pl. exponenciális függvények az $f(x) = 2^x$, $f(x) = 3^x$, $f(x) = (0,4)^x$, stb. függvények. A 2. ábra ábrázol néhány ilyen $f(x) = a^x$ alakú függvényt, valamint a legfontosabbat közülük.

• **Ha** $f(x) = a^x$ alakú függvény, **akkor** $f(x + y) = f(x)f(y)$ minden x, y valós számra, hiszen a hatványozásra $a^x a^y = a^{x+y}$ volt igaz. Bár logikusnak tűnik, most ne is próbáljuk bizonyítani, de higgyük el, hogy ez **fordítva is működik**. Ha van egy $f(x)$ függvény, amiről elárulták, hogy minden x, y számra $f(x + y) = f(x)f(y)$ teljesül, akkor $f(x)$ kizárólag $f(x) = a^x$ alakú lehet (az a számot ez a tulajdonság maga még nem rögzíti). Nemsokára meglepő módon előkerül ez.

• Látszik a 2. ábrán (is), hogy minden a -ra az $y=f(x)=a^x$ függvény grafikonja az $x=0$ -nál átmegy az $y=1$ -en: $a^0 = 1$. Ugyanakkor az is látszik, hogy alap, azaz a^x -ben az a monoton változtatásával

²⁴Régebben néha külön definiálták a „secans”, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, és a „cosecans”, $\text{cosec } x = \frac{1}{\sin x}$ függvényeket; mivel éppen a $\cos$ és a $\sin$ reciprokai, nem annyira érdemes velük tölteni az időt.

²⁵Az *exponens* latin szónak (ex+ponere = ki + tenni) szó szerinti tükörfordítása a magyar *kitevő* szó.



2. ábra. Az exponenciális függvények között kitűnik az e^x függvény („az exponenciális” függvény), amelynek nullában 1 a meredeksége.

(növelésével ill. csökkentésével) monoton változik (azaz: nő ill. csökken) az a^x függvény grafikonjának az $x=0$ -ban mért meredeksége is. Van tehát **pontosan egy** darab olyan $f(x) = a^x$ függvény, **aminek $x=0$ -ban pontosan 1 a meredeksége**: az ehhez tartozó hatványalapot „**Euler-féle számnak**”, **e -nek** nevezzük. Ez az e szám a matematika egyik legfontosabb száma; valós, irracionális szám²⁶, értéke $e = 2,7182818285\dots$

• Szűkebb értelemben, vagyis szinte mindig, „**az**” **exponenciális függvénynek** hívjuk, és $\exp(x)$ -szel jelöljük az $f(x) = e^x \equiv \exp(x)$ függvényt, aminek meredeksége $x=0$ -ban 1. A leglényegesebb alaptulajdonsága, amit már a hatványozásnál megismertünk:

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \text{másképp:} \quad \exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y). \quad \text{Továbbá:} \quad \exp(1) = e^1 = e.$$

• A hatványozás (egyik) inverze a logaritmus: ha $a^x = b$, akkor $x = \log_a b$. Az $f(x) = e^x$ exponenciális függvény inverze az e alapú logaritmus: ha $y = e^x$, akkor $x = \log_e y$. Ez olyan sokszor előkerül, hogy külön neve van: **természetes logaritmus**, jelben²⁷: $\ln$. Tehát: ha $y = e^x$, akkor $x = \ln y$. Az $\ln x$ logaritmus értelmezési tartománya nyilván az $x > 0$ pozitív valós számok halmaza. A logaritmus-függvény alapösszefüggése az exponenciális függvényéből következik:

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y) \quad \Rightarrow \quad \ln(ab) = \ln a + \ln b, \quad a > 0, b > 0 \text{ valós számokra.}$$

• Bevezetjük végül az utolsó „csomag” elemi függvényt, a **hiperbolikus függvényeket**, melyek elnevezésben (és sok minden másban is) a trigonometrikus függvényekre hasonlítanak majd. Az $\operatorname{sh} x$ (**sinus hyperbolicus**) és a $\operatorname{ch} x$ (**cosinus hyperbolicus**) az exponenciális függvény „páratlan

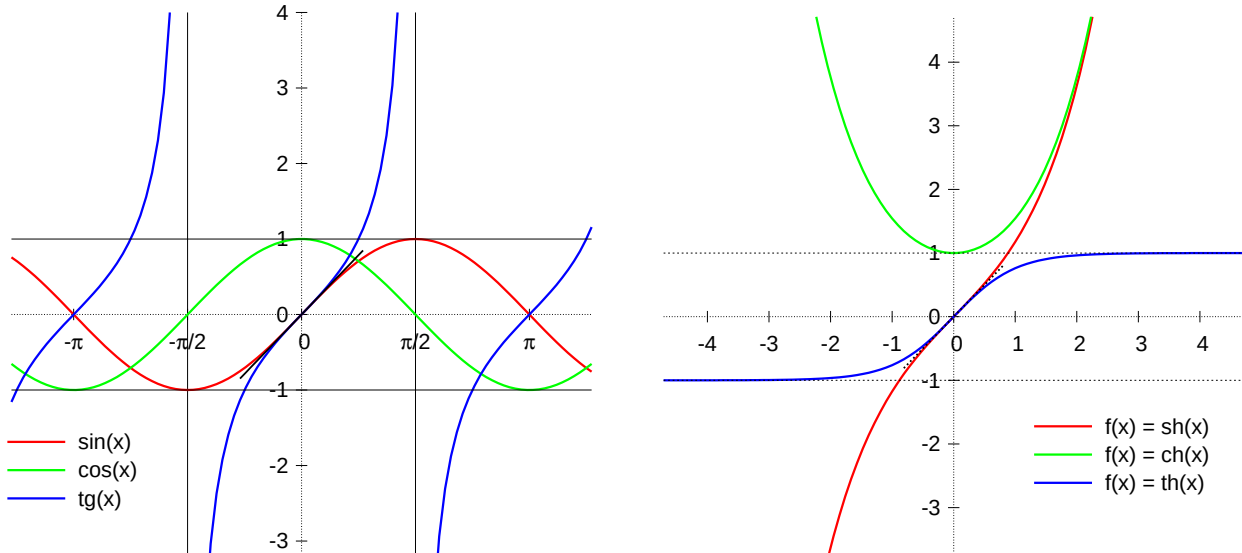
²⁶Sőt, nemhogy nem racionális, nem is algebrai, hanem ún. transzcendens szám is, mint amilyen a π is.

²⁷A *logarithmus naturalis*, azaz természetes logaritmus szavak kezdőbetűiből.

ill. páros részei”, a $\operatorname{th} x$ (**t**angens **h**yperbolicus) pedig ezek hányadosa:

$$\operatorname{sh} x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x \equiv \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

A 3. ábra szemlélteti ezeket a függvényeket; számtalan jó tulajdonságukat mindjárt összeszedjük.



3. ábra. Balra: trigonometrikus függvények, jobbra: hiperbolikus függvények (sh , ch , th) illusztrációi, jellemző értékei, határértékei. Jegyezzük meg őket!

2.5. Komplex exponenciális, Euler-formula

• Szeretnénk az elemi függvényeket ($\sin$, $\cos$, $\exp$, sh , ch , stb.) kiterjeszteni komplex számokra. (Megjegyzés: ha jelöléssel hangsúlyozni akarják, hogy komplex számokon értelmezett függvényekről van szó, néha nagy kezdőbetűket használnak: $\operatorname{Exp}(z)$, $\operatorname{Sin}(z)$, $\operatorname{Cos}(z)$, $\operatorname{Sh}(z)$, $\operatorname{Ch}(z)$, és a természetes logaritmusra $\operatorname{Ln} z$.) Mindjárt látjuk, hogy elég az exponenciális függvénnyel foglalkozni. Szeretnénk tehát egy $z=a+bi$ komplex számra értelmezni $\exp(z)=\exp(a+bi)=e^{a+bi}$ -t. Az $e^{x+y}=e^x e^y$ kellemes tulajdonság, megtartanánk: legyen tehát olyan az exponenciális függvény kiterjesztése, hogy bármilyen **komplex** u , v **számokra is** $\exp(u)\exp(v)=\exp(u+v)$. Ezért

$$z = a+bi, \quad a, b \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad e^z = e^{a+bi} = e^a e^{ib}, \quad \text{azaz} \quad \exp(z) = \exp(a) \exp(ib).$$

• Itt $e^a = \exp(a)$ már értelmes; mit kezdjünk $e^{ib} \equiv \exp(ib)$ -vel? Vizsgáljuk meg ehhez a komplex számok trigonometrikus alakját. Ha a z komplex szám abszolútértéke $|z| = r$, és argumentuma (fázisa) φ , akkor a szögfüggvények geometriai jelentéséből nyilvánvaló, hogy így írhatjuk z -t:

$$z = r \cos \varphi + i \cdot r \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Ilyen **trigonometrikus alakban** az addíciós tételket tudva egyszerű a komplex számok szorzása:

Ha $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, és $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, akkor a szorzatot kifejtve

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 ((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)),$$

vagy egyszerűsítve: $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$

Szavakban: **szorzásnál** az abszolútértékek összeszorzódnak (ezt eddig is tudtuk), **az argumentumok pedig összeadódnak**. Ez geometriailag is szemléletes lehet: pl. i argumentuma $+\pi/2$, ezért egy komplex szám i -vel szoroztja egyszerűen annak „90°-kal való elforgatottját” jelenti.

• A **komplex egységkörön** fekvő számok, amikre $|z|=1$, mind $\cos \varphi + i \sin \varphi$ alakba írhatók. Ezek csak a φ argumentumtól függenek; jelöljük ezt a függést $\tilde{f}(\varphi)$ -vel. Az előző összefüggés alapján:

$$\tilde{f}(\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad \tilde{f}(\varphi_1)\tilde{f}(\varphi_2) = \tilde{f}(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Ez utóbbi tulajdonság éppen az exponenciális függvény definiáló tulajdonsága, amit komplex számok között is meg szeretnénk tartani!

• Eljutottunk az alapvető, híres, és múlhatatlanul fontos **Euler-formula** felírásához:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad \text{Speciális esetek: } e^0 = e^{n \cdot 2\pi i} = 1, \quad e^{i\pi/2} = i, \quad e^{i\pi} = -1.$$

Persze abból, hogy $\tilde{f}(\varphi)$ exponenciális, még nem következik, hogy éppen $\tilde{f}(\varphi) = e^{i\varphi}$, hiszen lehetne még az alapon bármi más is, amit úgy is mondhatnánk, hogy a kitevőben a φ -t i helyett bármi mással is szorozhatnánk. Az indokolja ezt a választást, hogy, mint láttuk, az e^x függvény meredeksége $x=0$ -ban 1, azaz kis x -ekre $e^x \approx 1+x$. Másrészt kis x -ekre $\sin x \approx x$ és $\cos x \approx 1$, amiből kis φ -kre $\tilde{f}(\varphi) \approx 1+i\varphi$. Ez éppen olyan, mintha kis φ -kre $e^{i\varphi}$ -t is $1+i\varphi$ -val helyettesítenénk; megint (kicsit merészen) komplex számok közé is kiterjesztjük az e^x függvénynek a valós számok között érvényes közelítését, de így minden stimmelni fog.

• A komplex egységkörön fekvő számok, melyekre $|z|=1$, tehát tiszta képzetes exponenciálisként írhatók. Akármilyen z komplex szám is felírható az abszolútértékével és a φ fázissal az eddigi trigonometrikus mellett az ún. **exponenciális alakban** is:

$$z \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad z = r e^{i\varphi}, \quad |z| = r. \quad |z| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = e^{i\varphi}. \quad (\text{Itt } r, \varphi \in \mathbb{R}.)$$

• Eljutottunk oda, hogy értelmezzük akármilyen komplex számok exponenciálisát is:

$$z = a+bi, \quad a, b \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad e^z = e^{a+bi} = e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b) = e^a \cos b + i e^a \sin b.$$

• Az iménti Euler-formulát felírhatjuk φ helyett $-\varphi$ -re is:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi,$$

ezekből pedig kifejezhetjük $\cos \varphi$ -t és $\sin \varphi$ -t:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

• Nagyot léphetünk: e^z -t már kiterjesztettük az egész $\mathbb{C}$ -re, így semmi sem gátol, hogy az iménti két képletet (és az sh, ch hasonló definícióit) **minden komplex számra** érvényesnek mondjuk.

• Erősen **támaszkodtunk a sin, cos addíciós tételeire**, amikor megindokoltuk az Euler-formulát, hiszen az addíciós tételek kellettek, hogy megállapíthassuk az előbb $\tilde{f}$ -fel jelölt függvény alaptulajdonságát, $\tilde{f}(\varphi_1 + \varphi_2) = \tilde{f}(\varphi_1)\tilde{f}(\varphi_2)$ -t, és ebből indulva beazonosíthassuk, hogy $\tilde{f}(\varphi) = e^{i\varphi}$. De ha már tudjuk, hogy a komplex exponenciálisra érvényes az $e^u e^v = e^{u+v}$ formula, akkor pusztán ebből, valamint a definíciókból „visszafelé” **levezethetjük az összes ismert addíciós, pitagorasz, stb.**

képletet (és „hiperbolikus párjaikat”). Ezeket itt részben felsorolom. Tehát:

Alaptulajdonság: $e^z e^w = e^{z+w}$, azaz $\exp(z) \exp(w) = \exp(z+w)$, minden $z, w \in \mathbb{C}$ -re.

És a **definíciók** tehát, szintén minden komplex számra:

$$\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{sh}(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch}(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Ezekből már következnek az alábbi tulajdonságok **minden komplex számra**:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Páros(atlan):} \quad & \sin(-z) = -\sin(z), & \operatorname{sh}(-z) &= -\operatorname{sh}(z), \\ & \cos(-z) = \cos(z), & \operatorname{ch}(-z) &= \operatorname{ch}(z), \\ \Rightarrow \text{Kapcsolatok:} \quad & i \sin(z) = \operatorname{sh}(iz), & i \operatorname{sh}(z) &= \sin(iz), \\ & \cos(z) = \operatorname{ch}(iz), & \operatorname{ch}(z) &= \cos(iz), \\ \Rightarrow \text{Pitagoraszai:} \quad & \sin^2 z + \cos^2 z = 1, & \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z &= 1, \\ \Rightarrow \text{Addíciós:} \quad & \sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w, & \operatorname{sh}(z+w) &= \operatorname{sh} z \operatorname{ch} w + \operatorname{ch} z \operatorname{sh} w, \\ & \cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w, & \operatorname{ch}(z+w) &= \operatorname{ch} z \operatorname{ch} w + \operatorname{sh} z \operatorname{sh} w, \\ \Rightarrow \text{Periodikusság:} \quad & \sin z = \sin(z + n \cdot 2\pi), & \operatorname{sh} z &= \operatorname{sh}(z + n \cdot 2\pi i), \\ & \cos z = \cos(z + n \cdot 2\pi), & \operatorname{ch} z &= \operatorname{ch}(z + n \cdot 2\pi i), \\ \Rightarrow \text{Spec.addíciós:} \quad & \sin(2z) = 2 \sin z \cos z & \operatorname{sh}(2z) &= 2 \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z, \\ & \cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z & \operatorname{ch}(2z) &= \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z. \end{aligned}$$

Ellenőrizzük, hogy tényleg, ha a $\sin$, $\cos$ stb. függvényeket így **definiáljuk**, ahogy most, akkor az $e^z e^w = e^{z+w}$ képletből következik minden itt felsorolt dolog! (Írjuk be a $\sin$, $\cos$, sh , ch helyére a megadott definíciókat, majd alakíttassunk!) Figyeljük meg az **előjelek** ízléses „összjátékát”!

• Megjegyzés a **komplex konjugáláshoz**: ugye ha egy z komplex szám a valós és képzetes részével van megadva, mint $z = a + bi$, akkor a konjugáltja $z^* = a - bi$, vagyis „az i előjelét az ellenkezőjére kell változtatni”. Mármint könnyen beláthatjuk, hogy a „konjugálás felcserélhető a műveletekkel”:

$$(u + v)^* = u^* + v^*, \quad (u - v)^* = u^* - v^*, \quad (u \cdot v)^* = u^* \cdot v^*, \quad \left(\frac{u}{v}\right)^* = \frac{u^*}{v^*}.$$

Nagyon fontos, hogy az Euler-formulában is konjugálásnál egyszerűen az i -t $-i$ -re kell cserélni:

$$(e^{i\varphi})^* = e^{-i\varphi}, \quad \text{hiszen} \quad (\cos \varphi + i \sin \varphi)^* = \cos \varphi - i \sin \varphi.$$

Ebből leszűrhetjük, hogy bármilyen z komplex számra is $[\exp(z)]^* = \exp(z^*)$, sőt, a többi elemi függvényre is megállapíthatjuk, hogy mindig „felcserélhetjük a konjugálást mindennel”. Egy bonyolult komplex számos **kifejezés konjugáltját** tehát úgy kapjuk, hogy **minden kijelölt komplex szám konjugáltját** vesszük. Legfontosabb: mindenhol **az i -t $-i$ -re cseréljük**. Tehát anélkül, hogy konkrétan kiszámolnánk a valós és képzetes részeket, megállapíthatjuk például, hogy

$$\text{Példák:} \quad \left(\frac{4+7i}{9-5i}\right)^* = \frac{4-7i}{9+5i}, \quad \left(\frac{\sin(i \cdot z)}{\operatorname{sh}(z^*) + \exp(5+2i)}\right)^* = \frac{\sin(-i \cdot z^*)}{\operatorname{sh}(z) + \exp(5-2i)}, \quad \text{stb.}$$

2.6. Komplex számok egyéb függvényei, tudnivalói

• **Ismerjük meg** a komplex exponenciális, $\text{Exp}(z)$ inverzét, a **komplex logaritmushatványozást**, $\text{Ln } z$ -t. Még egyszer kigondolva, hogy mit csinál a komplex exponenciális egy $a + bi$ komplex számmal, ill. az eredményből hogyan kapjuk vissza a -t és b -t, közelebb kerül az exponenciális inverze is:

$$Z = a + bi \Rightarrow \text{Exp}(a+bi) = e^a e^{ib} \Rightarrow e^a = |\text{Exp}(Z)|, \quad b = \arg(\text{Exp}(Z)),$$

amiből $\text{Ln } z = \ln |z| + i \arg z$, minden z komplex számra.

Ezzel tehát kitaláltuk $\text{Ln } z$ valós ill. képzetes részét: $\text{Ln } z$ valós része a z abszolútértékének valós logaritmus, $\text{Ln } z$ képzetes része pedig z argumentuma (fázisa). Fontos tudni, hogy a fázisra vonatkozó megállapodásunk (amellyel azt a $]-\pi, \pi]$ intervallumba korlátoztuk) miatt $\text{Ln } z$ **nem mindenhol folytonos**: $\arg z$ ugye $+\pi$ -ről $-\pi$ fölé ugrik, amikor z -vel fölülről átlépünk a negatív valós tengelyen. Ez ugye azért kell, hogy a komplex fázis, $\arg z$ egyértelmű lehessen ($n \cdot 2\pi$ -vel „odébbtolt szöget” írva a φ komplex fázis helyébe $e^{i\varphi}$ -ba ugyanahhoz a komplex számhoz jutunk).

• *Nem ugyanazt jelenti* tehát a következő két mondat, hogy adott z komplex számhoz:

- 1) keressünk olyan u számo(ka)t, ami(k)re $e^u = z$. Végtelen sok van, $n \cdot 2\pi i$ -vel különböznek.
- 2) keressük meg $\text{Ln } z$ -t. Ez egyértelmű, az előzőek közül az, amire a fázis $]-\pi, \pi]$ -be esik. Példák:

$$\begin{array}{llll} \text{Ln } 1 = ? & \text{Válasz: } \text{Ln } 1 = 0. & e^x = 1, \quad x = ? & \text{Válasz: } x = n \cdot 2\pi i. \\ \text{Ln } i = ? & \text{Válasz: } \text{Ln } i = \frac{i\pi}{2}. & e^x = i, \quad x = ? & \text{Válasz: } x = \frac{i\pi}{2} + n \cdot 2\pi i. \\ \text{Ln } (-1) = ? & \text{Válasz: } \text{Ln } (-i) = i\pi. & e^x = -1, \quad x = ? & \text{Válasz: } x = i\pi + n \cdot 2\pi i. \\ \text{Ln } (1-i) = ? & \text{Válasz: } \frac{\ln 2}{2} - i\frac{\pi}{4}. & e^x = 1-i, \quad x = ? & \text{Válasz: } \frac{\ln 2}{2} - i\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi i. \end{array}$$

Gondoljuk ezeket végig (különösképpen az utolsót) gyakorlásképpen!

• A **valós hatványozás**nál is voltak elvarratlan szálak: az irracionális kitevőjű hatványozást nem igazán definiáltuk. Ismeretes a következő logaritmushatványozás, amivel más hatványalapra lehet áttérni; megfogalmazzuk az $\exp$ függvényre, azaz az e -alapú hatványra is, mert az fog kelleni:

$$a = c^{\log_c a} \Rightarrow a^b = c^{b \cdot \log_c a}, \quad \text{speciálisan } a^b = e^{b \cdot \ln a} = \exp(b \cdot \ln a).$$

• Talán elhíhető az eddigiekből, hogy a matematika precízebb felépítésében kiderül, hogy az $\exp(x)$ függvényt anélkül is definiálhatjuk, hogy a hatványozásra, azaz „az eleve furcsa e számnak az önmagával vett szorozgatásaira” hivatkoznánk. Elég tudni, hogy $f(x+y) = f(x)f(y)$ mindig igaz, és hogy nullában 1 a meredekség: pontosan egy ilyen $f(x)$ függvény van, ezt *nevezzük el* $\exp(x)$ függvénynek, az inverzét $\ln x$ -nek. Ezekkel **definiálhatjuk** az akármilyen valós kitevőjű hatványozást:

$$\text{Definíció: } a^b \equiv \exp(b \cdot \ln a).$$

Ez (az $\exp(x)$ és az $\ln$ alaptulajdonságai miatt) tudja a hatványozás megszokott azonosságait, és speciális esetekben tényleg visszaadja a megszokott hatványozást. Pl. 3^2 így is tényleg 9 lesz: a definíció és a tulajdonság szerint $3^2 = \exp(2 \cdot \ln 3) = \exp(\ln 3) \cdot \exp(\ln 3) = 3 \cdot 3 = 9$, minden rendben van.

- A **komplex hatványozást**, sőt, akkor már a gyökvonást is az előzőn felbátorodva definiáljuk:

Definíció: $z^u \equiv \text{Exp}(u \cdot \text{Ln } z)$, minden z, u komplex számra. Továbbá: $\sqrt[n]{z} \equiv z^{1/n}$.

Példák:

$$\begin{aligned} \text{Ln}(-1) = i\pi &\Rightarrow \sqrt{-1} = (-1)^{1/2} = e^{\frac{1}{2} \cdot \text{Ln}(-1)} = e^{i\pi/2} = i. \\ &\Rightarrow (-1)^{1/3} = e^{\frac{1}{3} \cdot \text{Ln}(-1)} = e^{i\pi/3} = \cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3) = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{\sqrt{2}}. \\ \text{Ln}(i) = \frac{i\pi}{2} &\Rightarrow \sqrt{i} = i^{1/2} = e^{\frac{1}{2} \cdot \text{Ln}(i)} = e^{i\pi/4} = \cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}. \\ &\Rightarrow i^i = e^{i \cdot \text{Ln}(i)} = e^{-\pi/2}. \end{aligned}$$

Az utolsót, hogy $i^i = e^{-\pi/2}$, már ugyan ki nem találtuk volna.

- Az első sorhoz megjegyzés: ebből „indultunk”, örülünk, hogy tényleg kijött, hogy $\sqrt{-1} = i$. A $-i$ -t (aminek négyzete szintén -1) ott „vesztettük el”, hogy a fázis lehetséges értékeit egyértelműen lerögzítettük. Komplex gyökvonásnál sem ugyanazt jelenti tehát a következő két mondat:

- 1) keressünk olyan számokat, amiknek négyzete -1 (erre a válasz: i és $-i$, két lehetőség van), vagy
- 2) keressük $\sqrt{-1}$ -et. (Erre a válasz: i).

- Fentebb $(-1)^{1/3}$ -ra kijött egy kellemes komplex szám, de a valós számok között mondanánk megszokásból, hogy $\sqrt[3]{-1} = -1$. Természetesen $(-1)^3 = -1$, ez rendben van. De: ha megállapodunk a fázisról (ahogy tettük), akkor $-1^{1/3}$ a fenti bonyolultabb komplex szám kell, hogy legyen.

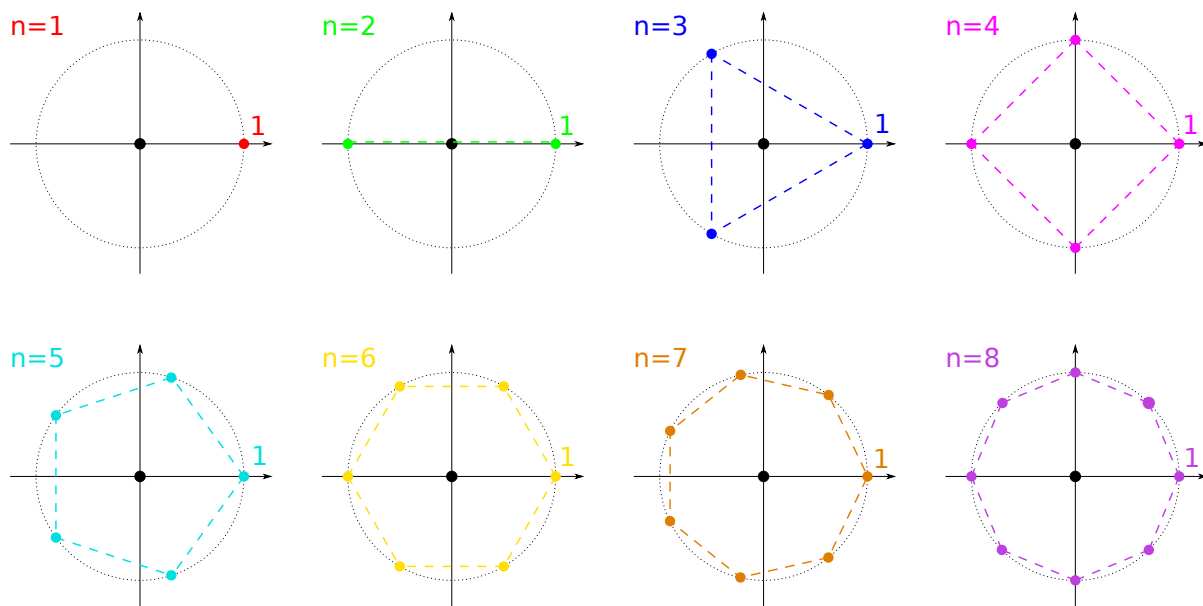
- Adott n pozitív egészre és $z \neq 0$ komplex számra pontosan n darab olyan különböző komplex szám van, aminek n -edik hatványa z . Ezek közül tehát egyet „kiválaszt” $\sqrt[n]{z}$ -ként a fázisra ($\arg z$ -re) vonatkozó egyértelmű előírás. Speciálisan: két olyan szám van, aminek négyzete z (ezek egymás -1 -szeresei), ezek közül az egyik „a” négyzetgyök. Pozitív valós számok négyzetgyöke, sőt, akárhanyadik gyöke pozitív valós²⁸.

- Az n -edik gyökvonás említett n -szeres „többértelműségét” azzal őrizzük gondolatban, hogy bevezetjük az **n -edik komplex egységgyökök** fogalmát. Adott n -re ez n darab olyan különböző komplex szám, aminek n -edik hatványa éppen 1. Nem egységes a jelölésük: jelölhetjük őket pl. $r_k^{(n)}$ -val, a k index fut 1-től n -ig. Az r betű a *radikál* vagy angol *root* (gyök) szóra utal.

Az $n=1$ -re csak az 1 jön szóba: $r_1^{(1)}=1$. Az $n=2$ esetben $r_1^{(2)}=1$, $r_2^{(2)}=-1$. $n=3$ -ra három darab van, a -1 , a $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ és a $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. $n=4$ -re négy darab van: $1, i, -1, -i$. Ezek kicsit varázslásnak tűnhetnek, de ha felidézzük a komplex számok szorzásának geometriai jelentését, láthatjuk: az n -edik egységgyökök a **komplex egységkörön** helyezkednek el, **szabályos n -szöget** alkotva, melynek egyik csúcsa az 1-ben van, ld. a 4. ábrát. A **trigonometrikus** vagy **exponenciális alak**kal könnyen felírhatjuk az n -edik egységgyököket: $r_k^{(n)} = \exp(i \frac{2\pi}{n} k)$, gondoljuk csak ki²⁹.

²⁸A valós négyzetgyökvonásnál a hasonló többértelműségen könnyebben átsiklottunk annak idején: ott elég volt azt mondani, hogy ugyan 5-nek és -5 -nek is 25 a négyzete, de $\sqrt{25} = 5$ és kész.

²⁹Megjegyzés: ami az egységgyökök valós és képzetes részeit illeti, $n=1, 2, 4, 8$, stb.-re egyszerű, $n=3$ -ra is, $n=5$ -re is kigondolható. Ugyanakkor bebizonyítható, hogy pl. $n=7$ -re nem (és nagyon sok továbbira sem) lehet az egységgyökök valós és képzetes részeit véges sok gyökvonás, művelet kombinációjával kifejezni. (Ez enyhén összefügg azzal, hogy körzővel-vonalzóval kevésféle szabályos sokszöget lehet szerkeszteni; szabályos hétszöget pl. nem.)



4. ábra. Az n -edik komplex egységgyökök illusztrációja a komplex számsíkon, $n=1$ -től kezdve $n=8$ -ig. A geometriai jelentést kell tudni, és az ebből következő trigonometrikus alakot.

• Még pár megjegyzés komplex számokhoz:

1. Láttuk, hogy minden művelet kb. értelmes. Két lényeges dolog maradt (és marad is): nullának nincs reciproka, és nullának nincs logaritmusa (és más hatványai sem). Ezekkel nincs mit tenni.
2. Egyenletek megoldása is működik a komplex számok között. Valós másodfokú egyenleteknek vagy két (esetleg egybeeső) valós gyöke van, vagy két komplex, amik egymás konjugáltjai (amikor a diszkrimináns negatív, de komplexben „gond nélkül” tudunk belőle gyököt vonni).

Akármilyen komplex együtthatós algebrai egyenletnek (pl. a $z=?$, ahol $z^4 + iz^3 - (1+i)z^2 + i\sqrt{3}z - 3 = 0$ egyenletnek) *van megoldása*: ezt mondja ki az ún. **algebra alaptétele**³⁰. És akkor már egy n -edfokúnak biztos lesz n darab (amik között ugye lehetnek „egybeesések”).

3. Kiderül, hogy $\text{Ln}(z^*) = (\text{Ln } z)^*$. Ez, gondoljuk végig, azon múlik, hogy a fázist éppen „jól vágjuk fel”, azaz π -ről $-\pi$ -re, és nem máshol ugrottunk³¹!). Emiatt a **komplex konjugálás** a logaritmuson (és így a hatványozáson is) „átemelhető”. Pl. kiszámolás nélkül tudhatjuk, hogy $((3+7i)^{6+5i})^* = (3-7i)^{6-5i}$.
4. Az $\arg z$ megszorítása $]-\pi, \pi]$ -re azt is jelenti, hogy a logaritmus alapösszefüggésével komplexben vigyázni kell: általánosságban $\text{Ln}(ab) \neq \text{Ln } a + \text{Ln } b$ (akkor nem egyenlő, ha az a és b összeszorozásával „átbukunk” a negatív valós féltengelyen, és emiatt az argumentum „visszaugrik” 2π -t). Emiatt a hatványozás szokásos azonosságai sem mindig igazak, pl. $(ab)^c \neq a^c b^c$. Ez kellemetlen, de nincs mit tenni; néha vigyázni kell rá. Egész m kitevőre persze semmi probléma nincsen: $e^{m \cdot 2\pi i} = 1$. Ugyancsak nincs probléma pozitív valós számok valós kitevőjű hatványával.

• A komplex számok tanulmányozását félbehagyjuk. **Komplex függvénytan** címszó alatt majd (felvértezve az integrálás és differenciálás tudományával) visszatérünk hozzájuk.

³⁰A névvel ellentétben ez a tétel matematikai *analízisbeli* tétel; nem is lehet bizonyítani csupán a műveletek vizsgálatával, csak (későbbi tanulmányok során előkerülő) bonyolultabb módszerekkel.

³¹Kivétel: ha netalántán z éppen a negatív valós tengelyen van, akkor $\text{Ln}(z^*) \neq (\text{Ln } z)^*$, hiszen ekkor $z^* = z$, de $\text{Ln } z$ -ben ilyenkor $+i\pi$ szerepel, $(\text{Ln } z)^*$ pedig így $-i\pi$ -t tartalmaz.

3. Az euklideszi tér vektorai, a vektortér fogalma

3.1. Vektorok a fizikában, alapvető vektorműveletek

- **Skálármennyiség**³² az olyan fizikai mennyiség, amelynek megadásához elég egy számadat. Pl. egy test hőmérséklete, tömege, elektromos töltése, energiája.
- **Vektormennyiség:** megadásához „nagysága mellett irányát” is meg kell adni. Példák:
 1. Kijelölve egy **origót** (azaz: „*kezdőpontot*”) a térben, egy pont **helye**, másképp: origóból indulva az adott pontba érkezéshez szükséges **elmozdulás**. Ez a vektorfogalom „prototípusa”³³.
 2. Egy pontszerű test **sebessége** vagy **gyorsulása**, egy pontszerű (kicsi) testre ható **erő**.
 3. **Adott pontban** mért **elektromos térerősség**.
- Fizikában beszélünk **poláris** vektorról és **axiális** vektorról. A szavak jelentése kb.: *poláris* = (csúcs)„pont”-ban hat, *axiális* = „tengely”-en hat. A fenti példában felsoroltak mind poláris vektorok. **Axiális** vektorok pl. egy geometriai térbeli **elfordulás**, a mechanikában a **szögsebesség** vagy a **forgatónyomaték**. Az axiális vektorok mindig „forgás”-szerűséggel kapcsolatosak³⁴. Ezekről is meg kell ugyebár mondani nemcsak a nagyságukat, hanem azt is, hogy „merre történnek”: a *tengelyük* irányát fogjuk az ilyen vektorok irányának hívni. Ide visszatérünk; egyelőre **jobb, ha a poláris** vektorokra, jelesül az **elmozdulásra gondolunk**, amikor a vektorfogalmat elképzeljük.
- Egyelőre **vektorokat** mindig **felülnyilazott** karakterrel jelölünk, így: $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, stb.
- Ismerős lehet **vektorok összege**: ha elmozdulok észak felé 3 métert, majd kelet felé 4 métert, akkor „összességében” a kijelölt (a mostani példában éppen téglalap–)„átló” mentén mozdtam el. Nyilván egy adott pontból való akármilyen két elmozdulást (elmozdulásvektort) „összeadhatok” így: a vektorösszeadás ilyen értelmezése **paralelogramma-szabály** néven fut. Azaz: az egyik vektor és a másik vektor által kijelölt paralelogramma átlója lesz a vektorok összege.
- Vektorok **számmal szorzása** is logikusnak tűnik: ha akármilyen (pl. É-ÉNy) irányba elmozdulok 120 métert, akkor „ötszörös elmozdulás” ugyanilyen irányú, de 600 méteres elmozdulást jelent. Egy vektor **ellentettjén** a mínusz eggyel szorzottját (azaz: ellenkező irányú ugyanolyan nagyságú vektort) értjük. Értelmezhetjük két vektor **különbségét** is, mint az egyiknek és a másik ellentettjének összegét. A számokhoz hasonlóan felcserélt sorrendű kivonás ellentett vektort ad:

$$\vec{u} - \vec{v} \equiv \vec{u} + (-\vec{v}), \quad \text{és} \quad \vec{v} - \vec{u} = -(\vec{u} - \vec{v}).$$

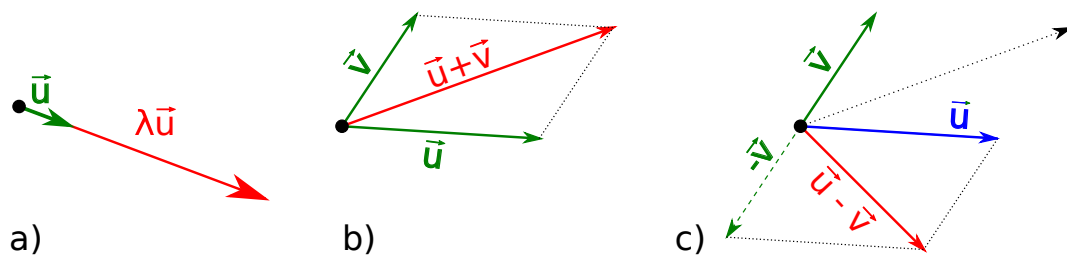
Az 5. ábra szemléltet néhány vektorműveletet.

- Van tehát két műveletünk, vektorok összeadása vektorrá, és vektornak számmal szorzása (eredmény itt is egy vektor). Geometriai szemléletre hivatkozva kiderül, hogy e műveleteknek vannak kellemes tulajdonságaik. Az elnevezések már előkerültek; a jelentésüket itt is konkrétan megadjuk:
 1. A vektorok összeadása **kommutatív** művelet: ha $\vec{u}$ és $\vec{v}$ két vektor, akkor $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$. Ezt a paralelogramma „szimmetriája” sugallja.

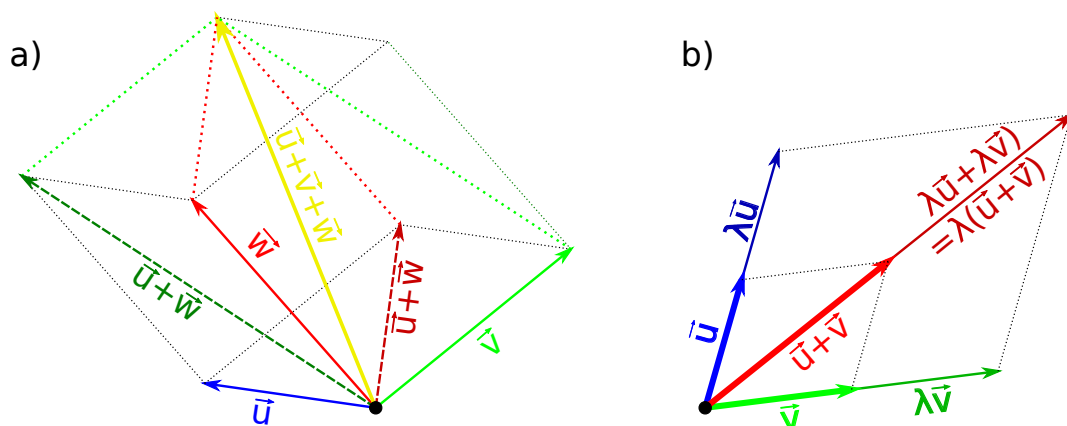
³²A „skalár” szó a latin *scala*=„lépcső” szóból származik,

³³A latin *vector* igenév a *vehere* (=„húzni”, „szállítani”) igéből képződik. (Angol rokon szó a *vehicle*: jármű.)

³⁴Majd villamosságtanban kiderül: a mágneses térerősség is axiális vektor.



5. ábra. a.) vektorok számmal szorzásának, b.) összeadásának, c.) kivonásának illusztrációja.



6. ábra. a.) A vektorösszeadás asszociatív, b.) vektorok számmal szorzása disztributív.

- Vektorok összeadása **asszociatív** művelet: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ bármilyen három $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vektorra. Ezt a térbeli *paralelepipedon* (=„csapott téglatest”, mind a hat lapja paralelogramma) alakzat geometriája indokolja: egyik csúcspontjából induló három élt képzelve a három vektornak látható, hogy akármelyik zárójelzésű összeg a szemközti csúcsba mutató vektor lesz.
- A vektorok **számmal szorzása disztributív a vektorösszeadásra** nézve: ha λ valós szám, $\vec{u}$ és $\vec{v}$ két vektor, akkor $\lambda\vec{u} + \lambda\vec{v} = \lambda(\vec{u} + \vec{v})$. A „hasonlóság”ra mint geometriai transzformációra gondolhatunk itt: hasonló háromszögek minden oldalpár-aránya ugyanannyi (most λ).
- Eddig nem beszéltünk róla, de elfogadhatjuk, hogy van egy olyan vektor, a **nullavektor**, jelben $\vec{0}$, amit bármilyen vektorhoz hozzáadva azt nem változtatja: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$. (Szemléletesen: ha odébbmész, majd „aztán odébbmész semennyit”, ugyanott maradsz.)
- Sőt: bármilyen vektorhoz az ellentettjét hozzáadva éppen a nullavektort kapjuk: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

További nyilvánvaló tulajdonságok is vannak, ld. alább. A 6. ábra szemlélteti az asszociativitáshoz és disztributivitáshoz mondott „magyarázatokat”.

- Sokféle fizikai mennyiséget jól lehet vektorként kezelni: például egy pontszerű testre ható erőket. Rég megszoktuk, de nagyon nem magától értetődő állítás: ha egy ilyenre ható erők vektorösszege nulla, a test egyensúlyban marad. Továbbá a mozgást az *eredő erő*, az összes ható erő *vektorösszege* határozza meg. Ezek a fizikai megfigyelések is a vektorok (fentebb tárgyalt) összegét és számszorosát, mint „hasznos”, „értelmes” műveleteket sugallják.

- A **vektortér** egy **matematikai fogalom**. Egy *halmazt* akkor hívunk vektortérnek, ha értelmes az elemeinek (amiket akkor már hívhatunk „vektoroknak” is) az összeadása és számmal szorzása, a már látott (és alább újra összefoglalt) kellemes tulajdonságokkal. A fizikai vektoroknak és a

(háromdimenziós) matematikai vektortér fogalmának kapcsolata olyan, mint a fizikai terünk (geometriai) egyenesének és a valós számok halmazának a kapcsolata. A valós számok halmaza ($\mathbb{R}$) egy *matematikai* fogalom, és az, hogy a fizikai tér egyenesein mért távolságokat valós számoknak feleltethetjük meg, *nem magától értetődő, fontos állítás* fizikai terünk szerkezetéről.

• **Mi a helyzet** vektorok párhuzamos **eltolásával**? Ez összetettebb kérdés. A helyvektorok itt „többet tudnak”, mint más fizikai vektormennyiségek. Pontszerű testre ható erőknél pl. nincs értelme „máshová tenni az origót”: két *különböző helyen lévő* pontszerű testre ható erőknél mint vektoroknak alapvetően semmi közük egymáshoz³⁵. A fizikai terünket viszont ugye (legalábbis kis léptékben) elképzelhetjük úgy, hogy kijelölünk egy origót, és a pontokat az onnan induló **helyvektorok** „végpontjaival” azonosítjuk. Az origót azonban itt máshová is tehetnénk, vagyis minden pontból induló elmozdulásokat vektoroknak tekinthetnénk.

• Elmozdulások összege viszont akkor értelmes, ha egy adott pontból (mint oribógól) való elmozdulásvektorokról beszélünk. A „nulla kilométerkötől észak felé 1m” és a „nulla kilométerkötől keletre 1m” elmozdulások összege értelmes (és ez a „nulla kilométerkötől ÉK-re $\sqrt{2}$ méter” elmozdulás). Azonban érezzük, hogy nem igazán értelmes „**különböző pontokból** való elmozdulások” (mondjuk: a „nulla kilométerkötől keletre 1 m elmozdulás” és „a Tejútrendszer közepétől a Magellán-felhő felé 1 fényév elmozdulás”) összege. Egyelőre tehát jegyezzük meg, hogy adott origójú helyvektorokat adhatunk össze, **ne foglalkozzunk** vektorok „párhuzamos eltolásával” még.

• A fizikai térben vett elmozdulásokra (innen–oda) persze szemléletes dolog a vektorok „végpontját odébb tolva” rajzolni az összegüket. Fentebb azonban a vektorok összegének szemléletes bevezetésénél (és az ábrák rajzolásánál is) elkerültem azt az esetleg ismerősen csengő szöveget, miszerint két vektor összegének képzéséhez „az egyik vektort a másiknak a végpontjába toljuk”. Lehet ezt a szabályt szerkesztéshez, elképzeléshez használni, de tisztázzuk, hogy bármilyen vektorokra gondolva ez csak egy (a paralelogramma geometriáját kihasználó) *szemléltető szabály*.

3.2. A vektortér (lineáris tér) fogalma

• Rögzítsük a valós számok $\mathbb{R}$ halmazát mint „számhalmazt”. Azt mondjuk, hogy valamilyen $\mathbb{V}$ halmaz **vektortér** $\mathbb{R}$ **fölött** (és $\mathbb{V}$ elemeit ilyen értelemben „vektoroknak” hívhatjuk), ha

- 1) $\mathbb{V}$ bármely két $\vec{u}, \vec{v}$ elemére értelmes és $\mathbb{V}$ -ben van azok $(\vec{u} + \vec{v})$ -vel jelölt **összege**,
- 2) minden $\lambda \in \mathbb{R}$ valós számra és $\vec{u} \in \mathbb{V}$ halmazelemre létezik $\mathbb{V}$ -ben egy $\lambda \cdot \vec{u}$ -vel jelölt „**számszoros**”,
- 3) és ezek a műveletek az alábbi műveleti **tulajdonságokkal** rendelkeznek:

→ **A1**: A vektorösszeadás **asszociatív**: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ bármely $\mathbb{V}$ -beli vektorokra.

→ **A2**: A vektorösszeadás **kommutatív**: bármely két $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$ vektorra $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

→ **A3**: Van egy **nullavektor**, $\vec{0} \in \mathbb{V}$, amit bármilyen $\vec{u} \in \mathbb{V}$ vektorhoz hozzáadva $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.

→ **A4**: Minden $\vec{u} \in \mathbb{V}$ vektornak van **ellentettje**, $-\vec{u}$, amelyre $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

→ **M**: Az **eggyel szorzás** helyén hagy minden $\vec{u} \in \mathbb{V}$ vektort: $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

→ **AM**: A számmal szorzás **disztributív** a **vektorok** összeadására: $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$.

→ **MM'**: A **számmal szorzás asszociatív**: $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$ minden $\vec{u}$ vektorra és α, β számokra.

³⁵ A mechanikában mondják, hogy „az erőket eltolhatjuk a hatásvonaluk mentén”. Ez **nem** a matematikai vektorterekre vonatkozó eredendően értelmes (pláne nem eredendően igaz) állítás, **hanem** azon **fizikai törvény** megállapítása, hogy két **különböző** fizikai helyzetben (amikor egy kiterjedt merev testet kétféleképpen „rángatunk”, de a két pont „a cérnával egy vonalban van”) ugyanazt a mozgást (vagy éppen egyensúlyt) fogjuk tapasztalni.

→ **MA'**: A számmal szorzás **disztributív** a **számok** összeadására: $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$.

- A nevezéktan hasonló, mint a valós számok műveleti tulajdonságainál volt. Először a vektor-összeadás saját tulajdonságai (A1–A4), majd a vektorok számmal szorzásának saját tulajdonsága (M), ezután e kettő kapcsolata (AM) kerül elő. Ezután jön a vektorok számmal szorzásának kapcsolata a számok szorzásával³⁶ (MM') ill. a számok összeadásával (MA').

- Két vektort, $\vec{u}$ -t és $\vec{v}$ -t (a fizikai terünkben is, és általános vektortérben is) **párhuzamosnak** mondhatunk, ha egyik a másiknak számszorosa, azaz van olyan λ szám, amire $\vec{u} = \lambda\vec{v}$. A nulla-vektor ilyen értelemben „minden vektorral párhuzamos”, hiszen bármilyen vektort nullával szorozva őt kapjuk. Ez furcsának tűnik, de éppen így lesz jó: emiatt a megállapodás miatt majd nem kell mindig külön kivizsgálni, hogy mi a helyzet a nullavektorral párhuzamosság esetén.

- Ha kijelölünk egy origót, akkor fizikai terünk pontjait **helyvektorok „végpontjaival”** azonosíthatjuk (azaz: „ahova az origóból indulva mutatnak”). Visszafelé: a vektortér fogalma a fizikai térbeli helyvektorok *absztrakciója*: azon tulajdonságok teljesülését követeltük meg a matematikai definícióban, amelyeket „kimagyaráztunk” a helyvektorok (irányított szakaszok) kapcsán. Az, hogy „a helyvektorok vektorteret alkotnak”, **nem matematikai**, hanem **fizikai állítás**, miszerint (fizikai terünk pontjait adott kijelölt „origóból induló helyvektorok végpontjaival” azonosítva) fizikai terünk leírásához a „(háromdimenziós, ld. később) vektortér” fogalmát használhatjuk.

- A következő nyilvánvalóságok egyszerűen következnek a vektortér műveleti tulajdonságaiból, de fizikai vektorokra gondolva is egyszerűek, szemléletesek. Egy adott $\mathbb{V}$ vektortérben:

→ Értelmes vektorok **kivonása**, úgy mint láttuk: $(\vec{u} - \vec{v}) \equiv \vec{u} + (-\vec{v})$, és $\vec{u} - \vec{v} = -(\vec{v} - \vec{u})$.

→ $\vec{0}$ **nullavektor csak egy van**. (Ha kettő lenne, melyik lenne ezek összege?)

→ Nulla számmal szorozva a nullavektort kapjuk: $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$.

→ Ha $\lambda \cdot \vec{u} = 0$, akkor $\lambda = 0$, vagy $\vec{u} = \vec{0}$. (Ezt olvassuk ki hangosan!)

→ Egy vektor **ellentettje egyértelmű**, és $-\vec{u} = (-1) \cdot \vec{u}$.

- Későbbi tanulmányainkban számtalan olyan matematikai halmazzal találkozunk, amelyeknek elemeire értelmes a fenti tulajdonságokat teljesítő összeadás és számmal szorzás. Ezeket a halmazokat emiatt hívhatjuk vektortereknek. Példa: a valós számokon értelmezett valós értékű függvények halmaza. Ezek összegét és számszorosát értelmezzük szokásosan: „pontonként összeadással és szorzással” (pl. az $f(x) = x^2$ és a $g(x) = \sin x$ függvények összege legyen az $x^2 + \sin x$ függvény, ill. az $f(x) = x^2$ függvény α számszorosa legyen az $\alpha \cdot x^2$ függvény, stb.). Így a *függvények* halmaza *vektortér* lesz, noha a függvényeket nemigen lehet „irányított szakaszok” módjára elképzelni...

- Másik **példa**: a valós számokból álló **szám-ötösök** halmaza (ennek jele: $\mathbb{R}^5$, elemeit oszlopként írjuk), amikre értelmezzük az összeadást és számmal szorzást „komponensenként”³⁷, vagyis így:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a+A \\ b+B \\ c+C \\ d+D \\ e+E \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \\ \lambda d \\ \lambda e \end{pmatrix}, \quad \text{és a nullavektor nyilván: } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

³⁶ A szorzásjel (ill. egymás mellé írás) hol a számok egymással szorzását, hol a vektorok számmal szorzását jelenti!

³⁷ A *komponens* latin szó szerinti jelentése „összetevő”; úgy mint valamely összetettnek képzeltek objektum része.

A szám-ötösök (most az $\equiv$ egyenlőségjellel *értelmezett*) műveletei rendelkeznek a megkövetelt tulajdonságokkal (ha akarjuk, ellenőrizzük!), tehát a valós szám-ötösök halmazát ($\mathbb{R}^5$ -öt) ezekkel a műveletekkel ellátva **tekinthetjük** matematikai **vektortérnek**.

• Rávágnánk, hogy a szám-ötösök előbb értelmezett halmaza mint vektortér „ötdimenziós”, és ha már itt tartunk, az egyenes *egydimenziós*, a sík *kétdimenziós*, a fizikai terünk pedig *háromdimenziós*... Eddig dimenzióról nem volt szó; alább ennek pontos(abb) értelmet adunk. Előtte be kell vezetni néhány **alapvető fogalmat**. Ezt most úgy csináljuk, hogy **előbb szemléletesen**, a fizikai terünk helyvektoraira és geometriájára gondolva beszéljük meg a fogalmakat, **utána akármilyen $\mathbb{V}$ vektortérre** is. Ez az akármilyen vektortér már lehet nagyon „nem olyan” is, mint a fizikai terünk: esetleg épp csak azt tudjuk róla, hogy van benne (a definíció szerinti) összeadás és számmal szorzás. Mégis jó, ha mindig magunk elé képzeljük fizikai terünket szemléltetésnek.

3.3. Alterek, lineáris kombinációk, bázisok, dimenzió

• A **vektortér** másik neve: „**lineáris tér**”. A *lineáris* szó jelentése: „egyenes”, „egyenes-szerű”. A vektoroknak egyenes szakaszokként való elképzelése „hívta be” ezt a szót ide. Tulajdonképpen a *lineáris művelet* elnevezés lesz a lényeg: magukat a vektortér-műveleteket (összeadás és számmal szorzás) is ezzel a „megbélyegzéssel” látjuk el, továbbá minden műveletet és fogalmat így hívunk majd, ami (később tisztázandó értelemben) „illeszkedik” a vektorműveletek tulajdonságaihoz.

• Euklideszi terünkben fontosak az origón átmenő **egyenese**k. A térre mint vektortérre (a pontokra mint helyvektorok végpontjaira) gondolva ezen egyeneseknek a következő tulajdonságuk van: egy olyan vektort, ami ebben az egyenesben van, számmal szorozva, illetve két, az egyenesen fekvő vektort összeadva eredményül csak olyan vektort kaphatunk, ami szintén rajta van az egyenesen.

• Ilyesmi tulajdonságú részhalmazok az origón átmenő **síkok** is mind: egy ilyen síkot kijelölve bármely két ebben fekvő vektor összege, ill. bármely ebben lévő vektor akármilyen számszorosa is ebben a síkban lesz. Matematikailag megfogalmazva: egy (az origón átmenő) egyenesből, illetve egy (az origón átmenő) síkból *nem vezetnek ki* a terünk vektor-műveletei (a „lineáris műveletek”).

• Ez a tulajdonság megjegyzésre érdemes: akármilyen vektortérre is megfogalmazzuk. Egy $\mathbb{V}$ vektortér $\mathbb{M}$ részhalmazát **lineáris altér**-nek (vagy, ha nem érthető földre, egyszerűen csak altérnek) hívjuk, ha a vektorműveletek (összeadás és szorzás) nem visznek ki belőle. „Jelölősebben”: $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{V}$ lineáris altér, ha minden $\lambda \in \mathbb{R}$ számra és minden $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{M}$ vektorokra (amik tehát a kérdéses $\mathbb{M}$ részhalmazban vannak) $\lambda \cdot \vec{u}$ ill. $\vec{u} + \vec{v}$ is az $\mathbb{M}$ részhalmazban vannak.

• Minden $\mathbb{V}$ vektortérben a nullavektort, $\vec{0}$ -t tartalmazó egyelemű halmaz, $\{\vec{0}\}$ lineáris altér. (Ellenőrizzük le! $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$, és $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$: tényleg a $\{\vec{0}\}$ halmazban maradtunk!) Másik példa: maga az egész $\mathbb{V}$ halmaz is lineáris altér, mert nem vezetnek ki belőle a műveletek (jó vicc).

• Emlék: minden halmaz részhalmaza saját magának, és *valódi részhalmaz* az, ami tényleg szűkebb. Vektortereknél **valódi lineáris altér**-ről beszélünk, ha az nem a $\{\vec{0}\}$ halmaz, és nem is az egész $\mathbb{V}$. A fenti példák nyelvén, amik a lineáris altér fogalmát sugallták: origóval ellátott fizikai terünk valódi lineáris alterei az origón átmenő egyenesek és síkok. (Az összes lineáris altér között még ott vannak: az egész fizikai terünk, és a csak a nullavektort (az origót) tartalmazó halmaz.)

• Az egész tér és egy (origón átmenő) sík metszete nyilván a sík. Két ilyen sík metszete vagy a sík

(ha egybeestek), vagy (a közös, origón átmenő) egyenes. Tovább „szűkítve”: egy (origón átmenő) sík és egyenes ill. két ilyen egyenes metszete vagy egy egyenes (speciális esetben), vagy csak az origó (azaz a $\{\vec{0}\}$ halmaz). Összefoglalva: *lineáris alterek metszete is lineáris altér*. Ez általában, akármilyen $\mathbb{V}$ vektortérben is igaz: ha $\mathbb{M}$ és $\mathbb{N}$ alterek, akkor **metszetük**, $\mathbb{M} \cap \mathbb{N}$ **lineáris altér**. Ezt be is bizonyíthatjuk: ha bármely $\mathbb{M}$ -beli ill. $\mathbb{N}$ -bel vektorok összegei ill. számszorosai is $\mathbb{M}$ -ben ill. $\mathbb{N}$ -ben vannak, akkor olyan vektoroknak, amelyek $\mathbb{M} \cap \mathbb{N}$ -ben vannak (azaz $\mathbb{M}$ -ben és $\mathbb{N}$ -ben is), nyilván az összege és számszorosa is benne lesz $\mathbb{M}$ -ben és $\mathbb{N}$ -ben is, azaz $\mathbb{M} \cap \mathbb{N}$ -ben.

- Euklideszi térben két (nem egy egyenesbe eső, nemnulla) vektor kijelöl (=„kifeszít”) egy síkot. Egy (nemnulla) vektor kijelöl egy egyenest. Egy vektorhoz végtelen sok olyan sík van, ami tartalmazza őt: ezen síkok metszete (ami „mindegyiknek része”) éppen a vektor által kijelölt egyenes. Három vagy több vektorhoz a legszűkebb „altér”, amiben benne vannak, általában az egész tér, de ha véletlenül mind pl. egy síkba esnek, akkor ez a sík is olyan altér, ami mindegyiket tartalmazza.

Most is akármilyen $\mathbb{V}$ vektorterek esetén értelmes fogalommal találkoztunk. Azt mondjuk, hogy néhány vektornak (vagyis: vektorok egy $H \subseteq \mathbb{V}$ halmazának) **lineáris burka**, vagy a H halmaz által **kifeszített lineáris altér** az a legszűkebb $\mathbb{M}$ altér, ami tartalmazza H minden elemét.

- Bevezetjük a **lineáris kombináció** (rövidebben: lineárkombináció) fogalmát. Egy adott $\mathbb{V}$ vektortérben nemcsak kettő, hanem akárhány véges számú vektort is összeadhatunk bármilyen sorrendben, és az eredmény egyértelmű (mert a vektorösszeadás asszociatív és kommutatív). Az összeadandó vektorokat „előbb” számokkal is szorozhatjuk. Tehát ha adott valahány (mondjuk: N) darab vektor, amelyeket most zárójellezett indexekkel különböztetünk meg: $\vec{v}_{(1)}, \vec{v}_{(2)}, \vec{v}_{(3)}, \dots, \vec{v}_{(N)}$, és adott N darab valós szám: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_N$, akkor létezik a következő összeg:

$$\lambda_1 \cdot \vec{v}_{(1)} + \lambda_2 \cdot \vec{v}_{(2)} + \lambda_3 \cdot \vec{v}_{(3)} + \dots + \lambda_N \cdot \vec{v}_{(N)}.$$

Ezt (ill. az eredményvektort) az eredeti $\vec{v}_{(1)}, \vec{v}_{(2)}, \dots, \vec{v}_{(N)}$ vektorok egy lehetséges **lineáris kombinációjának** hívjuk, a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ számokat pedig az adott lineárkombináció **együtthatóinak**.

- Adott vektoroknak persze végtelen sokféle lineáris kombinációja lehetséges, ha az együtthatókat változtatgatjuk. Értelmes tehát a következő fogalom: ha egy $\mathbb{V}$ vektortérben adott valahány vektor (vagyis: egy $H \subseteq \mathbb{V}$ részhalmaz), akkor

$$\text{Span } H := \{a \text{ } H \text{ összes lehetséges lineáris kombinációinak halmaza}\}.$$

- Most az egyik legfontosabb fogalmat, a *lineáris függetlenséget* vezetjük be. Fizikai terünkben két vektor pontosan akkor esik egy egyenesbe, ha egyik a másiknak számszorosa, azaz: az egyik előállítható a másiktól „lineáris kombinációval” (itt ennek jelentése: egy számmal szorzással). Három vektorra: ha ezek egy síkba esnek, akkor bármelyik előállítható a másik kettőből lineáris kombinálással, ha viszont nem esnek egy síkba, akkor hiába próbálkozunk: bármelyik kettő vektort akárhogy „lineárkombináljuk”, nem kaphatjuk meg a harmadikat.

Bármilyen $\mathbb{V}$ vektortérben értelmes a következő meghatározás: vektorok egy halmaza **lineárisan független** (vagy másképp fogalmazva: a halmazhoz tartozó vektorok egymástól lineárisan függetlenek), ha **semelyik** vektor **sem** állítható elő mint **a többinek a lineáris kombinációja**.

$$H \subseteq \mathbb{V} \text{ lineárisan független, ha } \forall \vec{v} \in H : \vec{v} \notin \text{Span}(H \setminus \vec{v}).$$

Vektorok egy halmaza **lineárisan összefüggő**, ha nem lineárisan független.

Megjegyzés: a „képletben” a halmazelméleti „minden” ($\forall$) és a halmazelméleti kivonás $\setminus$ jelölését

használtuk. Ugyanaz van leírva ide, mint feljebb szavakkal; gyakoroljuk a kiolvasását!

• Következzék néhány nagyon egyszerű fontos állítás. Ezek bármilyen vektortérben igazak, és be is lehet őket bizonyítani, mégis inkább csak azt kérem, hogy szemléltessük magunk előtt az állítások tartalmát a (háromdimenziós) euklideszi terünkben egyenesekre, síkokra stb. gondolva!

1. Egy $H \subseteq \mathbb{V}$ halmazra $\text{Span}(\text{Span } H) = \text{Span } H$, szavakban: ha vektorok lineárkombinációit újra lineárkombinálom, ismét csak az eredeti vektoroknak valamilyen lineárkombinációját kapom. Például: $\vec{a}, \vec{b}$ vektorokra $7 \cdot (\vec{a} + 4\vec{b}) - 2 \cdot (5 \cdot \vec{a} + 8 \cdot \vec{b}) = -3 \cdot \vec{a} + 12 \cdot \vec{b}$.
2. Egy $\mathbb{M}$ lineáris altérre $\mathbb{M} = \text{Span } \mathbb{M}$. Szavakban: lineáris altérre nemcsak az igaz, hogy akár milyen két benne lévő vektor összege és bármilyen benne lévő vektor számszorosa is benne van, hanem az is, hogy bárhány benne lévő vektor akár milyen lineáris kombinációja is benne van.
3. Egy $H \subseteq \mathbb{V}$ részhalmaz által kifeszített lineáris altér pontosan a $\text{Span } H$, szavakban: a kifeszített altér minden vektorát megkapom az eredeti vektorok lineáris kombinálásával.
4. Ha egy H halmaz lineárisan összefüggő (vagy másképp: ennek elemei, a vektorok lineárisan összefüggőek), akkor valamelyiket biztos ki tudom keverni a maradék lineárkombinációjaként (ez éppen a függetlenséghez megfogalmazott feltétel tagadása).
5. Bármilyen $\vec{u}$ vektorra $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$, sőt, $\vec{u}, \vec{v}, \dots$ vektorokra is $0 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v} + \dots = \vec{0}$. Szavakban: a $\vec{0}$ nullavektort akár milyen vektorokból elő lehet állítani a **triviális lineárkombinációval** (melynek minden együtthatója nulla). Állítás: vektorok egy H halmazra pontosan akkor lineárisan **összefüggő**, ha elő lehet állítani elemeiből a $\vec{0}$ **nullavektort nem csupa nulla** együtthatós (azaz: nemtriviális) lineáris kombinációval. Ez tényleg ekvivalens a korábbi meghatározással: ha valamelyik $\vec{v} \in H$ vektort előállíthatjuk a többiből lineárkombinációval, akkor a többinek ezen lineárkombinációjához még $-\vec{v}$ -t hozzáadva tényleg a $\vec{0}$ -t kapjuk, és ez biztos nemtriviális lesz (hiszen $-1 \cdot \vec{v}$ -t adtunk hozzá).
6. Az előző állítás megfordítva: vektorok pontosan akkor **lineárisan függetlenek**, ha a $\vec{0}$ nullavektort **csak a triviális** lineárkombinációval állíthatjuk elő belőlük. Sokszor ezzel szokták definiálni a lineáris függetlenséget; ez tehát ekvivalens a mi mostani meghatározásunkkal.

• **Fizikai terünkben** úgy tűnik tehát, hogy bármely **három nem egy síkba eső vektor** lineárisan független, és bármilyen vektor előállítható ezekből lineáris kombinálással:

$$\begin{aligned} \text{fizikai terünkben } \vec{b}_{(1)}, \vec{b}_{(2)}, \vec{b}_{(3)} \text{ nem egy síkban} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \text{ minden } \vec{v} \text{ vektorra } \vec{v} = \alpha \cdot \vec{b}_{(1)} + \beta \cdot \vec{b}_{(2)} + \gamma \cdot \vec{b}_{(3)}, &\text{ valamely } \alpha, \beta, \gamma \text{ számokkal.} \end{aligned}$$

Adott ilyen (nem egy síkba eső) $\vec{b}_{(1)}, \vec{b}_{(2)}, \vec{b}_{(3)}$ vektorhármassal esetén minden adott $\vec{v}$ vektor nemcsak, hogy előáll így, hanem az α, β, γ számok, azaz a lineáris kombináció **együtthatói egyértelműek**. Ha ugyanis lennének α', β', γ' számok, amikkel szintén elő lehetne állítani $\vec{v}$ -t, akkor $\vec{v}$ kétféle előállítását egymásból kivonva (a vektorösszeadás disztributivitását tudva) a $\vec{0}$ nullavektort kapjuk:

$$\begin{aligned} \vec{v} = \alpha \cdot \vec{b}_{(1)} + \beta \cdot \vec{b}_{(2)} + \gamma \cdot \vec{b}_{(3)}, &\Rightarrow \vec{0} = \vec{v} - \vec{v} = (\alpha - \alpha') \cdot \vec{b}_{(1)} + (\beta - \beta') \cdot \vec{b}_{(2)} + (\gamma - \gamma') \cdot \vec{b}_{(3)}. \\ \text{és } \vec{v} = \alpha' \cdot \vec{b}_{(1)} + \beta' \cdot \vec{b}_{(2)} + \gamma' \cdot \vec{b}_{(3)} & \end{aligned}$$

Ha $\vec{b}_{(1)}, \vec{b}_{(2)}$ és $\vec{b}_{(3)}$ tényleg lineárisan független (ahogy feltettük), akkor ez utóbbi, $\vec{0}$ -t előállító lineáris kombinációban az együtthatók csak nullák lehetnek. Azaz tényleg: $\alpha = \alpha', \beta = \beta'$ és $\gamma = \gamma'$, vagyis a $\vec{v}$ -t előállító lineáris kombináció együtthatói egyértelműek.

• A most látott fogalmak lényegében **akármilyen** $\mathbb{V}$ vektortérben értelmesek, és a *bázis* fogalmához vezetnek. Valamilyen $\mathbb{V}$ vektortérben egy B halmazt (azaz: **néhány**, sok-keves, ki tudja, hány) **vektor halmazát bázisnak hívjuk**, ha:

- B bázis a $\mathbb{V}$ vektortérben, ha
- 1.) B lineárisan független, és
 - 2.) B kifeszíti az egész $\mathbb{V}$ teret, azaz $\text{Span } B = \mathbb{V}$.

Gyakorlásképp még egyszer kimondjuk: a „ B kifeszíti az egész $\mathbb{V}$ teret” ugyanazt jelenti, mint hogy „a $\mathbb{V}$ vektortér bármely $\vec{v}$ vektora előáll B -ből vett vektorok lineáris kombinációjaként”.

Akármilyen $\mathbb{V}$ vektortérben is igaz, hogy egy **adott bázis** esetén egy $\vec{v}$ vektort a bázis elemeiből lineáris kombinációként előállítva az **együtthatók egyértelműek**. (Gondoljuk végig: előbb, a fizikai térre vonatkozó hasonló megfontolásban ha a három vektort kicseréljük az akármilyen $\mathbb{V}$ vektortérünk egy (nem feltétlenül három elemű) B bázisára, onnantól semmi olyat nem használunk, ami ne lenne akármilyen $\mathbb{V}$ vektortérben is ugyanúgy érvényes és igaz.

• Fizikai térünkben végtelen sok bázis van (a kényelmes számoláshoz majd olyat választunk, aminek további jó tulajdonságai is vannak; erről később.) De: minden bázis három vektorból áll. Hiába is próbálkoznánk négy- (vagy több-)elemű halmazokkal: nem lesznek lineárisan függetlenek (azaz egyiket ki lehet lineáris kombinálni a többiből), vagy két- (pláne: egy-)elemű halmazokkal: nem feszítenék ki az egész teret (azaz lenne olyan vektor, ami nem állítható elő belőlük). Erre mondjuk azt, hogy térünk **háromdimenziós**. Még egy megállapítás: ha van két lineárisan független vektorom, akkor van olyan bázis is (még mindig végtelen sok), amely három vektor közül kettő a megadott. Más szóval: egy **lineárisan független** halmaz **kiegészíthető bázissá**.

• **Akármilyen vektortérről** mit mondhatunk? Fogadjuk el bizonyítás nélkül, hogy

- 1.) minden vektortérben **van bázis**,
- 2.) bármilyen vektortérben is egy lineárisan független halmaz kiegészíthető bázissá.

Véggondolható a következő is: ha egy $\mathbb{V}$ vektortérben van egy bázis, aminek n darab eleme van, és egy másik bázis, aminek m eleme van, akkor $m=n$. (Pl. ha $m < n$ lenne, akkor vagy az m elemű „bázis” nem feszítené ki az egész $\mathbb{V}$ -t, vagy az n elemű „bázis” nem lenne lineárisan független.) Tehát: általában egy vektortérben nagyon sok különböző bázis van, azonban biztos, hogy **ha van véges sok (n darab) elemből álló**, akkor minden más bázis is ugyanennyi elemű. **Ekkor** mondjuk, hogy a $\mathbb{V}$ vektortér n **dimenziós**. Erre a $\dim \mathbb{V} = n$ jelölést használjuk³⁸.

• Adott $\mathbb{V}$ vektortér esetén annak lineáris altereit is tulajdonképpen vektortérnek tekinthetjük (hiszen nem vezetnek ki belőlük a vektorműveletek). Értelmes tehát pl. egy $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{V}$ lineáris altérre annak *dimenziója*, $\dim \mathbb{M}$. Pl. nem nagy töprengés rájönni, hogy fizikai térünkben (ez háromdimenziós) az origón átmenő síkok kétdimenziós alterek.

• Egy $\mathbb{V}$ vektortérben legyenek $\mathbb{M}$ és $\mathbb{M}'$ alterek. **Ha egyrészt $\mathbb{M} \cap \mathbb{M}' = \{0\}$, másrészt $\text{Span}(\mathbb{M} \cup \mathbb{M}') = \mathbb{V}$** (azaz metszetük csak a nullavektort tartalmazza, viszont együtt kifeszítik az egész teret), akkor azt mondjuk, hogy $\mathbb{M}$ és $\mathbb{M}'$ **kiegészítő alterek**. „Térbeli példa”: egy (origón átmenő) síknak (ez kétdimenziós altér) kiegészítő altere minden (az origón átmenő) egyenes, ami nincs ebben a síkban. Visszafelé: egy (origón átmenő) egyenesnek mint egydimenziós altérnek kiegészítő altere minden őt nem tartalmazó (az origón átmenő) sík (ami kétdimenziós). A nulla-

³⁸ Előkerülnek majd olyan matematikai vektorterek, amikben nincs véges elemből álló bázis. Ezeket *végtelen dimenziósaknak* hívhatjuk. Aki hallotta már, hogy vannak *különböző végtelenek*, annak: egy végtelen dimenziós vektortérben is bármely két bázis számossága „ugyanaz a végtelen”. Ennek azonban nincs jelentősége a fizikában.

vektort tartalmazó halmaz (a triviális altér, nulla dimenziós) és az egész (háromdimenziós) tér is egymás kiegészítői.

- Nyilvánvalónak tűnik (és tényleg belátható abból, hogy minden lineárisan független halmaz kiegészíthető bázissá), hogy **akármilyen vektortérben**:

- 1.) Minden altérnek van kiegészítője (általában végtelen sok különböző, mint fent a példákban),
- 2.) Ha $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{V}$ és $\mathbb{M}' \subseteq \mathbb{V}$ kiegészítő alterek, akkor $\dim(\mathbb{M}) + \dim(\mathbb{M}') = \dim \mathbb{V}$.

3.4. Euklideszi vektorok skaláris szorzata

Van geometriai terünknek és vektorainak jónéhány olyan tulajdonsága, fogalma, amiről szó sem esett még: szakaszoknak van **hossza**, egyenesek, síkok (sőt: helyvektorok) **szöget** zárhatnak be, időnként **merőlegesek**, stb. Ezek a fogalmak a **skaláris szorzás** kérdéskörével kapcsolatosak. Most ez utóbbit szemléletesen, fizikai terünk vektoraira beszéljük meg.

- Először is: a térben az irányított szakaszoknak van **hossza**³⁹. Ezt most abszolútérték-jellel jelöljük: a $\vec{v}$ vektor hossza $|\vec{v}|$. „Tapasztalatból” tudjuk többek között a következőket:

- 1.) Számmal szorzásnál egy vektor hossza a **szám abszolútértékével szorzódik**: $|\lambda \vec{v}| = |\lambda| \cdot |\vec{v}|$.
- 2.) A hossz nem negatív, és **csak a nullvektornak nulla** a hossza: $|\vec{v}| \geq 0$, és ha $|\vec{v}| = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$.
- 3.) Összeg hossza legfeljebb a hosszak összege: $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$ („háromszög-egyenlőtlenség”).

Megint felmerülhet: miért kell ilyen nyilvánvaló dolgokra nyomdafestéket pazarolni? Válasz: ugye a tér irányított szakaszait is (a *vektortér* matematikai fogalmának bevezetésével) messzemenőig általánosíthattuk. Általánosítani fogjuk majd pl. a hossz fogalmát is, és akkor majd nem mindig lesznek ilyen egyértelműek ezek a tulajdonságok; jó tehát kimondva megjegyezni őket.

- A skalárszorítás témakörének alapkérdése: „ÉNy felé 3 km-t menve mennyit haladtam észak felé?” A vektorok *merőleges vetülete* kerül tehát elő itt. Ehhez tudnunk kell (de „tapasztalatból” tudjuk is), hogy mit jelent vektorok bezárt **szöge**, és ismerni kell a szögfüggvényeket. Az egyik legfontosabb szög a **merőleges**, a $\pi/2$ derékszög.

- Jegyezzük meg jól: **két vektor**, pl. $\vec{u}$ és $\vec{w}$ **skalárszorzata** egy valós **szám** (azaz: „skalár”). Ezt a számot $\vec{u} \cdot \vec{w}$ -vel (vagy egyszerűen $\vec{u}\vec{w}$ -vel) jelöljük, és a következőképpen értelmezzük:

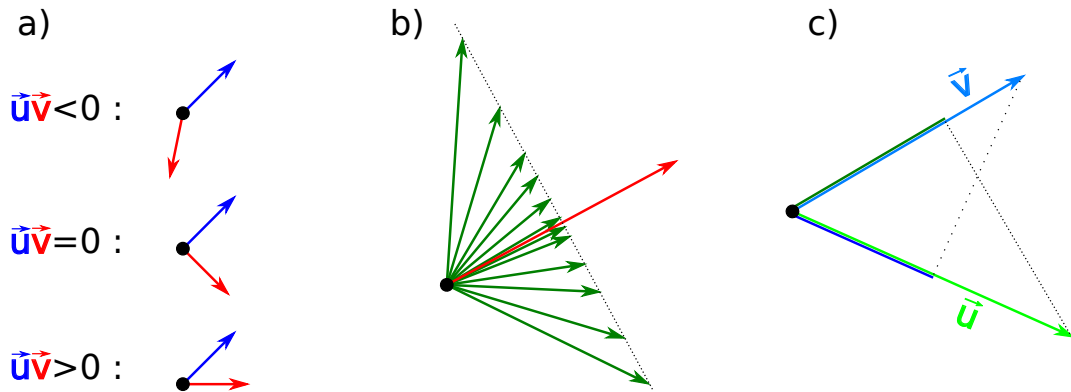
$$\vec{u}\vec{w} = |\vec{u}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\vartheta), \quad \text{ahol } \vartheta \text{ az } \vec{u} \text{ és } \vec{w} \text{ vektorok bezárt szöge.}$$

A $\cos$ szögfüggvény ugye a szög „melletti befogóra” vetíti az átlót: $|\vec{u}| \cos \vartheta$ tehát az $\vec{u}$ vektornak a $\vec{w}$ irányára való (merőleges) vetületének a hossza. Két vektor skalárszorzata tehát: az egyik vektor hosszának és a másiknak az egyikre vett vetülete hosszának szorzata.

- Foglalkozzunk a skalárszorítás mint művelet tulajdonságaival! A 7. ábra szemléltet néhány ilyen tulajdonságot. Némelyiket nagyon egyszerű belátni, némelyiket kevésbé, de mind nagyon fontos.

1. Ha $\vec{u}$, $\vec{w}$ valamelyike éppen a **nullavektor**, akkor nyilván **nulla a skalárszorzat**. Egyébként ha ϑ rendre hegyesszög, derékszög ill. tompaszög, akkor rendre $\cos \vartheta > 0$, $\cos \vartheta = 0$, ill. $\cos \vartheta < 0$, emiatt a skalárszorítás eredménye lehet pozitív, nulla, és negatív is (ld. a 7.a. ábra). A derékszög esete igen fontos: két vektor skalárszorzata tehát **nemcsak akkor nulla**, ha valamelyik vektor a $\vec{0}$, hanem akkor is, ha a két vektor merőleges. Sokszor majd két (valahogy megadott)

³⁹ A hosszat pl. méterben mérjük, de ezzel most ne szórakozzunk; vegyük úgy, hogy a *hossz egy valós szám*.



7. ábra. Vektorok skalárszorzatának néhány nagyon egyszerű tulajdonsága illusztrálva. a.): lehetséges kimenetek; speciálisan: merőleges vektorokra nulla. b.): skalárszorzásnál csak a merőleges vetület számít: a piros skalárszorzata bármelyik zölddel ugyanannyi. c.): a kommutativitás vetületekkel; állíthatjuk, hogy a vektor és a rá eső vetület szorzata ugyanaz mindkettőnél.

vektor skalárszorzatát kiszámolni egyszerű lesz, a bezárt szögüket térben kiokoskodni viszont problémásabb lesz: ekkor a skalárszorzat nulla volta elárulhatja, ha a vektorok merőlegesek.

A „**merőleges**” helyett sokszor azt mondjuk, hogy **ortogonális**⁴⁰; ezek itt ugyanazt jelentik.

A $\vec{0}$ -ra rámondhatjuk, hogy „minden vektorra merőleges⁴¹”; ez pont annyit jelent, hogy minden vektorral nulla a skalárszorzata. Fordítva: ha egy $\vec{v}$ vektorról valahogy kiderítjük, hogy **minden** $\vec{w}$ **vektorral nulla** a skalárszorzata, akkor arra következtethetünk, hogy $\vec{v}$ **a nullavektor**.

2. Nyilvánvalóan igaz, hogy

$$\vec{u} \cdot \vec{w} \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{w}|, \quad \text{sőt: } |\vec{u} \cdot \vec{w}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{w}|. \quad \text{Továbbá: } \cos \vartheta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}| |\vec{w}|}.$$

Azaz: a skalárszorzat még abszolútértékben is kisebb vagy egyenlő, mint a hosszak szorzata. Utóbbi képletre is vonatkozik a fenti megjegyzés: két vektor hosszait és skalárszorzatát adott esetben egyszerűbb lehet kiszámolni, és ekkor éppen ezekből deríthetjük ki a bezárt szögüket.

3. Érdekes konkrétan vizualizálni, hogy skalárszorzásnál tényleg csak a vektornak a másakra vett vetülete számít, ld. pl. a 7. ábra b.) részét.

4. Minden vektornak **önmagával** vett skalárszorzata nemnegatív valós, és éppen a hossz négyzete: $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$, ami tényleg ≥ 0 . Sőt: csakis akkor nulla, ha $\vec{u}$ a nullavektor.

5. A **skalárszorzás kommutatív** (azaz mindegy a sorrend):

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{u} \quad \text{bármely } \vec{u}, \vec{w} \text{ vektorokra.}$$

Ez a fenti definíciós képletből nyilvánvaló (sem $\cos \vartheta$, sem a hosszak szorzata nem változik $\vec{u}$ és $\vec{w}$ kicserélésekor). Azonban a másik megfogalmazás, miszerint a skalárszorzás „egyik vektornak a másik irányába vett vetülete hosszának és a másik vektor hosszának szorzata”, már mintha nem lenne ilyen szép „szimmetrikus”. De: épp most láttuk be, hogy a skalárszorzás kommutatív, így a másik megfogalmazásban is biztos ugyanazt az eredményt kapjuk „fordítva” is. Ez már egy nem feltétlenül magától értetődő geometriai következtetés (ld. a 7. ábra c.) részén)!

⁴⁰ A szó a görög *ortho*(=egyenesen, függőlegesen álló) + *gon*(=szög) összetételből jön.

⁴¹ A $\vec{0}$ nullavektor minden vektorral párhuzamos is ilyesmi „elfajult” értelemben, ld. korábban.

6. A skalárszorzás kapcsolata a számokkal való szorzással (a pötty itt egyszer számmal szorzást, másszor vektorok skalárszorzását jelöli):

$$\vec{u} \cdot (\lambda \vec{w}) = \lambda \cdot (\vec{u} \cdot \vec{w}), \quad \text{Fordítva is: } (\lambda \cdot \vec{u}) \cdot \vec{w} = \lambda \cdot (\vec{u} \cdot \vec{w}).$$

(A fordított alak már csak a kommutativitás miatt is igaz kell, hogy legyen.) Számmal szorzott vektor skaláris szorzata tehát a számmal szorzódik. Ha λ pozitív, ez nagyon egyszerű. Ha λ negatív, akkor a hossz $|\lambda|$ -szorosára változik, a vektor iránya pedig megfordul, így a bezárt szög $\vartheta \rightarrow \pi - \vartheta$ lesz, és $\cos(\pi - \vartheta) = -\cos \vartheta$ miatt végül $-|\lambda| = \lambda$ lesz a kiemelhető szorzó.

7. Szóba se jön asszociativitás: $(\vec{u}\vec{w})\vec{a}$ egy $\vec{a}$ irányú vektor (a $\vec{a}$ megszorozva a $\vec{u}\vec{w}$ skalárszorzat értékével), viszont $\vec{u}(\vec{w}\vec{a})$ az $\vec{u}$ irányába mutat: ezek nyilván nem lesznek általában egyenlőek.
8. Viszont nagyon fontos: a **skalárszorzás disztributív a vektorösszeadásra**, azaz:

$$\vec{a} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{a} \cdot \vec{u} + \vec{a} \cdot \vec{w}, \quad \text{bármilyen } \vec{a}, \vec{u}, \vec{w} \text{ vektorokra.}$$

Ez a számmal szorzással együtt azt jelenti, hogy „bele-skalárszorozhatunk” egy lineárkombinációba: az $\vec{a}$ vektorra és $\vec{v}_{(1)}, \vec{v}_{(2)}, \vec{v}_{(3)}, \dots$ vektorokra, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ számokra:

$$\vec{a} \cdot (\lambda_1 \vec{v}_{(1)} + \lambda_2 \vec{v}_{(2)} + \lambda_3 \vec{v}_{(3)} + \dots) = \lambda_1 \cdot \vec{a}\vec{v}_{(1)} + \lambda_2 \cdot \vec{a}\vec{v}_{(2)} + \lambda_3 \cdot \vec{a}\vec{v}_{(3)} + \dots \quad (3.1)$$

Az egyik fentebbi megjegyzést is továbbfűzhetjük: ha van két, $\vec{u}$ és $\vec{v}$ vektor, amelyekről valaki elárulta, hogy *minden* $\vec{a}$ vektorral vett skalárszorzatuk egyenlő, akkor leszűrhetjük, hogy maguk a vektorok is egyenlőek, hiszen (a most belátott disztributivitást használva)

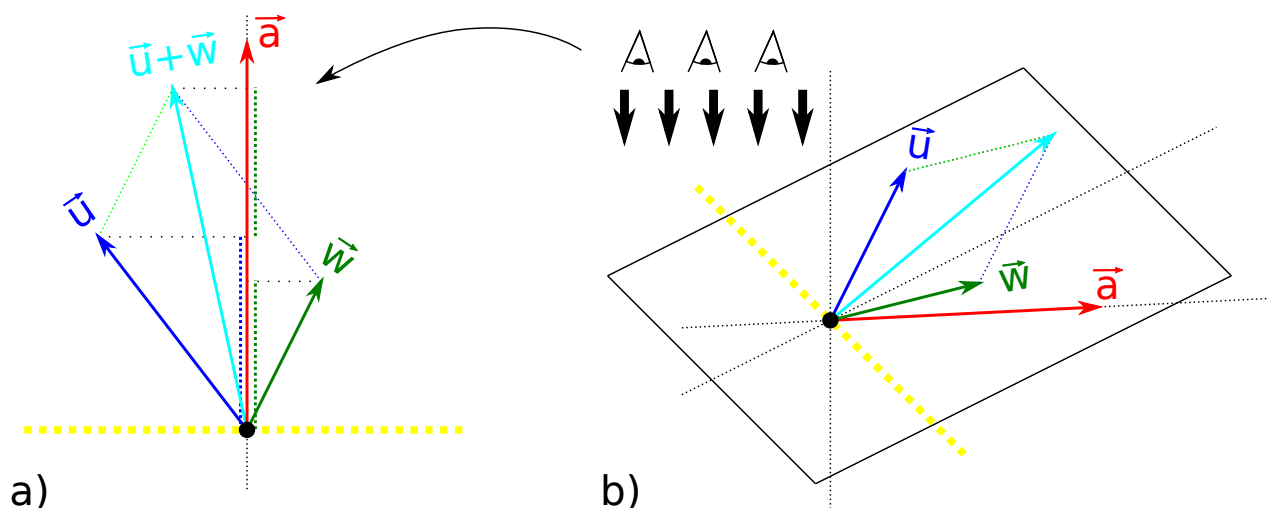
$$\begin{array}{ccccccc} \vec{a}\vec{u} = \vec{a}\vec{v} & \Rightarrow & \vec{a}\vec{u} - \vec{a}\vec{v} = \vec{0} & \Rightarrow & \vec{a}(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0} & \Rightarrow & \vec{u} - \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}. \\ \text{minden } \vec{a}\text{-ra} & & \text{minden } \vec{a}\text{-ra} & & \text{minden } \vec{a}\text{-ra} & & \end{array}$$

• A disztributivitás „**bizonyítása**” (=kimagyarázása) egyszerű, ha a három vektor, $\vec{a}$, $\vec{u}$ és $\vec{w}$ egy síkba esnek (ld. a 8.a. ábrát): ekkor elég nyilvánvaló, hogy két vektor összegének vetülete éppen a vetületek összege. Ezt kell kimagyarázni akkor is, ha a három vektor nem esik egy síkba. Ehhez a 8.b. ábra szerint jelöljük ki azt az egyenest, ami merőleges $\vec{a}$ -ra, és benne van a $\vec{u}$ és $\vec{w}$ által kifeszített síkban, és nézzük a rendszert olyan irányból, amely erre az egyenesre is és $\vec{a}$ -ra is merőleges. Gondoljuk végig, hogy ilyen irányból nézve visszavezethetjük a kérdést az ábra a.) részén jelöltre (azaz a vetületek összege az összeg vetülete lesz)! A disztributivitást így beláttuk.

• A skalárszorzat disztributivitását ezentúl nyugodtan használhatjuk távolról sem egyértelmű geometriai helyzetekben; jó segítségünkre lesz. Pl. ha csak úgy paralelepipedon módjára felrajzoljuk az $\vec{a}$, $\vec{u}$, $\vec{w}$ vektorokat, akkor az $\vec{a}\vec{u} + \vec{a}\vec{w}$ összegről és a $\vec{a}(\vec{u} + \vec{w})$ szorzatról a skalárszorzat eredeti definíciójából nagyon nem látszik, hogy egyenlőek lennének. Mégis tudhatjuk most már ezt, pedig a szereplő szögek, távolságok, vetületek stb. nem egyszerűen adódnak itt. Eszközt kaptunk tehát a kezünkbe, hogy esetleg bonyolult elrendezéseket is (a későbbiekben még egyszerűbbé váló) skalárszorzás műveleti tulajdonságaival „egyszerűsítsünk”; látunk majd erre példákat.

• Megemlítjük: a mechanikai **munka** az egyik fizikai alappélda a skalárszorzás alkalmazására. Egy testre ható $\vec{F}$ erő definíció szerint annyi munkát végez a testen, mint a test $|\vec{s}|$ elmozdulásának és az erőnek a $\vec{s}$ elmozdulásvektor irányába eső „komponensének” (azaz: vetületének nagyságának) szorzata. Ez éppen azt jelenti, hogy $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$, azaz skalárszorzatról van szó⁴².

⁴² Ne ijedjünk meg: különböző „fizikai dimenziójú” (azaz: mértékegységű) vektorokat is nyugodtan összeszorozhatunk skalárisan, csak tartsuk észben, hogy a mértékegységek is megfelelő módon „öröklődnek”.



8. ábra. Vektorok skalárszorzatának disztributivitása. a.) egy síkban lévő vektorokra nyilvánvaló: az $\vec{u}$ és $\vec{w}$ vetületeinek összege $\vec{a}$ irányára egyenlő az összeg vetületével, b.) nem egy síkbeli vektorokra a jelölt irányból „nézve” visszavezetődik az a. esetre.

3.5. Euklideszi vektorok vektoriális szorzása

- Háromdimenziós fizikai terünkben értelmezhető vektorok egy másik fajta, ún. „vektoriális szorzása”, vagy „vektorszorzata”, amely (névéhez híven) nem számot, hanem vektort ad eredményül⁴³. A kérdésfeltevés itt: előkerült már két ($\vec{u}$ és $\vec{w}$) vektor által kijelölt **paralelogramma** (ugye aminek „átlója” a vektorok összege); mekkora vajon ezen paralelogramma **területe**? Nyilvánvalónak tűnik (ismerve a $\sin$ szögfüggvényt), hogy pl. az $\vec{u}$ vektornak a $\vec{w}$ -re *merőleges* vetülete fog itt számítani: ha ϑ a vektorok bezárt szöge, akkor a kérdéses terület: $|\vec{u}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin \vartheta$. Már most kiemeljük: ha a két vektor párhuzamos, akkor ez a terület nyilván nulla.

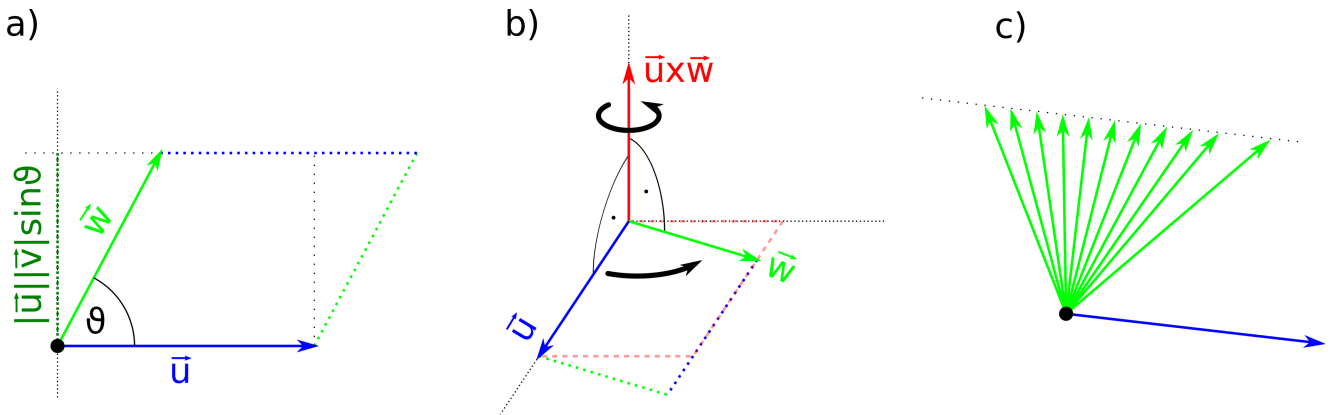
- Van tehát egy mennyiség, ami a két vektorhoz hozzárendelhetünk. Most csak fogadjuk el, hogy érdemes az így kapott területmértékszámhoz **irányt** is rendelni, azaz egy **vektort** definiálni, amit az $\vec{u}$ és a $\vec{w}$ (ilyen sorrendű) **vektorszorzatának** fogunk hívni, és $\vec{u} \times \vec{w}$ -vel jelölni. Ennek a hossza a paralelogramma területe legyen tehát. Az irányát pedig (mindjárt látjuk, hogy miért) úgy érdemes választani, hogy **mindkét vektorra** (azaz: a vektorok által kifeszített síkra) **merőleges** legyen. (Ha a két vektor netán nem feszít ki síkot, az azt jelenti, hogy egy egyenesbe esnek, és ekkor a paralelogrammaterület eleve nulla: az eredmény a nullavektor, aminek mindegy, mi az iránya.)

- Már csak a két irány közül kell választani. Itt **fontos** lesz az $\vec{u}$ és $\vec{w}$ vektorok **sorrendje**, és az a követelmény (megállapodás), hogy az $\vec{u}$, a $\vec{w}$ és az $\vec{u} \times \vec{w}$ vektorok ilyen sorrendben **jobbsodrású rendszert** alkossanak. Ez az $\vec{u}$ -ra is és $\vec{w}$ -re is merőleges két irány közül már kijelöli az egyiket.

Három $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ vektor együttesét ebben a sorrendben jobbsodrásúnak hívjuk, hogyha a **jobb kezünk** hüvelykujját kitartva, a többi begömbítve és úgy állítva, hogy ezek mintegy átviszik („áttekerik”) $\vec{v}_1$ -et $\vec{v}_2$ -be, akkor a hüvelykujjunk $\vec{v}_3$ irányába mutat. Másképp megfogalmazva: $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ jobbsodrású rendszer, ha jobb kezünk hüvelyk, mutató és középső ujjait kényelmesen egymásra merőlegesen kinyújtva ilyen sorrendben megfelelnek a $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ vektorok irányának⁴⁴. Kinek az egyik,

⁴³Már most megemlítjük: skalárszorzást többdimenziós vektorterekben is lehet definiálni, de a mostani vektorszorzás kifejezetten csak a háromdimenziós térben értelmes.

⁴⁴A leírt módszereket akkor kényelmes alkalmazni, ha a vektoraink „kellemes”, se túl hegyes, se túl tompa szögeket



9. ábra. a.: két vektor által kijelölt paralelogramma-terület, b.: ebből a vektorszorzat illusztrálása (térben), c.: egy vektornak a másikra merőleges komponense számít: a jelölt zöld vektoroknak a kékek vett vektorszorzata mind ugyanaz a vektor.

kinek a másik megfogalmazás a kellemesebb (nekem az első). **Három** adott sorrendű **vektor** a térben **vagy jobbsodrású** rendszert alkot, **vagy balsodrásút**, **vagy lineárisan összefüggenek** (azaz: egy síkban vannak; ekkor semmilyen sodrású rendszert nem alkotnak). Ez a „sodrásúság” (is) olyan dolog, amit sokszor át kell ismételni: előbb-utóbb térszemléletünk részévé válik.

- Összefoglalva: két (egymással ϑ szöget bezáró) vektor **vektorszorzata** az $\vec{u} \times \vec{w}$ -vel jelölt **vektor**:

$$\vec{u}, \vec{w} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{w} \quad \text{nagysága: } |\vec{u} \times \vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{w}| \times \sin \vartheta,$$

iránya: merőleges $\vec{u}$ -ra és $\vec{w}$ -re is, és $\vec{u}$, $\vec{w}$ és $\vec{u} \times \vec{w}$ jobbsodrású rendszer.

- Vessünk egy pillantást a most definiált vektorszorzás **műveleti tulajdonságaira!**

1. Két vektor vektorszorzata **akkor és csak akkor a nullavektor**, ha a két vektor **párhuzamos** (vagy egyikük a nullavektor; utóbbi ugye „mindennel párhuzamos”, így ez sem kivételes eset):

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}. \quad \text{Speciálisan: } \vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}.$$

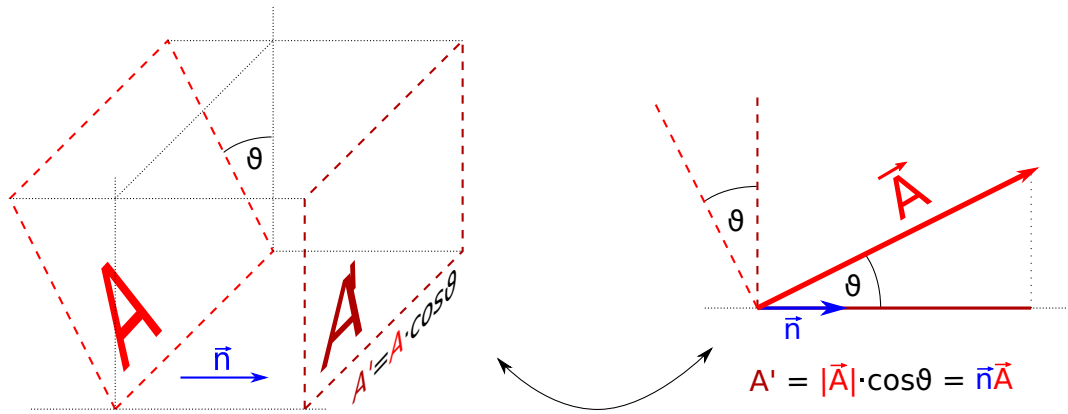
2. Általában is: láthatjuk, hogy a vektorszorzatba csak az egyik vektornak a másikra **merőleges komponense** számít; a 9. ábra b. és c. része próbálja ezt érzékeltetni; jegyezzük meg!
3. A vektorszorzás éppenséggel nem kommutatív; viszont **felcserélve a tagokat -1 -gyel szorozódik** (ezt úgy is mondják, hogy „antikommutatív” művelet). Indoklás: felcseréléskor a paralelogrammaterület maga nem változik, de az irány az ellentétesre fordul (a jobbsodrásúság megkövetelése miatt; a jobb kezünket „ellenkező irányba kell fordítani”). Tehát

$$\vec{u} \times \vec{w} = -(\vec{w} \times \vec{u}).$$

4. A vektorszorzás nem asszociatív: gondoljuk ki, hogy három $\vec{u}$, $\vec{w}$, $\vec{a}$ vektorra $\vec{u} \times (\vec{w} \times \vec{a})$ illetve $(\vec{u} \times \vec{w}) \times \vec{a}$ általában nem ugyanarra mutat. Az ilyen „dupla vektorszorzatra” még visszatérünk.
5. A vektorszorzás a vektorok számmal szorzásával „felcserélhető”, az alábbi értelemben:

$$\begin{aligned} \vec{u} \times (\lambda \cdot \vec{w}) &= \lambda \cdot (\vec{u} \times \vec{w}), \\ (\lambda \cdot \vec{u}) \times \vec{w} &= \lambda \cdot (\vec{u} \times \vec{w}), \end{aligned} \quad \text{minden } \vec{u}, \vec{w} \text{ vektorra és } \lambda \text{ számra.}$$

zárnak be. Most, a vektorsorzásnál ez a helyzet, a merőlegességek megkövetelése miatt. „Kellemetlenebb szögű” vektorhármásokra is működnek a módszerek, csak kicsit „kellemetlenebbül”.



10. ábra. Illusztráció arra, hogy adott $\vec{n}$ egységvektor-irányból nézve egy felület mekkorának látszik: ehhez az egységvektort és a felületvektort kell skalárisan szorozni.

Ezt esetleg (mint a skalárszorzásnál is volt) érdemes külön pozitív és negatív λ -ra végig gondolni; előbbi egyszerű (a vektor hossza szorozódik), utóbbi esetben a vektor hossza $|\lambda|$ -szorosára változik, de iránya megfordul, így az eredményvektoré is (a „jobbsodrás” megfordulása miatt).

6. A vektorszorzás **disztributív a vektorösszeadásra nézve** (ezt kicsit később látjuk be), azaz:

$$\begin{aligned} \text{minden } \vec{u}, \vec{w}, \vec{a} \text{ vektorra: } \vec{a} \times (\vec{u} + \vec{w}) &= \vec{a} \times \vec{u} + \vec{a} \times \vec{w}, \\ \text{és akkor nyilván „fordítva”: } (\vec{u} + \vec{w}) \times \vec{a} &= \vec{u} \times \vec{a} + \vec{w} \times \vec{a} \text{ is igaz.} \end{aligned}$$

Ebből és az előzőből következik, hogy a vektorszorzás is „bevihető a lineáris kombináció mögé”:

$$\vec{a} \times (\lambda_1 \vec{v}_{(1)} + \lambda_2 \vec{v}_{(2)} + \lambda_3 \vec{v}_{(3)} + \dots) = \lambda_1 \cdot (\vec{a} \times \vec{v}_{(1)}) + \lambda_2 \cdot (\vec{a} \times \vec{v}_{(2)}) + \lambda_3 \cdot (\vec{a} \times \vec{v}_{(3)}) + \dots$$

- Adósok vagyunk az indoklással, hogy miért így érdemes definiálni a „paralelogramma területének (azaz: a vektorszorzás eredményvektorának) irányát”. Előbb még inkább tetézzük is kicsit: általában is egy, a térben elképzelt **síkidom területéhez vektort** rendelünk, amelynek **nagysága** a terület nagysága, **iránya** pedig a felületre merőleges. A két lehetséges merőleges irány közül kiválasztjuk az egyiket, de ezzel együtt megállapodunk, hogy ha majd akármikor „körbe kell menni” a síkidom kerületén (később majd lesz ilyen!), akkor azt olyan irányba kell, hogy a körjárási irány és a területvektor együtt „**jobbsodrású** rendszert” alkossanak⁴⁵. El ne feledjük tehát: ez a területvektor bármilyen síkidomra értelmes, és a vektorszorzás eredménye ennek speciális esete.

- A terület vektormennyiségként kezelésének az értelme a következő. Ha azt a kérdést tesszük fel, hogy a síkidomot **adott irányból** nézve (az adott irányt egy 1 hosszúságú, azaz úgynevezett: *egységvektor* jelöli ki) mekkora területet „látunk”, a válasz egyszerűen az lesz, hogy a **területvektor és az irányvektor skalárszorzata**. (Ez legegyszerűbben téglalapra láthatjuk be, a 10. ábra ezt illusztrálja; akármilyen síkidomra pedig mondhatjuk, hogy „daraboljuk fel” kicsi téglalapokra”, és kész.) Ez az egyszerű szabály pontosan azért működik, mert a területvektort a felületre merőlegesnek definiáltuk. Gyakorlati hasznosság szempontjából megint azt mondhatjuk: sokszor egyszerűbb lesz kiszámolni két vektor skalárszorzatát, mint végigsilabizálni a térbeli látószögeket (sőt, utóbbiakat pont az előbbi eredményéből kaphatjuk majd meg).

⁴⁵ Azaz mint fentebb: begörbített ujjaink mennek körbe, hüvelykujjunk mutat a területvektor irányába.

3.6. További műveletek, vegyesszorzat

• Egy megjegyzés a skalárszorzat és a vektorszorzat kapcsolatáról: tudjuk, hogy bármilyen α szögre $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Ebből könnyű kideríteni (mivel a skalárszorzatban $\cos \alpha$, a vektorszorzat nagyságában pedig $\sin \alpha$ szerepelt), hogy két vektor ($\vec{u}$ és $\vec{v}$) vektorszorzatának hosszára igaz a következő összefüggés:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \quad \Rightarrow \quad |\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2. \quad (3.2)$$

Tehát a vektorok hossz négyzetének szorzatából a skalárszorzatuk négyzetét kivonva éppen a vektorszorzatuk hossz négyzetét kapjuk.

• Három (most $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ -vel jelölt) vektorra külön elnevezéssel illetnek „még egy” műveletet:

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ vegyes szorzata (vagy néha „hármasszorzata”): } \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}).$$

A **vegyes szorzatnak** tehát **egy szám az eredménye**, ő maga a vektorszorzás és a skalárszorzás ízléses „kombinációja”. A vegyes szorzatnak egy fontos és egyszerű **geometriai jelentése** is van. Ha $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ jobbsodrású rendszert alkot, akkor kigondolhatjuk, hogy $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ értéke éppen az $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vektorok által kijelölt **paralelepipedon** („ferde hasáb”) **térfogata**. Ezt a térfogatot „alapterületszer magasság” módon számolnánk ki, és tényleg: $\vec{v} \times \vec{w}$ nagysága az „alap” (az $\vec{v}$ és a $\vec{w}$ által kijelölt paralelogramma) területe, a $\vec{u}$ vektornak az alapra merőleges komponense (a paralelepipedon „magassága”) pedig éppen úgy adódik, hogy az $\vec{u}$ vektort az alapra merőlegesen, azaz éppen $\vec{v} \times \vec{w}$ irányába vetítjük: pont ezt csinálja a skalárszorzás.

• A következő ponthoz egy előzetes megjegyzés: három $\vec{v}_{(1)}$, $\vec{v}_{(2)}$ és $\vec{v}_{(3)}$ vektor jobb- vagy balsodrású voltának eldöntéséhez fontos volt a sorrend. Gondoljuk végig, hogy ugyanezeket a vektorokat **más sorrendben** véve a „sodrás” ugyanaz is **maradhat**, és **változhat** is. Konkétan:

$$\begin{array}{lll} \vec{v}_{(1)}, \vec{v}_{(2)}, \vec{v}_{(3)} \text{ jobbsodrású} & \Rightarrow & \begin{array}{lll} \vec{v}_{(1)}, \vec{v}_{(2)}, \vec{v}_{(3)}, & \vec{v}_{(2)}, \vec{v}_{(3)}, \vec{v}_{(1)}, & \vec{v}_{(3)}, \vec{v}_{(1)}, \vec{v}_{(2)} \text{ jobbsodrású,} \\ \vec{v}_{(1)}, \vec{v}_{(3)}, \vec{v}_{(2)}, & \vec{v}_{(2)}, \vec{v}_{(1)}, \vec{v}_{(3)}, & \vec{v}_{(3)}, \vec{v}_{(2)}, \vec{v}_{(1)} \text{ balsodrású.} \end{array} \end{array}$$

Egy kis kiegészítés ide kívánczik. **Permutációk** ugyebár egy rendezett véges halmaz elemeinek sorrend-változtatásai, pl. az $\{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{5, 2, 4, 3, 1\}$. Speciális eset a *transzpozíció*, azaz két elem felcserélése, pl. $\{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 5, 3, 4, 2\}$. Nyilvánvalónak tűnik (és tényleg igaz), hogy minden permutáció előáll transzpozíciók egymásutánjaként, azaz „elempárok egymás utáni cserélgetésével”. Adott permutációra persze nem egyértelmű, hogy pontosan hány transzpozíció kellett (hogy mást ne mondjunk, két elemet oda-vissza csereberélgethetünk), de fontos állítás (most nem bizonyítjuk be), hogy a szükséges transzpozíciók számának **párossága** már **egyértelmű**. Ez alapján beszélünk *páros* ill. *páratlan* permutációkról; azt is mondjuk hogy a permutáció **szignatúrája** (előjele) $+1$ vagy -1 , ha a permutáció páros ill. páratlan.

Mármost tehát: ha $\vec{v}_{(1)}$, $\vec{v}_{(2)}$, $\vec{v}_{(3)}$ jobbsodrású, akkor az 1, 2, 3 indexek *páros permutációjával* szintén jobbsodrású, az indexek *páratlan* permutációjával pedig balsodrású rendszert kapunk:

$$\begin{array}{lll} (123), & (231), & (312) \text{ páros,} \\ (132), & (213), & (321) \text{ páratlan.} \end{array}$$

• Visszatérve a vegyes szorzathoz: ha a három $\vec{u}$, $\vec{v}$ és $\vec{w}$ vektor egy síkban van, akkor a „kifeszített térfogat” nulla, és tényleg a vegyesszorzat is nulla (mivel a skalárszorzást merőleges vektorokra

kellene csinálni). Ha a rendszer nem jobb-, hanem balsodrású, akkor az eredmény a térfogat mínusz egyszerese lesz (ekkor $\vec{u}$ és $\vec{v} \times \vec{w}$ „ellenkezőleg” mutatnak). A vegyes szorzat sok tulajdonsága már következik a skalárszorzás és vektorszorzás műveleti tulajdonságaiból, ezeket most nem írjuk fel mind. Nagyon fontos azonban, hogy (mivel a paralelepipedon **térfogata egyértelmű**), az öt kijelölő három vektorból akármelyik kettőt vehetjük „alapnak” és a harmadikat a „magasságot megadónak”. Emiatt a vegyes szorzatot **átzárójelezhetjük**, és a skalárszorzás kommutativitását is használhatjuk, amivel pl. azt kapjuk, hogy

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}),$$

így pl. $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}.$

Tehát a sorrendet is változtathatjuk, és „mindegy, melyik kettő közé tesszük a vektorszorzást”⁴⁶. Ugyanakkor tudva azt is, hogy a vektorszorzás antikommutatív (azaz cserénél -1 -gyel szorzódik), összefoglalva a következő egyenlőségeket kapjuk:

$$\begin{aligned} \vec{u}_{(1)}(\vec{u}_{(2)} \times \vec{u}_{(3)}) &= (\vec{u}_{(1)} \times \vec{u}_{(2)})\vec{u}_{(3)} = \vec{u}_{(2)}(\vec{u}_{(3)} \times \vec{u}_{(1)}) = \\ &= (\vec{u}_{(2)} \times \vec{u}_{(3)})\vec{u}_{(1)} = \vec{u}_{(3)}(\vec{u}_{(1)} \times \vec{u}_{(2)}) = (\vec{u}_{(3)} \times \vec{u}_{(1)})\vec{u}_{(2)} = \\ &= -\vec{u}_{(1)}(\vec{u}_{(3)} \times \vec{u}_{(2)}) = -(\vec{u}_{(1)} \times \vec{u}_{(3)})\vec{u}_{(2)} = -\vec{u}_{(2)}(\vec{u}_{(1)} \times \vec{u}_{(3)}) = \\ &= -(\vec{u}_{(2)} \times \vec{u}_{(1)})\vec{u}_{(3)} = -\vec{u}_{(3)}(\vec{u}_{(2)} \times \vec{u}_{(1)}) = -(\vec{u}_{(3)} \times \vec{u}_{(2)})\vec{u}_{(1)}. \end{aligned}$$

Ez összevág azzal, amit előbb a „sodrásúság” változásáról mondtunk, ha a sorrendet változtatjuk: „sodrásváltó” sorrendmódosításkor a vegyes szorzat eredménye -1 -gyel szorzódik.

• Kiegészítés: a vegyesszorzatot ismerve **beláthatjuk a vektorszorzás disztributivitását**. Legyen $\vec{a}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ három vektor, azt akarjuk belátni, hogy $\vec{a} \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{a} \times \vec{u} + \vec{a} \times \vec{v}$. Ehhez a bal oldalt szorozzuk meg skalárisan akármilyen $\vec{w}$ vektorral, majd: 1. zárójelezzük át a felírt vegyesszorzatot, 2. használjuk a *skalárszorzat* disztributivitását, 3. „zárójelezzük vissza” mindkét kapott tagot, 4. megint használjuk (visszafelé) a skalárszorzat disztributivitását:

$$\begin{aligned} \vec{w} \cdot (\vec{a} \times [\vec{u} + \vec{v}]) &\stackrel{1.)}{=} (\vec{w} \times \vec{a}) \cdot [\vec{u} + \vec{v}] \stackrel{2.)}{=} (\vec{w} \times \vec{a}) \cdot \vec{u} + (\vec{w} \times \vec{a}) \cdot \vec{v} \stackrel{3.)}{=} \vec{w} \cdot (\vec{a} \times \vec{u}) + \vec{w} \cdot (\vec{a} \times \vec{v}) \stackrel{4.)}{=} \\ &= \vec{w} \cdot [\vec{a} \times \vec{u} + \vec{a} \times \vec{v}]. \quad \text{Összefoglalva: } \vec{w} \cdot [\vec{a} \times [\vec{u} + \vec{v}]] = \vec{w} \cdot [\vec{a} \times \vec{u} + \vec{a} \times \vec{v}]. \end{aligned}$$

Ebből, mivel $\vec{w}$ akármilyen vektor, leszűrhetjük, hogy tényleg: $\vec{a} \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{a} \times \vec{u} + \vec{a} \times \vec{v}$.

Beláttuk tehát a vektorszorzat disztributivitását; konkrétan a definíciók alapján (szögekkel, merőlegesekkel, vetületekkel) igen nehézkes lett volna kisilabizálni.

A következő 4. fejezetben „aprópénzre váltunk” sok most összeszedett tudást; majd az 5. fejezettel is kombinálva az eddigieket már nagyon sok térgeometriai kérdésre választ és számítási módszert fogunk tudni adni.

⁴⁶Ezért (is) néha a vegyes szorzatot zárójelben vesszőzéssel jelölik (mondván, hogy mindegy, melyik vesszőt helyettesítjük vektorszorzással és akkor a másikat a vektorszorzattal való skalárszorzással), vagy csak egyszerűen egymás mellé írással; így: $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, vagy $(\vec{u}\vec{v}\vec{w})$. Szerintem félreérthető, ezért én nem használom ezt a jelölést.

4. Vektorok reprezentációja (ortogonális bázis)

Az előző fejezetben a háromdimenziós (fizikai) tér vektorait a „maguk jogán” vizsgáltuk; nem foglalkoztunk koordinátarendszerekkel. Most ezt tesszük, és ezzel együtt sok olyan fogalmat bevezetünk, amelyeket majd általánosabban is használhatunk.

4.1. Ortogonális bázis

• Később majd általánosabban is lehet, most azonban **derékszögű koordinátarendszert** választunk az egyszerűség kedvéért. Még konkrétabban: kijelölünk egy **origót**, és az „ebből induló” vektorokkal foglalkozunk (gondolhatunk ugye pl. az origóból kiinduló elmozdulásvektorokra). Szeretnénk vektorok hosszát, szögét, vetítéseit, stb. számítással meghatározni, ehhez jó lesz, ha felveszünk **három, egymásra merőleges** vektort. Ezekre a vektorokra egyelőre gondoljunk úgy, hogy „rögzítve vannak a szoba sarkában”⁴⁷.

• Tehát: legyen adott három egymásra merőleges vektor. Megköveteljük még azt is (mindjárt látjuk, hogy ez egyszerűsíti a helyzetet), hogy **egységvektorok** legyenek, azaz a hosszuk egy legyen. Ezeket a vektorokat most $\vec{e}$ módon jelöljük, és indexekkel különböztetjük meg: $\vec{e}_{(1)}$, $\vec{e}_{(2)}$, $\vec{e}_{(3)}$. Mutassanak ezek rendre az x , az y és a z koordinátatengelyek irányába: éppen ezért jelölhetjük őket (ha nagyon akarjuk, de nem mindig érdemes) a következő módon: $\vec{e}_{(x)}$, $\vec{e}_{(y)}$, $\vec{e}_{(z)}$.

$$\vec{e}_{(1)} \equiv \vec{e}_{(x)}, \quad \vec{e}_{(2)} \equiv \vec{e}_{(y)}, \quad \vec{e}_{(3)} \equiv \vec{e}_{(z)}.$$

Mostantól azt is megköveteljük, hogy **az x , y , z irányok jobbsodrású** rendszert alkossanak.

• „Mit tud” tehát ez a három vektor? Beszéltünk már arról, hogy mit jelentenek a következő fogalmak, most felidézve alkalmazzuk őket:

1. Az $\vec{e}_{(1)}$, $\vec{e}_{(2)}$, $\vec{e}_{(3)}$ vektorok lineárisan függetlenek (egyik sem a másik kettő lineáris kombinációja).
2. Mi több, bármely vektor kiadódik a lineáris kombinációjuként: így tehát **bázist** alkotnak.
3. Ez ugye aprópénzre váltva azt jelenti, hogy **minden $\vec{v}$ vektorhoz** egyértelműen meg van adva **három szám**, amelyekkel a vektor lineáris kombinációként kapható. Ezeket a számokat tipikusan a vektor betűjével jelöljük, természetesen nyíl nélkül, de indexekkel ellátva:

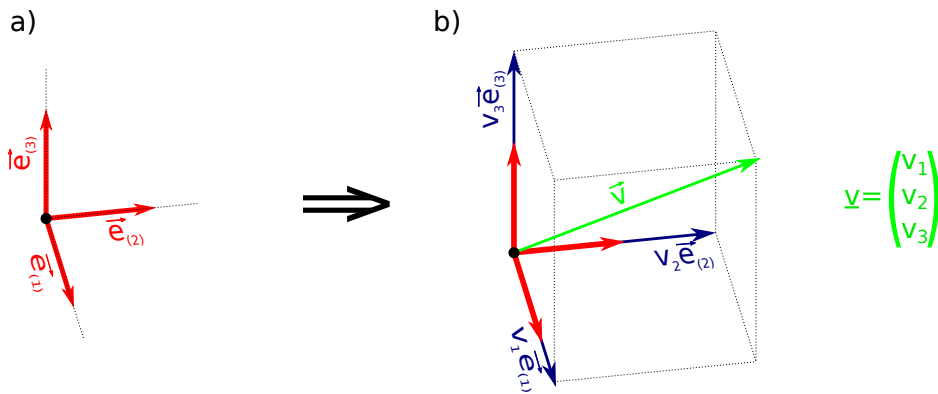
$$\begin{array}{ll} \text{minden } \vec{v}\text{-re:} & \vec{v} = v_1 \cdot \vec{e}_{(1)} + v_2 \cdot \vec{e}_{(2)} + v_3 \cdot \vec{e}_{(3)} \\ \text{vagy másképp:} & \vec{v} = v_x \cdot \vec{e}_{(x)} + v_y \cdot \vec{e}_{(y)} + v_z \cdot \vec{e}_{(z)} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad v_1, v_2, v_3 \text{ egyértelműek.}$$

Áttekinthetőbb, ha szummajelet használunk. (Figyeljünk: a szummában „futó index” éppen az 1, 2, 3 számokon fut végig, ami az x , y , z irányoknak felel meg). Az előző tehát ezzel felírva:

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^3 v_k \vec{e}_{(k)}.$$

4. Úgy is mondhatjuk, hogy **ha kijelöltük** a három $\vec{e}_{(1)}$, $\vec{e}_{(2)}$, $\vec{e}_{(3)}$ vektorból álló **bázisunkat**, akkor **minden $\vec{v}$ vektorhoz** kölcsönösen egyértelműen hozzárendelődik **egy számhármass**: a

⁴⁷A későbbi fejezetekben majd foglalkozunk azzal, hogy mi történik, ha mégis egy másik ilyen vektor-hármaszt szeretnénk választani.



11. ábra. Ortogonális bázis illusztrációja: a.) a bázis, b.) vektor felbontása a bázisban.

lineáris kombináció együtthatói. Ezeket a $\vec{v}$ vektornak a bázisunkra vonatkozó **komponenseinek** is hívjuk. Sokszor ezeket oszlop formájában írjuk, és egyelőre (hogy megkülönböztessük a jelölésben) ezt a számhármast oszlopot a vektor betűjével, de aláhúzással jelöljük. Tehát:

$$\begin{array}{l} \vec{e}_{(1)}, \vec{e}_{(2)}, \vec{e}_{(3)} \\ \text{adott bázis} \end{array} \Rightarrow \vec{v} = \sum_{k=1}^3 v_k \vec{e}_{(k)}, \quad \Rightarrow \quad \underline{v} \equiv \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad \underline{v} \text{ és } \vec{v} \text{ meghatározzák egymást.}$$

A 11. ábra szemlélteti vektoroknak ortogonális bázisban való kifejtését.

- Mik maguknak a bázisvektoroknak a komponensei? Könnyen kitalálhatjuk, hogy

$$\underline{e}_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

hiszen éppen ezekkel az egyszerű együtthatókkal lehet önmagukat lineárkombinációval megkapni.

- Egy **vektor** ($\vec{v}$) és az adott bázisban őt meghatározó **számoszlop** ($\underline{v}$) **nem ugyanazok**, noha adott bázis esetén kölcsönösen meghatározzák egymást⁴⁸. Lesz majd olyan kérdéskör is (és kapunk rá szabályokat), hogy ha egy vektort a komponenseivel megadunk, akkor ha áttérünk egy *másik* bázisra, akkor mik lesznek ennek az *adott vektornak* a komponensei az új bázis szerint. Nyilván két különböző bázisban nem ugyanaz a számhármast felel meg ugyanannak a térben rögzített vektornak. A **vektor** maga a választott **koordinátarendszertől** (azaz: a bázistól) **függetlenül** létezik és egyértelmű, a komponensek számhármasa nem.

- Előkerül majd a fordított kérdés is: egy adott bázisban valahogyan (esetleg homályosan a „tér-irányokhoz” kapcsolódóan) kiszámolunk három számot; a kérdés az lesz, hogy „ezek vektort alkotnak-e”. Vagyis: létezik-e egy egyértelműen meghatározott térbeli vektor, aminek éppen a kiszámolt számok (három darab) a komponensei. Megint másképp: esetleg ezeket a „vektor”komponenseket csak a bázisra hivatkozva tudtuk kiszámítani, mégis vajon az így kapott „vektor” létezik-e a koordinátarendszertől függetlenül is, azaz tényleg vektor-e⁴⁹. Ehhez az kell, hogy vala-

⁴⁸Ha majd később rutinosabbak leszünk, elhagyjuk a jelölésbeli különbséget közöttük: nyomtatásban általában a háromdimenziós térbeli vektorokat félkövér szedéssel különböztetjük meg, írásban pedig aláhúzással és kész.

⁴⁹Csak az, hogy lett három szám egy adott bázisban, nem elég. *Bármilyen három „szám”* (mérési vagy számolási eredmény) nem alkot fizikailag értelmes vektort; olyat, hogy ha a számhármastunkat másik koordinátarendszerben

hogy bizonyítsuk, hogy ha bármilyen másik bázisban számoltunk volna, akkor éppen olyan (másik) számhármast kaptunk volna, ami úgy kapcsolódik az eredeti számhármashoz, mint ahogy valódi vektorok esetén kell. Ekkor biztosak lehetünk majd, hogy igazi vektorral állunk szemben.

- A három vektor, amit bázisnak kijelöltünk, még egyebet is tud. Nevezetesen: hosszuk egységnyi:

$$\vec{e}_{(1)}, \quad \vec{e}_{(2)}, \quad \vec{e}_{(3)} : \quad |\vec{e}_{(1)}| = 1, \quad |\vec{e}_{(2)}| = 1, \quad |\vec{e}_{(3)}| = 1.$$

Továbbá: bármelyik bármelyik másikkal merőleges. Ezt (és a hosszakat is) egységesen felírhatjuk a már bevezetett *skalárszorítás* műveletére hivatkozva. A következő táblázatban felírjuk bármelyik bázisvektorunk bármelyik másikkal vett skalárszorzatát. Ellenőrizzük ezeket!

$$\begin{array}{lll} \vec{e}_{(1)} \cdot \vec{e}_{(1)} = 1, & \vec{e}_{(1)} \cdot \vec{e}_{(2)} = 0, & \vec{e}_{(1)} \cdot \vec{e}_{(3)} = 0, \\ \vec{e}_{(2)} \cdot \vec{e}_{(1)} = 0, & \vec{e}_{(2)} \cdot \vec{e}_{(2)} = 1, & \vec{e}_{(2)} \cdot \vec{e}_{(3)} = 0, \\ \vec{e}_{(3)} \cdot \vec{e}_{(1)} = 0, & \vec{e}_{(3)} \cdot \vec{e}_{(2)} = 0, & \vec{e}_{(3)} \cdot \vec{e}_{(3)} = 1. \end{array} \quad (4.1)$$

Itt az indexek helyére 1, 2, 3-at írtam, de írhattunk volna x, y, z -t is. Ez a táblázat tehát tartalmazza azt is, hogy a választott bázisvektorok egységnyi hosszúak: önmagukkal vett skalárszorzatuk 1, illetve azt is, hogy bármelyik bármelyik másikkal merőleges (ott a skalárszorzat nulla). Továbbá kicsit túl bőbeszédűen pl. $\vec{e}_{(1)} \cdot \vec{e}_{(2)}$ -t kétféle sorrendben is felírtuk; nem kellett volna, hiszen a skalárszorítás kommutatív. Mégis; így áttekinthetőbb lett a táblázat.

- Utolsó „programpont” a vektorszorzatok kiszámolása. Itt már fontos lesz, hogy $\vec{e}_{(1)}$, $\vec{e}_{(2)}$ és $\vec{e}_{(3)}$ jobbsodrású rendszer. Mindegyik vektor mindegyikre merőleges, úgyhogy két különböző bázisvektorunk vektorszorzata a harmadik irányába mutat, nagysága egységnyi lesz. (Az egységoldalú négyzet mint paralelogramma területe 1). A következő táblázatban megint az összes lehetőséget felsoroljuk (az áttekinthetőségért vállalva, hogy kétszer annyit írunk). Ellenőrizzük le ezt is!

$$\begin{array}{lll} \vec{e}_{(1)} \times \vec{e}_{(1)} = \vec{0}, & \vec{e}_{(1)} \times \vec{e}_{(2)} = \vec{e}_{(3)}, & \vec{e}_{(1)} \times \vec{e}_{(3)} = -\vec{e}_{(2)}, \\ \vec{e}_{(2)} \times \vec{e}_{(1)} = -\vec{e}_{(3)}, & \vec{e}_{(2)} \times \vec{e}_{(2)} = \vec{0}, & \vec{e}_{(2)} \times \vec{e}_{(3)} = \vec{e}_{(1)}, \\ \vec{e}_{(3)} \times \vec{e}_{(1)} = \vec{e}_{(2)}, & \vec{e}_{(3)} \times \vec{e}_{(2)} = -\vec{e}_{(1)}, & \vec{e}_{(3)} \times \vec{e}_{(3)} = \vec{0}. \end{array} \quad (4.2)$$

4.2. Kronecker-delta, Lévi-Civita-szimbólum, indexes írásmód

- Az előző két táblázat, amelyben a bázisvektorok skalár- ill. vektorszorzatait felsoroltuk, olyanra áttekinthető, és olyan sokszor előkerül, hogy külön jeleket vezettek be rájuk. Az első az ún. **Kronecker-delta** nevű⁵⁰ szimbólum, δ_{kl} . Ennek két indexe van (itt éppen k és l), most ezek mindegyike az 1,2,3 (azaz: x, y, z) akármelyikét jelentheti. Tehát ez a δ_{kl} szimbólum itt $3 \times 3 = 9$ darab számot tömörít. Mégpedig konkrétan a következőket:

$$\text{Kronecker-delta: } \delta_{kl} := \begin{cases} 1, & \text{ha } k=l \quad (\text{azaz: } k=l=1, \text{ vagy } k=l=2, \text{ vagy } k=l=3), \\ 0, & \text{ha } k \neq l \quad (\text{azaz az előbb felsoroltakon kívüli esetekben}). \end{cases}$$

Szavakban: a Kronecker-delta értéke 1, ha a két index megegyezik, és nulla, ha nem.

- A vektorszorzatok tömör leírásához pedig az ún. **Lévi-Civita-szimbólum**, ε_{klm} jön jól. Ennek három indexe van (ezek voltak itt a k, l, m). Mindegyik index 1,2,3 (vagyis: x, y, z) lehet, tehát

számolnánk ki, pont azt a másik három számot kapnánk, ami ennek a valódi „vektornak” a másik bázisban megfelelő.

⁵⁰Főleg régebbi könyvekben időnként *Weierstrass-szimbólum* néven is előkerül.

az ε_{klm} összesen 27 darab számot „tömörít”. Ezek:

$$\text{Lévi-Civita-szimbólum: } \varepsilon_{klm} = \begin{cases} 1, & \text{ha } (k, l, m) = (1, 2, 3) \text{ vagy } (2, 3, 1) \text{ vagy } (3, 1, 2), \\ -1, & \text{ha } (k, l, m) = (1, 3, 2) \text{ vagy } (2, 1, 3) \text{ vagy } (3, 2, 1), \\ 0 & \text{egyébként, azaz ha } k=l, k=m, \text{ vagy } l=m. \end{cases}$$

Szavakban: az ε_{klm} Lévi-Civita-szimbólum értéke 0, ha bármelyik kettő index megegyezik, +1, ha a k, l, m indexek értékei ilyen sorrendben az 1, 2, 3 számok valamely páros permutációja, és -1, ha a k, l, m indexek értékei az 1, 2, 3 számok páratlan permutációja; több lehetőség nincs is.

• A Kronecker-deltával tehát a választott bázisvektoraink skalárszorzatait a fentebbi táblázatot tömörítve így írhatjuk:

$$\vec{e}_{(k)} \cdot \vec{e}_{(l)} = \delta_{kl}, \quad \text{minden } k, l \text{ esetén.} \quad (4.3)$$

A vektorszorzatokat pedig a Lévi-Civita-szimbólummal írhatjuk fel, a következőképpen:

$$\vec{e}_{(k)} \times \vec{e}_{(l)} = \sum_{m=1}^3 \varepsilon_{klm} \vec{e}_{(m)}, \quad \text{minden } k, l \text{ esetén.} \quad (4.4)$$

Ellenőrizzük, hogy tényleg igaz ez a képlet! (Segít, ha felidézzük, hogy a ε_{klm} -mel jelölt 27 darab szám között sok a nulla: ε_{klm} mindig nulla, amikor bármelyik két index értéke megegyező.) Esetleg felmerül, hogy nem lehetett-e volna „valami egyszerűbb szimbólumot” bevezetni a vektorszorzás leírására, de némi gondolkodás után majd megnyugszunk, hogy gyakorlatilag nem.

• Sokszor előkerül még ilyen **indexes írásmód**, mint az előző kettő. A (szokásosan a latin ábécé közepe tájáról vett) betűk indexeket jelölnek. Ezekről „a problémakör elején” megállapodunk, hogy milyen értékeken futhatnak végig: itt most minden index ugyebár az 1, 2, 3 értékeket (x, y, z) veheti fel. Figyeljünk fel a képletek szerkezetére: **kétféle index** fordul elő. Az egyik ugyanolyan jelű az egyenlőség két oldalán: ezek különböző értékeinek tulajdonképpen annyiféle különböző képlet felel meg, ahányféleképpen ezeket kioszthatjuk (pl. ugyebár a (4.3) egyenlet ilyen módon $3 \cdot 3 = 9$ egyenletet ír le egy füst alatt); az ilyen indexeket szokás a képletben „**szabad index**” névvel illetni. A másik fajta index olyan, amire összegezni kell: ennek betűjele bármi lehet; a jel csak azt tömöríti, hogy a (szummával kijelölt) összegzéskor hova kell ugyanazt az index-értéket írni: ezek az „**összegzőindex**” névre hallgatnak. A (4.3) skalárszorzatot Krokecker-deltás képletben nincs összegzőindex, a (4.4) Lévi-Civita-szimbólumos képletben a felírt alakban a k, l a szabad indexek, az m összegzőindex.

• Az indexes írásmódban tehát akkor lehet „helyes” egy képlet, ha

- 1) a **szabad indexek** a két oldalon „**ugyanúgy**” (ugyanannyian, ugyanannyiszor) fordulnak elő,
- 2) az **összegzőindexek** jele bármelyik **szabad indextől különbözik**.

Nemsokára látjuk, hogy gyakorlatilag nagyon sokszor (a mostani „Vektorszámítás” órán mindig) hozzávehetjük azt is, hogy minden **szabad index** mindkét oldalon **pontosan egyszer** fordul elő.

Ezek tiszteletben tartása mellett azonban bármilyen konkrét jelet választhatunk az indexekre: például az iménti vektorszorzásos képletet felidézve az **alábbi képletek**:

$$\vec{e}_{(k)} \times \vec{e}_{(l)} = \sum_{m=1}^3 \varepsilon_{klm} \vec{e}_{(m)}, \quad \vec{e}_{(k)} \times \vec{e}_{(l)} = \sum_{p=1}^3 \varepsilon_{klp} \vec{e}_{(p)}, \quad \vec{e}_{(m)} \times \vec{e}_{(n)} = \sum_{q=1}^3 \varepsilon_{mnq} \vec{e}_{(q)}$$

hajszálpontosan **ugyanazt jelentik**: csak az indexek jelölését változtattam. *Figyeljünk*: az első

felírt alakban az m összegzőindex, az utolsóban viszont az egyik szabad indexet jelöltem m -mel: nem gond, mindegyik egyenlet *önmagában* nézve szintaktikaikag helyes, és mindegyik pontosan ugyanazt a 9 darab összefüggést „tömöríti”, melyeket fentebb, a (4.2) képletben írtunk ki teljes részletességgel. Már ennyiből is látszódhat, hogy az indexes képleteket egyszerűbb felírni, és egy kis gyakorlattal kezelni is sokkal egyszerűbb lesz, mint az összes lehetőséget egyenként kijelölni.

4.3. Vektorműveletek reprezentációja

A vektoroknak tehát adott bázisban számhármassokat feleltettünk meg; ezt úgy mondjuk, hogy a vektorainkat *reprezentáljuk*. (A szó jelentése kb.: „ábrázoljuk”; jobb megtartani a latinos elnevezést, mert specifikusabbat takar.) Az „ábrázolni” itt azt jelenti, hogy egy „elvontabb” dolgot (a térbeli vektort, $\vec{v}$ -t) „konkrétabb”, „könnyebben kezelhető”, „kézzelfoghatóbb” dologgal (egy számhármassal, $\underline{v}$ -vel) helyettesíthetjük, amivel pl. könnyebb lesz számolni. Lássuk, hogyan.

• Kezdjük az **alapvető vektortér-műveletekkel**: az összeadással és a számmal szorzással. Nem nagy misztérium, hogy egy vektor $\vec{v}$ számszorosának reprezentációja a „számhármassal szorozosa”, azaz a komponenseket egyenként szorozni kell, így:

$$\begin{array}{ll} \text{Ha } \vec{v}\text{-nek megfelel } \underline{v}, & \text{Itt ugye: } \underline{v} \equiv \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \text{és} \quad \lambda \underline{v} \equiv \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \end{pmatrix}. \\ \text{akkor } \lambda \vec{v}\text{-nek megfelel } \lambda \underline{v}. & \end{array} \quad (4.5)$$

• Figyeljünk! Az, hogy mit jelent egy számhármassal ($\underline{v}$) számszorosa, azaz $\lambda \cdot \underline{v}$, azt tulajdonképpen most vezettük be. Az viszont már, hogy a számmal szorzott vektornak, $\lambda \vec{v}$ -nek megfelelő számhármassal éppen $\lambda \underline{v}$, szükségszerű következtetés. Valóban: az, hogy $\vec{v}$ -nek megfelel $\underline{v}$, éppen azt jelenti, hogy $\vec{v}$ -t az $\underline{v}$ -ben szereplő együtthatókkal fejezhetjük ki a bázisunkban:

$$\vec{v} \Leftrightarrow \underline{v} \text{ jelentése: } \vec{v} = \sum_{k=1}^3 v_k \vec{e}_{(k)}, \quad \text{ekkor nyilván} \quad \lambda \vec{v} = \lambda \sum_{k=1}^3 v_k \vec{e}_{(k)} = \sum_{k=1}^3 (\lambda v_k) \vec{e}_{(k)}.$$

Emögött végülis a vektorok számmal szorzásának vektorösszeadásra vonatkozó disztributív tulajdonsága áll: a számmal szorzást lehetett komponens-vektoronként csinálni. Figyeljük meg azt is, hogy a szummajelet már „fejben” az összegzéssel helyettesítettük: az is a szorzás disztributivitásának megnyilvánulása, hogy „a szummajelet kiemelhetjük”.

• A vektorösszeadás is egyszerű: mivel a vektorösszeadás asszociatív, mindegy, hogy előbb az $\vec{a}$ és a $\vec{b}$ vektorokat összerakjuk komponensekből, és aztán adjuk össze őket, vagy előbb a komponenseket egyenként összeadjuk, majd az így kapott komponensekből rakjuk össze az eredményvektort:

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^3 a_k \vec{e}_{(k)}, \quad \vec{b} = \sum_{k=1}^3 b_k \vec{e}_{(k)} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} + \vec{b} = \sum_{k=1}^3 a_k \vec{e}_{(k)} + \sum_{k=1}^3 b_k \vec{e}_{(k)} = \sum_{k=1}^3 (a_k + b_k) \vec{e}_{(k)}. \quad (4.6)$$

Számhármassok nyelvén tehát:

$$\text{az } \vec{a} + \vec{b} \text{ vektornak az } \underline{a} + \underline{b} \text{ számhármassal felel meg, ahol } \underline{a} + \underline{b} \equiv \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Megint: számhármassok összegét most értelmeztük (elég nyilvánvaló módon), és állítjuk tehát, hogy vektorok összeadása a számhármassok összeadásával reprezentálódik.

• Vegyük most szemügyre a **skalárszorzást**. Komponenses alakban (reprezentálva) két vektort (mondjuk $\vec{u}$ -t és $\vec{v}$ -t) könnyedén kiszámítjuk a skalárszorzatukat. Messzemenőig kihasználjuk, hogy a skalárszorzás a vektorösszeadásra nézve disztributív, és a számmal szorzás is „kiemelhető” belőle: ez ugye azt jelenti, hogy a „lineáris kombinációt kiemelhetjük” a skalárszorzatból, más szóval: tagonként végezhetjük a skalárszorzást. Két vektor skalárszorzata tehát:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_1 \vec{e}_{(1)} + a_2 \vec{e}_{(2)} + a_3 \vec{e}_{(3)}) (b_1 \vec{e}_{(1)} + b_2 \vec{e}_{(2)} + b_3 \vec{e}_{(3)}) = \\ &= a_1 b_1 \vec{e}_{(1)} \vec{e}_{(1)} + a_1 b_2 \vec{e}_{(1)} \vec{e}_{(2)} + a_1 b_3 \vec{e}_{(1)} \vec{e}_{(3)} + \\ &+ a_2 b_1 \vec{e}_{(2)} \vec{e}_{(1)} + a_2 b_2 \vec{e}_{(2)} \vec{e}_{(2)} + a_2 b_3 \vec{e}_{(2)} \vec{e}_{(3)} + \\ &+ a_3 b_1 \vec{e}_{(3)} \vec{e}_{(1)} + a_3 b_2 \vec{e}_{(3)} \vec{e}_{(2)} + a_3 b_3 \vec{e}_{(3)} \vec{e}_{(3)} = \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \end{aligned}$$

Egyszerű eredményt kaptunk! Még egyszer leírom, indexes jelölést és a szummajelet használva:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(\sum_{k=1}^3 a_k \vec{e}_{(k)} \right) \left(\sum_{l=1}^3 b_l \vec{e}_{(l)} \right) = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 a_k b_l \vec{e}_{(k)} \vec{e}_{(l)} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 a_k b_l \delta_{kl} = \sum_{k=1}^3 a_k b_k.$$

• Figyeljünk megint az indexes jelölés szépségeire! Először is: tömörebb⁵¹. További megfigyelni-valók: az, hogy a szummajelet ki-be vihetem szorzásból, tulajdonképpen a *számok* műveleti tulajdonságainak (szorzás disztributivitása, összeadás kommutativitása, stb.) megnyilvánulása. Arra is figyeljünk, ami **később is előkerül**, hogy hogyan kell **Kronecker-delta indexeire összegezni**: mivel ennek értéke csak akkor nem nulla (és akkor 1), amikor a két index megegyezik, a Kronecker-delta mintegy „kakukk módjára” működik: a szabadon maradt indexét „behelyettesíti” a másik, összegzett index helyére mindenhova:

$$\sum_{l=1}^3 \delta_{kl} A_{...l...} = A_{...k...}, \quad (4.8)$$

ahol itt most $A_{...}$ akármilyen vektorkomponensek akármilyen indexeket tartalmazó szorzata; ebben a többi index helyben marad, a benne szereplő l index, amire összegzünk, a k -val helyettesítődik.

• **Jegyezzük meg tehát** a skalárszorzás komponensekkel való elvégzésére kapott végeredményt:

$$\underline{a} \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} \equiv \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{k=1}^3 a_k b_k.$$

Ha akarjuk, jelölhetjük $\underline{a} \cdot \underline{b}$ -vel, vagy egyszerűen $\underline{a} \underline{b}$ -vel is a mintegy most értelmezett számhármasskalárszorzatot: $\underline{a} \underline{b} \equiv a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

• Speciálisan, egy vektor önmagával vett skalárszorzata *tényleg* a vektor hosszának négyzete:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2. \quad \text{ez tényleg } |\vec{a}|^2, \text{ a Pitagorasz-tétel szerint.}$$

Még jó, hogy ez most is kijött. Néha *vektor négyzetén* az önmagával vett skalárszorzatát értik: ez tehát egy szám, és ez éppen a hosszának a négyzete.

⁵¹Tetézve: ha netán nem három, hanem „sokdimenziós” térben dolgoznánk, látszik, hogy az indexes levezetés ugyanígy működne, csak nem 1-től 3-ig, hanem 1-től sokig futnának az indexek.

• Számolási szabályt kaptunk tehát a skalárszorzat kiszámítására. Egy egyszerű alkalmazás (gyakorlasként számtalan hasonlót kigondolhatunk): határozzuk meg a kocka egy csúcsából induló két (különböző lapon menő) lapátlójának α szögét! Válasz: három ilyen lapátló egy (a kockát térben keresztbe átnyeső) szabályos háromszöget alkot, úgyhogy biztos $\alpha=60^\circ$ két ilyen átló szöge. Ehhez azonban „gondolkodni” kellett, éppen ezt akarjuk „megspórolni”. Legyen ezért egységoldalú a kocka, ekkor az egy csúcsból induló élvektorok vehetők az $\vec{e}_{(x)}$, $\vec{e}_{(y)}$, $\vec{e}_{(z)}$ egységvektoroknak. Ekkor két, pl. az x - z síkban ill. az y - z síkban menő lapátlót megadó vektor:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} |\underline{v}| &= \sqrt{\underline{v} \cdot \underline{v}} = \sqrt{2}, \\ |\underline{w}| &= \sqrt{\underline{w} \cdot \underline{w}} = \sqrt{2}, \\ \underline{v} \cdot \underline{w} &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\underline{v} \cdot \underline{w}}{|\underline{v}| |\underline{w}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

Megkaptuk az eredményt. Bonyolultabb esetben (pl. a dodekaéder lapátlóinak szögét számolva) már sokkal inkább a „gépies” módszer a célravezető.

• Térjünk át a **vektorszorzásra**. Itt is az a kérdés, hogy ha adottak az $\vec{a}$ és a $\vec{b}$ vektor komponensei, hogyan határozzuk meg az eredmény, $\vec{a} \times \vec{b}$ komponenseit. Most már végig indexeszen számolunk. Felírjuk a vektorainkat a bázisvektorok lineáris kombinációjaként:

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^3 a_k \vec{e}_{(k)}, \quad \vec{b} = \sum_{l=1}^3 b_l \vec{e}_{(l)} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \left(\sum_{k=1}^3 a_k \vec{e}_{(k)} \right) \left(\sum_{l=1}^3 b_l \vec{e}_{(l)} \right).$$

Fontos megjegyzés: vigyázat, egy képletben egy összegzőindex nem szerepelhet „kétféle összegzésre”! Amikor a $\vec{a}$ -t és a $\vec{b}$ -t itt külön-külön felírjuk indexezett összeggel, nem baj, ha mindkettőben k -t írunk, hiszen két különböző képletről van szó. Amint azonban ezeket egy képletbe rakjuk, **nem szabad ugyanazzal** jelölni a két összegzőindexet! Ezért cseréltem le az egyiket l -re: így rendben lesz a képlet, külön-külön „fut” k és l , külön-külön kell mindkettőre összegezni.

Tovább haladva: kihasználjuk, hogy ahogyan a skalárszorzatból, a vektorszorzatból is „kiemelhető” a lineáris kombináció képzése, azaz: összeg, számszoros vektorszorzottja a vektorszorzottak összege, számszorosa. Tudjuk továbbá (felírtuk a Lévi-Civita-szimbólum segítségével) a bázisvektoraink, a $\vec{e}_{(k)}$ -k vektorszorzatait. Ezeket összerakva az adódik, hogy

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 a_k b_l (\vec{e}_{(k)} \times \vec{e}_{(l)}) = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 a_k b_l \left(\sum_{m=1}^3 \varepsilon_{klm} \vec{e}_{(m)} \right) = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \varepsilon_{klm} a_k b_l \vec{e}_{(m)}.$$

Ahhoz, hogy kellemes alakban kapjuk ezt a képletet, emlékezzünk, hogy ha ε_{klm} indexeinek páros permutációját vesszük, az érték nem változik, így $\varepsilon_{klm} \rightarrow \varepsilon_{mkl}$ átírást tehetjük. Ezután az összegzőindexeket $(klm) \rightarrow (lmk)$ módon átjelölhetjük⁵². Ezzel:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \varepsilon_{mkl} a_k b_l \vec{e}_{(m)} = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{klm} a_l b_m \vec{e}_{(k)} = \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \varepsilon_{klm} a_l b_m \right) \vec{e}_{(k)}.$$

Az utolsó egyenlőségben pedig a *szummák sorrendjét* cseréltük meg, amit az összeadás (számoké és vektoroké is) kommutativitása miatt tehetek meg. Továbbá „kiemeltünk”: amit kaptunk, az

⁵² Ez az átjelölhetőség ugyebár csak annyit mond, hogy az összegzőindexeket akármilyen betűvel jelölhetjük, lényeg, hogy különböző összegekhez különböző indexek tartozzanak.

a bázisvektorok lineáris kombinációja (k -ra vett összeggel kijelölve), a nagy zárójelben lévő (egy darab k szabad indexet hordozó) együtthatókkal. Ezek tehát a vektorszorzat komponensei. Ha (kissé pongyola módon) $\underline{a} \times \underline{b}$ módon jelöljük a vektorszorzat eredményét megadó számhármast, akkor tehát azt írhatjuk, hogy

$$(\underline{a} \times \underline{b})_k = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \varepsilon_{klm} a_l b_m.$$

Ugyebár a képletben: k szabad index, l és m összegzőindexek. Konkrétan is érdemes felírni az eredmény„vektort” (azaz: számhármast) úgy, hogy konkrétan visszaidézzünk ε_{klm} értékeit (mind a 27-et, amiből csak 6 darab nem nulla). Megjegyezhető „ritmusú” képlet adódik, jegyezzük is meg:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{a} \times \underline{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Így tehát kényelmesen kiszámíthatjuk akármilyen (derékszögű bázisban vett komponensekkel adott) vektorok vektorszorzatát.

4.4. További műveletek, kétszeres vektorszorzás, vegyesszorzat

- Egy fontos **kiegészítés** a skalárszorzáshoz: ha adott egy vektor, akkor annak egy **komponensét** (mivel a bázisunk **ortogonális**) úgy kapjuk, hogy a megfelelő **bázisvektorral** **skalárszorzunk**:

$$\text{Ha } \vec{v} = \sum_{k=1}^3 v_k \vec{e}_{(k)}, \quad \text{akkor } v_k = \vec{v} \cdot \vec{e}_{(k)}.$$

Ez a geometriai jelentésből (vetület nagysága) teljesen nyilvánvaló, de lássuk be „algebrailag” is:

$$\vec{v} \cdot \vec{e}_{(k)} = \left(\sum_{l=1}^3 v_l \vec{e}_{(l)} \right) \cdot \vec{e}_{(k)} = \sum_{l=1}^3 v_l (\vec{e}_{(l)} \cdot \vec{e}_{(k)}) = \sum_{l=1}^3 v_l \delta_{kl} = v_k, \quad \text{tényleg.}$$

Közben ugye figyeltünk: ha k a szabad index, mással kellett jelölni az összegzőindexet. Az eredmény nem tűnik nagy dobásnak, mégis jegyezzük meg: fontos dolgok kezdőpontja lesz.

- Korábban ígértük, hogy visszatérünk a kétszeres vektorszorzáshoz, aminek az eredménye egy vektor. A következő képletet szeretnénk belátni. **Állítás: akármilyen három vektorra**

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}. \quad (4.9)$$

Itt a zárójelekben skalárszorzatok vannak, ezek eredményével (számokkal) szorozzuk $\vec{b}$ -t ill. $\vec{c}$ -t.

Emlékezzünk a geometriai jelentésre: $\vec{b} \times \vec{c}$ ugye $\vec{b}$ -re és $\vec{c}$ -re is merőleges, tehát ennek akármilyen harmadik vektorral (itt $\vec{a}$ -val) való vektorszorzata biztosan újra a $\vec{b}$ és a $\vec{c}$ síkjába fog esni. Éppen ilyen képletet írtunk fel, ami az $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ -t megadja mint $\vec{b}$ és $\vec{c}$ lineáris kombinációját. Ez tehát érthető szemléletesen; azt viszont, hogy mi szerepel az együtthatók helyén, már elég nehézkes lenne „kitalálni”⁵³. Indexes, komponensenkénti számolással viszont célhoz érünk.

⁵³ Bár azt, hogy az eredmény mindkét tagja mindhárom vektort *lineárisan* kell, hogy tartalmazza, azt megsejt-hetjük, mivel a bal oldal is ilyen szerkezetű; ezzel azonban még nem sokra megyünk.

- Először lássuk be a következő összefüggést:

$$\sum_{m=1}^3 \varepsilon_{klm} \varepsilon_{mpq} = \delta_{kp} \delta_{lq} - \delta_{kq} \delta_{lp}, \quad \text{minden } k, l, p, q\text{-ra.} \quad (4.10)$$

Ezt a képletet érdemes jól megjegyezni. Figyeljük meg a szerkezetét: van négy szabad index (itt k, l, p és q voltak), tehát a fenti képlet összesen $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ darab összefüggést foglal magában. A bal oldalon m az összegzőindex, ugyebár 1-től 3-ig fut. Az index-kiosztás a jobb oldalon nagyon „kellemes”: minden egyszer szerepel, és k, l , illetve p és q pont egyszer sincs „párban”: nyilván, mivel a bal oldalon a k és az l kicserélésére antiszimmetrikus a kifejezés (csak úgy, mint a p és a q kicserélésére).

Ami a (4.10) képlet **bizonyítását** illeti: **végig kell nézni** mind a 81 lehetőséget (minden lehetőség a bal oldalon egy háromtagú összeg, a jobb oldalon pedig a két Kronecker-delta-szorzat különbsége). Egyszer az életben érdemes végigcsinálni.

- Tudva most már a fentebbi (4.10) képletet **komponensekben kiszámíthatjuk** $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ -t. Indexesen számolunk; most már rutinszerűen alkalmazzuk a korábban látott trükköket, de azért gondoljunk jól végig minden egyes egyenlőségjelet, hogy ott mit is használtunk ki, miért igaz az:

$$\begin{aligned} (\underline{a} \times (\underline{g} \times \underline{c}))_k &= \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \varepsilon_{klm} a_l (\underline{g} \times \underline{c})_m = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \varepsilon_{klm} a_l \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 \varepsilon_{mpq} b_p c_q = \\ &= \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 \varepsilon_{klm} \varepsilon_{mpq} a_l b_p c_q = \sum_{l=1}^3 \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 a_l b_p c_q \left(\sum_{m=1}^3 \varepsilon_{klm} \varepsilon_{mpq} \right) = \\ &= \sum_{l=1}^3 \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 a_l b_p c_q (\delta_{kp} \delta_{lq} - \delta_{kq} \delta_{lp}) = \sum_{l=1}^3 \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 a_l b_p c_q \delta_{kp} \delta_{lq} - \sum_{l=1}^3 \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 a_l b_p c_q \delta_{kq} \delta_{lp} = \\ &= \sum_{l=1}^3 a_l b_k c_l - \sum_{l=1}^3 a_l b_l c_k = b_k \left(\sum_{l=1}^3 a_l c_l \right) - c_k \left(\sum_{l=1}^3 a_l b_l \right) = (\vec{a} \vec{c}) b_k - (\vec{a} \vec{b}) c_k. \end{aligned}$$

Tényleg kijött k -adik komponensnek az állításban szereplő eredményvektor k -adik komponense.

- Még egyszer felírjuk az eredményt, és azt a képletet is, amikor „a másik kettő” vektor vektorszorzatát végezzük el először:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \vec{b}) \vec{c}, \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \vec{c}) \vec{b} - (\vec{c} \vec{b}) \vec{a}. \quad (4.11)$$

Persze nyilván általában nem ugyanaz a kettő. A második képletet nem kell újra levezetni; a vektorszorzás antikommutativitását használva visszavezethető az elsőre⁵⁴.

Megjegyezni (memorizálni) úgy lehet ezeket, hogy

- 1) kéttagú kifejezések, „plusz” és „mínusz”,
- 2) minden tagban minden „induló” vektor egyszer szerepel,
- 3) a „belső vektorszorzat” két tényezőjének lineárkombinációját kell kapjuk, és
- 4) a „középsőnek felírt” vektor-tag van + előjellel.

Ez mindkét alakra vonatkozik.

⁵⁴Tényleg: $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = -\vec{c} \times (-\vec{b} \times \vec{a}) = -\vec{c} \times (-\vec{b} \times \vec{a})$, ez pedig már az első képletéhez hasonló alakú: ha erre azt alkalmazzuk, megkapjuk a $-\vec{c} \times (-\vec{b} \times \vec{a})$ -re vonatkozó eredményt.

• Vegyük röviden szemügyre a **vegyesszorzást**! Hogyan számítanánk ki a komponensekből három vektorra $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \dots$ -t, azaz a vegyes szorzatot? Nyilvánvaló, hogy

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \sum_{k=1}^3 a_k \left(\sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \varepsilon_{klm} b_l c_m \right), \quad \text{azaz} \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \varepsilon_{klm} a_k b_l c_m. \quad (4.12)$$

Ha felidézzük a ε_{klm} szimmetriatulajdonságait:

$$\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{mkl} = \varepsilon_{lmk} = -\varepsilon_{kml} = -\varepsilon_{lkm} = -\varepsilon_{mlk}, \quad (4.13)$$

akkor a vegyesszorzatot megadó képletből az indexek átjelölgetésével sorra beláthatjuk, hogy ezek a szimmetriák összecsengenek a vegyes szorzatról korábban mondott tulajdonságokkal (felcseréléskor előjelváltások; mindegy, hova tesszük melyik szorzatot, stb.).

• Konkrétan kiírva (egyszer):

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1. \quad (4.14)$$

Ehhez az alakhoz előre megjegyezzük, hogy képzeljük el az alábbi táblázatot (nemsokára az ilyenek *mátrix* lesz a neve):

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},$$

az egyes tagok a fenti hattagú összegben úgy adódnak, hogy minden lehetséges módon végigmegyünk ezen a táblázaton úgy, hogy egy sorból pontosan egy elemet választunk. A tagban az „érintett” táblázat-elemek szorzata lesz, előjele pedig a végigmenés mint permutáció előjele. Az ilyen konstrukciót ezen *mátrix determinánsának* fogjuk hívni. Nagyon fontos: ez a determináns pontosan akkor nulla, ha a kifeszített paralelepipedon térfogata nulla, azaz akkor, ha a három vektor, $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ lineárisan összefüggnek.

Miközben a műveletek reprezentációját tárgyaltuk, egyre jobban megismerkedtünk az indexes írásmóddal. Megszoktuk, hogy minden összegzőindex (a három térdimenzióknak megfelelően) 1-től 3-ig fut, és azt is megszokhattuk esetleg, hogy a szummajeleket (az összeadás kommutativitása miatt) ide-oda csereberélhetjük; mindegy, milyen sorrendben írjuk őket. Ezért egy kicsit „eleresztjük” magunkat: a következőkben a rendesen kijelölt szummajel helyett csak azt írom oda (több index esetén is egy szummajel íva, hiszen a sorrend mindegy lenne), hogy mik az összegzőindexek. Ezzel a jelöléssel például a vektorszorzat komponenseit megadó képlet:

$$(\underline{a} \times \underline{b})_k = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \varepsilon_{klm} a_l b_m := \sum_{l,m} \varepsilon_{klm} a_l b_m. \quad (4.15)$$

5. Lineáris leképezések

Sokféle vektorokon értelmezett művelettel, függvénnyel találkoztunk már eddig is; most általánosan szemügyre vesszük a vektorokon értelmezett olyan függvényeket, amelyek „illeszkednek” a vektorterekben értelmes összeadáshoz és számmal szorzáshoz, azaz a *lineáris műveletekhez*. Az ilyen függvényeket *lineáris leképezéseknek* fogjuk hívni. Az általános matematikai ismerkedés mellett konkrét érdekességgént néhány geometriai transzformációt is megismerünk közelebbről.

5.1. Lineáris leképezések, operátorok

- A lineáris leképezések fogalmát sugallják pl. a fizikai terünk (részben „hozott anyagként” ismert) geometriai transzformációi: vetítések, forgatások, tükrözések. Ezeket (az origót kijelölve) felfoghatjuk úgy, hogy (hely)vektorokhoz (hely)vektorokat rendelnek. Sok jó tulajdonságuk van, de a legfontosabb közös bennük: egy vektor adott **számszorosához** ill. két vektor **összegéhez** az eredeti eredményvektor(ok) ugyanolyan **számszorosát ill. összegét** rendelik. Ezek a transzformációk tehát „kicserélhetők” a lineáris műveletekkel (vektorösszeadással és számmal szorzással).
- Ezen a nyomon elindulva vezetjük be a lineáris leképezések fogalmát, először teljes általánosságban. Megbeszéltük, hogy mit jelent a *vektortér* fogalma; legyen tehát adva két, $\mathbb{V}$ -vel és $\mathbb{W}$ -vel jelölt vektortér (nem is feltétlenül ugyanaz), és tekintsük az olyan függvényeket, amelyek $\mathbb{V}$ -ből $\mathbb{W}$ -be képeznek. Egy ilyen függvényt, A -t **lineáris leképezésnek** hívunk, ha teljesül rá, hogy

$$\begin{aligned} A(\vec{v} + \vec{w}) &= A(\vec{v}) + A(\vec{w}), \\ A(\lambda \cdot \vec{v}) &= \lambda \cdot A(\vec{v}), \end{aligned} \quad \text{bármilyen } \vec{v} \in \mathbb{V}, \vec{w} \in \mathbb{V} \text{ vektorokra és } \lambda \text{ számra.} \quad (5.1)$$

Persze „a legtöbb” $\mathbb{V} \mapsto \mathbb{W}$ függvény nem ilyen, de vektorterek gondolkörében mozogva ezek a legfontosabbak. A $\mathbb{V}$ -ből $\mathbb{W}$ -be menő lineáris leképezések halmazát $\text{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ -vel jelöljük.

- A $\mathbb{V}$ -ből $\mathbb{V}$ -be menő (azaz vektorokhoz ugyanabban a vektortérben lévő vektort rendelő) lineáris leképezéseket **lineáris operátoroknak** hívjuk. Ezek halmazára a tömörebb $\text{Lin}(\mathbb{V})$ jelölést használjuk. Az induló példák ezen a nyelven tehát: ha $\mathbb{V}$ a fizikai terünk, akkor a forgatások, vetítések, tükrözések ezen a $\mathbb{V}$ téren értelmezett lineáris operátorok, azaz $\text{Lin}(\mathbb{V})$ elemei.

- **Jelölések és elnevezések:** szinte soha sem hívjuk „függvényeknek” a lineáris leképezéseket (noha azok); annyira hozzájuk nőtt a specifikusabb név. Vektorokon felvett értéküket (így mondanánk függvényeknél) a geometriai transzformációk nyelvezetéből átvéve úgy mondjuk, hogy „hatnak a vektorra”, az eredményt adva. Ha nem félreérthető, lineáris leképezések vektorokra hatásának jelölésekor elhagyjuk a (függvényeknél szokásos) zárójelet, egyszerűen a vektortól balra írjuk a lineáris leképezés jelét. Végül: ebben a jegyzetben általában lineáris leképezés jelére „kalapot” teszünk⁵⁵.

- Felírjuk még egyszer ezekkel a jelölésekkel a lineáris leképezésekre vonatkozó fentebbi alapkritériumot: egy $A : \mathbb{V} \mapsto \mathbb{W}$ függvény akkor lineáris leképezés, ha

$$\begin{aligned} \hat{A}(\vec{v} + \vec{w}) &= \hat{A}\vec{v} + \hat{A}\vec{w}, \\ \hat{A}(\lambda \cdot \vec{v}) &= \lambda \cdot \hat{A}\vec{v}, \end{aligned} \quad \text{bármilyen } \vec{v} \in \mathbb{V}, \vec{w} \in \mathbb{V} \text{ vektorokra és } \lambda \text{ számra.} \quad (5.2)$$

Figyeljünk jól: összeadás és szorzás jele szerepel többféleképpen is itt, de szigorúan véve mást és mást jelentenek. Pl. az első képletben, $\hat{A}(\vec{v} + \vec{w})$ -ben a zárójelben a $+$ jel a $\mathbb{V}$ -beli vektorösszeadást

⁵⁵Ezek a jelölések nem minden könyvre érvényesek; most az áttekinthetőség kedvéért használjuk őket.

jelenti, a jobb oldalon, $\hat{A}\vec{v} + \hat{A}\vec{w}$ -ben a $+$ jel viszont az érkezői vektortérben, $\mathbb{W}$ -ben értelmezett vektorösszeadást. Hasonlóan a második képletben a $\cdot$ szorzásjel egyszer a $\mathbb{V}$ -ben, egyszer pedig a $\mathbb{W}$ -ben értelmezett "számmalszorozást" jelenti.

- A lineáris leképezések alaptulajdonsága azt is jelenti, hogy lineáris kombinációt is „átemelhetünk” a hatásukon; ez a követelmény ekvivalens a fentebbivel. A szummajellel felírva tehát

$$\hat{A}\left(\sum_{k=1}^N \lambda_k \vec{v}_k\right) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \hat{A}\vec{v}_k, \quad \text{minden } \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \text{vektorokra és } \lambda_1, \lambda_2, \dots \text{számokra.} \quad (5.3)$$

Speciálisan: **elég kéttagú összegre** megkövetelni ennek teljesülését; ha igaznak bizonyul, akkor már biztos, hogy lineáris a leképezésünk, és ekkor az akárhány véges tagú összegre is teljesül az iménti kitétel.

- Függvényeknél fontos tudni az *értelmezési tartományt*. Vajon mi egy adott $\mathbb{V}$ vektortérből induló, azaz $\text{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ -beli lineáris leképezések értelmezési tartománya? Geometriai transzformációkra gondolva mintha fel sem merülne a kérdés: forgatások, vetítések, tükrözések (persze, hogy) mindenhol értelmezettek, hiszen minden vektornak van elforgatottja, tükrözöttje, vetítettje. Nemsokára (szép lassan majd) világossá válik, hogy ha az indulási vektortér, $\mathbb{V}$ **véges dimenziós**, akkor egy $\hat{A} \in \text{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ **lineáris leképezés** mindenhol, az **egész $\mathbb{V}$ -n értelmezhető**. A továbbiakban tehát természetes módon úgy vesszük, hogy lineáris leképezések mindenhol értelmezve vannak⁵⁶.

- Adott lineáris leképezésekből újabbakat lehet „gyártani”. Legyen adva két lineáris leképezés, $\hat{A}$ és $\hat{B}$, amelyek ugyanabból a vektortérből ugyanabba képeznek, azaz $\text{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ elemei. Minden $\vec{v} \in \mathbb{V}$ indulási térbeli vektorhoz létezik tehát $\hat{A}\vec{v}$, és $\hat{B}\vec{v}$, és akkor már létezik ezek ($\mathbb{W}$ -beli) vektor-összege, $\hat{A}\vec{v} + \hat{B}\vec{v}$ is. Tudva $\hat{A}$ -t és $\hat{B}$ -t, minden $\vec{v} \in \mathbb{V}$ vektorhoz hozzárendelhetjük $\hat{A}\vec{v} + \hat{B}\vec{v}$ -t, amivel végső soron $\hat{A}$ és $\hat{B}$ „felhasználásával” egy újabb $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ leképezést kapunk. Hasonlóan, ha adott egy λ szám és egy $\hat{A} \in \text{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ lineáris leképezés, akkor minden $\vec{v} \in \mathbb{V}$ -hez hozzárendelhetjük $\lambda \cdot \hat{A}\vec{v}$ -t, így is egy $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ leképezést értelmeztünk a λ szám és a $\hat{A}$ leképezés felhasználásával.

- **Értelmezzük** tehát **két lineáris leképezés összegét** az előbbi mintára. Adott $\hat{A}, \hat{B} \in \text{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ esetén legyen $\hat{A} + \hat{B}$ az a $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ leképezés, amelynek hozzárendelési szabálya

$$(\hat{A} + \hat{B})\vec{v} := \hat{A}\vec{v} + \hat{B}\vec{v}, \quad \text{minden } \vec{v} \in \mathbb{V} \text{ vektorra.} \quad (5.4)$$

Itt is figyeljünk: a $+$ jel mást jelent a két oldalon. Az $\hat{A} + \hat{B}$ -t most értelmeztük, a jobb oldalon viszont az érkezői halmazbeli, $\mathbb{W}$ -beli vektorösszeadás szerepel, ami eddig is értelmes volt.

- Értelmezzük egy **lineáris leképezés számszorosát** is: adott λ szám és $\hat{A} \in \text{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ lineáris leképezés esetén legyen $\lambda \cdot \hat{A}$ (röviden: $\lambda \hat{A}$) az a $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ leképezés, amelynek hozzárendelési szabálya

$$(\lambda \hat{A})\vec{v} := \lambda \cdot \hat{A}\vec{v}. \quad (5.5)$$

- Sejthető, és valóban igaz is, hogy lineáris leképezések imént értelmezett **összege** ill. **számszorosa** is **szintén lineáris leképezés**. Jó szemléletformálás, ha **belátjuk** ezt: a **legegyszerűbb lépésekben** kell haladnunk. Azt kell belátni, hogy az eredmény-leképezés teljesíti a lineárisakra megkövetelt alaptulajdonságot, amit pl. az iménti (5.3) egyenlet ad meg, és elég kéttagú összegre belátni. Kihasználni pedig a leképezések összegének ill. számszorozottjának definícióit kell, valamint

⁵⁶Végtelen dimenziós vektorterek esetén vannak olyan (igaziból amúgy elég fontos) lineáris leképezések, amelyek nem mindenhol értelmezettek. Ezekkel most ne foglalkozunk egyelőre.

azt, hogy a már eleve adott $\hat{A}$ és $\hat{B}$ leképezések tényleg lineárisak. Tehát; először az összegre:

$$\begin{aligned}
 (\hat{A}+\hat{B})(\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2) &= \hat{A}(\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2) + \hat{B}(\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2) && \text{Ez volt } \hat{A}+\hat{B} \text{ definíciója} \\
 &= \lambda_1\hat{A}\vec{v}_1 + \lambda_2\hat{A}\vec{v}_2 + \lambda_1\hat{B}\vec{v}_1 + \lambda_2\hat{B}\vec{v}_2 && \text{mivel } \hat{A} \text{ és } \hat{B} \text{ lineárisak} \\
 &= \lambda_1(\hat{A}\vec{v}_1 + \hat{B}\vec{v}_1) + \lambda_2(\hat{A}\vec{v}_2 + \hat{B}\vec{v}_2) && \text{átrendezve, kiemelve} \\
 &= \lambda_1(\hat{A}+\hat{B})\vec{v}_1 + \lambda_2(\hat{A}+\hat{B})\vec{v}_2. && \hat{A}+\hat{B} \text{ definíciója visszafelé.}
 \end{aligned}$$

Összehasonlítva az elejét és a végét látszik, hogy ahogy definiáltuk, valóban $\hat{A}+\hat{B}$ is teljesíti a lineáris leképezésre megkövetelt tulajdonságot, azaz ő is $\text{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ eleme. A számmal szorzással is hasonlóan egyszerű dolgunk van:

$$\begin{aligned}
 (\lambda\hat{A})(\mu_1\vec{v}_1+\mu_2\vec{v}_2) &= \lambda \cdot \hat{A}(\mu_1\vec{v}_1+\mu_2\vec{v}_2) && \text{Ez volt } \lambda\hat{A} \text{ definíciója} \\
 &= \lambda \cdot (\mu_1\hat{A}\vec{v}_1 + \mu_2\hat{A}\vec{v}_2) && \text{mivel } \hat{A} \text{ lineáris} \\
 &= \mu_1(\lambda\hat{A}\vec{v}_1) + \mu_2(\lambda\hat{A}\vec{v}_2) && \text{átrendezve} \\
 &= \mu_1 \cdot (\lambda\hat{A})\vec{v}_1 + \mu_2 \cdot (\lambda\hat{A})\vec{v}_2. && \text{megint } \lambda\hat{A} \text{ definíciója, visszafelé.}
 \end{aligned}$$

• Értelmes tehát lineáris leképezések összege, számmal szorzása, és az eredmény is lineáris leképezés. Állítás: ezekkel a műveletekkel ellátva $\text{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ -t **is vektortérnek tekinthetjük**. Ehhez le kellene ellenőrizni, hogy a rajta imént bevezetett összeadás és számmal szorzás, mint műveletek teljesítik a megkövetelt tulajdonságokat (ld. a 3.2. szakasz elejét). Nem nehéz ezt megtenni; egyszerű lépések kicsit hosszadalmas egymásutánja, tudva közben, hogy a leképezések tényleg lineárisak.

Egyetlen dolgot esetleg érdemes külön megjegyezni: mi $\text{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ **nulla-eleme**? Azaz: milyen az a $\mathbb{V}$ -ből $\mathbb{W}$ -be menő (egyértelmű) lineáris leképezés, amit bármelyik másikkal hozzáadva ugyanazt a másikat kapjuk? Válasz (gondoljuk végig): a $\hat{0} \in \text{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ leképezés a „**nulla-leképezés**”, amelyik minden $\vec{v} \in \mathbb{V}$ -hez az eredménytér nullavektorát, $\vec{0} \in \mathbb{W}$ -t rendeli.

• Függvényeknél értelmes a **kompozíció** fogalma, szokásos jelöléssel az f és a g kompozíciója $f \circ g$. Ez ugye azt jelenti, hogy $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. A kompozíció tehát az „egymásután-csinálás”⁵⁷. Ez minden további nélkül értelmes lineáris leképezésekre (vigyázva, hogy az indulási és érkezési halmazok „stimmeljenek”), továbbá elhagyjuk a kompozíció jelét (mintha **szorzás** lenne). Tehát ha $\hat{A} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ és $\hat{B} : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ lineáris leképezések, akkor kompozíciójuk, $\hat{A}\hat{B}$ az $\mathbb{U}$ -ból $\mathbb{W}$ -be képez:

$$\begin{array}{l} \hat{A} \in \text{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{W}), \\ \hat{B} \in \text{Lin}(\mathbb{U}, \mathbb{V}) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \hat{A}\hat{B} \in \text{Lin}(\mathbb{U}, \mathbb{W}), \quad \text{amire minden } \vec{u} \in \mathbb{U}\text{-ra} \quad (\hat{A}\hat{B})\vec{u} = \hat{A}(\hat{B}\vec{u}). \quad (5.6)$$

Figyeljünk, „jobbról balra” haladva kell olvasni: $\hat{A}\hat{B}$ olyan, hogy *először* $\hat{B}$ hat, utána $\hat{A}$.

• Előreszaladtunk kicsit, mert egyből azt írtuk, hogy $\hat{A}\hat{B}$ a $\text{Lin}(\mathbb{U}, \mathbb{W})$ eleme: ehhez be kellene látni, hogy a most értelmezett $\mathbb{U} \mapsto \mathbb{W}$ leképezés, $\hat{A}\hat{B}$ **is tényleg lineáris leképezés**. Ehhez azt kell ellenőrizni, hogy tudja a megkövetelt alaptulajdonságot. A korábbiak mintájára haladva:

$$\begin{aligned}
 (\hat{A}\hat{B})(\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2) &= \hat{A}(\hat{B}(\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2)) && \text{Ez volt } \hat{A}\hat{B} \text{ definíciója} \\
 &= \hat{A}(\lambda_1\hat{B}\vec{v}_1+\lambda_2\hat{B}\vec{v}_2) && \text{mivel } \hat{B} \text{ lineáris} \\
 &= \lambda_1\hat{A}(\hat{B}\vec{v}_1)+\lambda_2\hat{A}(\hat{B}\vec{v}_2) && \text{mivel } \hat{A} \text{ is lineáris} \\
 &= \lambda_1(\hat{A}\hat{B})\vec{v}_1 + \lambda_2(\hat{A}\hat{B})\vec{v}_2 && \text{megint } \hat{A}\hat{B} \text{ definíciója visszafelé.}
 \end{aligned}$$

⁵⁷ Valós függvényekre pl. ha $f(x) = x^2$, és $g(x) = \sin x$, akkor $(f \circ g)(x) = (\sin x)^2$, és $(g \circ f)(x) = \sin(x^2)$.

• Ha az indulási és az érkezési vektortér ugyanaz, akkor ha $\hat{A}, \hat{B} \in \text{Lin}(\mathbb{V})$, akkor $\hat{A}\hat{B}$ is $\text{Lin}(\mathbb{V})$ eleme. Ez a „**szorzás**” (egyszerű lépésekkel ellenőrizhetően, és részben a függvények kompozíciójának tulajdonságaiból következően) a következő **tulajdonságokkal** bír, minden $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \in \text{Lin}(\mathbb{V})$ -re

$$\hat{A}(\hat{B}\hat{C}) = (\hat{A}\hat{B})\hat{C} \quad (\text{lin. leképezések szorzata } \mathbf{asszociatív}),$$

$$\hat{A}(\hat{B}+\hat{C}) = \hat{A}\hat{B}+\hat{A}\hat{C} \quad (\text{lin. leképezések szorzata } \mathbf{disztributív az összeadásukra nézve}),$$

$$(\hat{A}+\hat{B})\hat{C} = \hat{A}\hat{C}+\hat{B}\hat{C} \quad (\text{és „fordítva” is}),$$

$$\hat{A}(\lambda\hat{B}) = \lambda \cdot (\hat{A}\hat{B}) \quad (\mathbf{számmal szorzás kiemelhető}),$$

$$(\lambda\hat{A})\hat{B} = \lambda \cdot (\hat{A}\hat{B}) \quad (\text{fordítva is}).$$

Ebből következik pl. az is (ha az utóbbi képletekben $\lambda=0$ -t írunk), hogy a **nulla-leképezést** akár-mivel **szorozva a nulla-leképezést kapjuk**: $\hat{0}\hat{A}=\hat{A}\hat{0}=\hat{0}$. Ez egész nyilvánvaló amúgy.

• A $\text{Lin}(\mathbb{V})$ -ben lévő lineáris leképezések imént megbeszélt szorzásának némely tulajdonsága olyan tehát, mint a **számok szorzásáé**. Van két nagyon **lényeges különbség**:

→ Általában $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$, azaz ez a szorzás **nem kommutatív**. (Pl. ha $\hat{A}$ és $\hat{B}$ a térben két különböző tengely körüli forgatás: gondoljuk ki, nem mindegy, milyen sorrendben csináljuk őket!)

→ **Lehet $\hat{A}\hat{B} = \hat{0}$ akkor is, ha egyik sem a nulla leképezés**, azaz $\hat{A} \neq \hat{0}$ és $\hat{B} \neq \hat{0}$. Pl. ha $\hat{A}$ a térben egy egyenesre vetítés, $\hat{B}$ pedig egy erre merőleges egyenesre vetítés, akkor $\hat{A}\hat{B}=\hat{0}$ (azaz $\hat{A}\hat{B}$ minden vektort a nullavektorba visz), noha önmagában sem $\hat{A}$, sem $\hat{B}$ nem a nulla-leképezés⁵⁸.

• A szorzáshoz „egység” is tartozik. Ez tehát olyan $\text{Lin}(\mathbb{V})$ -beli leképezés, jele $\hat{I}$, neve **egységoperátor**, vagy latinosan: **identitás**-művelet, amivel minden $\hat{A} \in \text{Lin}(\mathbb{V})$ -re $\hat{I}\hat{A}=\hat{A}\hat{I}=\hat{A}$. Ez az egységoperátor nem más, mint a „semmit sem csinálás művelete”, ami minden vektort önmagába visz (azaz: „helyben hagy”); erre tényleg igaz az iménti szorzásos tulajdonság. Operátoroknak lehet *inverze* is, ezekre visszatérünk.

5.2. Vetítések, forgatások, tükrözések

Miután kicsit megismerkedtünk lineáris operátorokkal általánosságban, vizsgáljuk meg közelebbről fizikai terünk már említett geometriai transzformációit! Ebben a szakaszban tehát vektorok alatt most (háromdimenziós) helyvektorokat értünk megint.

• Legegyszerűbb egy adott irányra **vetítés** (merőlegesen): ha adott egy $\vec{n}$ egységvektor (amire ugye $|\vec{n}| = 1$), akkor egy adott $\vec{a}$ vektorhoz a $\vec{a}\vec{n}$ skalárszorzat éppen a merőleges vetület nagyságát adja meg, az $(\vec{a}\vec{n})\vec{n}$ vektor pedig $\vec{n}$ irányába mutat, és ekkora: ez tehát az $\vec{a}$ -nak $\vec{n}$ irányú vetület-vektora. A skalárszorzat és a vektorműveletek tulajdonságai alapján könnyű ténylegesen belátni, hogy adott $\vec{n}$ esetén az a leképezés, ami minden $\vec{a}$ -hoz $(\vec{a}\vec{n})\vec{n}$ -et rendeli, valóban egy lineáris leképezés. Ez tehát a merőlegesen vetítés operátora.

• A vetítésekhez is, de amúgy is hasznos lesz a következő jelölés: két adott vektor, $\vec{u}$ és $\vec{w}$ esetén bevezetjük ezek **diadikus szorzatát**. Ez egy lineáris leképezés, $\text{Lin}(\mathbb{V})$ eleme lesz, jele $\vec{u} \circ \vec{w}$, és a definíciója az, hogy minden $\vec{a}$ vektoron a következőképpen hat:

$$\vec{u} \circ \vec{w} \in \text{Lin}(\mathbb{V}), \quad \text{ami minden } \vec{a} \text{ vektorra azt csinálja, hogy } (\vec{u} \circ \vec{w})\vec{a} = (\vec{w}\vec{a})\vec{u}. \quad (5.7)$$

⁵⁸Egy lineáris leképezés vihet *bizonyos* vektorokat a nullavektorba (mint a vetítések is) anélkül, hogy ő maga a $\hat{0}$ nulla-leképezés lenne (ami ugye *minden* vektort a nullába visz).

Ha az eredményben $\vec{u}$ számmal szorzását „hátra” írjuk (kissé szokatlanul), akkor szemléletesebb: $(\vec{u} \circ \vec{w})\vec{a} = \vec{u}(\vec{w}\vec{a})$. Szavakban: a diadikus szorzat olyan leképezés, ami a második vektorral vett skalárszorzatnyszerűen veszi az elsőt. A diadikus szorzat jelölésével tehát

$$\text{Az } \vec{n}\text{-re való merőlegesen vetítés operátora: } \hat{P}_{\vec{n}} = \vec{n} \circ \vec{n}. \quad (5.8)$$

- Számítsuk ki két diadikus szorzatnak, $\vec{a} \circ \vec{b}$ -nek és $\vec{c} \circ \vec{d}$ -nek mint operátornak egymásutáni hatását, azaz szorzatát! Egyszerű, felidézve a definíciót, és a lineáris tulajdonságot használva:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \circ \vec{b})(\vec{c} \circ \vec{d})\vec{v} &= (\vec{a} \circ \vec{b})(\vec{d}\vec{v})\vec{c} = \\ &= (\vec{d}\vec{v})(\vec{a} \circ \vec{b})\vec{c} = \\ &= (\vec{d}\vec{v})(\vec{b}\vec{c})\vec{a} = \\ &= (\vec{b}\vec{c})(\vec{d}\vec{v})\vec{a} = \\ &= (\vec{b}\vec{c})(\vec{a} \circ \vec{d})\vec{v}, \quad \text{tényleg.} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{hisz minden} \\ \vec{v} \text{ vektorra} \end{array} \quad (5.9)$$

Ezt nemsokára már használni fogjuk.

- Határozzuk meg egy **síkra** való **vetítés** operátorát is! Fizikai terünkben egy síkot meghatároz a **rá merőleges** irány; legyen ez az irány a $\vec{s}$ **egységvektorral** adva, $|\vec{s}| = 1$. Ha egy $\vec{v}$ vektorból kivonjuk az $\vec{s}$ -re vett vetületét, megkapjuk az $\vec{s}$ -re merőleges síkra való vetületet, ez tehát $\vec{v} - (\vec{v}\vec{s})\vec{s}$. Ebből leszűrhetjük, hogy

$$\text{Az } \vec{s}\text{-re merőleges síkra való vetítés operátora: } \hat{I} - \vec{s} \circ \vec{s}.$$

- Tovább fűzve, az $\vec{s}$ -re merőleges síkra lehet vetíteni nemcsak rá merőleges irányból, hanem valamilyen $\vec{n}$ egységvektor „mentén” is. Ennek kitalálásához: egy $\vec{v}$ vektor vetületét úgy kapjuk, hogy egy $\vec{n}$ irányú vektort, azaz $\alpha \cdot \vec{n}$ -et kivonunk belőle. A még ismeretlen α -t az határozza meg, hogy az eredmény tényleg a megkövetelt síkban fekszen, azaz merőleges legyen $\vec{s}$ -re (vagyis: skalárszorzatuk nulla legyen); tehát:

$$(\vec{v} - \alpha\vec{n}) \cdot \vec{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}\vec{s} = \alpha \cdot (\vec{n}\vec{s}) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\vec{v}\vec{s}}{\vec{n}\vec{s}},$$

ebből tehát a $\vec{v}$ vektor vetítettje: $\vec{v} - \frac{\vec{v}\vec{s}}{\vec{n}\vec{s}}\vec{n}$, azaz:

$$\text{Az } \vec{s}\text{-re merőleges síkra } \vec{n} \text{ mentén vetítés operátora: } \hat{P}_{\vec{s}\perp, \vec{n}} = \hat{I} - \frac{1}{\vec{n}\vec{s}} \cdot \vec{n} \circ \vec{s}. \quad (5.10)$$

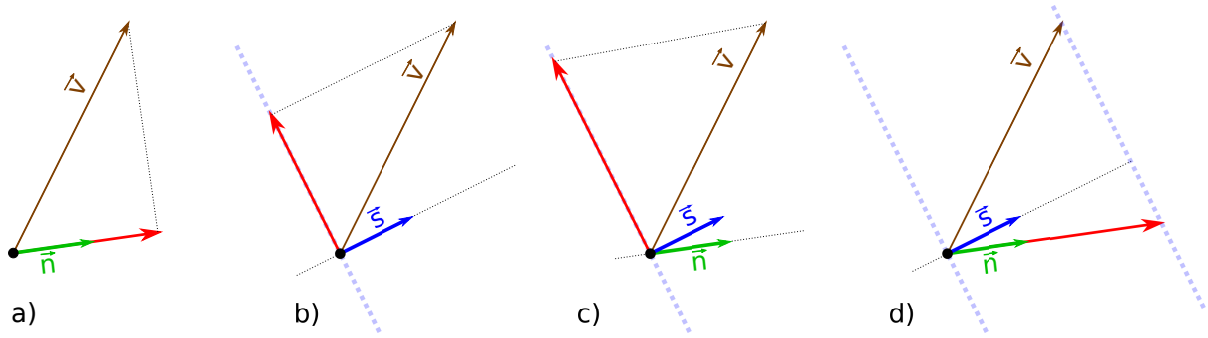
Ha $\vec{n} = \vec{s}$, akkor visszkapjuk az előző pontban felírt, síkra való merőlegesen vetítés operátorát.

- Egy egyenesre is lehet valamilyen (nem feltétlenül rá merőleges) sík mentén vetíteni; gyakorlásképpen vezessük le, hogy ha az $\vec{n}$ egységvektorral adott irányú egyenesre vetítünk az $\vec{s}$ egységvektorra merőleges sík mentén, akkor azt kapjuk, hogy

$$\text{Az } \vec{s}\text{-re merőleges sík mentén az } \vec{n} \text{ irányba való vetítés: } \hat{P}_{\vec{n}, \vec{s}\perp} = \frac{1}{\vec{s}\vec{n}} \cdot \vec{n} \circ \vec{s}. \quad (5.11)$$

Ez (az $\vec{s} = \vec{n}$ esetben) speciális esetként persze visszaadja a fentebb látott $\vec{n} \circ \vec{n}$ operátort, ami egy egyenesre vetít, merőleges irányból.

- A **vetítéseknek** (összefoglalóan) fontos, sőt már-már **definiáló tulajdonsága**, hogy ha $\hat{P}$ egy vetítőoperátor, akkor $\vec{P}^2 = \vec{P}$. (Itt persze $\vec{P}^2$ a $\vec{P}\vec{P}$ szorzatot jelenti). A $\vec{P}^2 = \vec{P}$ egész nyilvánvaló dolgot mond: ha egy vektort egyszer már levetítettünk, az már nem változik, ha még egyszer



12. ábra. Néhány tárgyalt fajta térbeli vetítés illusztrációja. a): egységvektorral kijelölt egyenesre, merőlegesen. b): egységvektorra merőleges síkra, merőlegesen (a síkot szaggatott vonal jelöli). c): egységvektorra merőleges síkra vetítés, másik egységvektor mentén. d): egységvektor által kijelölt egyenesre vetítés, másik egységvektorra merőleges sík mentén. Az eredményt mindenhol a piros színű vektor jelöli; az algebrai kifejezéseket ld. a szövegben.

ugyanúgy vetítjük. Ez mindegyik tárgyalt fajta vetítésre is persze igaz: érdemes konkrétan belátni ezt a tulajdonságot a fentebb meghatározott vetítőoperátorokra (közben gyakorolva az operátorok összeadását, számmal szorzását, a diadikus szorzatok szorzatát, amit a fentebbi (5.9) képletben írtunk fel, stb). Ezt most az (5.10) vetítésre tesszük meg (de a többire is végigszámolhatjuk):

$$\begin{aligned}
 \left(\hat{I} - \frac{\vec{n} \circ \vec{s}}{\vec{n} \vec{s}} \right) \left(\hat{I} - \frac{\vec{n} \circ \vec{s}}{\vec{n} \vec{s}} \right) &= \hat{I} \cdot \hat{I} - \frac{\vec{n} \circ \vec{s}}{\vec{n} \vec{s}} \cdot \hat{I} - \hat{I} \cdot \frac{\vec{n} \circ \vec{s}}{\vec{n} \vec{s}} + \frac{(\vec{n} \circ \vec{s})(\vec{n} \circ \vec{s})}{(\vec{n} \vec{s})^2} = \\
 &= \hat{I} - 2 \frac{\vec{n} \circ \vec{s}}{\vec{n} \vec{s}} + \frac{\vec{s} \vec{n}}{(\vec{n} \vec{s})^2} \vec{n} \circ \vec{s} = \\
 &= \hat{I} - \frac{\vec{n} \circ \vec{s}}{\vec{n} \vec{s}}, \quad \text{tényleg.}
 \end{aligned}$$

A 12. ábra szemléltet néhány fajta vetítést.

• Foglalkozzunk kicsit a **tükrözésekkel** ezután. A középpontra (kijelölt origóra) tükrözés művelete egyszerűen a -1 -gyel való szorzás: ez persze *lineáris művelet*, gondoljuk csak végig. Érdekesebb pl. egy **egyenesre való tükrözés**, vagy egy **síkra való tükrözés**. Jelölje ki az egyenest a $\vec{n}$ egységvektor (azaz $|\vec{n}| = 1$), a síkot pedig egy rá merőleges $\vec{s}$ egységvektor ($|\vec{s}| = 1$), mint fentebb, a vetítéseknel. Egy $\vec{v}$ vektornak az $\vec{n}$ egyenesére vett tükrözöttjét úgy kapjuk, hogy a párhuzamos vetületet helyben hagyjuk, az egyenesre merőlegeset pedig mínusz egyszeresére cseréljük. Az eredményvektor tehát: $(\vec{v}\vec{n})\vec{n} - (\vec{v} - (\vec{v}\vec{n})\vec{n}) = 2(\vec{v}\vec{n})\vec{n} - \vec{v}$; azaz

$$\text{Az } \vec{n} \text{ egyenesére való tükrözés operátora: } \hat{T}_{\vec{n}} = 2\vec{n} \circ \vec{n} - \hat{I}. \quad (5.12)$$

Hasonlóan járhatunk el egy $\vec{s}$ -re merőleges síkra való tükrözésnél is. A $\vec{v}$ vektorból a $\vec{v} - 2(\vec{v}\vec{s})\vec{s}$ vektort kapjuk, így tehát

$$\text{Az } \vec{s}\text{-re merőleges síkra való tükrözés operátora: } \hat{T}_{\vec{s}\perp} = \hat{I} - 2\vec{s} \circ \vec{s}. \quad (5.13)$$

• A **tükrözések** fontos **tulajdonsága**, hogy ha $\hat{T}$ akármelyik tükrözőoperátor, akkor $\hat{T}^2 = \hat{I}$. (Ugye világos: kétszer tükrözve visszajutunk ugyanoda⁵⁹.) Mindegyikre beláthatjuk ezt; példaként

⁵⁹A matematikában általában az olyan műveleteket, amelyek kétszer alkalmazva az identitást adják, *involutív* műveleteknek hívják.

álljon itt a síkra tükrözés (most már „rövidebb lére eresztve”):

$$\begin{aligned} (\hat{I} - 2\vec{s} \circ \vec{s})(\hat{I} - 2\vec{s} \circ \vec{s}) &= \hat{I} - 4 \cdot \vec{s} \circ \vec{s} + 4 \cdot (\vec{s} \circ \vec{s})(\vec{s} \circ \vec{s}) = \\ &= \hat{I} - 4 \cdot \vec{s} \circ \vec{s} + 4(\vec{s}\vec{s}) \cdot \vec{s} \circ \vec{s} = \\ &= \hat{I}, \quad \text{tényleg.} \end{aligned}$$

• Végül vegyük szemügyre az **elforgatásokat**. Egy forgatást pl. megadhatunk úgy, hogy megmondjuk, milyen tengely körül (a tengelyt adja meg egy $\vec{n}$ egységvektor, amire $|\vec{n}| = 1$), milyen φ szöggel forgatunk. Megállapodunk, hogy a forgatást (szokásosan) „jobbsodrással” értjük: ha jobb kezünk hüvelykujja a tengely irányába mutat, a forgatás a begörbített ujjaink irányába történik.

Végig kell gondolni térben, hogy mit is csinál egy ilyen adott tengely körüli adott szögű forgatás; a 13. ábra segít. A vektor, amit el akarunk forgatni, legyen $\vec{v}$. Ennek $\vec{n}$ tengellyel párhuzamos vetülete helyben marad. A tengelyre merőleges síkban viszont (felidézve a $\cos \varphi$ és a $\sin \varphi$ szögfüggvények jelentését) a síkra vett projekciót magát $\cos \varphi$ -vel kell szorozni, az $\vec{n}$ tengelyre is és $\vec{v}$ -nak a síkbeli projekciójára is merőleges harmadik irányba (ami szintén a tengelyre merőleges síkban fekszik) pedig $\sin \varphi$ -szer kell venni a síkbeli projekció nagyságát. Utóbbi (harmadik) irány éppen az $\vec{n} \times \vec{v}$ iránya (gondoljuk végig a „jobbsodrást”, hogy tényleg az az irány kell). Összerakva:

$$\text{A } \vec{v} \text{ elforgatottja: } (\vec{v}\vec{n})\vec{n} + \cos \varphi \cdot (\vec{v} - (\vec{v}\vec{n})\vec{n}) + \sin \varphi \cdot \vec{n} \times \vec{v}. \quad (5.14)$$

Esetleg azt kell még végiggondolni, hogy az $\vec{n} \times \vec{v}$ a jó irányba is mutat, és a nagysága is pont akkora, mint a $\vec{v}$ -nek az $\vec{n}$ -re merőleges síkban való vetülete (mivel $\vec{n}$ egységvektor); így tehát pont jó lesz. A kapott képletből leolvashatjuk a forgatás operátorát, kényelmesen jelölve

$$\hat{F}(\vec{n}, \varphi) = \vec{n} \circ \vec{n} + \cos \varphi (\hat{I} - \vec{n} \circ \vec{n}) + \sin \varphi \cdot \vec{n} \times. \quad (5.15)$$

Az $\vec{n} \times$ itt úgy értendő, hogy ez „az $\vec{n}$ -nel való vektorszorzás” művelete, mint lineáris operátor. (Gondoljuk meg, az adott vektorral való vektoriális szorzás tényleg lineáris művelet, a műveleti tulajdonságai (részben) éppen ezt jelentik.)

• Forgatások egymás után végzése is forgatás. Ez nyilvánvaló: pl. egy merev testet kétszer (akár különböző irányokban, különböző szögekkel) elforgatva biztos olyan helyzetbe juttatjuk őt, amibe akár *egy darab* alkalmas forgatással is eljuttathattuk volna. (Az nem nyilvánvaló esetleg, hogy „akárhogy is állt” a testünk, az eredmény-forgatás mindig *ugyanaz*, csak a két egyenkénti forgatás határozza meg, nem a test eredeti állása. Mindazonáltal ez is igaz.) Tehát: ha $\hat{F}(\vec{n}_1, \varphi_1)$ és $\hat{F}(\vec{n}_2, \varphi_2)$ forgatások, akkor egymásutánjuk is forgatás, azaz létezik $\vec{N}$ tengely és Φ szög, amire

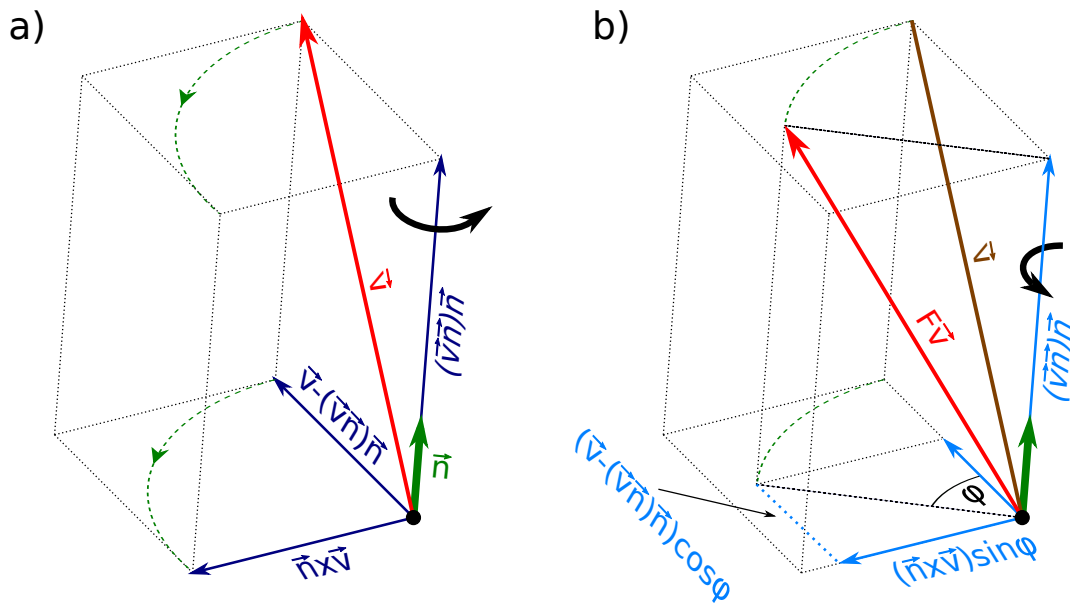
$$\hat{F}(\vec{n}_2, \varphi_2)\hat{F}(\vec{n}_1, \varphi_1) = \hat{F}(\vec{N}, \Phi). \quad (5.16)$$

Most még ennek létezését belátni sem volna egyszerű, pláne kiszámítani az $\vec{N}$ irányt és a Φ szöget az $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \varphi_1, \varphi_2$ ismeretében⁶⁰. Később visszatérünk ehhez.

5.3. Lineáris operátorok reprezentációja, mátrixok, mátrixműveletek

Vektorműveleteknél jól tett, hogy (adott bázis esetén) komponensekben adhattuk meg a vektorokat. Lássuk, mit tudunk mondani lineáris leképezések ilyen, „komponenses” reprezentációjáról.

⁶⁰Figyeljünk: olyan sorrendben írtam az indexeket, ahogyan műveletek kompozíciójára gondolva előkerülnek: először forgatunk $\vec{n}_1$ körül φ_1 szöggel, utána $\vec{n}_2$ körül φ_2 -vel.



13. ábra. Az $\vec{n}$ tengely körül φ szöggel forgatás operátorának felírásához illusztráció: az a) ábrán azok a vektorok látszanak, amik szükségesek ahhoz, hogy az eredményt a b) ábrán összeállítsuk.

Az elképzelhetőség kedvéért először vegyünk háromdimenziós vektorteret, $\mathbb{V}$ itt ezt jelöli. Most is **lerögzítünk egy ortogonális bázist**, ebben mozgunk, minden komponens ebben értendő.

• Arra leszünk tehát kíváncsiak, hogy ha adott egy a $\mathbb{V}$ fizikai terünkben ható $\hat{A} \in \text{Lin}(\mathbb{V})$ lineáris operátor, és adott egy $\vec{v} \in \mathbb{V}$ vektor, aminek adottak a komponensei (ez az $\underline{v}$ számhármass), akkor mit tudunk mondani az eredményvektor, $\vec{w} = \hat{A}\vec{v}$ komponenseiről.

Ehhez először bevezetjük a **kanonikus projekció** műveletét. Láttuk, hogy mindig lehet egy (egyenes) irányra egy (az egyenesünket nem tartalmazó) sík mentén (azaz a síkkal párhuzamosan) vetíteni. Adott bázisunkban a k -adik (a k index 1-től 3-ig fut tehát) kanonikus projekció, jelben: pr_k az a művelet, ami egyszerűen minden $\vec{v}$ vektorhoz hozzárendeli annak k -adik komponensét:

$$\vec{v} \in \mathbb{V}, \quad \vec{v} = \sum_k v_k \vec{e}_{(k)} \quad \Rightarrow \quad \text{pr}_k(\vec{v}) = v_k.$$

Emlékezzünk (ld. a korábbi 4.4. szakasz elejét!): ortogonális bázisban a $\vec{v}\vec{e}_{(k)}$ skalárszorzat megadja v_k -t, ilyenkor tehát a $\vec{v} \rightarrow \vec{v}\vec{e}_{(k)}$ hozzárendelés tulajdonképpen azonos a most bevezetett kanonikus projekció műveletével. Azért adtunk mégis külön nevet most ennek a műveletnek, hogy általánosabb esetekben is használható legyen majd⁶¹.

Egészen nyilvánvaló (már sokszor mondott dolgok megint újabb módon való megfogalmazása), hogy a pr_k műveletek **lineárisak**: két vektor összegének ill. egy vektor számszorosának valamelyik komponense a komponensek összege ill. számszorosa.

• Tehát a lineáris kombinációt is „átemelhetjük” a kanonikus projekción is. Ezzel tehát kideríthetjük az eredményvektor k -adik komponensét, ha az indulóvektort is komponenses módon írjuk:

$$\vec{w} = \hat{A}\vec{v} \quad \Rightarrow \quad w_k = \text{pr}_k(\vec{w}) = \text{pr}_k(\hat{A}\vec{v}) = \text{pr}_k\left(\hat{A} \sum_l v_l \vec{e}_{(l)}\right) = \text{pr}_k\left(\sum_l v_l (\hat{A}\vec{e}_{(l)})\right) = \sum_l v_l \left(\text{pr}_k(\hat{A}\vec{e}_{(l)})\right).$$

⁶¹ A későbbi tanulmányok során előkerülhetnek majd nem ortogonális bázisok; ott a bázisvektorral való skalárszorzatos képlet így nem fog működni, a kanonikus projekció viszont minden további nélkül.

Megint kihasználtuk, hogy $\hat{A}$ is és a projekció is lineáris leképezés. Az utolsó alakot kell megjegyezni; másik sorrendben és egy új jelölést bevezetve szokták írni:

$$w_k = \sum_l \left(\text{pr}_k(\hat{A}\vec{e}_{(l)}) \right) v_l \equiv \sum_l A_{kl} v_l, \quad \text{ahol} \quad A_{kl} \equiv \text{pr}_k(\hat{A}\vec{e}_{(l)}). \quad (5.17)$$

• Az adott bázisban tehát az $\hat{A}$ lineáris leképezésről elég tudni az A_{kl} -vel jelölt számokat, hogy kiderítsük $\hat{A}$ hatását akármilyen, komponensekkel adott $\vec{v}$ vektoron. Az A_{kl} jelölésnek két indexe van: k és l , mindegyik 1-től 3-ig fut (mert háromdimenziós a terünk), és 3×3 -as táblázatos formában szokás szemléltetni, úgy hogy az **első** index a „sorindex”, a **második** pedig az „oszlopindex”. Pl. az A_{23} szám tehát a táblázat 2-edik sorában és 3-adik oszlopában van. A bázisunkban az adott $\hat{A}$ operátort jellemző ilyen táblázatot az **operátor mátrixának**⁶² hívjuk: ha kijelöljük az indexeit, akkor A_{kl} módon írjuk, ha csak önmagában a táblázatot akarjuk jelölni, akkor most (egy darabig) kétszer aláhúzással, így: $\underline{\underline{A}}$. Tehát:

$$\text{Az } \hat{A} \text{ operátor mátrixa:} \quad \underline{\underline{A}} \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad A_{kl} \equiv \text{pr}_k(\hat{A}\vec{e}_{(l)}). \quad (5.18)$$

• Ugyanúgy, ahogy eredendően egy vektor, $\vec{v}$ nem ugyanaz, mint az őt az adott bázisban reprezentáló $\underline{v}$ számhármass, ugyanúgy egy $\hat{A}$ **operátor nem ugyanaz, mint az őt az adott bázisban őt reprezentáló mátrix, $\underline{\underline{A}}$** . Pl. fizikai terünkben egy (valahogyan adott) lineáris operátor mátrixa más lesz (azaz: a táblázat konkrét elemei mások lesznek), ha az eredetileg kijelölt bázisunk helyett egy másik (pl. elforgatott) bázisra térünk át. Ugyanez volt igaz ugyebár a vektorkomponensek számhármására; nemsokára kapunk arra szabályt, hogy hogyan kell vektor- és mátrixkomponenseket másik bázisba (koordinátarendszerbe) átszámolni.

• A vektorok reprezentációja ugyebár számhármassokkal történt; most egy lineáris operátor vektoron való hatását is kényelmesen kezelhetjük a mátrixos jelöléssel. Gondoljuk végig, hogy az iménti képlet a mátrixalakban adott operátor hatására:

$$(\hat{A}\vec{v})_k = \sum_l A_{kl} v_l, \quad (5.19)$$

mit is jelent: „grafikusan” könnyű megjegyezni. Rajzoljuk le egymás mellé a mátrixot és az (oszlop)vektort az alábbiak szerint, a vektort „elcsúsztatva” és „feljebb”; az eredményvektor (számhármass) a „körülölelt” helyre kerül, és egy adott komponensét úgy kapjuk, hogy „célkereszt-szerűen” összepárosítjuk a mátrixelemeket (ugyanabból a sorból) és az induló vektorkomponenseket (itt csak egy oszlop van), összeszorozgatjuk őket, majd összeadjuk. Az egyik komponens kiszámítására utaló sorokat és oszlopokat az alábbi sémában kiszíneztem, hogy szemléletes legyen:

$$\begin{array}{lcl} \vec{w} = \hat{A}\vec{v} & & \\ \Downarrow & & \\ w_k = \sum_l A_{kl} v_l & \Rightarrow & \begin{array}{l} w_1 = A_{11}v_1 + A_{12}v_2 + A_{13}v_3, \\ \textcolor{red}{w_2} = \textcolor{blue}{A_{21}}\textcolor{red}{v_1} + \textcolor{blue}{A_{22}}\textcolor{red}{v_2} + \textcolor{blue}{A_{23}}\textcolor{red}{v_3}, \\ w_3 = A_{31}v_1 + A_{32}v_2 + A_{33}v_3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \textcolor{blue}{A_{21}} & \textcolor{blue}{A_{22}} & \textcolor{blue}{A_{23}} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \textcolor{red}{v_1} \\ \textcolor{red}{v_2} \\ \textcolor{red}{v_3} \end{pmatrix} \end{array}$$

⁶²A „mátrix” furcsa szó, az „anya” jelentésű latin szó még egy nőnemű melléknéviigenév-képzővel ellátva...

Az így felvázolt „mátrix-hat-vektorra” műveletet **mátrix-vektor-szorzásnak** is hívják: ez tehát az operátor vektoron való hatását reprezentálja.

• Mátrixaik segítségével **operátorok szorzását** (azaz: egymásután-hatztatását) is kényelmesen kezelhetjük. Legyen egy $\hat{A}$ és egy $\hat{B}$ operátor mátrixa $\underline{A}$ ill. $\underline{B}$, kérdés, hogy hogyan tudjuk ezekből kiszámítani az $\hat{A}\hat{B}$ operátor mátrixát. Írjuk fel $\hat{A}\hat{B}$ hatását egy akármilyen $\vec{v}$ vektorra, és keressük az eredményül kapott vektor k -adik komponensét:

$$\begin{aligned} (\hat{A}\hat{B}\vec{v})_k &= (\hat{A}(\hat{B}\vec{v}))_k = \sum_m A_{km}(\hat{B}\vec{v})_m = \\ &= \sum_m A_{km} \left(\sum_l B_{ml} v_l \right) = \sum_{l,m} A_{km} B_{ml} v_l = \sum_l \left(\sum_m A_{km} B_{ml} \right) v_l. \end{aligned}$$

Az utolsó pont olyan, mint egy k, l indexekkel jelölt mátrix hatása a v_l komponensekre, amiből az eredmény k -adik komponensét kapjuk. Leolvashatjuk tehát az operátoraink szorzatának mátrixát:

$$(\hat{A}\hat{B})_{kl} = \sum_m A_{km} B_{ml}. \quad (5.20)$$

• Megkaptuk tehát **mátrixok szorzási szabályát**; ez az önmagában esetleg furcsának tűnő szabály abból következett, hogy az operátoraink egymás után hatztatását akartuk mátrixos formában kezelni. Ezt a szorzási szabályt is lehet „vizualizálni”: az $\underline{A}\underline{B}$ szorzatban a másodiknak felírt $\underline{B}$ mátrixot (ami ugye *először* hat a vektoron) az $\underline{A}$ mátrix után-fölé rajzoljuk, az eredmény-mátrix itt is a „körülölelt” helyre kerül, egy adott komponense a megfelelő sor és oszlop (aminek metszetében van) összepárosított elemeinek szorzatainak összege. A szabály, az eredménymátrix néhány elemére példaként konkrétan kiírva (és most ideiglenesen $\hat{C}$ -nek nevezve $\hat{A}$ és $\hat{B}$ szorzatát):

$$\begin{aligned} \hat{C} &= \hat{A}\hat{B} \\ \Downarrow \\ C_{kl} &= \sum_m A_{km} B_{ml} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} C_{11} &= A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31}, \\ C_{12} &= A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32}, \\ &\vdots \\ \textcolor{red}{C}_{12} &= \textcolor{blue}{A}_{11}\textcolor{red}{B}_{12} + \textcolor{blue}{A}_{12}\textcolor{red}{B}_{22} + \textcolor{blue}{A}_{13}\textcolor{red}{B}_{32}; \\ &\vdots \end{aligned} \end{aligned}$$

azt, hogy melyik elemeket melyikkel kell összepárosítani, a következő sémába lehet tehát rendezni:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \textcolor{blue}{A}_{21} & \textcolor{blue}{A}_{22} & \textcolor{blue}{A}_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \textcolor{red}{B}_{13} \\ B_{21} & B_{22} & \textcolor{red}{B}_{23} \\ B_{31} & B_{32} & \textcolor{red}{B}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & \textcolor{red}{C}_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}.$$

Ez egy olyan séma a mátrixszorzásra, ami hasonlít a fentebb már látott „mátrix-hat-vektorra” műveletre, és könnyen memorizálható.

• Adott bázisban a lineáris **operátorokat** a **mátrixaik** tehát teljesen **jellemzik** (hiszen rekonstruálhatjuk belőlük az operátor hatását bármilyen vektoron). Kérdés, hogy **fordítva is működik-e**, azaz (adott bázis esetén) bármilyen 3×3 -as „szám-táblázathoz” tartozik-e $\hat{A} \in \text{Lin}(\mathbb{V})$ lineáris operátor, aminek ez a táblázat a mátrixa? Válasz: **igen**. Ha adott az $\underline{A}$ mátrix, akkor *értelmezhetjük úgy a $\hat{A}$ operátort*, hogy a bázisvektorok úgy hasson, hogy legyen $(\hat{A}\vec{e}_{(1)})_1 = A_{11}$, $(\hat{A}\vec{e}_{(1)})_2 = A_{21}$, stb.,

éppen, ahogy kell. Másképp megfogalmazva: ha ideiglenesen úgy írjuk a mátrixunk elemeit, hogy az $\underline{a}$, $\underline{b}$, és $\underline{c}$ vektorok komponenseinek képzeljük a mátrixelemeket az alábbi módon, akkor a mátrix-vektor-szorzás szabálya alapján nyilvánvaló, hogy a mátrixunk az $\vec{e}_{(1)}$, $\vec{e}_{(2)}$, $\vec{e}_{(3)}$ egységvektorokat éppen az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorokban viszi:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \underline{\underline{A}}\underline{e}_{(1)} &= \underline{a}, \\ \underline{\underline{A}}\underline{e}_{(2)} &= \underline{b}, \\ \underline{\underline{A}}\underline{e}_{(3)} &= \underline{c}, \end{aligned} \quad \text{hiszen} \quad \underline{e}_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{stb.}$$

Ha pedig megvan $\underline{\underline{A}}$ -ból így $\hat{A}$ hatása a bázisvektorokon, akkor az minden vektorra kiterjeszthető úgy, hogy lineáris legyen:

$$\begin{aligned} \text{Ha adottak a báziselemekhez rendelt} & \Rightarrow \text{akkor akármilyen } \vec{v}\text{-re, ami ugye} \\ \hat{A}\vec{e}_{(1)}, \hat{A}\vec{e}_{(2)}, \hat{A}\vec{e}_{(3)} \text{ vektorok,} & \vec{v} = v_1\vec{e}_{(1)} + v_2\vec{e}_{(2)} + v_3\vec{e}_{(3)} \text{ módon írható, legyen} \\ & \hat{A}\vec{v} \stackrel{!}{=} v_1(\hat{A}\vec{e}_{(1)}) + v_2(\hat{A}\vec{e}_{(2)}) + v_3(\hat{A}\vec{e}_{(3)}). \end{aligned}$$

Ezzel megadtunk egy egyértelmű $\hat{A}$ -t, aminek az adott $\underline{\underline{A}}$ a mátrixa (ami ugye lerögzítette a bázisvektorokhoz hozzárendelt eredményvektorokat). Másképp mondva: egy $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ **leképezés**, amire adottak egy **bázison** felvett értékei, egyértelműen **kiterjeszthető** $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ **lineáris** **leképezéssé**.

5.4. Mátrixok ill. operátorok fontos jellemzői, nyom, determináns

• Az *egységoperátor*, $\hat{I}$ (amely minden vektorhoz önmagát rendeli) mátrixát könnyen megjegyezhetjük: ez az **egységmátrix**, amit $\underline{\underline{I}}$ -vel is jelölhetünk:

$$\hat{I} \Leftrightarrow \underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Másképp: az egységmátrix } k, l\text{-edik komponense éppen } \delta_{kl}.$$

$$\text{Hiszen általában: } A_{kl} = \text{pr}_k(\hat{A}\vec{e}_{(l)}), \quad \text{most konkrétan: } \hat{I}e_{(l)} = e_{(l)}, \\ \text{másrészt } \text{pr}_k(\vec{e}_{(l)}) = \delta_{kl}.$$

Az utolsó elég nyilvánvaló: a k -adik egységvektor komponense l irányban 1, ha $k = l$, és 0 egyébként. Az is elég nyilvánvaló, hogy ez az $\underline{\underline{I}}$ tényleg olyan mátrix, amit akármivel akár balról, akár jobbról szorozva visszkapjuk azt a másik mátrixot.

• Először néhány egyszerű(nek tűnő) fogalom következik. Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix **transzponáltja**⁶³, jelben $\overline{\underline{\underline{A}}}$ az a mátrix, amit úgy kapunk, hogy „a főátlóra tükrözzük”, azaz

$$(\overline{\underline{\underline{A}}})_{kl} = A_{lk}. \quad \text{Pl. } \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 19 \\ 8 & -8 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{transzponáltja: } \overline{\underline{\underline{A}}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 5 & 3 & -8 \\ -1 & 19 & 4 \end{pmatrix}.$$

• További elnevezések:

Az $\underline{\underline{M}}$ mátrix **szimmetrikus**, ha a transzponáltja önmagával egyenlő, azaz ha $\overline{\underline{\underline{M}}} = \underline{\underline{M}}$.

Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix **antiszimmetrikus**, ha transzponáltja önmagának -1 -szerese, azaz ha $\overline{\underline{\underline{A}}} = -\underline{\underline{A}}$.

$$\underline{\underline{M}} \text{ szimmetrikus, ha } M_{kl} = M_{lk}, \quad \underline{\underline{A}} \text{ szimmetrikus, ha } A_{kl} = -A_{lk}. \quad (5.21)$$

⁶³ *Transzponál* latinul szó szerint: „áthelyez”. A főátlón való keresztbe „áthelyezésről” van itt szó, de később más értelmet is nyer az elnevezés. Jelölésünk (a felülvonás) nem egységesen elfogadott; mi ezt fogjuk használni.

Például:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 9 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{szimmetrikus,} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{antiszimmetrikus,} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 9 \\ 8 & 8 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{sem ez,} \\ \text{sem az.} \end{matrix}$$

- Egy mátrix **főátlója**: az azonos sor- és oszlopindexű elemek összessége; a főátló elemei **diagonális elemek** névre is hallgatnak. Antiszimmetrikus mátrix főátlójában nyilván nullák állnak.
- Vegyük kicsit szemügyre az **antiszimmetrikus mátrixokat**. Ezekről már ki tudjuk deríteni, hogy mint operátorok „mit csinálnak”. Először is nyilvánvaló, hogy 3×3 -as antiszimmetrikus mátrixnak 3 független komponense van; éppen ezért akármilyen antiszimmetrikus mátrixot felírhatunk úgy, hogy az elemeket (az eddigiektől eltérően) így jelöljük:

$$\underline{\underline{A}} \text{ antiszimmetrikus, azaz } A_{kl} = -A_{lk} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

Egy ilyen alakú $\underline{\underline{A}}$ mátrix hatása egy komponensekkel adott $\underline{v}$ vektoron, elvégezve a mátrix-vektor szorzást, és kicsit rendesebb alakban írva:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A}} \underline{v} = \begin{pmatrix} a_2 v_3 - a_3 v_2 \\ a_3 v_1 - a_1 v_3 \\ a_1 v_2 - a_2 v_1 \end{pmatrix} = \underline{a} \times \underline{v}. \quad (5.23)$$

A komponensekből felismerhettük az $\underline{a} \times \underline{v}$ vektoriális szorzatot (annak idején láttuk, hogy ezt éppen így kell kiszámolni). Következtetés: **háromdimenziós antiszimmetrikus** mátrix, mint operátor nem más, mint egy adott vektorral való **vektoriális szorzás** művelete. Hogy melyikkel, azt (komponensenként) le lehet olvasni a fentebbi (ott $\underline{\underline{A}}$ -val jelölt) mátrixnál látott sémából⁶⁴.

- Egyszerű dolog, de érdemes megjegyezni, hogy **minden** $\underline{\underline{M}}$ mátrix felírható egy **szimmetrikus** ($\underline{\underline{S}}$) és egy **antiszimmetrikus** ($\underline{\underline{A}}$) mátrix összegeként:

$$\underline{\underline{M}} = \underbrace{\frac{1}{2}(\underline{\underline{M}} + \overline{\underline{\underline{M}}})}_{\underline{\underline{S}}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\underline{\underline{M}} - \overline{\underline{\underline{M}}})}_{\underline{\underline{A}}}, \quad \text{komponensekkel:} \quad M_{kl} = \underbrace{\frac{M_{kl} + M_{lk}}{2}}_{S_{kl}} + \underbrace{\frac{M_{kl} - M_{lk}}{2}}_{A_{kl}}. \quad (5.24)$$

Az $\underline{\underline{M}}$ -ből így kiszámolt $\underline{\underline{S}}$ és $\underline{\underline{A}}$ nyilván szimmetrikus ill. antiszimmetrikus.

- Egy mátrix **nyoma** (jelben⁶⁵: az $\underline{\underline{M}}$ mátrix nyoma $\text{Tr } \underline{\underline{M}}$) a főátlóbeli elemek összege, azaz:

$$\underline{\underline{M}} \text{ nyoma: } \text{Tr } \underline{\underline{M}} = \sum_k M_{kk}. \quad \begin{matrix} \text{Három dimenzióban tehát:} \\ \text{Tr } \underline{\underline{M}} = M_{11} + M_{22} + M_{33}. \end{matrix} \quad (5.25)$$

Adott operátorra ugyebár a mátrix függ attól, hogy hogyan választjuk meg a bázist; a mátrix megváltozik, ha áttérünk egy másik bázisra. Ki fog derülni, hogy **a nyom magát az operátort** jellemzi, nemcsak a mátrixot. Ha áttérünk egy másik bázisra, az operátorokat reprezentáló mátri-

⁶⁴ Persze ez az (antiszimmetrikus mátrixokra tett) megállapítás, hogy ők „vektoriális szorzásműveletek”, nem mond ellent annak, amit fentebb láttunk, hogy a mátrixok komponensei (más beazonosításban) a bázisvektorok képviselei. A bázisvektorok vektoriális szorzás általi képeit pont úgy kapjuk, ahogyan tényleg kell.

⁶⁵ A most használt Tr jelölés az angol *trace* (=nyom) szóból származik; németes behatásra (németül nyom=*Spur*) néha a nyomot $\text{Sp } \underline{\underline{M}}$ -mel is jelölik; ezt most kerülöm, a Sp jelet majd a „spektrum”-ra foglaljuk le.

xok elemei mások lesznek, de a nyom éppen változatlan marad.

- A nyom fontos tulajdonsága az ún. **ciklikusság**: mátrixok (azaz: operátorok) szorzatára

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(\hat{A}\hat{B}) &= \operatorname{Tr}(\hat{B}\hat{A}), \\ \operatorname{Tr}(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) &= \operatorname{Tr}(\hat{C}\hat{A}\hat{B}) = \operatorname{Tr}(\hat{B}\hat{C}\hat{A}), \\ &\dots \\ \operatorname{Tr}(\hat{A}_1\hat{A}_2\ldots\hat{A}_{N-1}\hat{A}_N) &= \operatorname{Tr}(\hat{A}_N\hat{A}_1\hat{A}_2\ldots\hat{A}_{N-1}) = \dots,\end{aligned}$$

azaz az **utolsót előre lehet hozni**, vagy az elsőt hátravinni, „körkörösén”. (Akkor is, ha amúgy pl. $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$; épp ez a „poén”.) Elég kettő mátrixra belátni ezt, ebből következik a többtényezős szorzatra. Két mátrixra pedig csupán a mátrixszorzást (és az indexes írásmódot) kell tudni:

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(\hat{A}\hat{B}) &= \sum_m (\hat{A}\hat{B})_{mm} = \sum_m \left(\sum_l A_{ml} B_{lm} \right) = \\ &= \sum_{l,m} A_{ml} B_{lm} = \sum_{l,m} B_{lm} A_{ml} = \sum_l (\hat{B}\hat{A})_{ll} = \operatorname{Tr}(\hat{B}\hat{A}), \quad \text{tényleg.}\end{aligned}$$

- Következő fontos fogalom egy mátrix (ill. egy operátor) **determinánsa**. Erre már utaltunk három vektor vegyesszorzatánál (ami ugye az általuk a kijelölt paralelepipedon előjeles térfogatát adja meg). Minden operátornak megfelel három vektor, a bázisvektorok képei, ahogy láttuk:

$$\begin{array}{l} \hat{A} \text{ operátor,} \\ \text{mátrixa } \underline{\underline{A}}, \end{array} \quad \underline{\underline{A}} \equiv \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{a bázisvektorok képei: } \vec{a}, \vec{b} \text{ ill. } \vec{c}. \quad (5.26)$$

Definíció: 3×3 -as mátrixok (azaz: a háromdimenziós téren ható operátorok) **determinánsa** (jelben: $\hat{A}$ determinánsa $\det \hat{A}$) nem más, mint a **bázisvektorok képei** (az iménti jelölésben az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok) által kijelölt paralelepipedon **előjeles** (ha a három eredményvektor balsodrású rendszer lett, -1 -szeres) **térfogata**. A determináns tehát megmondja az operátorról, hogy az az $\vec{e}_{(1)}$, $\vec{e}_{(2)}$, $\vec{e}_{(3)}$ bázisvektorok által kijelölt (egységnyi térfogatú) kocka térfogatát hányszorosára „torzítja”.

- Adott operátor determinánsa nemcsak a kockára, hanem minden térbeli részhalmazra is érvényes **térfogattorzítási tényező**. A részhalmaz térfogatát kicsi (egyre kisebb; végtelen kicsi) egyforma kockákra feldaraboljuk; az eredményhalmaz ösztérfogata a kockák képeinek (amelyek, lineáris leképezésről lévén szó, mind egymással egybevágó paralelepipedonkák) térfogatainak az összege⁶⁶. A térfogattorzítási arány tehát ugyanannyi más részhalmazra is, mint az egységkockára.

- Speciálisan egy *paralelepipedon* térfogata is „determináns-szorosára” torzul. Ez alapján igaz a

$$\textbf{determinánsok szorzástétele:} \quad \det(\hat{A}\hat{B}) = \det \hat{A} \cdot \det \hat{B}, \quad (5.27)$$

azaz operátorok (mátrixok) szorzatának determinánsa a determinánsok szorzata. Nyilvánvaló: két operátor egymás után hatásának térfogattorzítási aránya az egyik, majd a másik ilyen arány szorzata.

⁶⁶ Akármilyen halmazra nem is olyan egyszerű matematikai kérdés, hogy mi is a térfogata; a (határesetben végtelen kicsi) kockákra darabolással kapott érték a térfogat definíciójának is tekinthető.

- Konkrét (3×3 -as) mátrixok determinánsát a vegyszorzat képletére emlékezve lehet kiszámítani:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1, \quad \text{ez alapján}$$

$$\Rightarrow \det \underline{\underline{A}} = A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{11}A_{23}A_{32} - A_{12}A_{21}A_{33} - A_{13}A_{22}A_{31}.$$

Az $\underline{\underline{A}}$ mátrixon tehát úgy kell „végigmenni”, hogy minden sorból és oszlopból pontosan egy elemet választunk; ezeket össze kell szorozni, ± 1 az előjel annak megfelelően, hogy a sorokon végigmenve az oszlopszámok páros vagy páratlan permutációban vannak-e; a végén az össze lehetőséget (ez $3! = 6$ darab) összeadni. Tömören, a már ismert Lévi-Civita-szimbólum használatával:

$$\det \underline{\underline{A}} = \sum_{k,l,m} \varepsilon_{klm} A_{1k} A_{2l} A_{3m}. \quad (5.28)$$

Már most megjegyezzük, hogy ebből a formulából (plusz a mátrixszorzás tárgyalt szabályából) nagyon nem lenne egyértelmű a determinánsok szorzástétele; térfogattorzításként gondolva rá viszont egyértelmű. Mátrixok determinánsai különösen sokszor előkerülnek, ezért ezzel a fogalommal a következő szakaszban részletesebben is foglalkozunk.

* * *

- Ebben és az előző fejezetben eddig **háromdimenziós** térbeli vektorokat (amiknek számhármassok felelnek meg) és a rajtuk ható operátorokat ill. azok (3×3 -as) mátrixait vizsgáltuk. Nem nagy rejtély (pontosan ugyanúgy kijön, mint ahogy kijött háromdimenziós térben), hogy **akármilyen** $\mathbb{U}$ és $\mathbb{V}$ **véges dimenziós vektorterek** közötti lineáris leképezéseknek is van mátrixuk, amikre ugyanaz a mátrix-vektor-szorzás ill. mátrix-mátrix-szorzási szabály vonatkozik, mint fentebb. Sőt, a szorzási szabály abban is segít eligazodni, hogy „melyik térnek hány dimenziósnak kell lennie”.

- Legyen $\dim \mathbb{U} = N$ és $\dim \mathbb{V} = M$, és válasszunk bennük egy-egy bázist (amiről feltehetjük, hogy ortogonális és normált). Ekkor minden $\vec{u} \in \mathbb{U}$ vektort egy **szám- N -es**, $\underline{u}$, illetve minden $\vec{v} \in \mathbb{V}$ vektort **egy szám- M -es**, $\underline{v}$ reprezentál⁶⁷. Egy $\hat{A}: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ lineáris leképezést, azaz $\hat{A} \in \text{Lin}(\mathbb{U}, \mathbb{V})$ -t pedig egy M sorból és N oszlopból álló táblázat, **egy $M \times N$ -es mátrix** reprezentál. Így pont „működik” a mátrix-hat-vektorra séma. A következő példában $N=6$, $M=4$, azaz egy hatdimenziós tér az indulási vektortér, és egy négydimenziós az érkezési tér:

$$\begin{array}{l} \text{Például legyen} \\ \dim \mathbb{U} = N \stackrel{!}{=} 6, \\ \dim \mathbb{V} = M \stackrel{!}{=} 4, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \vec{u} \in \mathbb{U}\text{-t reprezentálja } \underline{u}, \\ \vec{v} \in \mathbb{V}\text{-t reprezentálja } \underline{v}: \end{array} \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}, \quad \text{továbbá}$$

$$\begin{array}{l} \hat{A} \in \text{Lin}(\mathbb{U}, \mathbb{V})\text{-t reprezentálja} \\ \text{egy } M \times N\text{-es } \underline{\underline{A}} \text{ mátrix:} \end{array} \quad A_{kl} = \text{pr}_k(\hat{A}\vec{e}_{(l)}), \quad \underline{\underline{A}} \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \end{pmatrix}.$$

⁶⁷ N és M dimenziós vektorterekre a legkézenfekvőbb példák éppen a szám- N -esek ill. szám- M -esek (N ill. M számból álló oszlopok) halmazai: ezek önmaguk is ugyebár vektortérnek tekinthetők, ha a vektorösszeadást és a számmal szorzást rajtuk a szokásos, komponensenkénti módon értelmezzük. Az előző fejezetben láttuk, hogy számhármassokra ezek a műveletek pontosan a valódi térbeli igazi vektorműveletek reprezentált formái.

- Három helyett akármilyen N dimenziós vektortérben is van $\hat{I}$ egységoperátor; elég nyilvánvaló, hogy ennek **az** $N \times N$ -es **egységmátrix** felel meg:

$$\hat{I} \Leftrightarrow \underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{azaz} \quad \underline{\underline{I}}_{kl} = \delta_{kl}.$$

- Még egy megjegyzés: legtöbb helyen a mátrix-vektor szorzást és a mátrixok szorzását nem jelölik így „széthúзва”, ahogy ebben a jegyzetben tettem eddig (hogy az eredmény a „körülölet” területre pont „beférjen”); egyszerűen egymás mellé írják őket. Ez talán kevésbé áttekinthető (pl. nehezebben látszik rögtön, hogy stimmelnek-e a dimenziók, vagy hogy melyik elemhez melyikeket is kell szorozgatni), de pl. könnyebb gépelve leírni. Az előző, $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}}$ séma így írva:

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & B_{15} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & B_{25} & B_{26} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} & B_{35} & B_{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \end{pmatrix}.$$

5.5. Determinánsok tulajdonságai

Visszatérünk adott véges N dimenziós $\mathbb{V}$ vektortér operátoraira. A háromdimenziós eset mintájára értelmezzük ilyen operátorok „térfogat”torzítási tényezőit; ez lesz az adott operátor determinánsa.

Itt a „térfogat” az N dimenziós térben értendő, ami nem szemléletes, ha $N > 3$: elég, ha csak homályosan képzeljük magunk elé. A determinánsok tulajdonságait szemléltető példákat a két- és háromdimenziós térben is meg lehet érteni; az „ N dimenziós térfogat” fogalmáról elég annyit tudnunk, hogy értelmezhető. A lényeg, hogy az $\vec{e}_{(1)}, \vec{e}_{(2)}, \vec{e}_{(3)}, \dots, \vec{e}_{(N)}$ bázisvektorok (N darab van) által kijelölt N dimenziós kockának az N dimenziós térfogata éppen 1.

- Rögtön az elején nem árt hangsúlyozni, hogy eredendően a „térfogat”torzításnak (azaz a determináns fogalmának) nyilván csak akkor van értelme, ha N dimenziós térből N dimenziós térbe képező leképezéseket (azaz: operátorokat) vizsgálunk. Ezeket ugye négyzetes ($N \times N$ -es) mátrixok reprezentálják (adott bázisban). Tehát: **determinánsa csak négyzetes mátrixoknak van!!!**

- Láttuk, hogy 3×3 -as mátrixokra a determináns (mint térfogattorzítási tényező) a következő:

$$\underline{\underline{A}} \equiv A_{kl} \Rightarrow \det \underline{\underline{A}} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \varepsilon_{klm} A_{1k} A_{2l} A_{3m}, \quad (5.29)$$

Nézzünk 2×2 -es mátrixokat! Ezek kétdimenziós téren (pl. a geometriai síkon) ható operáto-

roknak foghatók fel, és a komponenseiket most is beazonosíthatjuk, mint a bázisvektorok képeit:

$$\underline{A} \equiv \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \underline{e}_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{képe: } \underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \\ \underline{e}_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{képe: } \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \end{matrix} \quad (5.30)$$

Két dimenzióban térfogat helyett terület van. Az $\vec{a}$, $\vec{b}$ által kijelölt paralelogramma területe már előkerült a vektorszorzat bevezetésekor; ha most „kiegészítjük” kétdimenziós vektorainkat a harmadik térbeli iránnyal, akkor látszik, hogy

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \text{Az } \underline{a}, \underline{b} \text{ kétdimenziós} \\ \text{vektorok által kijelölt} & a_1 b_2 - a_2 b_1. \end{matrix} \quad (5.31)$$

paralelogramma területe:

Ez alapján kézenfekvő, hogy így értelmezzük a determinánst 2×2 -es mátrixokra:

$$\underline{A} \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det \underline{A} := A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21};$$

ez adja meg az eredmény-paralelogramma területét, tehát két dimenzióban a „térfogat”- (azaz itt: terület)torzítást⁶⁸. Természetesen itt (azaz: 2×2 -es mátrixokra) is igaz, hogy

$$\det(\hat{A}\hat{B}) = \det \hat{A} \cdot \det \hat{B},$$

hiszen ehhez csak azt kellett tudnunk, hogy „egymás után csinálásnál” a térfogat- (itt: terület)torzítások összeszorzódnak, éppúgy, mint 3 dimenzióban.

• Vezessük be a **kétdimenziós Lévi-Civita-szimbólumot** a háromdimenziós mintájára: legyen két indexe, jele legyen ε_{kl} ; két dimenzióban az indexek (a két bázisvektornak megfelelően) 1-től 2-ig futnak. A kétdimenziós Lévi-Civita-szimbólum értékei (ugye $2^2 = 4$ lehetőség van):

$$\varepsilon_{11} = 0, \quad \varepsilon_{12} = 1, \quad \varepsilon_{21} = -1, \quad \varepsilon_{22} = 0.$$

Azért jó ez, mert ezzel 2×2 -es mátrixok determinánsát a 3×3 -asokéhoz hasonló stílusban írhatjuk:

Három dimenzióban:

$$\det \underline{A} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \varepsilon_{klm} A_{1k} A_{2l} A_{3m},$$

Két dimenzióban:

$$\det \underline{A} = \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \varepsilon_{kl} A_{1k} A_{2l}.$$

• A két- és háromdimenziós Lévi-Civita-szimbólumot is megfogalmazhatjuk a következő módon:

- 1) Annyi indexe van, ahány dimenziós (ε_{kl} ill. ε_{klm} , ez összesen 2^2 , ill. 3^3 darab komponens),
- 2) Értéke 1, ha az indexek 1-től 2-ig ill. 1-től 3-ig sorban vannak: $\varepsilon_{12}=1$, ill. $\varepsilon_{123}=1$,
- 3) Akármelyik két indexét kicseréljük, értéke -1 -szeresére változik. (Pl. $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21}$.)

Ennyi elég, ebből következik minden. Ha két index értéke egybeesik, a szimbólum értéke nulla (cserénél ugyanaz marad, de ellentettre is kell változnia). Minden „megmaradt” indexkiosztás az 1,2 illetve az 1,2,3 számok permutációja. Egy permutációra vagy páros, vagy páratlan; ezt tudva mondhatjuk, hogy ε_{kl} illetve ε_{klm} értéke 1, ha az indexek értékei a sorba rakott index-értékek páros

⁶⁸Annyira sokszor előkerülnek 2×2 -es mátrixok, hogy még egy más jelöléssel, versikészerűen megjegyezhetően is felírom: ha $\underline{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, akkor a determináns: $\det \underline{A} = ad - bc$.

permutációja, és -1 , ha páratlan. (Minden más esetben 0 ; ekkor két index értéke megegyezik.)

• Semmi akadály, hogy N dimenzióban is ugyanígy értelmezzük a Lévi-Civita-szimbólumot: N dimenzióban N darab indexe van, jele $\varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_N}$ (egy kicsit kellemetlen, hogy ha általános N -re akarjuk így írni, akkor az indexeket is indexezni kell, de ez van). A definiáló tulajdonságok pedig:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{123\dots N} &= 1, & \varepsilon_{\dots k \dots l \dots} &= -\varepsilon_{\dots l \dots k \dots}, \\ (\text{egy érték megadva}), & & (\text{azaz bármely indexcserére ellentettre változik}). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Következmény:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_N} &= 1, & \text{ha az indexkiosztás az } \{1, \dots, N\} \text{ páros permutációja,} \\ \varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_N} &= -1, & \text{ha az indexkiosztás az } \{1, \dots, N\} \text{ páratlan permutációja,} \\ \varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_N} &= 0 & \text{a többi esetben (ekkor két index értéke mindenképp megegyezik).} \end{aligned} \quad (5.33)$$

• $N \times N$ -es mátrixok determinánsa az „ N dimenziós térfogat” torzítását fogja jelenteni, tehát annak az „ N dimenziós paralelepipedonnak” a térfogatát, amibe a mátrix(nak megfelelő operátor) az $\vec{e}_{(1)}$, $\vec{e}_{(2)}$, $\vec{e}_{(3)}$, $\dots$, $\vec{e}_{(N)}$ egységvektorokból álló „egységkockát” viszi. A „térfogat”torzítási tulajdonságra hivatkozva akármilyen dimenziószámában is igaz, hogy

$$\det(\hat{A}\hat{B}) = \det \hat{A} \cdot \det \hat{B}.$$

Az eddigiekből kézenfekvőnek tűnik (most nem bizonyítjuk, csak érezhetjük), hogy a determináns kiszámításához az N dimenziós Lévi-Civita szimbólum fog kelleni a következő módon:

$$\text{\textit{N dimenzióban:}} \quad \det \underline{\underline{A}} = \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=1}^N \cdots \sum_{k_N=1}^N \varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_N} A_{1k_1} A_{2k_2} \cdots A_{Nk_N}.$$

Tudva, hogy az N indexnek $N!$ -féle permutációja lehet (ezekhez tartozik a Lévi-Civita-szimbólumnak nem nulla értéke), ez egy $N!$ tagú összeg.

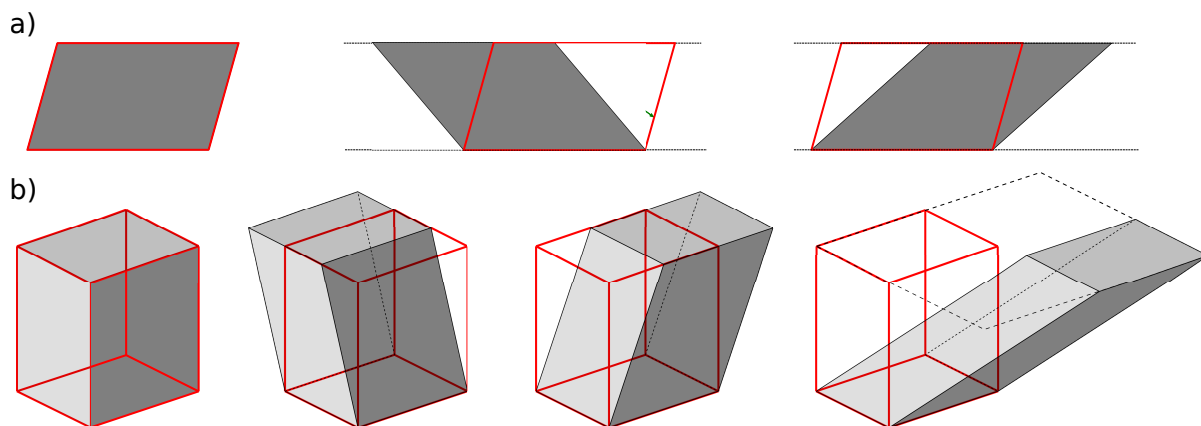
• Sokszor ezzel az $N!$ tagú összeggel *definiálják* mátrixok determinánsát. Mi most a térfogat-torzítással definiáltuk; két- ill. háromdimenzióban **kijött** ez a képlet, akárhány dimenzióra pedig higgyük el most. Szavakban elmondva⁶⁹:

- 1) Végiglépegetünk a mátrix sorain, egyesével, közben az oszlopok között is mászkálunk.
- 2) Egy végiglépegetés közben sosem lépünk kétszer ugyanabba a sorba vagy oszlopba.
- 3) Mire az utolsó sorhoz érünk, minden oszlopban pontosan egyszer kellett járnunk.
- 4) Az „útba ejtett” mátrixelemeket összeszorozzuk. Attól függően, hogy az első, második, harmadik, stb., N -edik sorokon végiglépegetés közben az oszlopindexek sorrendje az $1, 2, \dots, N$ számoknak páros vagy páratlan permutációja volt, az imént kapott szorzatot $+1$ -gyel vagy -1 -gyel szorozzuk.
- 5) Az eddigit megcsináljuk annyiféleképpen, ahányféleképpen csak végiglépegethetünk (ez $N!$ darab lehetőség), minden kapott szorzatot (a permutáció előjelével együtt) összeadunk.
- 6) Az eredményül kapott szám a mátrix determinánsával egyenlő.

• Az iménti szabályt fontos tudni, de gyakorlatilag szinte sosem így számítjuk ki konkrét mátrixok determinánsát⁷⁰, hanem a determináns különféle tulajdonságainak kombinálásával. Ezek a

⁶⁹Lerajzolni most nem vagyok hajlandó...

⁷⁰Általánosságban ez $N!$ darab tag; egy nagyobbacska, mondjuk 100×100 -as mátrixra ez $100! \approx 10^{158}$ darab lenne, ennyit az egész univerzum minden anyagát felhasználva épített számítógép sem tudna soha sem kiszámolni.



14. ábra. Illusztráció ahhoz, hogy determinánsok oszlopaihoz a többi oszlop lineárkombinációit hozzáadhatjuk: a paralelogramma területe (2 dimenzióban) ill. a paralelepipedon térfogata (3 dimenzióban) nem változik ilyen átalakításra.

tulajdonságok részben a megadott (sok tagú) képletből, részben a determinánsnak mint térfogat-torzításnak értelmezéséből adódnak.

- Az egyik szabályszerűség értelme 2×2 -es és 3×3 -as mátrixokra szemléletes; a 14. ábra próbál segíteni. Egy paralelogramma területe nem változik, ha az egyik élét a szemközttel párhuzamosan eltolom, vagyis: ha a paralelogrammát meghatározó egyik vektorhoz a másiknak akármilyen szorzását hozzáadom. Hasonlóan: egy paralelepipedon térfogata nem változik, ha az őt kijelölő egyik vektort a másik kettő síkjában elmozgatom, vagyis: hozzáadom a másik kettő akármilyen lineáris kombinációját. Ugyanilyen tulajdonság igaz a (már nem ennyire szemléletes) N dimenziós paralelepipedon-térfogatra is. Emlékezve, hogy egy $N \times N$ -es mátrixban tulajdonképpen a bázisvektorok képei vannak az oszlopokban „felsorolva”, amik az eredmény-paralelepipedont kijelölik, kimondhatjuk a következő állítást:

*Egy determináns értéke **nem változik**, ha akármelyik oszlopához hozzáadjuk a többi oszlopnak bármilyen lineáris kombinációját.*

A gyakorlatban elég azt megjegyezni, hogy egy oszlophoz bármelyik másik számszorosát hozzáadhatjuk: ilyenek egymásutánjaként megkaphatjuk azt is, amikor egy adott oszlophoz a többi valamilyen komplikáltabb lineárkombinációját adjuk.

- Ezen kívül is sok szabály adódik a fenti konkrét (permutációs-összeadás) kiszámítási szabályból. A „geometria” jelentéshez még egyszer idézzük fel: a mátrix oszlopait vektorokként felfogva ezek jelölik ki az egységkocka képét (a paralelepipedont) sok dimenzióban is⁷¹. Összegyűjtve:

1. Ha a mátrix egyik sorát (csak az egyiket!!!) megszorozom egy számmal, a determináns is annyiszorosára változik. (Kijön a permutációs összeg-képletből is, hiszen minden tag egyszer tartalmaz egy sorból elemeket, azaz minden tag ugyanannyival szorzódik, geometriai jelentés: a paralelepipedont az egyik koordinátatengely irányába nyújtjuk).

⁷¹ Megjegyzés: tudva a determinánst $N!$ tagú összegként megadó képletet, esetleg elgondolkodhatunk, hogy ez pont olyan képlet, amivel összefér az, hogy egy oszlophoz egy másik oszlop számszorosát adva nem változik a kapott érték (a hozzáadott „járulék” kiesik $\varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_N}$ teljes antiszimmetriája miatt). Emiatt is „hihetőnek tűnik”, hogy az $N!$ tagú képlet *tényleg* a paralelepipedon térfogatát adja meg, amire ezt a tulajdonságot ugyebár imént másképp „beláttuk”.

- Ha a mátrix egyik (csak egyik!!) oszlopát számmal szorozzuk, a determináns is annyival szorzódik. Geometriailag: a paralelepipedont egy éle mentén nyújtjuk (az „élvektorát” szorozzuk).
- Egy mátrix **transzponáltjának determinánsa ugyanannyi**, mint magáé a mátrixé:

$$\det \underline{\underline{A}} = \det \underline{A}.$$

Ehhez fontos tudni a permutációs összeget; lényeg, hogy ha egy tag előállításához „minden soron és minde oszlopon” végigszaladok, akkor tulajdonképpen tükrözve is mondhatom: „minden oszlopon és minden soron” is végigszaladtam, így tulajdonképpen ugyanazokat a tagokat kapom a transzponált mátrixból is⁷². Emiatt minden, amit a sorokra elmondhatunk, elmondhatjuk oszlopokra is (transzponálva a sorok oszlopokká válnak); a sorok és oszlopok „egyenértékűségére” az első két pont is példát szolgáltatott.

- Ha egy sor (vagy egy oszlop) csupa nulla, a determináns nulla (hiszen minden tag az).
- A fentebb geometriailag elmagyarázott tulajdonság még egyszer: a determináns értéke nem változik, ha akármelyik oszlopához hozzáadom egy másik oszlopának számszorosát (vagy többször alkalmazva: a többi oszlop bármely lineárkombinációját). *Ugyanez igaz sorokra is!!!*
- Következmény: ha a mátrix akármelyik sora a többi sor lineárkombinációja (vagy akármelyik oszlopa a többi oszlopé), a determináns nulla. **Ez visszafelé is igaz:** ha nulla a determináns, akkor „nulla a térfogat”: a mátrix a bázist lin. összefüggő vektorokba képezi.
- Olyan mátrixok determinánsa, ahol a főátló alatt csupa nulla áll, a főátlóbeli elemek szorzata (hiszen csak az az egy tag lesz nem nulla az $N!$ darab közül), például:

$$\text{Példa: } \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 & 3 & 45 \\ 0 & 4 & 2 & 10 & 86 \\ 0 & 0 & 7 & 20 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 89 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \underline{\underline{A}} = 5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 = 12320. \quad (5.34)$$

- Bármelyik két sort kicserélve a determináns -1 -gyel szorzódik. (A permutációs képlet tagjaiban a tényezők nem változnak, a permutációkhoz pedig „még egy csere” tevődik: párosságuk megfordul, minden tag -1 -szeres lesz.) Két oszlop kicserélése is -1 -gyel szorozza a determinánst.

• Ezekkel a szabályokkal már ki lehet számítani mátrixok determinánsát „emberi idő alatt”. Már előkerült, de még egyszer fontos megfogalmazni a determináns egyik alapvető alkalmazását:

$\det \hat{A} = 0$ pontosan akkor igaz, ha $\hat{A}$ a bázisvektorokat (amik lin. függetlenek) lineárisan összefüggő vektorokba képezi. Azaz:

$$\det \hat{A} \neq 0 \Leftrightarrow \hat{A} \text{ injektív.}$$

Másképp mondva: ha $\det \hat{A} = 0$, akkor $\hat{A}$ a térfogatokat nullaszorosába viszi, azaz „kilapít”; biztos nincs inverze. Ha $\det \hat{A} \neq 0$, akkor $\hat{A}$ injektív, van inverze, $\hat{A}^{-1}$ és ennek determinánsa:

$$\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{I} \quad \Rightarrow \quad \det(\hat{A}\hat{A}^{-1}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \det \hat{A}^{-1} = \frac{1}{\det \hat{A}}.$$

⁷²Még annyi, hogy „tükrözött” esetben egy adott tagba az inverz permutáció kerül, aminek párossága ugyanaz.

Gyakorlásképpen számítsuk ki az alábbi 5×5 -ös $\underline{A}$ mátrix determinását! Megjegyzés: konkrét kijelölt mátrixok determinánsát néha „nagy abszolútérték-jellel” jelölik, mint én is most.

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det \underline{A} = ?, \quad \text{azaz} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = ?$$

A lépéseket egyesével végignézzük. A célirány: ha olyan alakra sikerül hozni, hogy pl. a főátló alatt csupa nulla álljon (mint fentebb, az (5.34) egyenletben látott példában), nyert ügyünk van. „Részeredmény” is jó: ha az első sorban (vagy oszlopban) 1, 0, 0, ... (azaz egy egyes és csupa nulla) szerepel, akkor az első sort és az első oszlopot el lehet hagyni, hiszen az $N!$ darab tagból mindegyik vagy eltűnik (a nullák miatt) vagy az 1-es szerepel bennük (a sarokbeli egyes miatt), így a determináns tényleg pont annyi lesz, mint a kisebb mátrix determinánsa. Így fokozatosan csökkenteni lehet a mátrix méretét. Sokféleképpen lehet haladni; most többféle átalakítást is megnézve tesszük.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{az első sor megfelelő} \\ \text{számszorosaait a 2., 3.,} \\ \text{4., 5. sorokhoz adva,} \\ \text{hogy az első oszlopba} \\ \text{0-k kerüljenek:} \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -11 & -16 \\ 0 & 6 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{matrix} \text{az első sort} \\ \text{és oszlopot} \\ \text{elhagyhatjuk:} \end{matrix} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -11 & -16 \\ 6 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{a 2.sorból } -1\text{-et,} \\ \text{a 3.ból } 2\text{-t, a 4.ből} \\ \text{-1-et kiemelhetünk,} \\ (-1) \cdot (-1) \cdot 2 = 2: \end{matrix} 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 11 & 16 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{matrix} \text{elérjük, hogy a 4.sor-} \\ \text{ban egy 1 és a többi 0} \\ \text{legyen: a 3.oszlopot } 2 \times \\ \text{kivonjuk a 4.ből, utána} \\ \text{a 2.at } 3 \times \text{ a 3.ból:} \end{matrix} 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 11 & 16 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 11 & -6 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & -8 & -1 \\ 4 & 2 & 5 & -6 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{matrix} \text{kiemelünk a 4.oszlopból} \\ \text{-1-et, majd két oszlop-} \\ \text{és két sorcserével (a -1} \\ \text{szorzókat követve) fel-} \\ \text{visszük az 1-est:} \end{matrix} -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & -8 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & -8 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & -8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{2.sort kivonjuk} \\ \text{az 1.ből és a 3.ból,} \\ \text{utána 1.sort } 3 \times \\ \text{a 2.ből:} \end{matrix} -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & -1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -15 & -10 \\ 0 & -8 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} -15 & -10 \\ -8 & -1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 15 & 10 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{(közben 2 db -1} \\ \text{szorzót kiemeltünk);} \\ \text{ez már } 2 \times 2\text{-es,} \\ \text{kiszámíthatjuk:} \end{matrix} = -2 \cdot (15 \cdot 1 - 8 \cdot 10) = \underline{\underline{130}}.$$

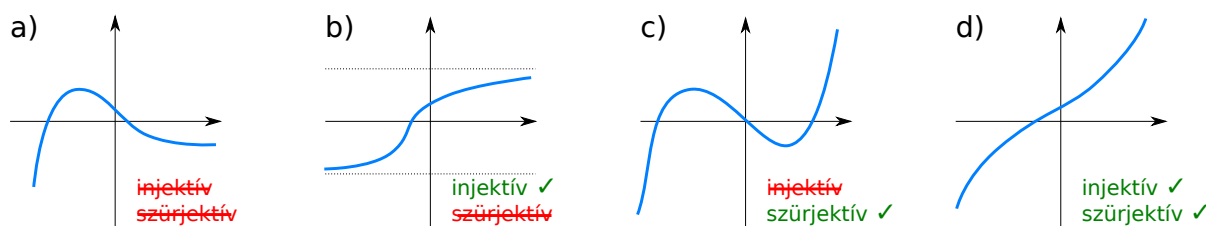
A 2×2 -es maradékot már kiszámíthattuk. Házi feladat: 1.) leellenőrizni az egészet, 2.) másképp (azaz: más lépésekkel haladva) is kiszámolni gyakorlásképpen!

- 3×3 -as és 2×2 -es mátrixok determinánsát általában „közvetlenül”, a 2 ill. a 6 darab tagot felírva számítjuk ki. Az általános esetből is jónéhány szabályt kihagytunk; most ennyi fért bele. Nem beszéltünk például *aldeterminánsokról*...

6. Lineáris egyenletrendszerek

Először kicsit tovább vizsgáljuk a lineáris leképezéseket, hogy aztán majd többet tudjunk mondani lineáris egyenletrendszerek megoldásairól; ilyenek lépten-nyomon előkerülnek a fizikában.

- Egy kis **emlékeztető** függvények bizonyos tulajdonságainak (úton-útfélen használt) neveiről. Akármilyen X halmazból akármilyen Y halmazba képező $f: X \rightarrow Y$ függvényre azt mondjuk, hogy
 $\rightarrow$ az f **injektív** függvény (főnévként: *injekció*), ha nem veszi fel kétszer ugyanazt az értéket, azaz ha $f(x_1) = f(x_2)$ csak akkor teljesül, ha $x_1 = x_2$; ilyenkor van inverze, f^{-1} , amire $f^{-1}(f(x)) = x$,
 $\rightarrow$ az f **szürjektív** (vagyis: *szürjekció*, ráképezés), ha értékkészlete az egész Y érkezési halmaz,
 $\rightarrow$ az f **bijektív** (*bijekció*; kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés), ha injektív és szürjektív.
 Egyszerű valós függvényekkel szemlélteti ezeket a fogalmakat a 15. ábra.



15. ábra. Injekció, szürjekció, bijekció fogalmának elnagyolt szemléltetése $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekkel.

Térjünk vissza ezek után a lineáris leképezések tanulmányozásához.

6.1. Lineáris leképezések tulajdonságai: magtér, képtér

- Minden lineáris leképezés **a nullavektort** az eredménytérbeli **nullavektorba** visz. Adott lineáris leképezés esetén felmerül, hogy **van-e más** (nem nulla-)vektor, amit ő a nullavektorba visz. A geometriai transzformációknál pl. a vetítések bizonyos nemnulla vektorokat is nullába visznek. Általánosságban is érdekes ez a kérdés, ezért az alábbi definíciót vezetjük be: legyenek $\mathbb{V}$ és $\mathbb{W}$ akármilyen vektorterek (még az is lehet, hogy ugyanazok), $\hat{A}$ adott $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ lineáris leképezés, ekkor

$$\text{Definíció: } \hat{A} \in \text{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \quad \text{magja: } \text{Ker } \hat{A} := \left\{ \vec{v} \in \mathbb{V} \mid \hat{A}\vec{v} = \vec{0} \in \mathbb{W} \right\}. \quad (6.1)$$

A halmazelméleti jelölést kiolvasva: az $\hat{A}$ magja⁷³ az indulási vektortér azon vektorainak halmaza, amiket az $\hat{A}$ leképezés a nullavektorba (az eredménytér nullavektorába) visz.

- Egyszerű és fontos, hogy minden $\hat{A} \in \text{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ -re **a mag, $\text{Ker } \hat{A}$ lineáris altér $\mathbb{V}$ -ben**. Ez ugye azt jelenti, hogy bármilyen $\text{Ker } \hat{A}$ -beli vektorok lineáris kombinációja is $\text{Ker } \hat{A}$ -ban van. Egyszerű ezt belátni (és elég két vektorra), kihasználva, hogy $\hat{A}$ lineáris. Triviális lépésekkel haladva:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \in \text{Ker } \hat{A}, \quad \vec{v}_2 \in \text{Ker } \hat{A} &\Rightarrow \hat{A}\vec{v}_1 = \vec{0}, \quad \hat{A}\vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \hat{A}(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 \cdot \hat{A}\vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \hat{A}\vec{v}_2 = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) \in \text{Ker } \hat{A}, \quad \text{tényleg.} \end{aligned}$$

Éppen, mivel lineáris altér, a magot néha **magtérnek** is hívjuk.

- Egy $\hat{A} \in \text{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ leképezés magjában, $\text{Ker } \hat{A}$ -ban a $\vec{0} \in \mathbb{V}$ nullavektor biztos benne van, hiszen

⁷³A Ker jelölés a „kernel” angol-germán szóból származik.

ezt $\hat{A}$ biztosan a nullavektorba viszi. Ha nincs is más ilyen, akkor a magtér a triviális $\{\vec{0}\}$ altér. Minden $\hat{A}$ -ra van **három** egyenértékű tulajdonság (**vagy mindegyik** igaz, **vagy egyik sem**):

- | | |
|---|--|
| Adott $\hat{A} \in \text{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ -re a következő három tulajdonság egyenértékű: | 1) $\hat{A}$ injektív,
2) $\text{Ker } \hat{A} = \{\vec{0}\}$ (a triviális altér),
3) minden $\mathbb{V}$ -beli lin. független részhalmaz $\hat{A}$ általi képhalmaza lin. független ($\mathbb{W}$ -ben). |
|---|--|

Ezt egyszerűen be is bizonyíthatjuk⁷⁴, de jól szemléltethető is a vetítésekkel és a forgatásokkal:

→ A *vetítések* nem injektívek (nincs inverzük), magjuk nemcsak a triviális altér (csomó más vektort is nullába visznek), és lin. független halmazból is tudnak lin. összefüggőt csinálni (pl. egy síkra vetítés a térben három lin. független vektorból három darab egy síkban lévő csinál).

→ a *forgatások* injektívek („visszacsinálhatók”), magjuk csak a $\{\vec{0}\}$ (csak a nullavektor elforgatottja lehet a nullavektor), és lin. független vektorok halmazát bárhogy forgatom, lin. független marad.

• Következő fontos fogalom: egy $\hat{A} \in \text{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ **képtere** a lehetséges eredményvektorok halmaza:

Definíció: $\hat{A} \in \text{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ **képtere:** $\text{Ran } \hat{A} := \left\{ \vec{w} \in \mathbb{W} \mid \text{létezik } \vec{v} \in \mathbb{V}, \text{ amire } \hat{A}\vec{v} = \vec{w} \right\}$.

Már a nevébe is belekódoltuk, hogy ez **lineáris altér** az érkező vektortérben, $\mathbb{W}$ -ben. Valóban; egyszerű lépésekkel beláthatjuk, hogy $\text{Ran } \hat{A}$ -beli elemek lineárkombinációja is $\text{Ran } \hat{A}$ -ban van:

$$\begin{aligned}
 \vec{w}_1 \in \text{Ran } \hat{A}, \quad \vec{w}_2 \in \text{Ran } \hat{A} &\Rightarrow \text{létezik } \vec{v}_1 \in \mathbb{V} \text{ és } \vec{v}_2 \in \mathbb{V}, \text{ amire } \hat{A}\vec{v}_1 = \vec{w}_1 \text{ és } \hat{A}\vec{v}_2 = \vec{w}_2 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \text{emiatt akármilyen } \lambda_1, \lambda_2 \text{ számokra} \\
 \hat{A}(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) &= \lambda_1 \cdot \hat{A}\vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \hat{A}\vec{v}_2 = \lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \text{vagyis } \lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2 \in \text{Ran } \hat{A}, \quad \text{tényleg.}
 \end{aligned}$$

• $\hat{A} \in \text{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ akkor és csak akkor injektív, ha csak a $\vec{0} \in \mathbb{V}$ -t viszi a $\vec{0} \in \mathbb{W}$ -ba, azaz ha $\text{Ker } \hat{A}$ a triviális altér $\mathbb{V}$ -ben. Továbbfűzhetjük ezt a *kiegészítő alterek* fogalmára emlékezve. Ha az $\mathbb{M}$ altér a $\text{Ker } \hat{A}$ kiegészítője⁷⁵, akkor minden $\vec{v} \in \mathbb{V}$ vektor egyértelműen felírható $\vec{v}_{\text{Ker}} + \vec{v}_{\mathbb{M}}$ alakban, ahol $\vec{v}_{\text{Ker}} \in \text{Ker } \hat{A}$ és $\vec{v}_{\mathbb{M}} \in \mathbb{M}$. Az $\hat{A}$ operátor hatása: $\hat{A}\vec{v} = \hat{A}\vec{v}_{\mathbb{M}}$, hiszen $\hat{A}\vec{v}_{\text{Ker}} = \vec{0}$. Másrészt ha $\vec{v}_{\mathbb{M}} \neq \vec{0}$, akkor $\hat{A}\vec{v}_{\mathbb{M}}$ sem lehet a nullavektor, hiszen ekkor $\vec{v}_{\mathbb{M}}$ az $\hat{A}$ magjában lett volna. Következtetés tehát:

$$\begin{aligned}
 &\text{Ha } \mathbb{M} \text{ olyan altér } \mathbb{V}\text{-ben,} && \hat{A}|_{\mathbb{M}} \text{ injektív, továbbá} \\
 &\text{ami } \text{Ker } \hat{A} \text{ kiegészítője, akkor} && \Rightarrow \text{Ran}(\hat{A}|_{\mathbb{M}}) = \text{Ran } \hat{A}.
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Szokásos jelölést használtunk: az $\hat{A}|_{\mathbb{M}}$ nem más, mint az $\hat{A}$ leképezés (függvény) leszűkítése az értelmezési tartományának egy részhalmazára; itt az $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{V}$ altérre.

• Az iménti állítást is térbeli vetítésekkel szemléltethetjük. Legyen pl. $\hat{P}$ egy adott síkra való merőleges vetítés: ez nem injektív, a magja a síkra merőleges egyenes. A magnak kiegészítője

⁷⁴ A körkörös következtést látjuk be, mégpedig mindenhol „fordítva”, a tagadásból tagadásra következtetve.

1)⇒2): ha $\text{Ker } \hat{A}$ bővebb, mint $\{\vec{0}\} \subset \mathbb{V}$, akkor $\hat{A}$ nem injektív, hiszen a $\vec{0} \in \mathbb{V}$ mellett más vektorokat is $\vec{0} \in \mathbb{W}$ -be visz.
 2)⇒3): Ha a $\{\hat{A}\vec{v}_1, \hat{A}\vec{v}_2, \dots\}$ képhalmaz lin. összefüggő, akkor $\vec{0} = \lambda_1 \hat{A}\vec{v}_1 + \lambda_2 \hat{A}\vec{v}_2 + \dots = \hat{A}(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots)$ valamilyen nem csupa nulla λ -kkal. Ha viszont a $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots\}$ halmaz lin. független, akkor (ugye λ -k nem csupa nullák) a zárójelben nemnulla vektor áll; ezt tehát $\hat{A}$ a nullába viszi, így $\text{Ker } \hat{A}$ nemcsak $\vec{0}$ -t tartalmazza.

3)⇒1): Ha $\hat{A}$ nem injektív, akkor van két $\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$ vektor, amire $\hat{A}\vec{v}_1 = \hat{A}\vec{v}_2$, emiatt $\hat{A}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \vec{0} \in \mathbb{W}$, tehát $\hat{A}$ az egy darab nemnulla $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ vektort tartalmazó halmazt (ami lin. független) a lin. összefüggő $\{\vec{0}\} \subset \mathbb{W}$ halmazba képezi.

⁷⁵ Emlékezzünk: mivel $\text{Ker } \hat{A}$ lineáris altér $\mathbb{V}$ -ben, létezik kiegészítője. Ha $\text{Ker } \hat{A}$ a triviális altér, akkor annak az egész $\mathbb{V}$ az egyetlen kiegészítője, ha $\text{Ker } \hat{A}$ nem a triviális altér, akkor nagyon sokféle kiegészítője lehet.

bármilyen olyan (origón átmenő) sík, ami nem tartalmazza ezt az egyenest. Ha a $\hat{P}$ vetítésünk értelmezési tartományát leszűkítjük erre a kiegészítőre, akkor ezen értelmezve már injektív lesz (a csak ebből a síkból való vetítésekhez „vissza tudjuk keresni”, hogy honnan jöttek), továbbá a leszűkített síkból indulva is megkapjuk az összes lehetséges eredményvektort.

- Injektív függvényt megszorítva az értékkészletére az szürjekció (ráképezés) lesz. Így tehát ha $\mathbb{M}$ a $\text{Ker } \hat{A}$ kiegészítője, akkor $\hat{A}$ -t leszűkítve $\mathbb{M}$ -re $\mathbb{M}$ és $\text{Ran } \hat{A}$ közötti bijekciót kapunk. Ez a dimenziókra is jelent valamit: $\dim(\text{Ran } \hat{A}) = \dim \mathbb{M}$. Egy fontos elnevezés a következő:

$$\begin{aligned} \text{Az } \hat{A} \in \text{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \text{ rangja,} \\ \text{jelben: rank } \hat{A}, \text{ vagy rk } \hat{A}: \quad \text{rank } \hat{A} \equiv \dim(\text{Ran } \hat{A}). \end{aligned}$$

Az $\mathbb{M}$ és $\text{Ker } \hat{A}$ kiegészítő alterek dimenzióinak összege kiadja $\dim \mathbb{V}$ -t, így írhatjuk, hogy

$$\text{rank } \hat{A} + \dim(\text{Ker } \hat{A}) = \dim \mathbb{V}, \quad \text{minden } \hat{A} \in \text{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \text{ leképezésre.} \quad (6.3)$$

Eleget tudunk, hogy rákanyarodjunk a lineáris egyenletrendszerekre.

6.2. Lineáris egyenletrendszerek, lehetséges „kimenetek”

- Akkor hívunk egy egyenletrendszert lineárisnak, ha olyan tagok összegei vannak az egyenletek két oldalán, amelyek az ismeretleneket (melyeket x, y, z , stb. betűkkel szoktunk jelölni) nulladik vagy első hatványon tartalmazzák, maximum egyet. Az alábbi példák szemléltetik ezt:

nem lineáris egyenletrendszer:	nem lineáris egyenletrendszer:	lineáris egyenletrendszer:
$7x - 9y = 5,$	$x - 9yz = 5,$	$6x - 2y = 5,$
$8x^2 + 3y = 2z,$	$8x + 3y = 2z,$	$x - z = y,$
$z + 5x = -y^3.$	$z + 5 = -x.$	$x + y = z + 3.$

- Egy lineáris egyenletrendszert úgy szoktunk rendezni, hogy egyik oldalon legyenek a változókat elsőfokon tartalmazó tagok (esetleg egy egyezményes „sorrendben”), a másik oldalon pedig a nullad-fokúak (amik lehetnek nullák is). Sőt, ha nagyon akarjuk, az összes változót mindegyik egyenletben feltüntethetjük, esetleg nullával szorozva. Az alábbi példa szemlélteti ezt az átrendezést:

$$\begin{aligned} 5x + 9y &= 8 \\ 7 &= z + 3x \\ x + y + w &= 2z \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 5 \cdot x + 9 \cdot y + 0 \cdot z + 0 \cdot w &= 8, \\ -3 \cdot x + 0 \cdot y - z + 0 \cdot w &= -7, \\ x + y - 2 \cdot z + w &= 0. \end{aligned}$$

- Egy lineáris egyenletrendszer **homogén**, ha az összes nulladfokú tag nulla, azaz „csak a változókat (elsőfokon) tartalmazó tagok vannak”. Ellenkező esetben **inhomogén**. Példák (egyből „rendezve”):

inhomogén	homogén	inhomogén
$7x - 9y = 5,$	$7x - 9y = 0,$	$7x - 9y = 0,$
$x + y + z = 3,$	$x + y + z = 0,$	$x + y + z = 0,$
$y - z = 1.$	$y - z = 0.$	$y - z = 2.$

Figyelem! Csak akkor homogén az egyenletrendszer, ha *tényleg minden* nulladfokú tag nulla!

- Ha N_{egy} darab egyenlet van N_{ism} darab (általában x, y, z, w , stb. betűkkel jelölt) ismeretlennel,

akkor az ismeretleneket egy N_{ism} elemű oszlopba („oszlopvektorba”) rendezhetjük, a jobb oldalt (a nulladfokú tagokat) pedig egy N_{egy} darab számból álló számoszlopba (hiszen N_{egy} darab egyenlet van). Az N_{ism} darab ismeretlenre vonatkozó N_{egy} darab egyenletet tehát úgy lehet írni, hogy egy adott $N_{\text{egy}} \times N_{\text{ism}}$ méretű mátrix „hat” az ismeretlenek vektorára. Példa ilyen átrendezésre; három egyenletet négy ismeretlenre (azaz: $N_{\text{egy}}=3$, $N_{\text{ism}}=4$):

$$\begin{aligned} 3x - 5y + z + w &= 7, \\ 5x - y - z - w &= 1, \\ x + y + w &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tulajdonképpen *akkor mondjuk egy egyenletrendszerre*, hogy lineáris, ha ilyen alakba lehet írni.

• N_{egy} darab egyenlet és N_{ism} darab ismeretlen esetén legyen $\mathbb{V}$ az N_{ism} elemű számoszlopok, $\mathbb{W}$ pedig az N_{egy} elemű számoszlopok vektortere. Ezekre ugye $\dim \mathbb{V} = N_{\text{ism}}$, $\dim \mathbb{W} = N_{\text{egy}}$. Az egyenletrendszert ekkor mindig ilyen alakba írhatjuk:

$$\underline{\underline{A}} \underline{v} = \underline{a}, \quad \text{ahol} \quad \begin{aligned} &\underline{v} \in \mathbb{V} \text{ az ismeretlen } (N_{\text{ism}} \text{ elemű oszlopvektor}), \\ &\underline{a} \in \mathbb{W} \text{ } N_{\text{egy}} \text{ elemű adott számoszlop (vektor),} \\ &\underline{\underline{A}} \in \text{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \text{ adott lin. leképezés } (N_{\text{egy}} \times N_{\text{ism}} \text{ méretű mátrix}). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Az egyenletrendszer pont akkor **homogén**, ha az adott vektor, $\underline{a}$ a **nullavektor** (aminek minden komponense a nulla): $\underline{a} = \underline{0} \in \mathbb{W}$. A lineáris leképezések tulajdonságait felidézve „osztályozhatjuk” a lineáris egyenletrendszerek lehetséges kimeneteleit. (Megjegyzés: itt kimondottan számoszlopokról és rajtuk ható mátrixokról van szó, ezért aláhúzással jelölöm a vektorokat és a leképezéseket.)

* * * *

Legyen először $N_{\text{egy}} = N_{\text{ism}} \equiv N$, azaz ugyanannyi egyenlet, mint ismeretlen. Ekkor az indulási és érkezési vektorterek ugyanazok, ez a $\mathbb{V}$ a szám- N -esek tere.

- **Homogén** egyenletrendszerek: ezek $\underline{\underline{A}} \underline{v} = \underline{0}$ alakúak; $\underline{\underline{A}}$ adott $N \times N$ -es mátrix.
 - Ha $\underline{v}$ a (csupa nullából álló) nullavektor, $\underline{v} = \underline{0} \in \mathbb{V}$, akkor persze megoldást kapunk. Ez a **triviális megoldás**; az igazi kérdés az, hogy van-e nemtriviális megoldás.
 - Ha $\underline{\underline{A}} \in \text{Lin}(\mathbb{V})$ injektív (amit pl. abból tudhatunk, ha a **determinánsa nem nulla**, $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$), akkor **nincs nemtriviális** megoldás: $\text{Ker } \underline{\underline{A}}$ csak a nullavektort tartalmazza.
 - Ha $\underline{\underline{A}}$ nem injektív, amit pl. abból tudhatunk, hogy $\det \underline{\underline{A}} = 0$, azaz a **determináns nulla**, akkor $\text{Ker } \underline{\underline{A}} \neq \{0\}$, **van nemtriviális megoldás**, bármilyen $\underline{v} \in \text{Ker } \underline{\underline{A}}$ az. Biztos, hogy végtelen sok is van (még ha $\text{Ker } \underline{\underline{A}}$ csak egydimenziós, akkor is a megoldások bármilyen számszorosai is azok); általában „annyi független paraméterrel” adhatók meg a nemtriviális megoldások, ahány dimenziós altér $\text{Ker } \underline{\underline{A}}$. (Pl. ha egydimenziós, akkor egy nemtriviális megoldás akármilyen számszorosa is megoldás, és minden nemtriviális megoldás pont így áll elő bármelyik másikkól.) Összefoglalva még egyszer:

$$\begin{array}{lll} \text{homogén egyenletrendszer:} & \text{van nemtriviális} & \\ \underline{v} = ?, \text{ amire } \underline{\underline{A}} \underline{v} = \underline{0} & (\underline{v} \neq \underline{0}) \text{ megoldás} & \Leftrightarrow \det \underline{\underline{A}} = 0. \end{array}$$

- **Inhomogén** egyenletrendszerek: ezek $\underline{A}v = \underline{a}$ alakúak, ahol $\underline{a} \neq \underline{0}$ adott **számoszlop** (hogy $\neq \underline{0}$ legyen, ugye elég, ha az N_{ism} darab eleme közül **legalább egyik nem nulla**). Két lehetőséget kell megkülönböztetni:
 - Ha $\underline{A}$ **injektív** (amit pl. onnan tudhatunk, hogy a determinánsa nem nulla, $\det \underline{A} \neq 0$), akkor van egyértelmű inverze, $\underline{A}^{-1}$, és ekkor ezzel fel is írhatjuk a megoldást:

$$\begin{array}{llll} \text{inhomogén egyenletrendszer:} & \text{ha } \det \underline{A} \neq 0 & & \underline{v} = \underline{A}^{-1}\underline{a}. \quad \text{Azaz:} \\ \underline{v} = ?, \text{ amire } \underline{A}\underline{v} = \underline{a} & \Leftrightarrow \underline{A} \text{ injektív} & \Rightarrow & \text{létezik egyértelmű} \\ & \Leftrightarrow \text{létezik } \underline{A}^{-1} & & \text{megoldás.} \end{array}$$

- Ha $\underline{A}$ **nem injektív** (ha pl. kiderül, hogy a determinánsa nulla), akkor $\underline{A}$ képhalmaza, $\text{Ran } \underline{A}$ biztos nem az egész $\mathbb{V}$ tér, csak egy altére, és $\underline{A}$ maga sem csak a triviális altér: $\text{Ker } \underline{A} \neq \{0\}$. Emlékezzünk: $\dim(\text{Ker } \underline{A}) + \dim(\text{Ran } \underline{A}) = N$, ahol $N = N_{\text{egy}} = N_{\text{ism}}$ a $\mathbb{V}$ dimenziószáma. Ezen most vizsgált eseten belül is két lehetőség lesz tehát:

1. Ha az adott $\underline{a}$ eredményvektor („pont véletlenül”) benne van $\text{Ran } \underline{A}$ -ban, akkor van megoldás, sőt, **végtelen sok megoldás** van: minden megoldáshoz $\text{Ker } \underline{A}$ akármelyik elemét hozzá lehet adni. „Annyi szabad paraméterrel” lehet megadni a megoldásokat, ahány dimenziós $\text{Ker } \underline{A}$.
2. Ha az $\underline{a}$ eredményvektor nincs benne $\text{Ran } \underline{A}$ -ban, akkor **nincs megoldás**.

Legyen most $N_{\text{ism}} < N_{\text{egy}}$, azaz több egyenlet, mint ismeretlen. Ilyenkor az egyenletrendszert megadó $\underline{A} \in \text{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ leképezés érkezési vektorterének, $\mathbb{W}$ -nek dimenziószáma nagyobb, mint az ismeretlenek $\mathbb{V}$ teréé. Így $\underline{A}$ nem lehet ráképezés, „szűrjekció”. *Injektív* viszont lehet $\underline{A}$ (ekkor ő a képhalmaza és az indulási $\mathbb{V}$ tér között egyértelmű megfeleltetés, bijekció). $\underline{A}$ lehet nem injektív is; ezt azonban *nem tudjuk determinánssal* eldönteni ($\underline{A}$ -nak nincs determinánsa, mert nem négyzetes mátrix).

- **Homogén**, $\underline{A}v = \underline{0}$ alakú egyenletrendszerekre hasonló a következtetés, mint fent:
 - van nemtriviális megoldás, ha $\underline{A}$ nem injektív,
 - nincs nemtriviális megoldás, ha $\underline{A}$ injektív.
- **Inhomogén**, $\underline{A}v = \underline{a}$ alakú egyenletrendszerre ($\underline{a} \in \mathbb{W}$ adott N_{egy} -dimenziós oszlopvektor) $\underline{a}$ vagy benne van $\underline{A}$ képhalmazában, vagy nincs.
 - Ha nincs benne, azaz $\underline{a} \notin \text{Ran } \underline{A}$, akkor nincs megoldás.
 - Ha (mintegy „véletlenül”) benne van, azaz $\underline{a} \in \text{Ran } \underline{A}$, akkor van megoldás:
 - ha $\underline{A}$ injektív, pontosan egy⁷⁶,
 - ha $\underline{A}$ nem injektív, akkor végtelen sok ($\text{Ker } \underline{A}$ bármelyik elemével különbözhetnek).

Legyen végül $N_{\text{ism}} > N_{\text{egy}}$: kevesebb egyenlet, mint ismeretlen. Ekkor az $\underline{A} \in \text{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ leképezés indulási $\mathbb{V}$ vektorterére és érkezési $\mathbb{W}$ vektorterére az igaz, hogy $\dim \mathbb{V} > \dim \mathbb{W}$, tehát arra jutunk, hogy $\underline{A}$ nem lehet injektív. (Valóban, emlékezzünk: $\dim \text{Ker } \underline{A} + \dim \text{Ran } \underline{A} = \dim \mathbb{V}$, ahol $\mathbb{V}$ az

⁷⁶ Ez az eset közelebb kerül talán, ha úgy gondolunk rá, hogy $\underline{A}$ nem ráképezés ($\mathbb{W}$ több dimenziós most, mint $\mathbb{V}$), de $\text{Ran } \underline{A}$ -ra már ráképezés, azaz $\mathbb{V}$ és $\text{Ran } \underline{A}$ között bijekció. Ha több az egyenlet, mint az ismeretlen, de a több egyenlet „nem rontja el” az egyértelmű eredményt, akkor marad egyértelmű megoldás: mintegy volt egy egyértelműen megoldható egyenletrendszer, és még további, ezekkel nem ellentmondó (tehát „fölösleges”) további egyenleteket írt valaki hozzá a rendszerhez.

indulási vektortér, és mivel $\dim \text{Ran } \underline{A} \leq \dim \mathbb{W}$ (ahol $\mathbb{W}$ az érkezési vektortér), továbbá feltettük, hogy $\dim \mathbb{W} < \dim \mathbb{V}$, biztos, hogy $\dim \text{Ker } \underline{A} > 0$ kell, hogy legyen.) Mivel tehát $\underline{A}$ nem injektív, azt mondhatjuk, hogy

- **Homogén**, $\underline{A}v = \underline{0}$ alakú egyenletrendszernek **biztos van** nemtriviális megoldása: $\text{Ker } \underline{A}$ akármelyik nemnulla eleme.
- **Inhomogén**, $\underline{A}v = \underline{a}$ alakú egyenletrendszerre, mint fent:
 - Ha $\underline{a} \notin \text{Ran } \underline{A}$, nincs megoldás.
 - Ha $\underline{a} \in \text{Ran } \underline{A}$, akkor van megoldás, és mivel $\underline{A}$ biztos nem injektív, végtelen sok is van.

* * * *

• Számba vettük tehát a lehetőségeket. Segíthet esetleg megjegyezni őket, ha homályosan valami véges dimenziós vektortereket (és altereit, pl. „síkokat”) hozzáképzünk az indulási, N_{ism} dimenziós térhez, és az érkezési N_{egy} dimenziós térhez, és felidézünk, amiket lineáris leképezések magjáról, képteréről, ezek dimenziószámairól tudunk (ld. az előző szakaszt).

• Azt szokták mondani, hogy ha több az egyenlet, mint az ismeretlen („túlhatározott” eset), akkor nincs megoldás, ha kevesebb, akkor pedig végtelen sok van („alulhatározott” eset); az egyértelmű megoldáshoz ugyanannyi egyenlet kell, mint ismeretlen.

Homogén egyenletrendszerre ez teljesen fals dolog: vagy nincs megoldás, vagy ha van, biztos végtelen sok van.

Inhomogén esetben valóban előkerültek ezek a „szokásos beidegződés”nek megfelelő lehetőségek is; valamilyen értelemben esetleg mondhatjuk, hogy „ezek a leggyakoribb” következtetések.

→ Láttuk, hogy pl. nem túlhatározott esetben is előfordulhat, hogy nincs megoldás (ha az eredményvektor nincs $\underline{A}$ képterében); más kérdés, hogy a túlhatározott esetben *igen valószínű*, hogy megvalósul ez az eset (ilyenkor $\underline{A}$ érkezési halmaza biztosan magasabb dimenziós, mint a képhalmaza, ami így csak egy valódi altér lehet), a nem túlhatározott esetben csak *véletlenül* történhet meg, hogy nincs megoldás. (Vigyázzunk: a világon semmi pontos értelme nincs itt a „valószínű”, „véletlen” szavaknak...)

→ Láttuk, hogy végtelen sok megoldás van, ha $\underline{A}$ nem injektív. Más kérdés, hogy ha több az ismeretlen (alulhatározott eset), akkor $\underline{A}$ *biztos nem* injektív (mivel indulási halmaza magasabb dimenziós, mint az érkezési), nem alulhatározott esetben („főleg” a túlhatározottban) csak *véletlenül* fordulhat elő, hogy $\underline{A}$ nem injektív.

- 1) **Jegyezzük meg** azért, hogy általánosságban az összes fent kidolgozott eset előfordulhat,
- 2) mégis, a gyakorlatban a „legtöbbször” (inhomogén lineáris egyenletrendszernek) akkor van egyértelmű megoldása, ha ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen,
- 3) Homogén egyenletrendszer sokszor úgy kerül elő, hogy ugyanannyi ismeretlen van, mint egyenlet; ekkor ha nulla a determináns, van nemtriviális megoldás, ha nem nulla, nincs.

• **Még egyszer** (néha összekeveredik...), hogy ($N_{\text{egy}} = N_{\text{ism}}$ esetben) hogy is van a determinánssal:

→ *Inhomogén* esetben akkor „örülünk”, ha van egyértelmű megoldás, ehhez $\det \underline{A} \neq 0$ kell.

→ *Homogén* esetben annak „örülünk”, ha van nemtriviális megoldás, ehhez $\det \underline{A} = 0$ kell.

6.3. A Gauss-elimináció módszere

Megismerkedtünk a lineáris egyenletrendszerekkel, és a lineáris leképezésekre vonatkozó tudásunkkal kislabilizáltuk a lehetséges kimeneteleket. Azonban ez még nem segít, hogy egy adott egyenletrendszerénél konkrétan beazonosítsuk, hogy melyik eset is valósul meg. Sőt, jó lenne magát a megoldást is (ha van) egyszerűbben megtalálni tudni. A *Gauss-elimináció* egy kb. **algoritmikus** (egyszerű szabályok szerint gépiesen követhető) módszer, amivel a) megoldhatjuk az egyenletrendszert, b) közben kideríthetjük azt is, hogy melyik fentebbi „kimenetel-eset” valósul meg.

• A módszer bemutatásához vegyünk egy konkrét **egyenletrendszert** (a példa kedvéért most 4 egyenletet 4 ismeretlenre, jelük eleinte: x , y , z és w), és „**kódoljuk el**” azt még az eddig látott mátrix-vektor formánál is tömörebben:

$$\begin{aligned} 3x+5y+3w &= 1 \\ 2x+2y+z+w &= 1 \\ -x+y+4z+w &= 3 \\ x+2z+w &= -1 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right). \quad (6.5)$$

Ellenőrizzük, hogy az egyenletrendszernek tényleg a kijelölt mátrix-vektor szorzat felel meg. A harmadik alak kifejezetten a Gauss-eliminációhoz illeszkedő új jelölés. A mátrix minden sora az egyenletrendszert meghatározó mátrix egy sora, és ugyanabba a sorba kerül a megkövetelt eredmény adott komponense (az egyenlet nulladfokú, másik oldalra rendezett tagja): a Gauss-eliminációs „táblázat” sorai egy-egy egyenletet szimbolizálnak.

• A megoldás menete ugye: az egyenleteket (különbéleképpen) egymáshoz hozzáadom, egymásból kivonom: ezt a baloldalakkal is meg kell csinálnom (ami során a változók ugyanazok maradnak, csak az együtthatóik változnak), illetve a jobb oldalakkal is. Végső soron ha a Gauss-eliminációs táblázat sorait adom össze, vonom ki, stb. egymásból (a *teljes* sort, azaz mindkét oldalt), az éppen megfelel maguknak az egyenleteknek az ilyen átalakításainak. Egy sort (egy egész egyenletet) önmagában szorozhatok is egy számmal, ekvivalens egyenletrendszerhez jutok. Továbbá (ha kellemes) összevissza kicserélhetek egész sorokat: ez csak azt jelenti, hogy más sorrendben írom le az egyenleteket.

Azt, hogy két (ilyen táblázattal felírt) egyenletrendszer ekvivalens, mot ideiglenesen a $\sim$ szimbólum jelöli. Tehát pl., az iménti egyenletrendszerünk két egyszerű átírása a következő:

$$\begin{array}{cc} \text{számmal szorzás:} & \text{két egyenlet összeadása:} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

Ilyesmi átalakításokat fogunk egymás után végezni, hogy megoldjuk az egyenletrendszert⁷⁷.

• Azért kellemes ez a jelölés, mert könnyen követni lehet vele az egyenletek alakításait, nem ve-

⁷⁷Hasonló átalakítások ezek, mint amiket a determinánsokra láttunk, de gyorsan hangsúlyozok lényeges különbségeket. Determinánsoknál az oszlopok egyenrangúak a sorokkal; egyenleteknél csak sorokkal dolgozhatunk. Determinánsnál egy sort számmal szorozva a determináns is szorozódik; itt egy sort számmal szorozva ekvivalens alakot kapunk. Determinánsa csak négyzetes mátrixnak van; „egyenletes” táblázat akármilyen méretű lehet (az egyenletek és az ismeretlenek számától függően), és elkülönítve szerepel a nulladfokú tagok oszlopa. Determinánsnál két sort (vagy oszlopot) kicserélve -1 -es szorzót kapunk; egyenleteknél ekvivalens alakot kapok sorcserével.

szítjuk el a fonalat. A Gauss-elimináció lényege: lehetőleg kiküszöböljük⁷⁸ (azaz: nullává tesszük) a bal oldal minél több elemét. Először az első oszlopra kell koncentrálni: úgy kombináljuk a sorokat, hogy csak egy nemnulla elem maradjon (pl. a bal felső elem). Sokféleképpen lehet; most közös többszöröst keresünk az oszlopban (egyszerre minden sorban), majd az első sort kivonjuk a többiből, utána újra egyszerűsítünk a sorokban. Miután az első oszlop „kész”, másodikra, majd a harmadikra koncentrálnunk (ehhez már csak a másodiktól, illetve a harmadiktól lefelé kezdődő sorokat kell kombinálni, így amivel elkészültünk, az már nem „romlik el”). Tehát:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 10 & 0 & 6 & 2 \\ 6 & 6 & 3 & 3 & 3 \\ -6 & 6 & 24 & 6 & 18 \\ 6 & 0 & 12 & 6 & -6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 10 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 16 & 24 & 12 & 20 \\ 0 & -10 & 12 & 0 & 8 \end{array} \right) \sim \\
 & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -20 & 15 & -15 & 5 \\ 0 & 20 & 30 & 15 & 25 \\ 0 & -20 & 24 & 0 & -16 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -20 & 15 & -15 & 5 \\ 0 & 0 & 45 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 9 & 15 & -21 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & -7 \end{array} \right) \sim \\
 & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -9 \end{array} \right) \sim (*). \quad \begin{array}{l} \text{Mire idáig jutottunk, a bal felső csúcsból induló átló} \\ \text{alatt csupa 0 van. Most „visszafelé” kezdjük ugyanazt,} \\ \text{az utolsó oszloppal, felfelé kinullázva az elemeket,} \\ \text{ezután az utolsó előtti oszlopban, és így tovább:} \end{array} \\
 & (*) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 15 & 25 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & -20 & 15 & -15 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & -27 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 15 & 25 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & -20 & 15 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & -27 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 15 & 25 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & -20 & 0 & 0 & -22 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & -9 \end{array} \right) \sim \\
 & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 15 & 25 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & -25 & 0 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -9 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 15 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & -25 & 0 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -9 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{15} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{5} \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

A végeredmény: olyan alak, ahol a bal oldalon (a „mátrix” részben) csak a főátlóban vannak számok, lehetőleg 1-ek (az utolsó lépésben minden sort visszaosztottuk a főátlóban maradt számmal). Ezt az utolsó alakot már kiolvashatjuk, mint egyenletrendszer: ez éppen azt mondja, hogy (a változók jelöléseit újra „előszedve”):

$$x = -\frac{8}{15}, \quad y = -\frac{8}{5}, \quad z = \frac{2}{3}, \quad w = -\frac{9}{5}.$$

Ez már maga „a” megoldás, amire kíváncsiak voltunk. Látszik tehát, hogy abba az irányba kellett „terelnünk” a bal oldalt, hogy kb. „egységmátrix” jelenjen ott meg (a nem ugyannyi egyenlet mint ismeretlen esetét ld. lentebb). Először a „főátló” alatt „nulláztunk ki” felülről lefelé haladva, sorokat (egyenleteket) megfelelő módon kombinálva, ezután a főátló fölött, felfelé haladva: ezt már azért lehetett, mert a főátló alá már nullák kerültek, így amit előzőleg „elértünk” az nem romlik el.

A leírt (és a példa alapján követhető) algoritmus tulajdonképpen maga a Gauss-elimináció: ezt alkalmazva garantáltan célhoz (vagy „buktatóhoz”, ld. lentebb) érünk.

⁷⁸Az *elimináció* szó éppen „kiküszöbölést” jelent.

• Az iménti példában tehát inhomogén egyenletrendszerünk volt, ugyanannyi egyenlettel mint ismeretlennel, és a „kellemes” eset valósult meg: egyértelmű megoldást kaptunk. (Emiatt, noha nem számoltuk ki, leszűrhetjük, hogy az induló egyenletrendszerben, a (6.5) jelű egyenletben a bal oldali (az egyenletrendszert „megadó”) $\underline{A}$ mátrix determinánsa nem nulla⁷⁹. A következőkben példákon nézzük meg, hogy hogyan valósul meg a lineáris egyenletrendszerekre lehetséges többi „kimenetel” a Gauss-elimináció alkalmazása közben. Előbb általánosan megjegyezzük, hogy:

1. Amennyiben az egyenleteknek (azaz a táblázat sorainak) a kombinálása közben olyan helyzetbe jutunk, hogy egy sorban a bal oldalon csupa nulla van, a jobb oldalon viszont nem nulla, azaz

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \neq 0 \\ & & & \vdots & & & \vdots \end{array} \right),$$

akkor az ezen sor által elkódolt egyenletnek nincs megoldása: a bal oldalon nulla van (a változókat mindet 0 szorozza), a jobb oldalon pedig nem nulla kellene, hogy legyen. Tehát ez az a „kimenetel”, amikor **nincs megoldás**. (Emlékezzünk, ez éppen azt jelentette, hogy a megkövetelt eredményvektor (a jobb oldalon) nincs benne a bal oldali $\underline{A}$ leképezés képhalmazában. (Kigondolható, hogy visszafelé is igaz ez: *ha* nincs benne, *akkor* biztosan ilyen alakkal fogunk találkozni az egyenletrendszer megoldása közben: csak ez a „szcenárió” az, ami betehet a Gauss-eliminációs módszer végigvitelének.)

2. Amennyiben a kombinálás során olyan alakra jutunk, ahol egy csupa nulla sor mellett a jobb oldalon is nulla van, azaz

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & \vdots \end{array} \right),$$

akkor ez az egyenlet azt mondja, hogy $0 = 0$, azaz nem mond semmit: **elhagyhatjuk** az egész sort. Emiatt csökken az egyenletek száma; ez „valósínúsíti”, hogy majd nem lesz egyértelmű megoldás, de ugye biztosra még nem lehet tudni.

- Első példa: az egyenletrendszer legyen a következő 3 egyenlet 3 ismeretlenre. Egyből felírjuk a Gauss-eliminációs alakot is:

$$\begin{array}{rcl} 2x + y + z & = & 3, \\ 5x + 3y + 4z & = & 1, \\ 3x + y & = & -1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Próbálkozzunk most a megoldással; először az első oszlopon „lefelé” haladva, majd a másodikon:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 30 & 15 & 15 & 45 \\ 30 & 18 & 24 & 6 \\ 30 & 10 & 0 & -10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 30 & 15 & 15 & 45 \\ 0 & 3 & 9 & -39 \\ 0 & -5 & -15 & -55 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -13 \\ 0 & -1 & -3 & -11 \end{array} \right) \sim$$

⁷⁹ Megjegyzés: kiszámíthatjuk; az adódik, hogy $\det \underline{A} = 30$. Az egyenletrendszer végén (és vége felé) „titokzatos” módon előkerült közös nevezőknek (pl. az eredményként kapott x, y, z, w közös nevezője pont ennyi) köze van ehhez. Ez nem véletlen: most nem foglalkoztunk vele, de van egy olyan képlet, ami az $\underline{A}$ mátrix inverzét megadja, és ilyenkor $\det \underline{A}$ a nevezőben szerepel.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -24 \end{array} \right). \quad \begin{array}{l} \text{Az egyenletrendszernek tehát} \\ \text{(az utolsó sorból láthatóan)} \\ \textbf{nincs megoldása.} \end{array}$$

Vektorterek nyelvén tehát: nincs megoldás; a megkövetelt eredményvektor nincs benne a mátrix képhalmazában. Leszűrhetjük azt is mellesleg, hogy a mátrix determinánsa nulla. (Tulajdonképpen azért „halt meg” az egyenletrendszerünk, mert a mátrix sorai lineárisan összefüggőek voltak; ki lehetett belőlük a csupa nulla sort keverni.)

- Második példa: legyen ugyanaz a „mátrix”, de a nulladfokú tagok mások:

$$\begin{array}{rcl} 2x + y + z & = & 3, \\ 5x + 3y + 4z & = & 7, \\ 3x + y & = & 5 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{array} \right).$$

Álljunk neki:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 30 & 15 & 15 & 45 \\ 30 & 18 & 24 & 42 \\ 30 & 10 & 0 & 50 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 30 & 15 & 15 & 45 \\ 0 & 3 & 9 & -3 \\ 0 & -5 & -15 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} \text{az utolsó} \\ \text{sort elhagy-} \\ \text{hagyhatjuk:} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Amikor több ismeretlen van (vagy volt már eredetileg is), mint egyenlet, ilyen alak felé célszerű haladni, hogy „ameddig csak lehet”, egységmátrix legyen a bal oldal. Ezért csináltuk az utolsó lépéseket. Ilyen esetben kb. eddig lehet eljutni. „Kiolvasva” az utolsó sorból kapott egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcl} x - z & = & 2, \\ y + 3z & = & -1, \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{vagy esetleg kicsit kellemesebbnek tűnő alakba átírva:} \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x & = & 2 + z, \\ y & = & -1 - 3z. \end{array}$$

Itt a „végtelen sok megoldás” esete adódott; ilyenkor nem adhatjuk meg „a” megoldást, de valamelyik változókat (itt az x -et és az y -t) kifejezhetjük a többi (itt a z) függvényében. Ennyit mond az eredeti egyenletrendszerünk is; a végső alak azért mindenképpen „kellemesebb”.

- Nézzünk még néhány példát! Legyen most több egyenlet, mint ismeretlen, és egyből álljunk neki:

$$\begin{array}{rcl} 3x + 3y + 8z & = & 0, \\ 3x + 6y + 14z & = & 1, \\ x + 2y + 3z & = & 2, \\ 6x + 3y + 5z & = & 0, \\ 2x + 3y + 6z & = & 1 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 14 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & 16 & 0 \\ 6 & 12 & 28 & 2 \\ 6 & 12 & 18 & 12 \\ 6 & 3 & 5 & 0 \\ 6 & 9 & 18 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & 16 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 12 \\ 0 & -3 & -11 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \\ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & 16 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 12 \\ 0 & 6 & 22 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & 16 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & -12 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & 16 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & -60 & 60 \\ 0 & 0 & 60 & -12 \\ 0 & 0 & -60 & 20 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & 16 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & -60 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & -40 \end{array} \right).$$

Tehát: **nincs megoldás**. Ha több egyenlet van, mint ismeretlen, látszik, hogy miért „ez a valószínűbb”: biztos elő tudunk állítani olyan sort, ahol a bal oldalon csupa nulla van, az csak mintegy

„véletlenül” történhet meg, hogy a jobb oldalak is pont kinullázódnak.

Akit érdekel, nézze végig a következő („direkt így legyártott”) példákat; állítás:

Ennek az egyenletrendszernek
1 db egyértelmű megoldása van:

$$\begin{aligned} 3x + 3y + 8z &= 2, \\ 3x + 6y + 14z &= 5, \\ x + 2y + 3z &= 0, \\ 6x + 3y + 5z &= -4, \\ 2x + 3y + 6z &= -2 \end{aligned}$$

(itt a bal oldal ugyanaz,
mint a fentebbi példában),

Ennek az egyenletrendszernek
végtelen sok megoldása van:

$$\begin{aligned} y + 2z &= 1, \\ x + 2y + 3z &= 0, \\ x + y + z &= -1, \\ 2x + 3y + 4z &= -1, \end{aligned}$$

(pedig 4 egyenlet 3 ismeretlenre).

6.4. Mátrixok inverze

- Emlékeztető: egy négyzetes $\underline{\underline{A}}$ mátrix inverze az az $\underline{\underline{A}}^{-1}$ mátrix, amire:

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{I}}, \quad \text{és} \quad \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}}.$$

Itt ugye $\underline{\underline{I}}$ az egységmátrixot Noha a mátrixszorzás alapvetően nem kommutatív (mint ahogyan az operátorok szorzása, amit reprezentál, az sem az, ld. az előző fejezetet), azaz két akármilyen $N \times N$ -es mátrixra általában $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}}$, az inverznél mégis mindegy a sorrend:

$$\begin{array}{ll} \text{Ha adott } \hat{A}\text{-hoz} & \hat{A}\hat{B} = \hat{I}, \text{ és} \\ \text{lenne különböző} & \hat{C}\hat{A} = \hat{I}, \text{ akkor} \\ \hat{B} \text{ és } \hat{C}, \text{ amire} & \Rightarrow \hat{B} = \hat{I}\hat{B} = (\hat{C}\hat{A})\hat{B} = \\ & = \hat{C}(\hat{A}\hat{B}) = \hat{C}\hat{I} = \hat{C}. \end{array}$$

Most operátorokat írtunk (kalappal), de az őket reprezentáló mátrixokat is írhattuk volna. Már csak azt kellene tudni, hogy ha operátoroknak (vagy mátrixoknak) *van* egyik oldali inverze (amire $\hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{I}$), akkor másik oldali is van. (Az iménti kis gondolatmenet azt mutatta, hogy *ha* van mindkettő, akkor ezek biztos egyenlőek).

- Ha egy $\hat{A}$ leképezés injektív, akkor ugye lin. független halmazt lin. függetlenbe képez. *Véges dimenziós $\mathbb{V}$ vektortérben* az is igaz, hogy egy bázisnak a $\hat{A}$ általi képhalmaza szintén bázis (mivel lin. független, és ugyanannyi véges eleme van, mint a tér dimenziója). Az $\hat{A}$ mindkét oldali inverzét tehát kapásból *definiálhatjuk* úgy, hogy ez legyen az a (szintén injektív) leképezés, ami az *eredmény-bázist* visszaviszi az eredeti bázisba. (Emlékezzünk: egy lineáris leképezést egyértelműen meghatároz, ha megmondjuk, hogy egy bázis elemeihez milyen vektorokat rendel.) Így tehát ha $\hat{A}$ injektív, akkor szürjektív is, és mindkét oldalról van inverze, amik tehát egyenlőek⁸⁰.

- Tehát véges dimenzióban egy $\underline{\underline{A}}$ mátrix inverze (ha van) egyértelmű, mindkét oldali inverz: $\underline{\underline{A}}^{-1}$. A Gauss-eliminációt az inverz megkeresésére is használhatjuk: az inverzkeresés a mátrixszorzás szabálya alapján azt jelenti tulajdonképpen, hogy ($N \times N$ -es mátrix esetén *egyszerre megoldjuk azt az N darab egyenletrendszert (mindegyik N ismeretlenes, N egyenlettel)*, amelyek azt jelölik ki, hogy az $\underline{\underline{A}}$ mátrixot az inverzével szorozva éppen az egységmátrixot kell kapnunk. 3×3 -as

⁸⁰Megjegyzés: a fentebbi $\hat{B} = \dots = \hat{C}$ gondolatmenet végtelen dimenziós vektorterekben is igaz; itt az fordulhat elő, hogy egy operátornak van egyik oldali inverze, de nincs másik oldali.

mátrixokra például:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

három darab egyenletrendszer definiál, mind ugyanazzal a „bal oldali” adott $\underline{\underline{A}}$ mátrixszal; együtt ezek ekvivalensek azzal, hogy

$$\begin{array}{l} \text{Adott } \underline{\underline{A}}\text{-ra} \\ \text{keressük } \underline{\underline{B}}\text{-t} \\ \text{amire} \end{array} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fontos megjegyzések:

- Láttuk, hogy amikor a Gauss-elimináció során sikerül a bal oldalon az egységmátrixot előállítani, akkor ami a jobb oldalon maradt, azok éppen az egyenletrendszer megoldásai, egymás alatt.
- Maguk a manipulációk, amiket csinálni kell, hogy megkapjuk a bal oldalon az egységmátrixot, teljesen függetlenek a jobb oldaltól: éppen ezért a mátrixinverz keresésekor az összes (az iménti példában három) egyenletrendszert egy füst alatt kezelhetjük.
- Ha az adott $\underline{\underline{A}}$ mátrixnak nincs inverze, akkor a Gauss-elimináció alkalmazása közben (ahogy az „egyszeres” lineáris egyenleteknél láttuk) ellentmondásra jutunk (egy egész sor kinullázódik). Ilyenkor ugye $\det \underline{\underline{A}} = 0$ volt; a sorok „kinullázódása” itt is éppen azt jelenti, hogy a mátrix sorai lineárisan összefüggtek, éppen emiatt ugye $\det \underline{\underline{A}} = 0$.

* * *

- Mátrixinvertáláshoz tehát ugyanolyan táblázatot rajzolunk, mint az egyenletrendszereknél, csak a jobb oldalon egyszerre mind az N egyenletrendszernek megfelelő oszlopot felrajzoljuk. Ezekben először az egységmátrix áll, a bal oldalon pedig az invertálandó mátrix. A cél: a *bal oldalon* létrehozni az egységmátrixot; ami ekkor a *jobb oldalon* marad (mint az N darab egyenletrendszer szimultán megoldásai), az éppen az inverzmátrix.

Az alábbi példa szemlélteti a mátrixinverz-keresést Gauss-eliminációval, 3×3 -as mátrixokra.

$$\underline{\underline{A}} := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} = ? \quad (6.6)$$

(Ez a mátrix most teljesen esetleges példa.) A mondott módszernek megfelelően:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 6 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 8 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 6 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -2 & 0 & 4 \end{array} \right) \sim$$

$$\begin{aligned}
& \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 6 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 6 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -14 & 42 & -14 & 0 & 28 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 6 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 6 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & -10 & -2 & 28 \end{array} \right) \sim \\
& \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 36 & 54 & 0 & 23 & 1 & -14 \\ 0 & -42 & 0 & -7 & 7 & -14 \\ 0 & 0 & 18 & -5 & -1 & 14 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 36 & 54 & 0 & 23 & 1 & -14 \\ 0 & -54 & 0 & -9 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & 18 & -5 & -1 & 14 \end{array} \right) \sim \\
& \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 36 & 0 & 0 & 14 & 10 & -32 \\ 0 & -54 & 0 & -9 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & 18 & -5 & -1 & 14 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{18} & \frac{5}{18} & -\frac{16}{18} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{18} & -\frac{3}{18} & \frac{6}{18} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{18} & -\frac{1}{18} & \frac{14}{18} \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Összefoglalva az eredményt a kijelölt $\underline{\underline{A}}$ mátrix inverze a következő:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 7 & 5 & -16 \\ 3 & -3 & 6 \\ -5 & -1 & 14 \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

Ellenőrizzük le, hogy ezt az $\underline{\underline{A}}$ mátrixot a megkapott inverzzel, $\underline{\underline{A}}^{-1}$ -gyel szorozva (mindkét irányban, $\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{A}}^{-1}$ módon is) valóban az egységmátrixot, $\underline{\underline{I}}$ -t kapjuk!

• Utolsó megjegyzés: 2×2 -es mátrixok nagyon sokszor előkerülnek, ezek inverzét egy az egyben felírhatjuk:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

A nevező, $ad-bc$ éppen a determináns; ugyebár ha ez nulla, nincs inverz.

3×3 -as mátrixok inverze is többször előkerül; ezekre is felírhatjuk persze az általános („betűs”) képletet, de nem biztos, hogy érdemes megjegyezni; általában amikor kell, ilyen mátrix inverzét konkrétan kiszámolja az ember⁸¹.

⁸¹Vagy Gauss-eliminációval, vagy az *aldeterminánsok* módszerével, amit most nem vettünk még elő.

7. Sajátértékek, sajátvektorok (+közjátékok)

Megismerkedünk a sajátvektorok, sajátaltér, sajátértékek fogalmával. Rendkívül fontos téma ez mindenfajta alkalmazáshoz, a fizika szinte minden területén. A kvantummechanikában sajátértékekkel kelünk-fekszünk⁸², azonban a fogalomkör már addig is számtalanszor előkerül: egyenletek megoldási módszerei, lineáris operátorok vizsgálati módszerei épülnek rá.

Előbb azonban egy olyan dolog, amit eddig halogattam, de nem lehet tovább: egy kis kitérőként nézzük meg, hogyan lehet komplex számokat „belekeverni a levesbe”, vektorterek fogalmába.

7.1. Közjáték: komplex vektorterek, skalárszorzat, transzponálás

Idézzük fel a korábbi 3.2. szakaszt, ahol (a fizikai terünk vektorainak összeadásáról és számmal szorzásáról „kézzel-lábbal” megállapított tulajdonságok alapján) értelmeztük a matematikai vektortér fogalmát. A matematikai definícióban *megköveteltük*, hogy teljesüljenek ezek a tulajdonságok. Vektoroknak van összege és számmal való szorzottja; a „szám” valós számot jelenthetett.

- Lényeges volt, hogy maguknak a számoknak is van összege és szorzata a *rájuk* vonatkozó kellemes tulajdonságokkal: összeadás ill. szorzás kommutativitása, asszociativitása, stb. (ld. a korábbi 2.2. szakaszt). A valós számműveletek ezen tulajdonságai voltaképp *kellettek* ahhoz, hogy *egyáltalán megkövetelhesük* a vektorterek matematikai definíciójában a vektorösszeadásra és vektorok számmal szorzására azokat, amit megköveteltünk. Ha nem lennének igazak a valós számok műveleti tulajdonságai, az vektoroknál „kihúzná alólunk a talajt”. Ilyesmit jelent az, hogy a vektortereink „ $\mathbb{R}$ fölött”, a valós számok fölött vannak értelmezve. $\mathbb{R}$ volt az a halmaz, amiből a számokat vehettük vektorok számmal szorzásához: az eddigi vektorterek **valós vektorterek** voltak.

- A **komplex** számok halmaza, $\mathbb{C}$, és a rajta értelmezett összeadás és szorzás **ugyanazokkal** a kellemes tulajdonságokkal bír, **mint a valós számokra**. ($\mathbb{R}$ -ről $\mathbb{C}$ -be „kihúzó” a rendezést kellett feladnunk, de ez most nem fontos.) Semmi sem akadályoz meg tehát, hogy mostantól „megengedjünk” komplex számmal szorzást is egy vektortérben. Pontosabban:

Komplex vektortérnek (vagy: $\mathbb{C}$ fölötti vektortérnek) hívunk egy V halmazt, ha

- 1) van hozzá egy „összeadás”, ez két V -beli elemhez („vektorhoz”) egy harmadikat rendel,
- 2) van egy „számmal szorzás”, ez egy *komplex* számhoz és egy vektorhoz egy vektort rendel,
- 3) és ezekre **ugyanazok a tulajdonságok** teljesülnek, mint a valós vektorterekénél.

- Egyik legfontosabb **példa** a komplex számokból álló **számoszlopok** (szám- N -esek) halmaza. Ezek halmaza komplex vektorteret alkot, ha a szám- N -esek összeadását és számmal szorzását természetes módon, komponensenként értelmezzük (itt most szám-négyesekre írom fel):

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a+A \\ b+B \\ c+C \\ d+D \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \\ \lambda d \end{pmatrix}, \quad \text{nullavektor: } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \begin{array}{l} \text{minden szám itt} \\ \text{lehet komplex.} \end{array}$$

⁸² A kvantummechanika születésekor német nyelvi dominancia érvényesült a tudományban; vélhetően ennek köszönhető az az érdekes fordulat, hogy a „saját-” megjelölést ezekben a szókapcsolatokban az *angol nyelv vette át* a németből. „Saját” németül: Eigen. A sajátérték, sajátvektor, sajátaltér (és később: sajátfüggvény, sajátállapot) szavak *angol* megfelelői: eigenvalue, eigenvector, eigenspace, eigenfunction, eigenstate; „angolosan” kiejtve.

Valós szám- N -esek valós vektorteretet alkottak. Komplex szám- N -esek komplex vektorteretet, hiszen ilyenek összege ill. (komplex) számszorosa kielégíti a vektortereknek megkövetelt tulajdonságokat.

• Foglalkozzunk a **skalárszorzás** műveletével! Idézzük fel „tisztán műveleti” (tehát: nem geometriai) tulajdonságait: olyan művelet, ami **két vektorhoz** egy (valós) **számot** rendel, és

1) kommutatív

2) disztributív a vektorösszeadásra, számmal szorzás kiemelhető (*illeszkedik* a vektorműveletekhez)

3) továbbá minden vektor önmagával vett skalárszorzata nemnegatív, és csak $\vec{0}$ -ra nulla.

• Eddig csak a háromdimenziós geometriai térben volt skalárszorzás; értelmes-e ez a művelet akármilyen matematikai vektortérben? Válasz: „ha nem értelmeztük, nem”. (Jó vicc). Más-képp mondva: a matematikai vektortér definíciójában szó sem volt skalárszorzásról (csak vektorok összegéről és számszorosáról). Ha akarunk általános vektorterekben skalárszorzásról beszélni, azt külön definiálni kell. **Skalárszorzatot (vektor)térnek** hívunk egy olyan $\mathbb{V}$ vektorteret, ami-ben (a vektortértségéhez hozzátartozó eddigi műveletek mellett) még értelmes egy további művelet, olyan, amire igazak a geometriai skalárszorzatra emlékeztető tulajdonságok. A skalárszorzást néha, amikor ez a művelet így már „elszakadt” a geometriai jelentéstől, más jellel jelölik, így:

$\mathbb{V}$ skalárszorzatot tér, $\vec{w}, \vec{v} \in \mathbb{V}$ skalárszorzatának jele: $\langle \vec{w} | \vec{v} \rangle$.

Egy ismerős **példa** skalárszorzatot térre: a valós számhármassok halmazán (mint vektortéren) *értelmezzük* az $\langle \underline{w} | \underline{v} \rangle$ skalárszorzatot: $\langle \underline{w} | \underline{v} \rangle := w_1 v_1 + w_2 v_2 + w_3 v_3$. Ugye ez a művelet reprezentálta az „igazi” vektorok skalárszorzását, de most gondolhatunk úgy rá, hogy (minden geometriai jelentés nélkül) a számhármassokat elláttuk egy további, „skalárszorzásnak” hívott művelettel. Ellenőrizni kell persze, hogy ez a művelet teljesíti a megkövetelt feltételeket, de ez valóban igaz⁸³.

• Valós vektorterekben (ahol a „szám” mindig valós számot jelent) nincs gond a skalárszorzásra megkövetelt, fent megfogalmazott műveleti tulajdonságokkal. A későbbiekben igény merül fel arra, hogy **komplex vektorterekben** is tudjunk skalárszorzást értelmezni. Itt már gond lesz:

Ha minden $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}$ vektorokra és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ számokra $\langle \alpha \cdot \vec{v} | \vec{w} \rangle = \alpha \cdot \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle$, $\langle \vec{v} | \beta \cdot \vec{w} \rangle = \beta \cdot \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle$, akkor $\langle \lambda \vec{v} | \lambda \vec{v} \rangle = \lambda^2 \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle$.

Szeretnénk, hogy $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle$ is és $\langle \lambda \vec{v} | \lambda \vec{v} \rangle$ is mindenképpen valós nemnegatív számok legyenek. Valós vektortérben nincs probléma: $\lambda \in \mathbb{R}$ -re $\lambda^2 \in \mathbb{R}_0^+$. Ha viszont $\lambda \in \mathbb{C}$ -t is megengedünk, λ^2 akármilyen komplex szám lehet. A fenti skalárszorzat-tulajdonságok komplex esetben tehát nem tarthatók.

• *Melyik újjunkat harapjuk le?* Az, hogy egy vektor önmagával vett skalárszorzata nemnegatív valós (és csak a $\vec{0}$ -nak nulla), annyira kapcsolódik már a „hossz”-ról alkotott elképzelésünkhöz, hogy megtartjuk. Akkor viszont a számmal szorzás kiemelhetőségén kell engedni. „Skalárszorzás” minősítésre igényt tartó műveletről **komplex vektortérben** a következőt követeljük meg:

Skalárszorzás: két vektorhoz egy komplex számot rendelő művelet, és

→1) minden $\vec{v} \in \mathbb{V}$ vektorra $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle \in \mathbb{R}_0^+$, és $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle = 0$ akkor és csak akkor, ha $\vec{v} = \vec{0}$,

→2) a második változóban lineáris, azaz $\langle \vec{v} | \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 \rangle = \lambda_1 \cdot \langle \vec{v} | \vec{a}_1 \rangle + \lambda_2 \cdot \langle \vec{v} | \vec{a}_2 \rangle$ mindig,

→3) $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \langle \vec{w} | \vec{v} \rangle^*$, azaz fordított sorrendben skalárszorozva komplex konjugáltat kapunk.

⁸³ Mivel ez a most értelmezett művelet a térbeli vektorok skalárszorzatának reprezentációja, ha az teljesíti a tulajdonságokat, akkor nyilván ez is. Azonban a térbeli skalárszorzás műveleti tulajdonságait csak „beláttuk kézzel-lábbal mutogatva”, geometriai szemlélet alapján. Jobb ezért most konkrétan „képletek szintjén” kigondolni, hogy a számhármassok így értelmezett skalárszorzata tényleg tudja a fentebb felsorolt három tulajdonságot; nem nehéz.

• Az utolsó kettőt kombinálva: először felcserélve, aztán kiemelve, majd megint visszacserélve azt is leszűrhetjük (tehát ez következik az eddigiekből), hogy a skalárszorzatra

→4) igaz, hogy $\langle \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 | \vec{v} \rangle = \lambda_1^* \langle \vec{a}_1 | \vec{v} \rangle + \lambda_2^* \langle \vec{a}_2 | \vec{v} \rangle$: az első változóban ún. konjugált lineáris.

„Feladtuk” tehát a kommutativitást és első változóbeli linearitást, de ami maradt, azok „működő” tulajdonságok. Pl. a fentebbi ellentmondás helyett most $\langle \lambda \vec{v} | \lambda \vec{v} \rangle = \lambda^* \lambda \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle = |\lambda|^2 \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle$ lesz, tehát ha $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle$ pozitív valós, akkor $\langle \lambda \vec{v} | \lambda \vec{v} \rangle$ is, hiszen $|\lambda|^2$ is pozitív valós minden $\lambda \in \mathbb{C}$ -re. Másrészt a valós vektortereken értelmezett valós értékű skalárszorzás tulajdonképpen a komplexnek „speciális esete” (valós számokra a konjugálás „mintha ott se lenne”).

• Egy **példa** (kb. a legfontosabb): komplex szám- N -esek (számoszlopok) komplex skalárszorzását „egy konjugálást még berakva” (a valós számoszlop-skalárszorzás természetes komplex általánosításaként) szokták értelmezni. Ellenőrizzük, hogy ez tényleg teljesíti a megkövetelt tulajdonságokat!

$$\underline{v} \equiv \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}, \quad \underline{w} \equiv \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}, \quad \langle \underline{v} | \underline{w} \rangle := v_1^* w_1 + v_2^* w_2 + v_3^* w_3 + v_4^* w_4.$$

• A valós és a komplex skalárszorzattal kapcsolatban érdemes foglalkozni még kicsit az operátorok **transzponáltjával** és ennek komplex megfelelőjével (utóbbi új dolog). Egy $\underline{A}$ négyzetes mátrix transzponáltja (jele: $\overline{\underline{A}}$) ugye a főátlóra tükrözéssel kapható:

$$\underline{A} \text{ transzponáltja, } \overline{\underline{A}}: \quad (\overline{\underline{A}})_{kl} = A_{lk}. \quad \underline{A} \text{ szimmetrikus, ha } \underline{A} = \overline{\underline{A}}, \quad \text{azaz} \quad A_{kl} = A_{lk}.$$

A transzponálnak igazi értelmet a valós vektortereken értelmezett skalárszorzat ad. Ha (mint eddig is) két valós számoszlop, $\underline{a}$ és $\underline{b}$ skalárszorzata alatt azt értjük, hogy $\langle \underline{a} | \underline{b} \rangle := \sum_k a_k b_k$, akkor a transzponált fogalmát **kapcsolatba hozhatjuk a skalárszorzással**:

$$\text{Állítás:} \quad \langle \underline{a} | \underline{A} \underline{b} \rangle = \langle \overline{\underline{A}} \underline{a} | \underline{b} \rangle. \quad \text{Ha } \underline{A} \text{ szimmetrikus: } \overline{\underline{A}} = \underline{A} \Rightarrow \langle \underline{a} | \underline{A} \underline{b} \rangle = \langle \underline{A} \underline{a} | \underline{b} \rangle.$$

Vagyis: skalárszorzatban egy mátrix hatását úgy lehet „áthárítani” a másik vektorra, hogy transzponáljuk a mátrixot. Ezt nagyon egyszerű belátni indexesen számolva:

$$\begin{aligned} \langle \underline{a} | \underline{A} \underline{b} \rangle &= \sum_k a_k (\underline{A} \underline{b})_k = \sum_k a_k \left(\sum_l A_{kl} b_l \right) = \sum_{k,l} A_{kl} a_k b_l = \\ &= \sum_{k,l} (\overline{\underline{A}})_{lk} a_k b_l = \sum_l (\overline{\underline{A}} \underline{a})_l b_l = \langle \overline{\underline{A}} \underline{a} | \underline{b} \rangle, \quad \text{tényleg.} \end{aligned}$$

• Valós skalárszorzatnak lehet értelme nemcsak szám N -esekre, hanem akármilyen $\mathbb{V}$ valós vektortérben. Talán nem meglepő így, hogy akármilyen **valós skalárszorzos $\mathbb{V}$ vektortér esetén** a $\hat{A}$ operátorhoz a transzponáltját, $\overline{\hat{A}}$ -t rendelő művelet értelmes „mátrixok nélkül” is:

$$\hat{A} \in \text{Lin}(\mathbb{V})\text{-hez egyértelmű } \overline{\hat{A}} \in \text{Lin}(\mathbb{V}), \text{ amire } \langle \vec{v} | \hat{A} \vec{w} \rangle = \langle \overline{\hat{A}} \vec{v} | \vec{w} \rangle, \quad \text{minden } \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}\text{-re.}$$

Ez „pont jó” lesz a fizikai terünkben: az ottani skalárszorzást a számhármason éppen a $\sum_k a_k b_k$ módon reprezentáltuk, így a transzponált operátor mátrixa tényleg a transzponált mátrix.

• **Komplex skalárszorzos tér** esetén is van egy, a transzponáláshoz hasonló fogalom. Egy (akár komplex) számokból álló $N \times N$ -es $\underline{A}$ mátrix **adjungáltjának** azt az $\underline{A}^+$ -val jelölt⁸⁴ mátrixot

⁸⁴ Az „adjungált” jelentése is kb. „hozzákapcsolt” latinul; minthogy az eredeti mátrixhoz nagyon szorosan „hozzá

hívjuk, aminek elemei:

$$\underline{\underline{A}} \text{ adjungáltja } \underline{\underline{A}}^+, \text{ amire } (\underline{\underline{A}}^+)_{kl} = A_{lk}^*. \quad \text{Szavakban: transzponálunk és komplex konjugátat veszünk.}$$

Például:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2-i \\ 5-3i & 4+9i & 4 \\ 3 & 7-7i & 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{\underline{A}}^+ = \begin{pmatrix} 1 & 5+3i & 3 \\ 1-i & 4-9i & 7+7i \\ 2+i & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

- Az adjungált mátrixnak a komplex szám- N -esek korábban értelmezett „természetes” komplex skalárszorzatával van kapcsolata, hasonló, mint a transzponálnak a valós esetben:

$$\text{Ha } \langle \underline{a} | \underline{b} \rangle = \sum_k a_k^* b_k \Rightarrow \langle \underline{a} | \underline{\underline{A}} \underline{b} \rangle = \langle \underline{\underline{A}}^+ \underline{a} | \underline{b} \rangle.$$

Ennek belátásához „szó szerint” követhetjük a fentebbi receptet, csak a komplex konjugáltakat kell még ízlésesen elhelyezni benne:

$$\begin{aligned} \text{komplex esetben: } \langle \underline{a} | \underline{\underline{A}} \underline{b} \rangle &= \sum_k a_k^* (\underline{\underline{A}} \underline{b})_k = \sum_k a_k^* \left(\sum_l A_{kl} b_l \right) = \sum_{k,l} A_{kl} a_k^* b_l = \\ &= \sum_{k,l} ((\overline{A})_{lk} a_k)^* b_l = \sum_l (\underline{\underline{A}}^+ \underline{a})_l^* b_l = \langle \underline{\underline{A}}^+ \underline{a} | \underline{b} \rangle, \quad \text{tényleg.} \end{aligned}$$

Vagyis a skalárszorzatra vonatkozólag (mátrixoktól „függetlenül” magunkat) komplex esetben az adjungáltra mondhatjuk el ugyanazt, mint valós esetben a transzponáltra:

$$\text{Ha } \mathbb{V} \text{ komplex skalárszorzos tér: } \hat{A} \in \text{Lin}(\mathbb{V})\text{-hez egyértelmű } \hat{A}^+ \in \text{Lin}(\mathbb{V}), \quad \text{amire } \langle \vec{w} | \hat{A} \vec{v} \rangle = \langle \hat{A}^+ \vec{w} | \vec{v} \rangle, \quad \text{minden } \vec{w}, \vec{v} \in \mathbb{V}\text{-re.}$$

- Jegyezzük meg, hogy a transzponálás az adjungálás speciális esete: valós számokból álló mátrix adjungáltja éppen a transzponáltja. Sok állítást komplex skalárszorzos térre, adjungáltra fogalmazunk meg; ezeket akkor valós mátrixokra, transzponáltra is vonatkoztathatjuk.
- Az operátorok adjungálttá (vagy transzponálttá) változása skalárszorzaton való „átdobáskor” mátrixokra nagyon szemléletes, ha az adott szám- N -essel való skalárszorzást (mint műveletet) „lefektetett vektorral”, „sorvektorral” jelöljük, például 3×3 -as esetben:

$$\langle \underline{w} | \underline{v} \rangle = w_1^* v_1 + w_2^* v_2 + w_3^* v_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^* & w_2^* & w_3^* \end{pmatrix} \langle \underline{w} | \underline{v} \rangle.$$

Amikor szám- N -eseket komplex skalárszorzunk (azaz egy vektort „sorvektorként” írunk fel), akkor a **komponenseket komplex konjugálni kell!!!** (Valóban persze ennek továbbra sincs jelentősége). A „vektor–mátrix–vektor” szorzatot pedig „lényegében ugyanúgy” ábrázolhatjuk, akár $\langle \underline{w} | \underline{\underline{A}} \underline{v} \rangle$,

van kapcsolva” az adjungáltja. Az adjungált mátrix jelölése nem mindenhol ez, amit most mi használunk: bizonyos könyvekben jelölik fölvonással, (mint a transzponálást), csillaggal (mint a komplex konjugálást), vagy az indexben + helyett egy speciálisabb, $\dagger$ jellel: $\overline{\underline{\underline{A}}}$, $\underline{\underline{A}}^*$, $\underline{\underline{A}}^+$, $\underline{\underline{A}}^\dagger$.

akár $\langle \underline{A}^+ \underline{w} | \underline{v} \rangle$ módon írjuk fel:

$$\langle \underline{w} | \underline{A} \underline{v} \rangle \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\underline{A} \underline{v})_1 \\ (\underline{A} \underline{v})_2 \\ (\underline{A} \underline{v})_3 \end{pmatrix}, \quad \langle \underline{A}^+ \underline{w} | \underline{v} \rangle \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^* & w_2^* & w_3^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\underline{A}^+ \underline{w})_1^* \\ (\underline{A}^+ \underline{w})_2^* \\ (\underline{A}^+ \underline{w})_3^* \end{pmatrix} \langle \underline{A}^+ \underline{w} | \underline{v} \rangle.$$

Mindkét alakban a gépies mátrix-vektor-szorzási sémát alkalmaztuk: az elsőben először $\underline{A}$ hatását $\underline{v}$ -re, aztán $\underline{w}$ -vel skalárszorozva; a másodikban pedig először „balra szorozni a mátrixszal”, azaz mintegy a mátrixot megszorozni balról a sorvektorral, ezután az így kapott sorvektorral jön a skalárszorítás $\underline{v}$ -vel. Az $\underline{A}$ -val „balra szorzás” tulajdonképpen éppen a transzponálttal szorzást jelenti szokásos irányban, a komplex konjugálással együtt ez tényleg az adjungált mátrix hatását jelenti a $\underline{w}$ vektoron. Ebből a sémából lehet megjegyezni, hogy adjungálással az operátor „átdobható” a skalárszorozaton belül.

* * * *

Most rátérünk a fejezet tulajdonképpeni témájára. Véges dimenziós vektorterekben mozgunk. A tér, amiben éppen dolgozunk: $\mathbb{V}$, minden előkerülő vektor $\mathbb{V}$ eleme, és minden lineáris operátor $\text{Lin}(\mathbb{V})$ eleme. A dimenziók száma: $\dim \mathbb{V} = N$, de külön figyelmet fordítunk a két- ill. háromdimenziós terekre, mint a „sík” és a „tér” megfelelőire; a példákat is ilyenekből vesszük. Mint eddig, a minden vektort helyben hagyó egységoperátort $\hat{I}$ -vel jelöljük.

7.2. Alapfogalmak

• Általában ha adott operátort egy adott vektorra hattatunk, az eredményvektor „akármi lehet”, jelesül: nem párhuzamos az induló vektorral. (Gondoljunk csak egy forgatásra, de nincs ez másképp más operátorokkal sem.) Fontos lesz azonban a következő kérdés: legyen **adott** egy $\hat{A} \in \text{Lin}(\mathbb{V})$ **operátor**; vajon **találunk-e hozzá** olyan $\vec{v}$ vektort, amit önmagával párhuzamos vektorba visz. Két vektor ugyebár párhuzamos, ha egymás számszorosai. Ezeken a nyomokon elindulva:

• Egy adott $\hat{A} \in \mathbb{V}$ lineáris operátor esetén azt mondjuk egy λ számra, hogy

$$\lambda \text{ az } \hat{A} \text{ sajátértéke, ha létezik } \vec{v} \neq \vec{0}, \text{ amire } \hat{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Ekkor $\vec{v}$ -t az $\hat{A}$ -nak a λ sajátértékhez tartozó **sajátvektorának** hívjuk.

Kikötöttük, hogy $\vec{v} \neq \vec{0}$ legyen; a nullavektort ugyebár minden operátor a nullavektorba visz, ami végülis az (induló) nullavektornak tényleg (akármilyen) számszorosa; nyilván az ennél érdekesebb esetek lesznek fontosak.

• Hogy „az $\hat{A}$ operátornak $\vec{v}$ a λ sajátértékhez tartozó sajátvektora”, időnként úgy is mondjuk, hogy „az $\hat{A}$ operátor a $\vec{v}$ -n *felveszi a λ sajátértéket*”. Ez arra emlékeztet, hogy általában a vektorokon hatva $\hat{A}$ nem magukkal arányosba viszi őket, a $\vec{v}$ viszont speciális neki ebből a szempontból.

• Ha az $\hat{A}$ operátornak $\vec{v}$ a λ sajátértékhez tartozó sajátvektora, akkor bármilyen α számra $\alpha \cdot \vec{v}$ is

az, hiszen ha $\hat{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}$, akkor $\hat{A}(\alpha\vec{v}) = \alpha\cdot\hat{A}\vec{v} = \alpha\cdot\lambda\vec{v} = \lambda\cdot(\alpha\vec{v})$, tényleg. Tehát egy sajátvektor nem egyértelműen meghatározott: akármilyen számszorosa is az.

Általánosabban: tegyük fel, hogy $\hat{A}$ -nak adott λ sajátértékhez $\vec{v}_1$ és $\vec{v}_2$ is sajátvektora. Ekkor nyilvánvaló, hogy $\vec{v}_1$ és $\vec{v}_2$ bármilyen lineáris kombinációja is λ -hoz tartozó sajátvektor, hiszen

$$\begin{aligned} \hat{A}\vec{v}_1 &= \lambda\vec{v}_1, \\ \hat{A}\vec{v}_2 &= \lambda\vec{v}_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \hat{A}(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2) &= \alpha_1(\hat{A}\vec{v}_1) + \alpha_2(\hat{A}\vec{v}_2) = \\ &= \alpha_1\lambda\vec{v}_1 + \alpha_2\lambda\vec{v}_2 = \\ &= \lambda(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2), \quad \text{tényleg.} \end{aligned}$$

(Figyelem: itt a λ ugyanaz a két vektornál!!) Ebből kiindulva értelmes a következő definíció:

• Adott $\hat{A}$ operátor adott λ sajátértékéhez azon $\vec{v}$ vektorok összességét (halmazát), amikre a „sajátértékséghez” megkövetelt alaptulajdonság teljesül, az $\hat{A}$ -nak az adott sajátértékhez tartozó **sajátalterének** hívjuk:

$$\begin{array}{ll} \text{Adott } \hat{A} \in \text{Lin}(\mathbb{V}) \text{ operátor,} & \{\vec{v} \mid \text{amire } \hat{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}\} \text{ halmaz:} \\ \text{ennek adott } \lambda \text{ sajátértéke:} & \text{a } \hat{A}\text{-nak } \lambda\text{-hoz tartozó sajátaltere.} \end{array}$$

A sajátalter legalább az egy sajátvektort tartalmazó altér (egyenes), de lehet kétdimenziós sík, stb.

A λ sajátérték **geometriai multiplicitása**: a hozzá tartozó altér dimenziója.

• Egy $\hat{A}$ operátor két különböző sajátértékéhez tartozó sajátaltereinek metszete csak a nullavektort tartalmazza: ez világos. (Ha lenne benne más vektor, akkor az melyik sajátértékhez tartozna? Lehetetlen.) Kicsit többet mond az, hogy **különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorok** (véges sok darab) egymástól **lineárisan függetlenek**. Ennek belátásához „soroljuk fel” a kiválasztott sajátvektorokat és a megfelelő sajátértékeket: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$, ill. $\vec{v}_{(1)}, \vec{v}_{(2)}, \vec{v}_{(3)}, \dots$, ahol mindegyikre $\hat{A}\vec{v}_{(k)} = \lambda_k\vec{v}_{(k)}$. „Teljes indukció”-szerű módon láthatjuk be állításunkat:

- Kettő ilyen vektor halmazára nyilvánvaló: ha összefüggők lennének, azaz $\vec{v}_{(1)} = \alpha \cdot \vec{v}_{(2)}$, akkor nem tartozhatnának különböző sajátértékhez.
- Három vektorra: mivel bármelyik kettő lin. független, elég „a harmadikat” (akármelyiket) vizsgálni: ha $\vec{v}_{(3)} = \alpha_1\vec{v}_{(1)} + \alpha_2\vec{v}_{(2)}$, akkor

$$\begin{aligned} \lambda_3(\alpha_1\vec{v}_{(1)} + \alpha_2\vec{v}_{(2)}) &= \lambda_3\vec{v}_{(3)} = \hat{A}\vec{v}_{(3)} = \hat{A}(\alpha_1\vec{v}_{(1)} + \alpha_2\vec{v}_{(2)}) = \alpha_1\lambda_1\vec{v}_{(1)} + \alpha_2\lambda_2\vec{v}_{(1)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha_1(\lambda_3 - \lambda_1)\vec{v}_{(1)} + \alpha_2(\lambda_3 - \lambda_2)\vec{v}_{(2)} &= \vec{0}, \end{aligned}$$

ami, ha feltettük, hogy a sajátértékek mind különbözőek, és $\vec{v}_{(1)}$ és $\vec{v}_{(2)}$ lin. függetlenek, csak úgy lehetne, ha $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, ami viszont nem jó, mert ekkor $\vec{v}_{(3)}$ is nulla lenne.

- Erre a mintára hajazva mindig továbbléphetünk eggyel, így tehát akármennyi (véges sok) vektorra is igaz lesz az állítás.

Ebből máris következik az, hogy N dimenziós téren ható operátornak legfeljebb N darab különböző sajátértéke lehet, hiszen maximum ennyi lineárisan független vektor van benne.

• A következő fogalmak is néha előkerülnek, ezeket most csak megemlítjük:

Tegyük fel, hogy $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{V}$ olyan lineáris altér, hogy minden $\vec{v} \in \mathbb{M}$ benne lévő vektornak $\hat{A}$ általi képe is $\mathbb{M}$ -ben van!

Elnevezés: Ha $\hat{A}[\mathbb{M}] \subseteq \mathbb{M}$, akkor mondjuk, hogy az $\mathbb{M}$ az $\hat{A}$ -nak **invariáns altère**.

Más szóval: ilyenkor az $\mathbb{M}$ altérre azt mondjuk, hogy invariáns $\hat{A}$ -ra. Még fontosabb, ha van két kiegészítő altér, amik mind a ketten invariánsak:

Ha $\mathbb{M}_1$ és $\mathbb{M}_2$ kiegészítő alterek
 (azaz $\mathbb{M}_1 \cap \mathbb{M}_2 = \vec{0}$ és $\text{Span}(\mathbb{M}_1 \cup \mathbb{M}_2) = \mathbb{V}$,
 és $\mathbb{M}_1$ és $\mathbb{M}_2$ is invariáns altére $\hat{A}$ -nak $\Rightarrow$ akkor azt mondjuk, hogy
 $\mathbb{M}_1$ és $\mathbb{M}_2$ **redukálja** $\hat{A}$ -t.

Figyeljünk fel, hogy nincs kizárva a definícióban, hogy 1) egy invariáns altér olyan legyen, hogy az $\hat{A}$ leképezésünk *azon kívüli* elemeket is oda képezzen, 2) az sincs kizárva, hogy egy invariáns altérnél ne legyen még szűkebb altér, ami szintén invariáns.

- A triviális alterek (a $\{\vec{0}\}$ nulla dimenziós altér és az egész $\mathbb{V}$ tér) minden operátorra invariánsak. Eggyel „komolyabb” **szemléltető példák** most is (mint szinte mindig) a háromdimenziós vetítések, forgatások köréből vehetők (az alterek ugye szokásosan origón átmenő síkok, egyenesek stb.).

Egy adott tengely körüli általános szögű *forgatásnak* sajátvektora a tengely irányú bármilyen vektor (vagyis a tengely irányú egyenes sajátaltére) $\lambda=1$ sajátértékkel, hiszen az ilyen irányú vektorokat a forgatás önmagukba viszi. A forgatásnak más sajátvektora nincs is; van viszont még invariáns altére: a tengelyre merőleges sík (az ebben lévő vektorok továbbra is ebben maradnak). A tengelyre merőleges sík és a tengely irányú egyenes kiegészítő alterek, és mindkettő invariáns: ezek tehát redukálják a forgatásoperátort.

Egy adott síkra való merőlegesen *vetítésnek* invariáns altére maga a sík, és a rá merőleges egyenes is (azaz ezek redukálják a vetítés operátort). Ennek a vetítésnek ráadásul a sík (amire vetítünk) sajátaltére is $\lambda=1$ sajátértékkel, és sajátaltére a rá merőleges egyenes is ($\lambda=0$ sajátértékkel).

- Az $\hat{I}$ **egységoperátornak** egyetlen sajátértéke van, az 1, és az egész $\mathbb{V}$ tér a sajátaltére. Ez persze akkor invariáns altére is, de amúgy $\mathbb{V}$ akármilyen altére is invariáns altér az $\hat{I}$ -re.

7.3. Sajátértékek és sajátvektorok meghatározása

Az imént láttunk néhány egyszerű példát is sajátvektorokra, sajátalterekre; jó lenne, ha tudnánk, hogy általában hogyan kell kiszámítani adott operátor sajátértékeit, sajátvektorait. Ehhez persze meg kell adni magát az operátort; a gyakorlatban ez sokszor azt jelenti, hogy megadjuk a mátrixát, azaz $\mathbb{V}$ -ben választunk egy (szokásosan ortonormált⁸⁵) bázist, és a $\hat{A}$ operátorhoz megadjuk az ebben a bázisban kiszámolt $\underline{A}$ mátrixát. Miközben mátrixok sajátértékeit keressük, megismerkedünk mátrixokra vonatkozó további tulajdonságokkal, valamint azzal, hogy némely, eddig csak konkrét mátrixokra ismert fogalmakat hogyan lehet magukra az operátorokra vonatkoztatni.

- Először foglalkozzunk 3×3 -as mátrixokkal; világos lesz, hogy mi a helyzet nagyobb (vagy kisebb) mátrixok (azaz: nagyobb vagy kisebb dimenziószám) esetén. Annak feltétele, hogy adott $\underline{A}$ mátrixra sajátértéket kapjunk, mátrixokkal és számhármassokkal még egyszer felírva, majd átrendezve:

$$\underline{A}\underline{v} = \lambda\underline{v} \quad \Rightarrow \quad \underline{A}\underline{v} - \lambda\underline{v} = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad (\underline{A} - \lambda\underline{I})\underline{v} = \underline{0}.$$

Az utóbbi alak tulajdonképpen egy *homogén* lineáris egyenletrendszer, aminek ugye van a triviális megoldása (amikor $\underline{v} = \underline{0}$, de erre ugye nem voltunk kíváncsiak); nemtriviális megoldása akkor van,

⁸⁵Ha még nem is mondtam így, remélem, egyértelmű: egy bázis *ortonormált*, ha a különböző elemei merőlegesek (*ortogonálisak*), és mindegyikük hossza 1 (azaz: *normáltak*). Eddig is ilyen bázisokkal dolgoztunk.

ha a zárójelben lévő mátrix nem injektív. Így tehát:

$$\lambda \text{ sajátérték} \Leftrightarrow (\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) \text{ nem injektív} \Leftrightarrow \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0.$$

Adott $\underline{\underline{A}}$ mátrix esetén fel tudjuk írni az $\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}$ mátrixot (most még ismeretlen λ számmal), majd megvizsgálni, milyen λ -ra lesz pont nulla a kijelölt determináns.

• Emlékezzünk, hogyan is lehet akármekkora mátrix determinánsát kiszámítani (soroként egy elemet választva, hogy oszloponként is egy legyen; ezeket összeszorozva, majd az összes $N!$ lehetőséget a permutáció előjelével összeadva)! Az $\underline{\underline{A}}$ -hoz képest az $\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}$ mátrixa úgy jön ki, hogy $\underline{\underline{A}}$ főátlójából levonunk λ -kat. **Egy példa** (most konkrétan kiszámítva a determinánst is):

$$\text{Példa: } \underline{\underline{A}} := \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -2 \\ -4 & -2-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = (3-\lambda) \cdot (-2-\lambda)(1-\lambda) + 1 \cdot 2 \cdot 2 + (-2) \cdot (-4) \cdot 2 - \\ - (3-\lambda) \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-4) \cdot (1-\lambda) - (-2) \cdot (-2-\lambda) \cdot 2 \Rightarrow \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda - 2.$$

Világos, hogy ehhez hasonlóan egy konkrétan megadott $N \times N$ -es $\underline{\underline{A}}$ mátrixra a $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})$ kifejezése mindig egy N -edfokú polinom lesz λ -ban, ahol az N -edfokú (legmagasabb fokú) tag együtthatója $(-1)^N$, ez a determináns $N!$ darab tagja közül abból az egyből jön, ami a főátlóbeli elemek szorzatát tartalmazza (abból is csak a λ -k szorzatából).

• Az iménti mátrix esetén tehát ahhoz, hogy megkeressük a sajátértékeket, meg kell oldani a következő algebrai egyenletet:

$$\text{Az iménti } \underline{\underline{A}} \text{ sajátértékei } (\lambda) = ? \Rightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0.$$

A példa kedvéért konkrétan végigszámoljuk ezt. Harmadfokú egyenletet nehézkes általánosságban megoldani; most azonban észrevehetjük (bizonyos rutinszint fölött kötelező erről az egyenletről észrevenni), hogy a $\lambda=1$ az megoldás. Valóban, $\lambda=1$ -et írva a bal oldalba éppen 0-t kapunk. Emiatt a harmadfokú polinomból ki lehet emelni $(\lambda-1)$ -et⁸⁶. Ezzel a maradék már másodfokú, amit meg lehet oldani, így tehát megvan a három sajátérték:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 2.$$

Következő feladat a sajátvektorok megkeresése. Kezdjük pl. a $\lambda_1 = 1$ -hez tartozó sajátvektorral (amit most jelöljünk $\underline{v}^{(1)}$ -gyel): ehhez vissza kell helyettesíteni a λ_1 -et az $\underline{\underline{A}}\underline{v}^{(1)} = \lambda_1 \underline{v}^{(1)}$ egyenletbe, vagyis abba, hogy

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{I}})\underline{v}^{(1)} = 0, \quad \text{beírva } \underline{\underline{A}} \text{ alakját,} \\ \text{ez azt jelenti, hogy: } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -4 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ v_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

⁸⁶ Ezt a dolgot hívják tulajdonképpen *polinomosztásnak*: ha tudjuk, hogy $\lambda = 1$ zérushely, akkor ki lehet emelni $\lambda - 1$ -et a polinomból, amit úgy csinálhatunk, hogy a magasabb fokú tagoktól az alacsonyabbak felé haladva mindig úgy csoportosítjuk őket, hogy ki lehessen emelni a megkövetelt $\lambda - 1$ -et; a mi esetünkben tehát konkrétan:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda^3 - \lambda^2) - (\lambda^2 - \lambda) + (2\lambda - 2) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 2).$$

vagy, ha már megtanultuk, a még tömörebb Gauss-eliminációs jelöléssel is dolgozhatunk (ahol $v_1^{(1)}$, $v_2^{(1)}$, $v_3^{(1)}$ az ismeretlenek), és egyből tovább is alakíthatjuk:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & | & 0 \\ -4 & -3 & 2 & | & 0 \\ 2 & 2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 2 & 2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & | & 0 \\ 2 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2^{(1)} = -2 \cdot v_1^{(1)}, \quad v_3^{(1)} = 2 \cdot v_1^{(1)}.$$

A Gauss-elimináció első lépésében észrevehettük, hogy a sorok nem lineárisan függetlenek; mi most a második sorhoz adtuk hozzá az első és harmadik összegét. Ez $0 = 0$ egyenlet lett, így el is hagyhattuk, utána már csak alakígtattunk. *Figyelem!* Az, hogy a sorok lineárisan összefüggőnek adódtak, és emiatt tehát létezik nemtriviális megoldás, nem valami „extra mázli”; éppen ezt biztosította be az, hogy olyan λ -t kerestünk, amire az $\underline{A} - \lambda \underline{I}$ nem injektív mátrix lesz (vagyis a determinánsa eltűnik)! Mindig „elvárhatjuk” ezt tehát.

Az utolsó Gauss-eliminációs alak pedig azt jelentette, hogy pl. a harmadik ismeretlent ($v_3^{(1)}$ -at) akárhogy megválaszthatjuk, de akkor már meghatározódik az első két komponens, $v_1^{(1)}$ és $v_2^{(1)}$; ezt írtuk fel. No mármost ugyanezt végigjátszva a λ_2 sajátértékhez tartozó (meghatározandó) $\underline{v}^{(2)}$ és a λ_3 -hoz tartozó $\underline{v}^{(3)}$ sajátvektorokkal, összefoglalva azt kapjuk eredményül, hogy

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_1 = 1, \\ \lambda_1 = 1, \end{matrix} \quad \underline{v}^{(1)} \propto \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}^{(2)} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}^{(3)} \propto \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

• Megoldottuk tehát a kitűzött mátrix **sajátérték-problémáját**. Három különböző sajátérték adódott (az egyenletből), nem csodálkozunk tehát hogy kaptunk három lineárisan független sajátvektort. Utóbbiak persze ilyenkor csak egy számszorzó erejéig határozódnak meg: ezért szerepel $\propto$ („arányos”) jel az utóbbi kifejezésekben = (egyenlő) helyett; mindegyiket külön-külön akármilyen számmal (akár negatívval is) szorozhatnám, szintén sajátvektorokat kapnék. Ellenőrizzük le, hogy tényleg, az $\underline{A}$ -t hattava ezekre a vektorokra „kikapjuk” a sajátértékeket!

Még egy megjegyzés: amikor a sajátvektorokat kerestük a (már megtalált, emiatt adottnak tekinthető) sajátértékhez, most Gauss-eliminációval dolgoztunk, de három dimenzióban, ahol értelmes a vektoriális szorzás, azzal is kitalálhatjuk a sajátvektort: a lineáris egyenletrendszer két sorát véve (a harmadik ugye összefügg ezekkel) az egyenletrendszer lényegében azt mondja, hogy az ismeretlen vektor merőleges a mátrix egyik ill. másik sorából mint komponensekből összeállított vektorra; így tehát a mátrix két sorát (komponensenként) vektoriálisan szorozva is megkapjuk az ismeretlen vektort (ami az éppen adott λ -hoz tartozó sajátvektor).

• Következő (egyszerűbb) példaként nézzünk meg egy 2×2 -es mátrixot! Keressük tehát az alábbi $\underline{A}$ mátrix sajátvektorait, sajátértékeit! Az egyenlet másodfokú lesz, rögtön a megoldást írrom fel:

$$\underline{A} := \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}. \quad \begin{matrix} \det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = 0 \\ \Rightarrow (4 - \lambda)(11 - \lambda) - 2 \cdot (-3) = 0 \\ \Rightarrow \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 10.$$

2×2 -es mátrixokra igen egyszerű megtalálni a sajátvektorok kifejezéseit: felírva a $\underline{v}^{(1)}$ és $\underline{v}^{(2)}$ sa-

játvektorokra vonatkozó egyenleteket, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{I}}) \underline{v}^{(1)} = 0 &\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{v}^{(1)} \propto \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ (\underline{\underline{A}} - \lambda_2 \underline{\underline{I}}) \underline{v}^{(2)} = 0 &\Rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{v}^{(2)} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Az $\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}$ mátrixának második sorából kapott egyenlet mindig ugyanazt mondja, mint az első (hiszen, mint fent, mivel $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0$, a sorok lineárisan összefüggenek, és két egyenletnél ez csak így lehet); ezért elég az egyik sort nézni. Az eredményt (amiben még marad ugye egy szabad szorzó) **úgy találhatjuk ki 2×2 -es $\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}$ mátrixra**, hogy az **egyik sorában** lévő **két elemet „megcseréljük”**, és közülük az **egyiket -1 -gyel szorozzuk**; ez pont jó lesz mindig.

• Az eddigieket kicsit összefoglalva: mivel 2×2 -es és 3×3 -as mátrixok igen sokszor előkerülnek, érdemes kicsit tömörebben felírni a sajátértékekre vonatkozó egyenletet, hogy ne kelljen mindig kiszámolni az $\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}$ determinánsát.

2×2 -es mátrixok esetében az egyenlet másodfokú:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0 \quad \dots \Leftrightarrow \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0,$$

$$\text{vagy másképp: } \lambda^2 - \text{Tr}(\underline{\underline{A}}) \cdot \lambda + \det(\underline{\underline{A}}) = 0.$$

3×3 -as mátrixokra is esetleg érdemes „egy füst alatt” felírni a λ -kra vonatkozó egyenletet. Az alábbi képlet adódik (ellenőrizzük le!):

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{a } \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0 \text{ egyenlet ekvivalens alakban a következő:}$$

$$\lambda^3 - \text{Tr}(\underline{\underline{A}}) \cdot \lambda^2 + \text{Tr}(\text{adj } \underline{\underline{A}}) \cdot \lambda - \det(\underline{\underline{A}}) = 0.$$

A középső jelölést nem ismerjük még; ez 3×3 -as mátrixokra azt jelenti, hogy:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Tr}(\text{adj } \underline{\underline{A}}) := \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}.$$

Ezt úgy kell tehát legyártani, hogy végigmegyünk az eredeti 3×3 -as mátrix főátlóján, mindegyik elemnél a megfelelő sort és oszlopot „kitakarjuk”, és a „maradék” 2×2 -es mátrix determinánsát képezzük, végül ezeket összeadjuk. Ha konkrétan kiértékeljük $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})$ -t, éppen ez a kifejezés lesz a λ -ban elsőfokú tag együtthatója⁸⁷.

• Vigyázat!!! Az iménti, 2×2 -es ill. 3×3 -as mátrixokra felírt képletek *tényleg csak* ilyen, 2×2 -es ill. 3×3 -as mátrixokra érvényesek! Nagyobb mátrixnál nincs mese, ki kell valahogyan másképp számolni a $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})$ -t.

⁸⁷ Akármilyen (nemcsak 3×3 -as) mátrixokra is értelmes az $\text{adj } \underline{\underline{A}}$ mátrix, aminek a nyoma lenne $\text{Tr}(\text{adj } \underline{\underline{A}})$. Nem foglalkoztunk ugye a determinánsokkal kapcsolatban az *aldeterminánsokkal*, azokkal kapcsolatban jön be ez a fogalom. Itt most pontosan annyit elég tudni, amennyit leírtam.

7.4. „Egyszerű” operátorok (mátrixok), fontos típusok

Vizsgálgassuk kicsit tovább általánosabb keretek között a sajátértékek problematikáját; az itt elmondottak persze a speciálisabb 2×2 -es és 3×3 -as esetekben is igazak.

- Minden $\underline{A}$ mátrixra felírhatjuk $\det(\underline{A} - \lambda \underline{I})$ -t; ez N -edfokú polinom λ -ban, az $\underline{A}$ **karakterisztikus polinomja** névre hallgat. A sajátértékeket meghatározó egyenlet $\det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = 0$, ez az $\underline{A}$ **karakterisztikus egyenlete**, vagy csak egyszerűen: sajátérték-egyenlete. 2×2 -es mátrixok esetén ez másodfokú; minden további nélkül felírhatjuk a megoldását. Nagyobb mátrixok esetén többfokú; ennek megoldása nehezebb (nincs „megoldóképlet”), de tudjuk az *algebra alaptételét*⁸⁸, miszerint **komplex számok között** egy N -edfokú egyenletnek van N darab gyöke. „Kivételes” eset, de persze előfordul, hogy kevesebbnek tűnik a gyökök száma; ezt úgy mondjuk, hogy két (vagy több) gyök *egybeesik*. Pl. az $x^2 = 0$ másodfokú egyenletnek csak a 0 a megoldása: erre azt mondjuk, hogy a nulla *kétszeres* gyök.

- Egy $N \times N$ -es $\underline{A}$ mátrix karakterisztikus egyenletének gyökei tehát a mátrix sajátértékei. Egy gyöknek mint az egyenlet gyökének multiplicitása (vagyis hogy hányszoros gyök) külön nevet visel:

a sajátérték mint az egyenlet gyökének multiplicitása:

a sajátérték **algebrai multiplicitása**.

3×3 -as mátrixoknál például lehet, hogy a karakterisztikus egyenletnek három különböző gyöke van (mint az előző szakasz példájában); ekkor ezek algebrai multiplicitása 1. Lehet pl. az is, hogy van két egybeeső gyök meg egy harmadik különböző, ekkor két sajátérték van, egyik algebrai multiplicitása 2, a másiké 1.

- Az is lehet, hogy a karakterisztikus egyenletnek nincs (vagy nincs ki az N darab) *valós* gyöke, még akkor is, ha az egyenlet valós együtthatójú (azaz maga a mátrix csupa valós számokból állt). Pl. 2×2 -es valós mátrixokra a sajátérték-egyenlet másodfokú: $ax^2 + bx + c = 0$, vagy van két valós sajátérték (ha $b^2 > 4ac$), vagy két komplex, ha $b^2 < 4ac$. (Vagy két egybeeső valós gyök, ha pont $b^2 = 4ac$). Ha a sajátérték-egyenlet egyik megoldása komplexnek adódik, akkor ha az operátort (mátrixot) kifejezetten valós vektortéren ható operátorként képzeltük, nincs mese, azt kell mondani, hogy ez a sajátérték („valósként”) nem létezik; ha kiterjesztjük a vektortérünket komplex térére, akkor viszont létezik, és ő egy komplex sajátérték.

Pl. tekintsük az alábbi $\underline{M}$ mátrixot; ellenőrizzük a sajátérték-problémájának megoldását is:

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{Sajátérték-egyenlet:} & \text{Komplex viszont} \\ \lambda^2 + 1 = 0, \text{ nincs } \lambda \in \mathbb{R}. & \text{van: } \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Komplex sajátvektorok:} \\ \underline{v}^{(1)} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \underline{v}^{(2)} \propto \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Az $\underline{M}$ valós mátrixnak tehát nincs *valós* sajátértéke. Az $\underline{M}$ hatását a síkon szemléltetve rájöhettünk, hogy az óramutató járásával ellentéző, pozitív irányú 90° -os elforgatást írja le: tényleg nincs sajátvektora a síkon. Ha kiterjesztjük komplex számok közé, akkor viszont van.

Látjuk tehát: komplex sajátérték (azaz valós sajátértékek „hiányzása”) előfordul akkor is, ha maga a mátrix valós (azaz valós vektortéren ható operátorról van szó). Mivel *komplex* számok között egy N -edfokú egyenletnek (a karakterisztikus egyenletnek) *biztosan* van N gyöke, a következőkben az általánosabb megfontolások során mindig komplex vektorterekre gondolunk (ami

⁸⁸Ezt csak említettük a komplex számokkal foglalkozó 2. fejezet végén, a 2.6. szakaszban.

ugye lényegében azt jelenti, hogy komplex számokkal is lehet lineárkombinálni, azaz speciálisan: vektorkomponensek, mátrixelemek mind lehetnek komplexek is). Így tehát nem kell majd azzal szórakozni, hogy mi van, ha komplexek a gyökök.

Ha mégis kifejezetten valós vektorterekkel akarunk vizsgálni, akkor mindig mindenhez hozzá kell értenünk követelményként, hogy „... és az összes sajátérték pont valós”. Meglátjuk alább, hogy (a gyakorlatban fontos esetekben is) *néha biztosak lehetünk* majd abban már a sajátérték-probléma tényleges megoldása előtt, hogy az összes sajátérték valós; ezt jó dolog lehet „előre tudni”.

• Térjünk vissza az általános vizsgálatokhoz (ahogy mondtuk: hacsak külön nem kötjük ki, komplex vektorterek van most). Egy sajátértékhez kétféle „sokszoroság”, multiplicitás is van: a *geometriai* (a hozzá tartozó sajátaltér dimenziószáma), és a most bevezetett *algebrai* (a neki mint a karakterisztikus egyenlet gyökének többszörössége). A gyakorlatilag **legfontosabb eset** mégis:

a továbbiakban „egyszerű”-nek mondunk egy mátrixot (vagyis operátort), ha a sajátértékeinek **algebrai és geometriai multiplicitásai** megegyeznek.

Ez miért jó? Azért, mert — mivel komplex számok között az algebrai N -edfokú karakterisztikus egyenletnek biztos N darab „gyök-ször-multiplicitás”-a van — ha egy N dimenziós téren ható mátrix egyszerű, tudhatjuk róla, hogy a sajátaltérek dimenziószámainak összege megegyezik a tér dimenziójával. Ebből (mivel a különböző sajátaltérek metszete csak a nullvektor) a dimenziók megszámlálásából kiadódik, hogy

Egyszerű mátrix (operátor) sajátvektorai kifeszítik az egész V teret.

Van ennek az „egyszerű”-fogalomnak precízebb neve is; most maradjunk ennyinél⁸⁹. Jó volna azért tudni, hogy milyen mátrixok „egyszerűek”. Most két fontos esetben tudunk határozottat mondani:

1. Ha a sajátértékek mind különbözőek (és valós esetben mind valósak), az operátor egyszerű.
 2. Ha egy operátor önadjungált (vagy valós esetben: szimmetrikus), akkor is egyszerű.
- Az első leszűrhetjük az eddig tanultakból: ha a karakterisztikus egyenlet gyökei egyszeres különböző gyökök (és valós vektortéren megköveteljük, hogy mindegyik gyök valós legyen), azaz egy N dimenziós téren ható $\hat{A}$ -nak tényleg van N darab *különböző* sajátértéke, akkor sajátvektorai mind lineárisan függetlenek, és így (mivel N -en vannak) biztos kifeszítik az egész teret.
- A másik, 2.) eset talán még fontosabb; ilyenkor további dolgokat is megállapíthatunk. Emlékezzünk vissza operátorok (mátrixok) transzponáltjára ill. adjungáltjára, és haladjunk lépésenként!
- Állítás: önadjungált operátor sajátértékei valósak.** Ezt egyszerűen beláthatjuk, ha emlékszünk, hogy az adjungálást kapcsolatba hoztuk a skalárszorzással, és ezt használjuk a sajátvektorra:

$$\begin{array}{ll} \text{Ha } \hat{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}, \text{ akkor} & \langle \vec{v} | \hat{A}\vec{v} \rangle = \langle \vec{v} | \lambda\vec{v} \rangle = \lambda \cdot \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle, & \text{Tehát:} \\ \text{másrészt } \hat{A}^+ = \hat{A}, \text{ így} & \langle \vec{v} | \hat{A}\vec{v} \rangle = \langle \hat{A}^+ \vec{v} | \vec{v} \rangle = \langle \hat{A}\vec{v} | \vec{v} \rangle = \langle \lambda\vec{v} | \vec{v} \rangle = \lambda^* \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle. & \lambda^* = \lambda. \end{array}$$

⁸⁹ Hogy lássunk példát „nem egyszerű”-re is: a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix sajátérték-egyenlete (karakterisztikus egyenlete): $\lambda^2=0$, ennek csak a $\lambda=0$ a gyöke, ami kétszeres gyök: algebrai multiplicitása 2. Hozzá tartozó sajátvektor azonban csak a $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ill. ennek többszöröse lehet, hiába keresünk ettől lineárisan független másikat. Tehát a $\lambda=0$ sajátértékhez csak az ezen $\vec{v}$ által kifeszített egydimenziós altér a sajátaltér; a $\lambda=0$ sajátérték geometriai multiplicitása tehát 1, kisebb, mint az algebrai. A sajátvektorok (ez a $\vec{v}$ egymagában) nem feszítik ki a (kétdimenziós) teret.

Kihasználtuk, hogy komplex skaláris szorzásnál a második szorzandóból a számszorozót, az elsőből viszont komplex konjugáltat lehet kiemelni. Az állítás azért lényeges, mert önadjungált mátrixban magában még bőséggel lehetnek komplex komponensek (elemek), a velük felírt karakterisztikus egyenlet is lehetne komplex együtthatós; nem látszik, hogy a gyökei csak valósak lehetnének. Mégis ez a helyzet. Valós esetre „leszűkítve” a skalárszorítás, adjungálás fogalmait, adódik a nagyon fontos

Következmény: *Valós szimmetrikus mátrix (operátor) sajátértékei valósak.*

(Ez sem magától értetődő: valós mátrixnak is lehetne komplex sajátértéke, mint láttuk.)

• **Önadjungált operátor különböző sajátértékeihez** tartozó sajátvektorok **ortogonálisak**.

Kiírva: ha $\hat{A}^+ = \hat{A}$, továbbá $\hat{A}\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1$, $\hat{A}\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2$, és $\lambda_1 \neq \lambda_2$, akkor $\langle \vec{v}_1 | \vec{v}_2 \rangle = 0$.

Ezt belátni sem sokkal nehezebb, mint volt fentebb λ -k valósságát önadjungált operátorra:

$$\begin{aligned} \text{egyrészt: } \langle \hat{A}^+ \vec{v}_2 | \vec{v}_1 \rangle &= \langle \vec{v}_2 | \hat{A} \vec{v}_1 \rangle = \langle \vec{v}_2 | \lambda_1 \vec{v}_1 \rangle = \lambda_1 \langle \vec{v}_2 | \vec{v}_1 \rangle, \\ \text{másrészt: } \langle \hat{A} \vec{v}_2 | \vec{v}_1 \rangle &= \langle \lambda_2 \vec{v}_2 | \vec{v}_1 \rangle = \lambda_2^* \langle \vec{v}_2 | \vec{v}_1 \rangle = \lambda_2 \langle \vec{v}_2 | \vec{v}_1 \rangle. \end{aligned}$$

Mármint ha $\hat{A}^+ = \hat{A}$ és a két sajátérték nem egyenlő, a két sor vége csak úgy lehet egyenlő, ha mindkettő nulla, ez pedig úgy lehet, hogy $\langle \vec{v}_1 | \vec{v}_2 \rangle = 0$ tényleg.

• Mindez persze **valós szimmetrikus mátrixokra** is érvényes; ezek **különböző** sajátértékekhez (mind valós!) tartozó sajátvektorai **ortogonálisak** (merőlegesek).

• Mi a helyzet, ha egy mátrixra pl. két sajátérték **egybeesik**? Arra gondolhatunk (az „egybeesik” elnevezés is sugallja), hogy ez „véletlenül” lehet így: egy N -edfokú algebrai egyenletnek „általában” N darab különböző megoldása van. Csak az együtthatók bizonyos (még mindig végtelenféleképpen lehetséges, de így is „végtelenül” speciális) „együttállása” esetén lesznek egybeeső gyökök⁹⁰.

Ha egy mátrixnak *véletlenül* éppen van pl. két egybeeső sajátértéke (ennek az esetnek neve kifejezően **elfajult** (latinosan: degenerált) **eset**), akkor ha „csak egy **kicsit is megváltoztatjuk**” a mátrixot, ezen két sajátérték már nem fog egybeesni („**megszűnik** az elfajulás/degeneráció), és két jól meghatározott különböző sajátvektor tartozik egyikhez ill. másikhoz.

Mármint *általános mátrixra* semmi biztosítékunk nincs, hogy ahogyan azzal a „kis megváltoztatással” nullához tartunk (hogy visszakapjuk az elfajult, két egybeeső sajátértékes esetet), aközben a két különböző sajátvektor nem tart-e pont „egymásba”, azaz egymással lineárisan összefüggőbe. Ha igen, akkor az elfajult, többszörös sajátértékű mátrix „nem egyszerű”: kevesebb a sajátvektora, mint a tér dimenziószáma. (Nem egyszerű mátrixra a fentebbi 89. lábjegyzet hoz példát.)

Önadjungált mátrixra (valós esetben: szimmetrikusra) viszont többet tudunk (ha a „kicsi megváltoztatást” is úgy csináljuk, hogy a mátrix önadjungált maradjon): ekkor a nem elfajult mátrix minden sajátvektora merőleges (sőt: választhatók egységnyi hosszúaknak). Ahogy tehát megszüntetjük a megváltoztatást, a két megfelelő sajátvektor *biztosan nem fog* egymással lineárisan összefüggőbe tartani, hiszen „végig” merőlegesek és egységnyi hosszúak maradnak. Következtetés: önadjungált mátrixra **elfajult esetben sem „tűnik el”** egyik sajátvektor sem.

• Összefoglalva: **önadjungált** (valósban: szimmetrikus) mátrix sajátvektorai kifeszítik a teret, akár vannak többszörös sajátértékek, akár nem. Ha van többszörös sajátérték, akkor ehhez több-dimenziós altér (pl. kétszeres multiplicitás esetén kétdimenziós sík) tartozik. Ennek az altérnek

⁹⁰A most következő érvelés próbál szemléletes lenni; úgy lehetne precízzé tenni, ha már többet tudnánk a „folytonosság” fogalmáról, amire most csak szemléletesen támaszkodunk.

bármelyik vektora az adott sajátértékhez tartozó sajátvektor, így **nem** mondhatjuk, hogy az operátorunk *bármelyik két sajátvektora* biztosan merőleges (ortogonális) lenne egymásra. Viszont a *többi* (más sajátértékhez tartozó) sajátaltér merőleges erre az altérre (ezt tudjuk; beláttuk fentebb), és ebben az altérben is, ha szeretnénk, *választhatunk* két olyan vektort, ami még egymásra is merőleges. Tehát ami az ortogonalitást illeti:

Önadjungált (valóban: szimmetrikus) operátor sajátvektorai „vehetők ortogonálisnak”.

Ha a sajátértékek mind egyszeresek, eleve biztosak lehettünk ebben.

Ha van többszörös sajátérték, a hozzá tartozó altérben *választhatunk*

olyan sajátvektorokat, amik merőlegesek egymásra is (és persze a többire is).

* * * *

A következőkben önadjungált mátrixokkal foglalkozunk, de leginkább valós szimmetrikusakkal, azon belül is a háromdimenziós tér lesz a fő vizsgálódási területünk. Ilyenkor a sajátvektorok merőlegesek (vagy eleve azok, vagy választhatunk olyanokat, amik azok).

7.5. Közjáték: forgatások

Most a forgatások alaptulajdonságait beszéljük meg. A felírt képletek két- vagy háromdimenziós terekre vonatkoznak⁹¹.

Valós szimmetrikus 3×3 -as mátrix sajátvektorai közül vehetünk tehát három ortogonálisat: ezek kifestik a teret. Már sokszor előkerült, hogy egy „igazi”, térben rögzített vektor, $\vec{v}$ komponensei mások lesznek, ha megváltoztatjuk a bázisunkat. Most itt az ideje, hogy ezt egy kicsit körüljárjuk. Most is ortogonális bázisokkal foglalkozunk, olyanokba térünk át, amik szintén ilyenek: vagyis *forgatásokat* végzünk.

• Tekintsünk egy valahogyan (pl. háromdimenzióban egy tengellyel és forgásszöggel) megadott forgatást mint operátort. Ennek megfelel egy mátrix, ami megmondja, hogy forgatás során hogyan változnak egy adott vektor komponensei. Amikor azt mondjuk, hogy „forgatás”, kétféle dolgot érthetünk alatta, egyiket *aktív szemlélet*, a másikat *passzív szemlélet* néven szokták emlegetni:

Aktív szemlélet: „fogom a vektort, és elforgatom”. Arra vagyok kíváncsi, hogy az így elforgatott vektor komponensei mik lettek.

Passzív szemlélet: a vektor a térben rögzítve van, és „a koordinátarendszert (*a fejemet*) forgatom el”. Arra vagyok kíváncsi, hogy a vektor komponensei mik lettek az új koordinátarendszerben.

Könnyű rájönni, hogy ha ezekre mint a vektorkomponenseken ható műveletekre (azaz: mátrixokra) gondolunk, a passzív szemléletű „forgásmátrix” éppen az aktív szemléletűnek az inverze. A következőkben „forgatás” alatt leginkább az **aktív szemléletet** értjük. Írhatjuk tehát, hogy ha $\underline{F}$ egy forgásmátrix, ami a mostani (vesszőtlennel jelölt) koordinátatengelyeinket átforgatja a vesszővel

⁹¹ A legtöbb most következő képlet azonban minden további nélkül működhet akárhány dimenzióban. Ami **csak háromdimenziós** térben működik, az mindig azzal kapcsolatos, hogy több dimenzióban nincsen két irányhoz egy egyértelmű rájuk merőleges harmadik: ez csak háromdimenzióban működő előírás. Ezért pl. két vektor vektoriális szorzatának csak három dimenzióban van értelme. Sok dimenzióban egy forgatást sem adhatok meg úgy, hogy megmondom a „forgástengelyt és a forgatási szöget”: ez is csak háromdimenzióban működhet.

jelölt újra, akkor egy adott $\vec{v}$ vektornak a régi és az új rendszerbeli komponensei közötti kapcsolat:

$$\begin{array}{l} \text{Adott } \vec{v}, \\ \text{Régi komponensek: } \underline{v} \\ \text{Új komponensek: } \underline{v}' \end{array} \Rightarrow \underline{v}' = \underline{F}^{-1} \underline{v}.$$

• A sajátérték-problémával kapcsolatban is érdemes néha „tengely és szög” helyett másképp megadni a forgásmátrixokat. Ha adott három vektor, $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$, amik „akár ortogonális bázisvektorok is lehetnének”, azaz (azon túl, hogy lineárisan függetlenek), még $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, és $\langle \vec{a}|\vec{b} \rangle = \langle \vec{a}|\vec{c} \rangle = \langle \vec{b}|\vec{c} \rangle = 0$ (azaz egységnyi hosszúak és egymásra merőlegesek), és még jobbsdorásúak is ilyen sorrendben, akkor van pontosan egy olyan forgatás, ami az eredeti bázisvektorokat, $\vec{e}_{(1)}$ -et, $\vec{e}_{(2)}$ -t és $\vec{e}_{(3)}$ -at átviszi $\vec{a}$ -ba, $\vec{b}$ -be és $\vec{c}$ -be (ilyen sorrendben). A három „új” vektor tehát tökéletesen megadja magát ezt a forgatást; ha $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ komponensei az *eredeti rendszerben* $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$, akkor ezt a forgásmátrixot meg is adhatjuk a szokásos módon:

$$(\vec{e}_{(1)}, \vec{e}_{(2)}, \vec{e}_{(3)})\text{-at } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\text{-be forgató forgatás mátrixa: } \underline{F} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Ez még akármilyen három (komponensek nyelvén adott) $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorra működne; ami ezt „forgatássá teszi”, az az, hogy ezek a vektorok ortonormáltak. Ez — figyeljük csak meg — azt eredményezi, hogy az iménti $\underline{F}$ mátrix a transzponáltjával szorozva éppen az egységmátrixot adja; a mátrixszorzás szokásos szemléletes jelölésével ábrázolva:

$$\begin{array}{l} \underline{\overline{F}} \underline{F} = \underline{I}. \\ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Más alakokban írva ugyanezt:} \\ \underline{F}^{-1} = \underline{\overline{F}}, \\ (\underline{F}^{-1})_{kl} = \underline{F}_{lk}, \\ \sum_m \underline{F}_{km} \underline{F}_{lm} = \delta_{kl}, \\ \sum_m \underline{F}_{mk} \underline{F}_{ml} = \delta_{kl}. \end{array}$$

Az, hogy éppen az egységmátrixot kaptuk, minden egyes komponensében éppen azzal egyenértékű (végignézzve $\underline{F}$ és $\underline{\overline{F}}$ sorait–oszlopait), hogy $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ ortogonálisak és normáltak.

• Könnyű látni, hogy ez fordítva is igaz: ha egy mátrix olyan, hogy az inverze a transzponáltja, akkor oszlopait vektorkomponensenként azonosítva azok ortogonálisak és normáltak lesznek. Nézzük meg egy más megközelítést a forgásmátrixoknak; a transzponáltra emlékezve:

$$\text{Ha } \hat{F}^{-1} = \overline{\hat{F}}, \text{ azaz } \overline{\hat{F}} \hat{F} = \hat{I}, \text{ akkor } \langle \hat{F} \vec{v} | \hat{F} \vec{w} \rangle = \langle \overline{\hat{F}} \hat{F} \vec{v} | \vec{w} \rangle = \langle \hat{I} \vec{v} | \vec{w} \rangle = \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle.$$

Ugyanezt indexesen is kiszámolhatjuk (persze ez nem független az eddigiektől):

$$\begin{aligned} \sum_k \underline{F}_{km} \underline{F}_{kl} = \delta_{ml} &\Rightarrow \langle \underline{F} \underline{v} | \underline{F} \underline{w} \rangle = \sum_k (\underline{F} \underline{v})_k (\underline{F} \underline{w})_k = \sum_k \left(\sum_l \underline{F}_{kl} v_l \right) \left(\sum_m \underline{F}_{km} w_m \right) = \\ &= \sum_{k,l,m} \underline{F}_{kl} \underline{F}_{km} v_l w_m = \sum_{l,m} \left(\sum_k \underline{F}_{kl} \underline{F}_{km} \right) v_l w_m = \\ &= \sum_{l,m} \delta_{lm} v_l w_m = \sum_l v_l w_l = \langle \underline{v} | \underline{w} \rangle. \end{aligned}$$

Szavakban: ha egy mátrix transzponáltja az inverze, akkor ha ezt az operátort két vektorra hatatjuk, a skalárszorzataik ugyanannyi lesz, mint eredetileg volt. Éppen ezt tudják a forgatások.

- Az a feltétel, hogy az inverz épp a transzponált legyen, a determinánsra is jelent valamit:

$$\overline{\hat{F}}\hat{F} = \hat{I} \Rightarrow \det(\overline{\hat{F}}\hat{F}) = 1 \Rightarrow \det\overline{\hat{F}} \cdot \det\hat{F} = 1 \Rightarrow (\det\hat{F})^2 = 1 \Rightarrow \det\hat{F} = \pm 1,$$

hiszen a transzponált determinánsa ugyanannyi. Mármint azokat az operátorokat hívjuk *for-gatásnak*, amikre határozottan $\det\hat{F} = +1$. A -1 -es determinánsú ilyen operátorokra (amiket megkaphatjuk úgy, hogy egy $+1$ -es determinánsút a negatív identitással, $-\hat{I}$ -vel szorzunk) úgy szoktunk gondolni, hogy ők a forgatás mellett még egy *tükrözést* is tartalmaznak: a tükrözés művelete nyilván megfordítja az előjeles térfogat (a determináns) előjelét.

- Elnevezés: ha egy mátrixra $\hat{F}^{-1} = \overline{\hat{F}}$, akkor a mátrixot (kicsit idegesítő, de megszokott módon) **ortogonális mátrix** megjelöléssel látjuk el; ha ezen belül még $\det\hat{F} = 1$ (tehát nem -1), akkor **speciális ortogonális** mátrixszal van dolgunk. A (3×3) -as speciális ortogonális mátrixok halmaza jelben: $SO(3)$, ezek tehát a háromdimenziós forgatásoknak felelnek meg. (A 3-as nyilván a dimenziószámra utal.)

- Láttuk, hogy ha egy vektor komponensei az $\underline{v}$ számhármassba rendezettek, akkor ha egy vesszős koordináta-rendszerbe térünk át (aminek tengelyeit az $\hat{F}$ forgatás állítja elő az eredetiekből), akkor az új rendszerbeli $\underline{v}'$ komponensek:

$$\underline{v}' = \hat{F}^{-1}\underline{v} = \overline{\hat{F}}\underline{v}.$$

Mi a helyzet *mátrixok* transzformációjával? A kérdés: ha egy adott $\hat{A}$ operátort az eredeti koordináta-rendszerünkben egy $\underline{A}$ mátrix reprezentálja, akkor milyen $\underline{A}'$ mátrix reprezentálja *ugyanazt* az $\hat{A}$ operátort az elforgatott koordináta-rendszerben? Nyilván az a kritérium, hogy ha az eredeti operátor egy $\vec{v}$ vektorhoz egy $\vec{w}$ vektort rendel, akkor ez minden koordináta-rendszerben kifejezhető legyen, mint „mátrix-hat-vektorra” művelet.

$$\begin{array}{lll} \vec{v} \Leftrightarrow \underline{v}, & & \text{A művelet reprezentáltja: } \underline{w} = \underline{A}\underline{v}. \\ \vec{w} = \hat{A}\vec{v}. & \text{Reprezentálva: } & \underline{w} \Leftrightarrow \underline{w}, \\ \hat{A} \Leftrightarrow \underline{A}. & & \text{Szeretnénk, hogy legyen } \underline{w}' = \underline{A}'\underline{v}'. \end{array}$$

Ezt már dekódolni tudjuk, ízlésesen beszúrva az $\underline{I}$ egységmátrixot, ami ugye $\hat{F}\hat{F}^{-1}$ -gyel egyenlő:

$$\underline{w}' = \hat{F}^{-1}\underline{w} = \hat{F}^{-1}\underline{A}\underline{v} = \hat{F}^{-1}\underline{A}(\hat{F}\hat{F}^{-1})\underline{v} = \hat{F}^{-1}\underline{A}\hat{F}(\hat{F}^{-1})\underline{v} = (\hat{F}^{-1}\underline{A}\hat{F})\underline{v}'.$$

Vagyis ha az $\hat{A}$ operátort az eredeti rendszerben az $\underline{A}$ mátrix adta meg, akkor

$$\text{az elforgatott rendszerben } \hat{A}\text{-t reprezentáló mátrix: } \underline{A}' = \hat{F}^{-1}\underline{A}\hat{F}.$$

$$\text{Mivel } \hat{F} \text{ forgásmátrix, ezt más alakba is írhatjuk: } \underline{A}' = \overline{\hat{F}}\underline{A}\hat{F}.$$

- Jegyezzük meg, hogy két mátrix (vagy: operátor) szorzatára a transzponáltnál és az inverz-képzésnél „fordítva kell írni a tényezőket”. Az inverzre ezt az operátoros alakkal könnyű látni, a transzponáltra a mátrixossal is; most nem húzzuk ezzel az időt. Tehát:

$$\begin{array}{lll} \text{operátorokra felírva:} & (\hat{A}\hat{B})^{-1} = \hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1}, & \overline{\hat{A}\hat{B}} = \overline{\hat{B}} \cdot \overline{\hat{A}} \\ \text{vagy mátrixokkal írva:} & (\underline{A}\underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1}\underline{A}^{-1}, & \overline{\underline{A}\underline{B}} = \overline{\underline{B}} \cdot \overline{\underline{A}}. \end{array}$$

Ezek után persze hasonló igaz többszörös szorzatokra is:

$$\overline{\hat{A}\hat{B}\hat{C}} = \overline{\hat{C}} \cdot \overline{\hat{B}} \cdot \overline{\hat{A}}, \quad (\hat{A}\hat{B}\hat{C})^{-1} = \hat{C}^{-1}\hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1}, \quad \text{stb.}$$

Tudva ezeket, és hogy hogyan transzformálódnak a mátrixok, ha elforgatjuk a koordinátarendszert, néhány még elvarratlan szálát elvarrhatunk. $\underline{\underline{F}}$ a két koordinátarendszert összekötő forgásmátrixot jelöli; az alábbiakban néha ki kell használni, hogy ez tényleg forgatás (azaz: $\underline{\underline{F}}^{-1} = \overline{\underline{\underline{F}}}$), néha még ezt sem.

1. Mátrix **transzponáltjának elforgatottja** ugyanaz, mint az **elforgatott transzponáltja**:

$$(\underline{\underline{M}})' = \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{M}} \underline{\underline{F}} = \overline{\underline{\underline{F}} \underline{\underline{M}} \underline{\underline{F}}} = \overline{(\underline{\underline{F}} \underline{\underline{M}} \underline{\underline{F}})} = \overline{(\underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{M}} \underline{\underline{F}})} = \overline{(\underline{\underline{M}}')}, \quad \text{tényleg.}$$

2. Ebből (is) következik, hogy **szimmetrikus (vagy antiszimmetrikus)** mátrixot átírva az **elforgatott** koordinátarendszerbe a **kapott mátrix is** szimmetrikus (vagy antiszimmetrikus):

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{S}}' = \underline{\underline{S}}', \quad \underline{\underline{A}} = -\underline{\underline{A}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{A}}' = -\underline{\underline{A}}'.$$

A skalárszorozattal kapcsolatban láttuk, hogy a *transzponálás* fogalma értelmezhető mátrixra hivatkozás nélkül is; most megnyugodhatunk, hogy tényleg: a „szimmetrikusság” (vagy antiszimmetrikusság) ilyen ortogonális bázisokban magát az operátort jellemzi, nemcsak akármelyik mátrixát. Másképp: az eltranszformált (másik koordinátarendszerbe átírt) mátrix komponensei tők mások lesznek, de ha az eredeti mátrix (anti)szimmetrikus volt, akkor az elforgatott is az.

3. A determinánst úgy vezettük be, mint térfogattorzítási tényezőt. Nyilvánvalónak tűnik, hogy az „elforgatott” mátrixnak ugyanannyi a determinánsa (ha egyszer ugyanazt az operátort reprezentálja); most ezt konkrétan be is láthatjuk:

$$\det \underline{\underline{M}}' = \det(\underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{M}} \underline{\underline{F}}) = \det(\underline{\underline{F}}^{-1}) \cdot \det \underline{\underline{M}} \cdot \det \underline{\underline{F}} = \frac{1}{\det \underline{\underline{F}}} \cdot \det \underline{\underline{M}} \cdot \det \underline{\underline{F}} = \det \underline{\underline{M}}, \quad \text{tényleg.}$$

4. A nyomról (Tr) is beláthatjuk: az elforgatott mátrix nyoma ugyanannyi, mint az eredetie (noha a mátrix egyes komponensei nagyon mások lettek). A nyom ciklikusságára emlékezve:

$$\text{Tr}(\underline{\underline{M}}') = \text{Tr}(\underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{M}} \underline{\underline{F}}) = \text{Tr}(\underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{M}}) = \text{Tr} \underline{\underline{M}}, \quad \text{tényleg.}$$

5. Nyilvánvaló, de fontos, hogy az *egységoperátor mátrixa tényleg minden koordinátarendszerben az egységmátrix* („mindegy, melyik koordinátarendszerből nézve csináljuk a helybenhagyást”), sőt, az egységoperátor többszörösére is igaz ez:

$$(\alpha \underline{\underline{I}})' = \underline{\underline{F}}^{-1} (\alpha \underline{\underline{I}}) \underline{\underline{F}} = \alpha \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{F}} = \alpha \underline{\underline{I}}, \quad \text{tényleg.}$$

Összefoglalva: a nyom, a determináns (és ortogonális bázisok esetén azt is mondhattuk, hogy a szimmetrikusság/antiszimmetrikusság) magának az operátornak a tulajdonságai; ha egy ortogonális bázisban felírt mátrixára megállapítjuk ezeket, az akkor minden más (ortogonális) bázisban felírt mátrixra is érvényes, noha maguk a mátrixkomponensek igencsak „elkeveredhettek”.

• Eddig forgatásokról valós vektorterek kapcsán beszéltünk itt. Érdemes már most bevezetni **komplex vektorterek** esetén az analóg fogalmat. Eddig azt láttuk, hogy ha egy operátor inverze éppen a transzponáltja, akkor ő tekinthető forgatásnak (mert megőrzi a skalárszorzatokat; pont, mint ahogy egy forgatástól elvárjuk). Komplex vektortéren ható operátorra azt mondjuk, hogy **unitér**⁹², ha az inverze megegyezik az *adjungáltjával*.

⁹²Angolul: *unitary*; az *unit*-ből képzett melléknév angolosan-franciásan-latinosan jelenti azt, hogy „egység-szerű”.

Jelölésben:

$\mathbb{V}$ komplex vektortér. $\hat{U} \in \text{Lin}(\mathbb{V})$ **unitér**, ha $\hat{U}^{-1} = \hat{U}^+$, vagyis $\hat{U}^+ \hat{U} = \hat{I}$.

Másképp megfogalmazva: $\langle \hat{U}\vec{v} | \hat{U}\vec{w} \rangle = \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle$ minden $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}$ -re.

Felírtuk a követelménynek a *komplex* skalárszorzatra vonatkozó megfogalmazását is: unitér operátor (vagy mátrix) a *komplex* skalárszorzatot nem változtatja (hiszen: $\langle \hat{U}\vec{v} | \hat{U}\vec{w} \rangle = \langle \hat{U}^+ \hat{U} \vec{v} | \vec{w} \rangle$, és azt mondtuk, hogy legyen $\hat{U}^+ \hat{U} = \hat{I}$).

Az egységoperátor (egységmátrix) természetesen unitér. Egy példa (a végtelen sok közül) kicsit „összetettebb” unitér mátrixra (2×2 -es, azaz kétdimenziós vektortéren ható mátrixok közül):

$$\underline{\underline{U}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3}+i & 1+i \\ -1+i & \sqrt{3}-i \end{pmatrix} \quad \text{unitér.} \quad \text{Hiszen: } \underline{\underline{U}}^+ = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3}-i & -1-i \\ 1-i & \sqrt{3}+i \end{pmatrix},$$

és tényleg (ellenőrizzük!): $\underline{\underline{U}}^+ \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{I}}$.

Valós ortogonális mátrix (vagyis: forgásoperátor) ugye a valós skalárszorzatot „hagyta békén”. Természetesen ha csupa valós számokból álló mátrixra követeljük meg, hogy unitér legyen (ekkor ugye az adjungált nem jelent semmi többet a transzponálnál), akkor éppen az ortogonális mátrix fogalmát kapjuk vissza, ami ugye valós vektortérben ható forgatásnak tekinthető.

7.6. Főtengely-transzformáció

Összerakjuk a két előző szakaszt, hogy szimmetrikus (vagy komplex esetben: önadjungált) operátorok sajátérték-problémáját tovább fejtegetjük. Most is a háromdimenziós térben mozgunk.

• Adott $\underline{\underline{A}}$ szimmetrikus mátrixnak biztosan van három valós sajátértéke: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, amik közül esetleg kettő vagy három egybeesik. Vannak hozzájuk tartozó sajátvektorok is: $\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}, \underline{v}^{(3)}$. Láttuk, hogy vehetjük úgy, hogy ezek merőlegesek. (Ha a sajátértékek mind különbözőek, akkor eleve azoknak adódtak, ha nem, akkor választhattunk olyanokat; emlékezzünk.) Még azt is kiköthetjük (azaz: mindezek után még megválaszthatjuk a $\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}, \underline{v}^{(3)}$ vektorokat úgy), hogy egységnyi hosszúak legyenek.

Forgatással **áttérhetünk abba a koordinátarendszerbe**, ahol ezek a (merőleges, és most már egységnyi hosszúnak választott) $\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}, \underline{v}^{(3)}$ **sajátvektorok a bázisvektorok**. Milyen lesz az $\underline{\underline{A}}$ mátrix alakja, $\underline{\underline{A'}}$ ebben az új koordinátarendszerben?

Az alábbi jelölésben a sajátvektorokat megkülönböztető indexeket zárójelbe teszem, és hol alulra, hol fölüre írom: most ennek nincs jelentősége. Viszont kelleni fognak a komponenseik is (az eredeti bázisban), ekkor a komponens-indexeket alulra írom, a magukat a sajátvektorokat megkülönböztető indexeket pedig zárójelbe, fölüre.

Mivel a sajátvektorok kifeszítik a teret), bármilyen $\vec{a}$ vektor kifejezhető, mint a sajátvektorok lineáris kombinációja, emiatt az $\underline{\underline{A}}$ mátrixnak megfelelő $\hat{A}$ operátor hatását könnyen felírhatjuk (hiszen minden $\vec{v}_{(k)}$ vektoron az $\hat{A}$ felveszi a λ_k sajátértéket):

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{v}_{(1)} + \alpha_2 \vec{v}_{(2)} + \alpha_3 \vec{v}_{(3)} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \hat{A}\vec{a} &= \alpha_1 \hat{A}\vec{v}_{(1)} + \alpha_2 \hat{A}\vec{v}_{(2)} + \alpha_3 \hat{A}\vec{v}_{(3)} = \\ &= (\lambda_1 \alpha_1) \vec{v}_{(1)} + (\lambda_2 \alpha_2) \vec{v}_{(2)} + (\lambda_3 \alpha_3) \vec{v}_{(3)}. \end{aligned}$$

Az $\vec{a}$ vektor új, a sajátvektorokból bázis szerinti „komponenseit” tehát (most ezeket α -kkal jelöltem ideiglenesen) a $\hat{A}$ operátor egyszerűen a megfelelő λ -szorosára cseréli. Így tehát a szimmetrikus

$\hat{A}$ operátornak a sajátvektoraiból álló bázisban felírt $\underline{\underline{A'}}$ mátrixa **diagonális** lesz, azaz csak **a főátlóban** lesznek nemnulla elemek, méghozzá éppen **a sajátértékek**⁹³.

- Konkrétan összefoglalva:

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} \Rightarrow \begin{array}{l} \underline{\underline{A}} \underline{v}^{(1)} = \lambda_1 \underline{v}^{(1)}, \\ \underline{\underline{A}} \underline{v}^{(2)} = \lambda_1 \underline{v}^{(2)}, \\ \underline{\underline{A}} \underline{v}^{(3)} = \lambda_1 \underline{v}^{(3)}. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{A nekünk kellő } \underline{\underline{F}} \\ \text{forgásmátrix alakja:} \end{array} \quad \underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} v_1^{(1)} & v_1^{(2)} & v_1^{(3)} \\ v_2^{(1)} & v_2^{(2)} & v_2^{(3)} \\ v_3^{(1)} & v_3^{(2)} & v_3^{(3)} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{l} \text{A sajátvektorokból álló} \\ \text{bázisban } \underline{\underline{A'}} \text{ alakja:} \end{array} \quad \underline{\underline{A'}} = \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{F}}. \quad \text{Ez diagonális lesz: } \underline{\underline{A'}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

- Néhány általános megjegyzést érdemes még tenni:

1. Láttuk korábban, hogy 3×3 -as *antiszimmetrikus* mátrixot (mint „műveletet”) úgy képzelhetünk, hogy az tulajdonképpen egy megfelelő vektorral való vektoriális szorzás művelete. Most azt látjuk, hogy *szimmetrikus* mátrixot mint műveletet is magunk elé tudunk vizionálni: egy ilyen mátrixnak megfelelő operátor „azt csinálja”, hogy van három egymásra merőleges irányú egyenes (a sajátalterek), amik mentén nyújt-összenyom, mindegyik irányban a megfelelő λ sajátérték-szeresére. Ha netán a mátrix maga diagonális, akkor ezek az irányok ugye megegyeznek magukkal a koordinátatengelyekkel (azokkal, amelyek bázisban a mátrixot felírtuk).
2. A **determinánsra** ezek után gondolhatunk úgy (szimmetrikus mátrixokra biztos, de kiderül: nemcsak szimmetrikusokra), minthogy az éppen **a sajátértékek szorzata**. Ha $\det \underline{\underline{M}} = 0$, akkor van (legalább egy) nulla sajátérték: tényleg, ekkor a térfogattorzító arány nulla, azaz legalább egy irányban „kilapítás”-ról van szó.
3. Hasznos, ha a nyom (Tr) fogalmára is úgy gondolunk ezután (mivel az minden bázisban, speciálisan a sajátértékekből álló bázisban is ugyanannyi), hogy egy mátrix **nyoma** tulajdonképpen **a sajátértékeinek az összege**.

* * *

Egypéldán most végigcsináljuk ezt a folyamatot: adott szimmetrikus mátrixra megkeressük a **diagonális alakot**, azaz: sajátértékeket, sajátvektorokat, és azt a forgatást is, ami átforgat a sajátvektorokból álló bázisba.

- Adott az alábbi 3×3 -as $\underline{\underline{M}}$ mátrix, gyúrjuk végig:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{A sajátérték-egyenlet } 3 \times 3\text{-as mátrixra:} \\ \lambda^3 - (\text{Tr } \underline{\underline{M}}) \lambda^2 + (\text{Tr adj } \underline{\underline{M}}) \lambda - \det \underline{\underline{M}} = 0. \\ \text{Kieértékelve az együtthatókat:} \\ \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Némi próbálgatással:} \\ \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2. \end{array}$$

⁹³Egy esetleg tisztázó megjegyzés: nem szimmetrikus mátrix sajátvektorai is kifeszíthetik a teret; ekkor azok szerint is minden vektor kifejtethető, az iménti felírás is működhetne. Ami a szimmetrikusakat „kiemeli”, az az, hogy itt és csak itt lesznek még emellett ortogonálisak is a sajátvektorok: nem szimmetrikus bázishoz nem választhatunk olyan *ortogonális* bázist, ahol a bázisvektorok a sajátvektorok.

Következő feladat: megkeresni a megfelelő sajátvektorokat, jelük most: $\underline{v}^{(1)}$, $\underline{v}^{(2)}$, $\underline{v}^{(3)}$.

$$(\underline{M} - \lambda_1 \underline{I}) \underline{v}^{(1)} = \underline{0}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{v}^{(1)} \propto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{v}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

rögtön Gauss-eliminációs alakba írva:

Persze volt nemtriviális megoldás (a sorok lineárisan összefüggtek); ugyanígy lesz a másik kettőre:

$$(\underline{M} - \lambda_2 \underline{I}) \underline{v}^{(2)} = \underline{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{v}^{(2)} \propto \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{v}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(\underline{M} - \lambda_3 \underline{I}) \underline{v}^{(3)} = \underline{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{v}^{(3)} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{v}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Közben még „normáltuk” is a sajátvektorokat (azaz: olyan számmal szoroztuk, hogy egységnyi hosszúak legyenek). Még annyi trükk volt, hogy $\underline{v}^{(1)}$, $\underline{v}^{(2)}$, $\underline{v}^{(3)}$ ilyen sorrendben legyen jobbsodrású rendszer: ha az egyik kijött vektor helyett a -1 -szeresét vettük volna (vagy esetleg nem pont ilyen sorrendben számoltuk volna a sajátértékeket, hanem „páratlanul permutálva”), akkor ez nem lett volna igaz; most így csináltuk.

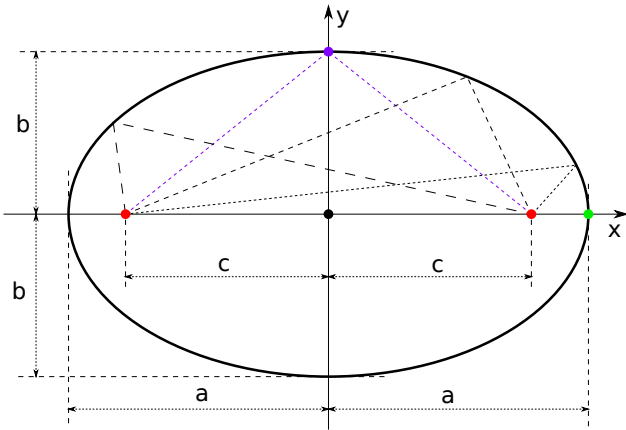
Így viszont tényleg „tükrözésmentes” (egységnyi determinánsú) lesz a megfelelő forgásmátrix (a sajátvektorok komponenseiből összetéve), és azzal tényleg előállítódik a mátrixunk diagonális alakja (ellenőrizzük le ezeket mátrixszorzással, hogy tényleg igazak!):

$$\underline{F} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \text{erre tényleg } \underline{F} \underline{F} = \underline{I}, \text{ és } \det \underline{F} = 1. \quad \underline{M}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Továbbá az eredeti mátrix diagonális alakja, $\underline{M}' := \underline{F}^{-1} \underline{M} \underline{F} = \underline{F} \underline{M} \underline{F}$:

7.7. Alkalmazás: kúpszeletek általános egyenletei

A sajátérték-probléma egyik egyszerű síkgeometriai alkalmazása a kúpszeletek (ellipszis, hiperbola, parabola) általános, azaz eltolt, *elforgatott*, stb. helyzetben való egyenleteinek lehetséges alakjainak osztályozása. Először felidézünk a kúpszeleteket.



16. ábra. Ellipszis egyszerű rajza.

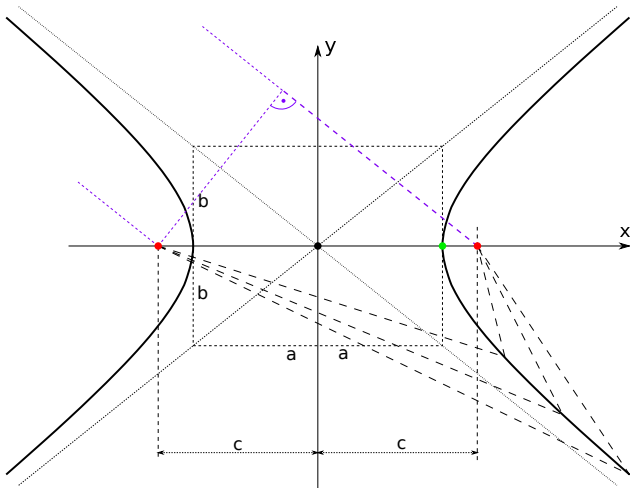
Ellipszis: a kör merőleges irányokban „nyújtott” változata. Ebből a *kanonikus egyenlete*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad \begin{array}{ll} a: \text{„nagy tengely”,} \\ b: \text{„kis tengely” (ha } b < a). \end{array}$$

• Másik definíció: azon pontok mértani helye a síkon, amelyeknek két adott ponttól (a *fókuszpontoktól*, az ábrán piros) való távolságösszege állandó (az ábrán néhány jelölve).

A nagy tengelyen lévő (zöld) ill. a kis tengelyen lévő (lila) pontokból kigondolható:

$$\begin{array}{l} \text{A távolságösszeg: } 2a, \\ \text{A fókuszpontok helye: } c = \sqrt{a^2 - b^2}. \end{array}$$



17. ábra. Hiperbola egyszerű rajza.

Hiperbola: kétágú görbe. *Kanonikus egyenlete*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

a : „valós tengely”,

b : „képzetes tengely”.

Lehet $a < b$ és $a > b$ is.

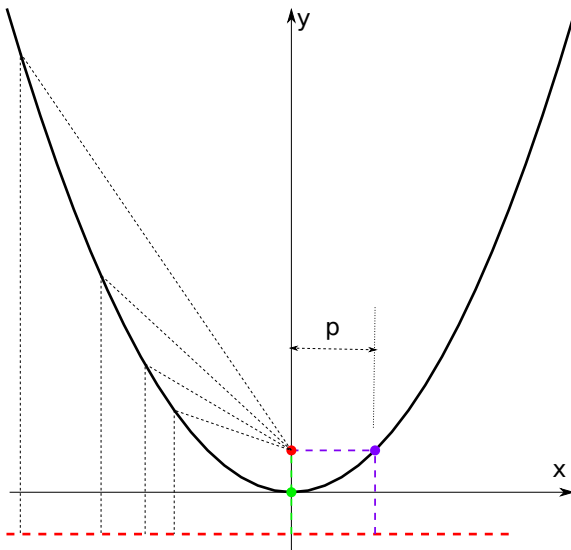
Az egyenesek, amikhez simul: az *aszimptoták*.

• A hiperbola pontjainak két adott *fókuszponttól* (piros) vett *távolságkülönbsége* állandó.

A nagytengelyen lévő (zöld) pontból ill. a „végtelen messze lévő” pontból (ld. lila vonalak):

A távolságkülönbség: $2a$,

A fókuszpontok helye: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.



18. ábra. Parabola egyszerű rajza.

Parabola: egyágú görbe. Legegyszerűbb egyenlete, ha az y tengely irányába „nyitott”:

$$y = \alpha x^2. \quad p \equiv \frac{1}{2\alpha} \quad \text{a „paraméter”}.$$

Az α „mértékegysége” reciprok hosszúság, pl. $1/\text{m}$.

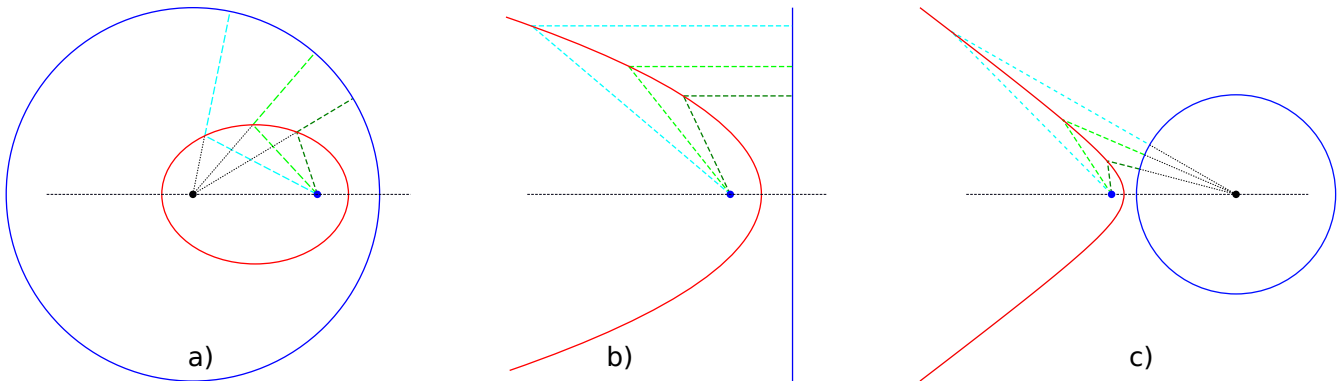
• A parabola pontjai egy adott *fókuszponttól* (piros) és egy adott *vezéregyenesről* (piros) egyenlő távolságra vannak. A fókuszpont és a vezérvonal távolsága a parabola p *paramétere*; a csúcspontra (zöld) és a fókuszról a vezéregyenessel párhuzamos irányban fekvő pontra (lila) felírva az iménti feltételt (és $x=p$ -t az egyenletbe írva) kijön az α -val megadott értéke. A parabolának nincs aszimptotája; az origón átmenő egyeneseket (az y tengelyt kivéve) kétszer metszi.

• Mindenkiről felteszem, hogy le tudja vezetni azt, hogy a megadott „mértani helyes” definíciókból (a megadott pontokat/egyeneseket a koordináta-rendszerben megfelelő helyekre téve) tényleg kijönnek a görbék felírt egyenletei. Az ellipszisnek, hiperbolának, parabolának számtalan érdekes tulajdonsága van még; „kiegészítés”képpen néhányat most előveszünk.

• A geometriai definíciók mintha igazságtalanok lennének a parabolával, ahol egyenlő távolságot (és nem távolságösszeget/különbséget) követeltünk meg; az ő javára billen a mérleg, ha az ellipszis és a hiperbola definícióját is átfogalmazzuk, hogy „egyenlő távolság” követelményére hivatkozzanak. Ha adott egy kör és egy pont a síkon (a kör közepe lesz az egyik fókuszpont, az adott pont a másik), akkor könnyű látni, hogy azon pontok helye, amelyek egyenlő távol vannak *a körtől és a ponttól*, ellipszist adnak (ha a pont a körön belül van), és hiperbolát (ha kívül), hiszen az adott kör sugara fogja itt a távolságösszeget/különbséget jelenteni⁹⁴. A parabola pedig az a határeset,

⁹⁴Ha a körön kívüli pontoknak a „körtől vett távolsága” lehet a kör *távolabbi szélének* a távolsága is, nemcsak a közelebbié, akkor a hiperbolára most megadott definíció a hiperbola mindkét ágát kiadja.

amikor a kör „végtelen nagy sugárral” kiegyenesedett⁹⁵.



19. ábra. Egységes meghatározás: ellipszis (a), parabola (b) és hiperbola (c), mint egy ponttól (kék) és egy körtől (kék) egyenlő távolságra lévő pontok halmaza. A parabola a „végtelen nagy sugarú kör”, azaz az egyenes esetén valósul meg.

- A „fókuszálási” tulajdonságok ismertek lehetnek (és az előző definíciókból már-már elemi geometriai módszerekkel levezethetők; most ezzel nem foglalkozunk). A parabola a legismertebb (ld. parabola-antenna): a tengely irányából jövő egyenes sugarakat a fókuszpontba *fókuszálja*. Az ellipszis az egyik fókuszpontból a másikba „veri vissza” az egyenes sugarakat. A hiperbola adott pontbeli íve pedig szögfelezője az onnan a két fókuszpontba menő szakaszok bezárt szögének.

- Előkerül időnként az **excentricitás**, ε fogalma:

$$\varepsilon := \frac{c}{a}.$$

Ellipszisre: $0 \leq \varepsilon < 1$. (Hiszen $c < a$; körre $\varepsilon = 0$).
 Parabolára: $\varepsilon = 1$. („Az ellipszis egyik fókusza a végtelenbe távozott”).
 Hiperbolára: $\varepsilon > 1$. (Hiszen $c > a$.)

- Végül: azért hívják az ellipszist, parabolát és hiperbolát *kúpszeleteknek*, mert tényleg: egy (két-irányú) kúpfelületet (ami egy metsző egyenespárnak a szögfelezője körül való forgatottja) különféle síkokkal elmetszve ellipszist, parabolát ill. hiperbolát kaphatunk.

* * * *

- Ennyi mellébeszélés után rátérhetünk a szakasz tulajdonképpeni témájára. Vizsgáljuk az x - y koordinátákkal bevonalkázott síkon a következő típusú egyenletet (ún. kvadratikussá alakítható):

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma xy + Ax + By + K = 0, \quad (*) \quad (7.1)$$

ahol α , β , γ , A , B és K (egyelőre akármilyen) adott valós számok. A γ -s tagot azért írtam így (a kettes szorzóval, és nem a 2γ -t hívtam valami „egy betűvel”), mert így lesz kényelmes később.

Keressük azon pontok mértani helyét (és további jellemzőit), amelyek x és y koordinátái kielégítik ezt az egyenletet. **Ha** $\alpha = \beta = \gamma = 0$, **akkor** a másodfokú tagok mind eltűnnek; ami marad, az egy **egyenes** egyenlete. Ez most nem érdekel minket; feltesszük tehát, hogy α , β és γ közül legalább az egyik nem nulla.

- Állítás: ebben az esetben az egyenlet **kúpszeletet határoz meg**: ellipszist, hiperbolát, pa-

⁹⁵„Műhelytitok” a ?? ábráról, ahol ezt illusztrálom: a programot, amivel rajzoltam, nem bírtam rávenni, hogy parabolát rajzoljon. A „parabola”, amit láttok, egy igen-igen messzi másik fókuszpontú ellipszis íve igazából. :D

rabolát. Időnként, a paraméterek speciális választása esetén lehet, hogy egyenespárt kapunk (ez a hiperbola „elfajult esete”, amikor az aszimptotákat fixen tartva a fókuszpontokat „benyomjuk a sarokba”; ekkor a hiperbola átmegy az aszimptotáiba). Az is lehet, hogy csak egy pont a megoldás (ez az ellipszis határeset, amikor „ráhúzzuk az origóra”. Az is lehet persze, hogy nincs egy megoldás sem. Ezek között az esetek között szeretnénk most „rendet tenni”.

• Első lépésként észrevehetjük, hogy az egyenletet át lehet írni mátrixos-vektoros alakba. Először is, egy pont x, y koordinátáját lehet kétdimenziós helyvektorként, $\underline{x}$ -ként azonosítani. Az adott A és B számok is egy kétdimenziós $\underline{A}$ vektor komponenseinek tekinthetők, az α, β, γ számok pedig egy 2×2 -es szimmetrikus mátrix komponensei lehetnek. Így a fenti egyenlet így írható:

$$\underline{x} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \underline{A} \equiv \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \quad \underline{M} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} \Rightarrow (*) \Leftrightarrow \underline{x} \underline{M} \underline{x} + \underline{A} \underline{x} + K = 0.$$

Az $\underline{A} \underline{x}$ jelölést természetesen számoszlopok „skalárszorzatát” jelöli: ez éppen az $Ax + By$ tag. Az $\underline{x} \underline{M} \underline{x}$ jelölés értelme: az $\underline{M}$ mátrix hat az $\underline{x}$ számoszlopra, és amit eredményül kapunk, azt „skalárszorozzuk” az $\underline{x}$ számoszloppal. Sokszor szoktunk hasonló kifejezéseket így jelölni: $\underline{x} \underline{A}_1 \underline{A}_2 \dots \underline{A}_n \underline{y}$ azt jelenti, hogy mind a mátrixok (egyás után, ahogy kell) hatnak a jobb oldali $\underline{y}$ számoszlopra (vektorra), és amit kapunk, azt megskalárszorozzuk az $\underline{x}$ vektorral („utoljára”). Ellenőrizzük, hogy a mátrix-vektoros iménti képlet tényleg megegyezik a fentebbi „kifejtett” alakkal!

Egy szó még arról, hogy miért „kellett” $\underline{M}$ -nek szimmetrikusnak lennie: ha $\underline{M}$ helyébe $\underline{M} + \underline{A}$ -t íránk, ahol $\underline{A}$ -ról tudjuk, hogy antiszimmetrikus mátrix, könnyen beláthatjuk, hogy mivel $\underline{x} \underline{A} \underline{x} = 0$ (lássuk ezt be!!!), emiatt $\underline{x} \underline{M} \underline{x} = \underline{x} (\underline{M} + \underline{A}) \underline{x}$. Visszafelé következtetve: sokféle mátrixot beírhatnánk a két $\underline{x}$ vektor „közé”, hogy reprodukáljuk $\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma xy$ -t, de ezek közül érdemes a szimmetrikusat választani: ez éppen a fenti $\underline{M}$ mátrix.

• Következő észrevétel: a szimmetrikus $\underline{M}$ mátrixnak biztosan van két sajátértéke, és két ortogonális sajátvektora. Van továbbá egy olyan $\underline{F}$ kétdimenziós forgatásmátrix, amivel át lehet térni abba a bázisba, ahol $\underline{M}$ diagonális. Ezeket egy adott $\underline{M}$ mátrixra (vagyis: adott α, β, γ számokra) meg lehet ezeket határozni; vegyük úgy, hogy most megtettük ezt. Tehát létezik

$$\underline{F} \text{ forgatás, amivel } \underline{M}' \equiv \underline{F}^{-1} \underline{M} \underline{F} \text{ diagonális lesz.}$$

Az x - y síkon bevezethetjük az $\underline{F}$ -fel elforgatott koordinátatengelyeket, az ebben a koordináta-rendszerben mért koordináták jele legyen x' és y' , összerakva: az $\underline{x}'$ számkettes. Az egyenletünket átírhatjuk ebbe az elforgatott koordináta-rendszerbe:

$$\begin{aligned} \underline{x} \underline{M} \underline{x} + \underline{A} \underline{x} + K &= 0 \\ \Rightarrow \underline{x} \underline{F} \underline{F}^{-1} \underline{M} \underline{F} \underline{F}^{-1} \underline{x} + \underline{A} \underline{F} \underline{F}^{-1} \underline{x} + K &= 0 \quad \text{ahol } \underline{x}' \equiv \underline{F}^{-1} \underline{x}, \quad \underline{A}' \equiv \underline{F}^{-1} \underline{A} \underline{F}. \\ \Rightarrow \underline{x}' \underline{M}' \underline{x}' + \underline{A}' \underline{x}' + K &= 0, \end{aligned}$$

Közben már rutinszerűen kihasználtuk, hogy $\underline{F}^{-1} = \overline{\underline{F}}$. Azt is megfigyelhetjük, hogy a számoszlopok skalárszorzatában skalárszorzatban a transzponálttal tényleg át lehet hárítani a másik „tényezőre” az operátor hatását.

• A vesszős, elforgatott koordináta-rendszerben viszont $\underline{M}'$ diagonális, az átlóban a $\lambda_{1,2}$ sajátértékekkel. Az $\underline{A}'$ kapott (elforgatott) vektor komponenseit is „kijelölhetjük”, így az előző egyenletet

így is írhatjuk:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + A'x' + B'y' + K = 0, \quad \text{ahol} \quad \underline{\underline{M'}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \text{és} \quad \underline{A'} \equiv \begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix}.$$

Mármost meg kell vizsgálni a különböző lehetőségeket annak megfelelően, hogy a λ_1 , λ_2 sajátértékek pozitívak, negatívak, vagy nullák.

1. Lehet-e mindkét sajátérték nulla? Ekkor az $\underline{\underline{M'}}$ mátrix igazából az azonosan nulla mátrix, azaz a „nullaoperátor”, ami minden vektorhoz (itt most: szám-ketteshez, $\underline{x}$ -hez) nullát rendel; ekkor az eredeti $\underline{\underline{M}}$ is az lett volna, azaz nem is lettek volna másodfokú tagok. Ezt az elején megtiltottuk.
2. Ha mindkét sajátérték pozitív, akkor *teljes négyzetté alakíthatunk*:

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 \left(x' + \frac{A'}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{B'}{2\lambda_2} \right)^2 + K - \frac{A'^2}{4\lambda_1} - \frac{B'^2}{4\lambda_2} = 0.$$

Mármost az így előkerült utolsó tagokat összeolvasztva elnevezhetjük K'' -nek, és *eltolhatjuk a koordinátarendszert*, az x'' és y'' új változók bevezetésével:

$$K'' \equiv K - \frac{A'^2}{4\lambda_1} - \frac{B'^2}{4\lambda_2}, \quad x'' \equiv x' + \frac{A'}{2\lambda_1}, \quad y'' \equiv y' + \frac{B'}{2\lambda_2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + K'' = 0.$$

Mivel λ_1 és λ_2 is pozitív, most látszik, hogy többféle lehetőség van:

- (a) Ha $K'' > 0$, akkor nyilván nincs megoldás: csupa pozitív szám összege nem lehet nulla.
- (b) Ha $K'' = 0$, akkor pontosan egy megoldás van: ez az $x'' = 0$, $y'' = 0$ pont. Ez egy határozott x , y koordinátát is jelent: ott már (az esetleges eltolás és elforgatás miatt) ez általában egyáltalán nem az origó-pont lesz persze!
- (c) Végül, ha $K'' < 0$, akkor az egyenlet egészen egy ellipszisre emlékeztet. Valóban, átrendezve (és a K'' abszolútértékét jelölésben használva):

$$\frac{x''^2}{|K''|/\lambda_1} + \frac{y''^2}{|K''|/\lambda_2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1, \quad \text{ahol} \quad \begin{aligned} a &\equiv \sqrt{|K''|/\lambda_1}, \\ b &\equiv \sqrt{|K''|/\lambda_2}. \end{aligned}$$

Ebben az esetben tehát egy ellipszist kaptunk; a tengelyek nagyságát ezek a képletek határozzák meg az eredeti számaink segítségével, „áttételese”.

3. Ha mindkét sajátérték negatív, az egész egyenletet megszorozhatjuk -1 -gyel, és akkor mindent elmondhatunk (csak -1 -szeresére cserélve), amit az előző bekezdésben.

Összefoglalva: **ha a sajátértékek nem nullák és azonos előjelűek**, akkor az egyenlet leírhat **ellipszist**, pontot, vagy „semmit”. Az ellipszis szükséges elforgatását és eltolását az $\underline{\underline{M}}$ mátrix sajátérték-problémáját megoldva ill. a teljes négyzetté alakítás közben állapíthatjuk meg.

4. Ha az egyik sajátérték pozitív, a másik negatív, akkor (mivel úgy „számozzuk” őket, ahogy akarjuk) vehetjük úgy, hogy $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Ekkor megint teljes négyzetté alakítva, és λ_2 helyett abszolútértékét használva (ugye $\lambda_2 = -|\lambda_2|$):

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 \left(x' + \frac{A'}{2\lambda_1} \right)^2 - |\lambda_2| \left(y' - \frac{B'}{2|\lambda_2|} \right)^2 + K - \frac{A'^2}{4\lambda_1} + \frac{B'^2}{4|\lambda_2|} = 0.$$

Itt is eltolhatunk és K -t átjelölhetjük, hogy megkapjuk a következő alakot:

$$x'' \equiv x' + \frac{A'}{2\lambda_1}, \quad y'' \equiv y' - \frac{B'}{2|\lambda_2|}, \quad \tilde{K}'' = K - \frac{A'^2}{4\lambda_1} + \frac{B'^2}{4|\lambda_2|} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 x''^2 - |\lambda_2| y''^2 + \tilde{K}'' = 0.$$

Akármilyen $\tilde{K}''$ esetén van megoldás; kellemesen átalakítgatva a különböző esetekben:

Ha $\tilde{K}'' < 0$:	Ha $\tilde{K}'' = 0$:	Ha $\tilde{K}'' > 0$:
$\frac{x''^2}{ \tilde{K}'' /\lambda_1} - \frac{y''^2}{ \tilde{K}'' / \lambda_2 } = 1$	$\lambda_1 x''^2 = \lambda_2 y''^2$	$\frac{y''^2}{\tilde{K}''/ \lambda_2 } - \frac{x''^2}{\tilde{K}''/\lambda_1} = 1$
Jelölés: $a \equiv \sqrt{ \tilde{K}'' /\lambda_1},$ $b \equiv \sqrt{ \tilde{K}'' / \lambda_2 },$	$\Downarrow$	Jelölés: $a \equiv \sqrt{\tilde{K}''/\lambda_1},$ $b \equiv \sqrt{\tilde{K}''/ \lambda_2 },$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1$	$\sqrt{\lambda_1} x'' = \pm \sqrt{ \lambda_2 } y''$	$\frac{y''^2}{b^2} - \frac{x''^2}{a^2} = 1$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
hiperbola, x'' a valós tengely	egyenespár („elfajult hiperbola”)	hiperbola, y'' a valós tengely

Tehát **ha a sajátértékek különböző előjelűek, hiperbolát** vagy egyenespárt kapunk.

5. Ha most egyik sajátérték nulla, vehetjük úgy, hogy λ_1 az, a másikat, λ_2 -t pedig vehetjük pozitívnak, mert ha negatív lenne, az egész egyenletet -1 -gyel szorozva már az elején λ_2 pozitívba váltana. Tehát most $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$, az egyenletben pedig csak az egyik tagban lehet teljes négyzetté alakítani:

$$\lambda_2 y'^2 + A'x' + B'y' + K = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 \left(y' + \frac{B'}{2\lambda_2} \right)^2 + A'x' + K - \frac{B'^2}{4\lambda_2} = 0.$$

Ha $A' = 0$, akkor vagy y' egy konstans lehet (ami egy egyenesnek felel meg), vagy nincs is megoldás. Ha $A' \neq 0$, parabolát kapunk, ami az x' tengely irányába vagy azzal ellentétes irányba nyitott, ha $A' > 0$ vagy $A' < 0$. Ellenőrizzük az átalakítást:

$$y'' \equiv y' + \frac{B'}{2\lambda_2}, \quad x'' = x' + \frac{\lambda_2 K - B'^2}{A'} \quad \Rightarrow \quad y''^2 = \frac{A'}{\lambda_2} x''.$$

Az utolsó alakról látszik, hogy tényleg paraboláról van szó: az eredeti síkunkon akár eltolva, elforgatva.

Befejeztük a fentebbi kvadratikus (7.1) egyenlet vizsgálatát: ellipszis (vagy pont, vagy semmi) adódik, ha a sajátértékek azonos előjelűek, parabola (vagy egyenes, vagy semmi) adódik, ha egyik sajátérték nulla, hiperbola (vagy egyenespár) adódik, ha a sajátértékek különböző előjelűek.

7.8. Operátorok projektorfelbontása, mátrixfüggvények

Most operátorok projektorfelbontását csak szimmetrikus mátrixokra beszéljük meg, de lehet (majd később) általánosítani nem szimmetrikusakra is. Az egyszerűség kedvéért most is háromdimenziós

térben dolgozunk, de könnyen lehet mindent általánosítani akárhány dimenziósra is.

- Ennek a fejezetben utolsónak érintett témakörnek két motivációja is lehet:

1) Adott szimmetrikus $\underline{A}$ mátrixra (vagyis $\hat{A}$ operátorra) meghatározhatjuk ennek $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sajátértékeit ill. a megfelelő $\vec{v}_{(1)}, \vec{v}_{(2)}, \vec{v}_{(3)}$ sajátvektorokat. Felmerül a fordított kérdés is: **adott sajátértékek és sajátvektorok esetén mi az az $\hat{A}$ operátor**, aminek éppen ezek a sajátjai⁹⁶?

2) A fenti kérdés megválaszolása bevezeti a mátrixok (ill. operátorok) *projektorfelbontásának* fogalmát. Ez jó lesz arra, hogy bonyolultabb dolgokat is kényelmesen el tudjuk végezni operátorokkal. Adott $\underline{A}$ mátrixra az $\underline{A}^2$ mátrixon az $\underline{A}\underline{A}$ szorzatot értjük, $\underline{A}^3$ is értelmes, stb. Ezeket mátrixszorzással kiszámíthatjuk, de pl. $\underline{A}^{1000}$ már elég durva lenne. Van olyan problémakör, ahol ki kell számítani egy mátrix akármilyen hatványát kényelmesen. Sőt, olyan is lesz, hogy egy $\underline{M}$ mátrix bonyolultabb *függvényeit* ($\exp(\underline{M})$, $\sin(\underline{M})$, $\cos(\underline{M})$, $\sqrt{\underline{M}}$, stb.) is ki akarnánk számítani — már amennyiben egyáltalán értelmesek ezek. Erre is kapunk most útmutatót.

- Válaszoljuk meg tehát az első kérdést. Ugye ha a keresett $\underline{A}$ szimmetrikus, annyit biztosan tudunk, hogy a sajátértékek valósak, és a sajátvektorok ortogonálisak:

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}, \quad \langle \vec{v}_{(1)} | \vec{v}_{(2)} \rangle = \langle \vec{v}_{(1)} | \vec{v}_{(3)} \rangle = \langle \vec{v}_{(2)} | \vec{v}_{(3)} \rangle = 0.$$

Ilyeneket kell tehát megadnia annak, aki azt szeretné, hogy „visszafejtjük” neki az $\underline{A}$ mátrixot. A sajátvektorok hosszai még nem eldöntöttek: mindenesetre választhatjuk őket egységnyi hosszúnak (ha netán a megadott vektorok nem azok lettek volna, akkor visszaoszthatjuk őket a hosszukkal). A következőkben tehát feltesszük, hogy

$$\begin{array}{ll} \text{Adottak } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ számok} & \text{amikre } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}, \text{ és } \langle \vec{v}_{(k)} | \vec{v}_{(l)} \rangle = \delta_{kl}, \\ \text{és } \vec{v}_{(1)}, \vec{v}_{(2)}, \vec{v}_{(3)} \text{ vektorok,} & \end{array}$$

A Kronecker-deltával kényelmesen egyszerre felírhattuk ugye azt, hogy a sajátvektorok ortogonálisak (ennek így kell lennie), és egységnyi hosszúak (ezt mi biztosítottuk róluk, ha kellett).

- **Keressük tehát az $\underline{A}$ mátrixot**, aminek éppen ezek a sajátjai. A következő állítás (ami egyúttal a válasz is) előtt idézzük fel az adott $\vec{n}$ irányba vetítő projektor fogalmát:

$$\text{Az } \vec{n} \text{ irányba vetítő projektoroperátor: } \hat{P}_{\vec{n}, \vec{n}} = \vec{n} \circ \vec{n}, \quad \text{ha } \vec{n} \text{ egységvektor, } |\vec{n}| = 1.$$

Arra is szükség lesz, hogy egy ilyen projektoroperátor *mátrixát* megadjuk, ha adott az $\vec{n}$ vektor az $\underline{n}$ komponensekkel. Általánosabban, diadikus szorzatra is igaz az (gondoljuk csak ki a diadikus szorzat hatását egy vektorra!), hogy

$$\hat{O} = \vec{a} \circ \vec{b} \Leftrightarrow (\underline{O})_{kl} = a_k b_l. \quad \text{Ebből speciálisan: } (\vec{n} \circ \vec{n})_{kl} = n_k n_l.$$

- Ezek után tehát a kérdésünk válasza a következő állításban van:

$$\begin{array}{ll} \text{Állítás:} & \hat{A} = \lambda_1 \hat{P}_{(1)} + \lambda_2 \hat{P}_{(2)} + \lambda_3 \hat{P}_{(3)}, \quad \text{ahol} \quad \begin{array}{l} \hat{P}_{(1)} = \vec{v}_{(1)} \circ \vec{v}_{(1)}, \\ \hat{P}_{(2)} = \vec{v}_{(2)} \circ \vec{v}_{(2)}, \\ \hat{P}_{(3)} = \vec{v}_{(3)} \circ \vec{v}_{(3)}, \end{array} \quad \text{azaz} \quad P_{(k)} = \vec{v}_{(k)} \circ \vec{v}_{(k)}. \end{array}$$

A $\hat{P}_{(k)}$ projektor tehát olyan, hogy az $\vec{v}_{(k)}$ sajátvektor irányába vetít, a merőleges sík mentén. (Ugyebár $k = 1, 2, 3$, a három sajátértéknek megfelelően.)

⁹⁶Pl. ha szeretnék „kellemes eredményt adó” házi feladatot kitalálni mátrixok sajátérték-problémájára...

Az állítás tartalma elég szemléletes és nyilvánvaló: a három sajátvektor, $\vec{v}_{(1)}$, $\vec{v}_{(2)}$, $\vec{v}_{(3)}$ bázist alkot, azaz kifeszíti a teret, így áttérhetünk ebbe a bázisba (ez volt ugye a főtengetlytranszformáció). Ebben az új bázisunkban az $\hat{A}$ operátor pont azt csinálja, hogy a bázisvektorok (amik itt éppen a sajátvektorok) irányában λ -szorosokra „nyújtogat”. Végül is ezt csinálja az operátorunk „akármilyen irányból nézve” is: egy vektorra hatását rekonstruálhatjuk úgy, hogy a vektort rendre levetítgetjük a sajátvektorok irányába, és olyan irányokban nyújtunk; pont ezt mondja a képlet.

• **Példa:** legyen adott a három sajátvektor és a három sajátérték a következő módon:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1, \\ \lambda_2 &= 2, \\ \lambda_3 &= -1, \end{aligned} \quad \underline{v}_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_{(3)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Egyből úgy írtam őket, hogy a hosszuk egy legyen. (Ha nem annyi lett volna, vissza kellett volna osztani vele). Azzal is vigyázni kellett, hogy olyanokat adjak meg, amik ortogonálisak⁹⁷. Fentebb felírtuk az $\vec{n} \circ \vec{n}$ projektor mátrixalakját; most ezt kell alkalmazni egyesével, hogy megkapjuk a projektor-mátrixokat:

$$\underline{P}_{(1)} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{P}_{(2)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{P}_{(3)} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ebből már összeállíthatjuk az $\underline{A}$ mátrixot:

$$\underline{A} = \lambda_1 \underline{P}_{(1)} + \lambda_2 \underline{P}_{(2)} + \lambda_3 \underline{P}_{(3)} \quad \Rightarrow \quad \underline{A} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 7 & -5 & 4 \\ -5 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Akkor érzünk rá a dolog ízére, ha most fogjuk ezt a mátrixot, ténylegesen kiszámítjuk a sajátértékeit és sajátvektorait, és visszakapjuk azokat, amikből kiindultunk.

• Adott $\hat{A}$ operátor esetén a kapott alaknak elég nagy jelentősége van, ennek neve:

$$\hat{A} \text{ projektorfelbontása: } \hat{A} = \sum_{k=1}^3 \lambda_k \hat{P}_{(k)}.$$

Akármilyen $\hat{A}$ esetén a szereplő (az $\hat{A}$ sajátvektorainak irányába vetítő) projektorokra a következő **tulajdonságok** igazak:

$$\begin{aligned} \hat{P}_{(1)}^2 &= \hat{P}_{(1)}, & \hat{P}_{(1)}\hat{P}_{(2)} &= \hat{P}_{(2)}\hat{P}_{(1)} = \\ \hat{P}_{(2)}^2 &= \hat{P}_{(2)}, & &= \hat{P}_{(1)}\hat{P}_{(3)} = \hat{P}_{(3)}\hat{P}_{(1)} = \\ \hat{P}_{(3)}^2 &= \hat{P}_{(3)}, & &= \hat{P}_{(2)}\hat{P}_{(3)} = \hat{P}_{(3)}\hat{P}_{(2)} = \hat{0}. \end{aligned} \quad \text{Összefoglalva: } \hat{P}_{(k)}\hat{P}_{(l)} = \delta_{kl}\hat{P}_{(k)}.$$

Az **első csomag** már csak amiatt is igaz, **mert projektorok** (emlékezzünk, ez volt projektorok alaptulajdonsága, hogy négyzetük önmaguk, hiszen „még egyszer ugyanúgy vetítve már semmi újat nem csinálunk”). A **második csomag** azért igaz, **mert** merőleges vektorokra vetítenek: az ilyen projektorok együttesét szokták **ortogonális projektorok** halmazának is hívni.

⁹⁷Az első felírtam hasból. A másodikra már kicsit figyelni kell, de gond nélkül megy, hogy olyat találjak ki, ami az elsőre merőleges. A harmadiknál már ekkor viszont nem túl nagy szabadság maradt: ezt most a vektoriális szorzás komponenses képletét használva lehetett kiokumálni.

- Számítsuk ki a projektorfelbontott $\underline{\underline{A}}$ mátrix négyzetét ebben a sémában! A többtagú összegek szorzását elvégezhetjük; amúgy általában operátoroknál vigyázni kéne a sorrenddel, de most mindegy, mert minden „vegyes” tényező nullát ad. Indexesen számolunk, de lehetne a három-három ill. a kilenc tagot kiírva is; a lényeg ugyanaz:

$$\underline{\underline{A}}^2 = \left(\sum_k \lambda_k \hat{P}_{(k)} \right) \left(\sum_l \lambda_l \hat{P}_{(l)} \right) = \sum_{kl} \lambda_k \lambda_l \hat{P}_{(k)} \hat{P}_{(l)} = \sum_{kl} \lambda_k \lambda_l \delta_{kl} \hat{P}_{(k)} = \sum_k \lambda_k^2 \hat{P}_{(k)}.$$

A lényeg: a projektornégyzetes tagok megmaradtak, a „kereszt”-tagok kiestek a projektorok tulajdonsága (ortogonális volta) miatt. Nem nagy titok ezek után, hogy többedik hatványra, sőt, akármilyen polinomra is hasonlóan fog működni:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \sum_k \lambda_k \hat{P}_{(k)} = \lambda_1 \hat{P}_{(1)} + \lambda_2 \hat{P}_{(2)} + \lambda_3 \hat{P}_{(3)}, \\ \hat{A}^2 &= \sum_k \lambda_k^2 \hat{P}_{(k)} = \lambda_1^2 \hat{P}_{(1)} + \lambda_2^2 \hat{P}_{(2)} + \lambda_3^2 \hat{P}_{(3)}, & \text{sőt akkor már akármilyen } p(x) \text{ polinom-} \\ \hat{A}^3 &= \sum_k \lambda_k^3 \hat{P}_{(k)} = \lambda_1^3 \hat{P}_{(1)} + \lambda_2^3 \hat{P}_{(2)} + \lambda_3^3 \hat{P}_{(3)}, & \text{-függvényre: } p(\hat{A}) = \sum_k p(\lambda) \hat{P}_{(k)} = \\ &\dots & = p(\lambda_1) \hat{P}_{(1)} + p(\lambda_2) \hat{P}_{(2)} + p(\lambda_3) \hat{P}_{(3)}. \\ \hat{A}^n &= \sum_k \lambda_k^n \hat{P}_{(k)} = \lambda_1^n \hat{P}_{(1)} + \lambda_2^n \hat{P}_{(2)} + \lambda_3^n \hat{P}_{(3)}, \end{aligned}$$

- Már ennyi is elég, hogy pl. az $\underline{\underline{A}}^{527}$ nagy hatványt a mátrixszorozgatásnál gyorsabban és követőbben kiszámítsuk: csak $\underline{\underline{A}}$ projektorfelbontását kell tudni (ahhoz meg ugye meg kellett oldani a sajátérték-problémáját). De az igazi most jön: tudva valamit arról, hogy a legtöbb „normális” függvénynek van Taylor-sor-szerű („végtelen polinomként való”) egyértelmű előállítása, mostantól mátrixok (azaz: operátorok) függvényeit is kiszámíthatjuk:

$$\begin{aligned} \text{Ha } \hat{A} &= \sum_k \lambda_k \hat{P}_{(k)}, \\ \text{és } f(x) &\text{ kb. akármilyen függvény,} \end{aligned} \quad \text{akkor legyen} \quad f(\hat{A}) := \sum_k f(\lambda_k) \hat{P}_{(k)}.$$

Ez kb. a definíciónak is felfogható sok esetben, de látszik (visszagondolva az iménti, polinomokra belátott képletre), hogy „jól motivált” definícióról van szó.

- Ilyen módon értelmes egy mátrix (operátor) szinusz, exponenciális, négyzetgyöke, stb. (Utóbbi a valós mátrixok között mozogva csak akkor, ha minden sajátérték pozitív). Még egyszer összefoglaljuk másképp:

Egy $\hat{A}$ operátor $f(\hat{A})$ **függvénye** az a másik operátor, aminek **sajátvektorai ugyanazok**, mint $\hat{A}$ -nak, **sajátértékei** pedig az eredeti $\hat{A}$ sajátértékeinek **ugyanolyan** $f(\lambda)$ **függvényei**.

8. Vektoranalízis-bevezető („ismétlés”)

Átkanyarodunk az utolsó nagyobb témakörre, a vektormezők deriváltjainak és integráljainak vizsgálatára, de előtte néhány alapvető dolgot „átismétlünk”. Sok minden kerülhetne ide; „válogattam”.

8.1. Differenciálási és integrálási szabályok, elemi függvények

Nem most fogunk megtanulni deriválni, úgy veszem, hogy ez már megtörtént (némi gyakorlással együtt; bár utóbbiból sosem elég). Azért gyorsan átismétljük az alapvető fogalmakat. Hogy egy kis ideig egységesen beszélhessünk, $\mathbb{K}$ -val jelöljük akár a valós, akár a komplex számok halmazait ($\mathbb{R}$ -et vagy $\mathbb{C}$ -t); azt, hogy valami „ $\mathbb{K}$ -ra igaz”, úgy érthetjük, hogy akár a valós, akár a komplex számokra (külön-külön), csak lusták vagyunk kétszer ugyanazt leírni.

- No akkor: azt mondjuk egy egyváltozós $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ függvényre, hogy

$f(x)$ **differenciálható az $x \in \mathbb{K}$ pontban**, ha létezik a $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ határérték.

Ekkor ezen határérték neve: az f függvény x pontbeli **deriváltja**, jelben $f'(x)$, vagy $\frac{df}{dx}$.

Az $f(x)$ differenciálható egy $H \subset \text{Dom } f$ halmazon⁹⁸, ha annak minden pontjában differenciálható, illetve $f(x)$ differenciálható, ha az egész $\text{Dom } f$ -en differenciálható. Az $f(x)$ deriváltfüggvénye $f'(x)$, vagy $\frac{df}{dx}$: ez ott értelmezett, ahol $f(x)$ differenciálható, és x -hez $f'(x)$ -et rendeli.

- Valós, $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ függvényekre a derivált szemléletes jelentése ugye: az $f(x)$ függvény grafikonjához az $(x, y=f(x))$ pontban húzott érintő meredeksége (ld. 20.a. ábra). A deriválás iménti fogalma viszont értelmes komplex, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényekre is; itt a derivált jelentése kevésbé szemléletes, de nem kevésbé fontos. A differenciálható komplex függvények igen érdekes dolgokat tudnak; ezzel majd a *komplex függvénytan* foglalkozik. Most elég annyi, hogy ebben a szakaszban egyszerre „komplexben” is értelmezzünk (és deriválunk is) minden függvényt, amit csak lehet.

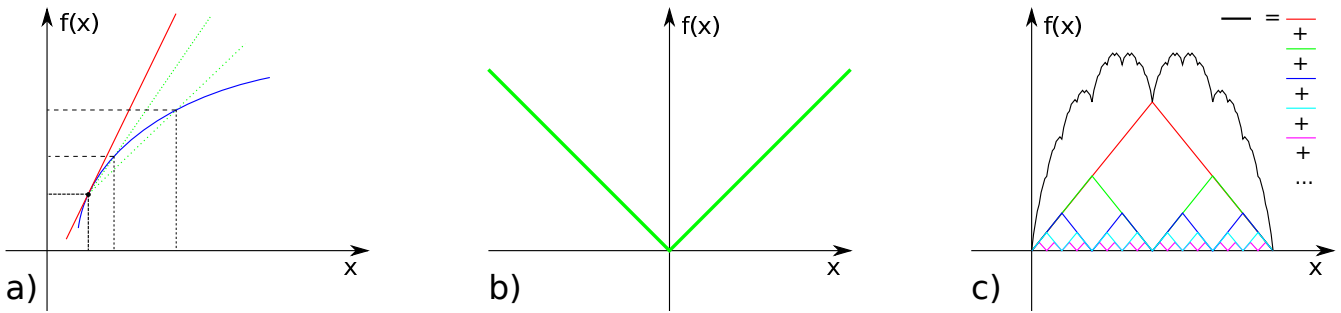
- Ha egy $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ függvény differenciálható x -ben, akkor ott folytonos is. Fordítva nyilván nem igaz ez: némi gondolkodással látszik, hogy pl. az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ valós abszolútérték-függvény mindenhol folytonos, de az $x=0$ -ban nem differenciálható; máshol igen (20.b. ábra).

Igaz-e, hogy ha egy függvény folytonos, akkor „legalább elég sok helyen” differenciálható? (A szokásos, esetleg néhol törött, de amúgy sima vonallal való „függvénygrafikon-skiccelés” ezt sugallaná.) Válasz: **nem**, ne is várjunk valami ilyesmi tételt. Egy hangyányi körülményeskedéssel könnyen konstruálható olyan függvény, ami mindenhol folytonos, de sehol sem differenciálható (és intuitívan könnyű látni róla ezt): a 20.c. ábrán látható „végtelenül teleszurkált” függvény pl. ilyen.

- A **deriválási szabályok** ismerősek; most nem vezetem le, csak felsorolom őket:

1. Ha f és g differenciálhatóak x -ben, akkor az összegük, $f+g$ is az, és a deriváltja x -ben éppen $f'(x)+g'(x)$. Véges többtagú összegre ugyanilyen igaz: pl. ha f_1, f_2, f_3, f_4 differenciálhatóak x -ben, akkor összegük, $f_1+f_2+f_3+f_4$ is az, és $(f_1+f_2+f_3+f_4)'(x) = f_1'(x)+f_2'(x)+f_3'(x)+f_4'(x)$.
2. Ha f és g differenciálhatóak x -ben, akkor a szorzatuk, fg is az, deriváltja $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$. Ezt véges többtenyezős szorzatra is általánosíthatjuk: ha pl. f_1, f_2, f_3, f_4 differenciálhatóak x -ben, akkor szorzatuk, $f_1f_2f_3f_4$ is az, és $(f_1f_2f_3f_4)' = f_1'f_2f_3f_4 + f_1f_2'f_3f_4 + f_1f_2f_3'f_4 + f_1f_2f_3f_4'$.

⁹⁸ Ugye $\text{Dom } f$ az f függvény értelmezési tartományát („domain”) jelenti.



20. ábra. Egyszerű ábrák a differenciálhányadosról. a): a derivált mint meredekség; a szelő határesetek az érintő. b.) az abszolútérték-függvény (ami a nullában nem differenciálható). c.) A színessel jelölt függvények (végtelen sok, egyre több túske, egyre kisebb amplitúdóval) végtelen összege létezik, mindenhol folytonos, sehol sem differenciálható (az ábrán kb. a fekete vonal, de épp ez a lényeg, hogy ezt nem lehet egy „szép sima vonallal” lerajzolni).

- Ha g differenciálható x -ben és $g(x) \neq 0$, akkor $\frac{1}{g}$ is differenciálható, és $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$. Ezt és az előzőt kombinálva kapjuk hányados deriváltját: ha f és g differenciálhatóak x -ben, és $g(x) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g}$ is differenciálható, és $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$.
- Ha $f : \mathbb{K} \mapsto \mathbb{K}$ és $g : \mathbb{K} \mapsto \mathbb{K}$ olyanok, hogy f differenciálható x -ben és g differenciálható $f(x)$ -ben, akkor a kompozíció, $g \circ f$ is differenciálható x -ben. Emlék: $g \circ f$ az a függvény, ami x -hez $g(f(x))$ -et rendel. A derivált pedig: $(g \circ f)'(x) \equiv (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Kicsit félrevezető, de könnyen memorizálható jelöléssel: $\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{df} \frac{df}{dx}$.
- Ha $f : \mathbb{K} \mapsto \mathbb{K}$ függvény az x pont egy környezetében injektív, azaz itt létezik inverze, f^{-1} , akkor ha f differenciálható x -ben, $f'(x) \neq 0$, akkor f^{-1} differenciálható $f(x)$ -ben, és a deriváltjára az $f^{-1}'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$ összefüggés igaz⁹⁹.
- Most már eleget beszéltünk mellé („ha... akkor...”); ideje látni differenciálható függvényeket.
 - A konstans függvény, $f(x) = c$ differenciálható, és $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$.
 - Az identitásfüggvény deriváltja a konstans 1: $g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1$.
- Az eddigiek alapján sok ismert deriválási szabályt felidézhetünk; pl. a hatványozásról:

	$f(x)$	$f'(x)$	hogyan?
$(n \in \mathbb{N}_0^+)$	x^n	nx^{n-1}	(többszörös) szorzat
$(n \in \mathbb{N}_0^+)$	$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$	$-\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = (-n)x^{-n-1}$	reciprok deriváltja
$(n \in \mathbb{N}^+)$	$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$	inverz deriváltja
$(n \in \mathbb{N}^+, m \in \mathbb{Z})$	$x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$	$m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$	kompozíció deriváltja
$(q \in \mathbb{Q})$ racionális	x^q	$q \cdot x^{q-1}$	eddigiek összefoglalva

- Véges összeget lehet tagonként deriválni; mi a helyzet „végtelen összegekkel” (függvénysorokkal)?
Semmi sem biztos itt már. A precízkedést most meghagyjuk analízisórára; egy fontos eset most

⁹⁹Valós $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetben ennyi kikötés elég is; komplex, $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ függvényekre ha precízkedünk, még ki kell azt is kötni, hogy f^{-1} legyen folytonos $f(x)$ -ben, és $f(x)$ legyen belső pontja $\text{Ran } f$ -nek. Ha egy valós, $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ függvény folytonos x -ben, akkor az inverze is folytonos $f(x)$ -ben. Ez elég nyilvánvalónak tűnik, de komplex, $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ függvényekre már nem feltétlenül igaz ez: pl. az $f(z) = e^z$ komplex exponenciális függvény folytonos, inverze, a Ln komplex logaritmusfüggvény viszont nem az, mert emlékezzünk, vágása van $\mathbb{R}_0^-$ -on az arg fázis ugrása miatt.

a lényeg. Ez a **hatványsorok** esete. Állítás: ahol konvergensek, ott lehet őket tagonként deriválni. Ezt az elemi függvények és deriváltjaik „gatyába rázására” használhatjuk.

- A **legfontosabb hatványsor az Exp függvény**; minden komplex z számra értelmezzük így:

$$\text{Exp}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \text{azaz:} \quad \text{Exp}(z) := 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \dots$$

Ez az összeg minden z komplex számra létezik (persze valósakra is), és folytonos függvényt ad meg z -ben¹⁰⁰. A következő azonosság belátható pusztán ezt a hatványsort használva:

$$\text{Exp}(a+b) = \text{Exp}(a) \cdot \text{Exp}(b) \quad \forall a, b \in \mathbb{C} \quad \text{komplex számra (valósakra is)}.$$

$$\begin{aligned} \text{Hiszen:} \quad \text{Exp}(a+b) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} \stackrel{1.)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} a^{n-m} b^m \right) \stackrel{2.)}{=} \\ &\stackrel{2.)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{a^{n-m} b^m}{(n-m)! m!} \stackrel{3.)}{=} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{a^p b^q}{p! q!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a^p}{p!} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{b^q}{q!} = \text{Exp}(a) \text{Exp}(b). \end{aligned}$$

Itt 1. a binomiális tételt használtuk, 2. átrendeztük az összeget. (Most csak higgyük el, hogy itt végtelen összeget is átrendezhettünk, úgy, ahogy végeset lehet.) **A 3. a lényegi lépés**¹⁰¹. A kettős összeg minden tagján való végigszaladást egyféle helyett másféle módon is megtehetjük. Gondoljuk ki, hogy ha az n végigfut 0-tól ∞ -ig az egész számokon, és minden n -re m végigfut 0-tól n -ig, akkor minden tagot „pont egyszer érintünk”, épp mintha p futna 0-tól ∞ -ig, és q is futna 0-tól ∞ -ig.

- Nem nagy titok, hogy ez az $\text{Exp}(z)$ függvény éppen ugyanaz, mint a már ismert e^z exponenciális függvény. Ezt tudva akkor értelmezhetjük a többi elemi függvényt is a végtelen soraikkal:

$$\begin{aligned} \text{Ch}(z) &:= \frac{\text{Exp}(z) + \text{Exp}(-z)}{2} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} + \frac{z^{10}}{10!} + \frac{z^{12}}{12!} + \dots, \\ \text{Sh}(z) &:= \frac{\text{Exp}(z) - \text{Exp}(-z)}{2} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} + \frac{z^{11}}{11!} + \frac{z^{13}}{13!} + \dots, \\ \text{Cos}(z) &:= \frac{\text{Exp}(iz) + \text{Exp}(-iz)}{2} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \frac{z^{10}}{10!} + \frac{z^{12}}{12!} - \dots, \\ \text{Sin}(z) &:= \frac{\text{Exp}(iz) - \text{Exp}(-iz)}{2i} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - \frac{z^{11}}{11!} + \frac{z^{13}}{13!} - \dots \end{aligned}$$

Tudjuk (ld. a komplex számos 2. fejezet 2.4. szakaszát), hogy ezen függvények összes ismert tulajdonsága már következik az ilyen, $\text{Exp}(z)$ -n alapuló definíciókból és az $\text{Exp}(z)$ imént felidézett alaptulajdonságából. **A deriváltak is kijönnek.** Az $\text{Exp}(z)$ végtelen sorában, mivel a faktoriális jelentése alapján $n/n! = 1/(n-1)!$, minden tag az utána következőnek a deriváltja, azaz:

$$\begin{aligned} f(z) = \text{Exp}(z) &= 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \dots \Rightarrow \\ \Rightarrow f'(z) &= 1 + \frac{2z}{2!} + \frac{3z^2}{3!} + \frac{4z^3}{4!} + \frac{5z^4}{5!} + \frac{6z^5}{6!} + \dots = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \dots = \text{Exp}(z). \end{aligned}$$

- A többi fenti hatványsort is lehet tagonként deriválni. Ebből tényleg kijönnek az ismert szabályok;

¹⁰⁰Ez sem magától értetődő. Két, három, véges sok folytonos függvény összege folytonos, eddig rendben van, de végtelen összeg...? Ha a függvényt sor *egyenletesen konvergens*, akkor a sorösszeg is folytonos, és itt ez a helyzet.

¹⁰¹Elsőre ez komoly trükknek tűnik; egy év múlva ilyenkor a könyökünkön jön majd ki.

és akkor már felírom az inverzeik deriváltjait is:

Elemi függvények deriváltjai:

$$f(z) = \text{Exp}(z) \Rightarrow f'(z) = \text{Exp}(z),$$

$$f(z) = \text{Sin } z \Rightarrow f'(z) = \text{Cos } z,$$

$$f(z) = \text{Cos } z \Rightarrow f'(z) = -\text{Sin } z,$$

$$f(z) = \text{Sh } z \Rightarrow f'(z) = \text{Ch } z,$$

$$f(z) = \text{Ch } z \Rightarrow f'(z) = \text{Sh } z,$$

$\Downarrow$

$$f(z) = \text{tg } z \Rightarrow f'(z) = \frac{1}{\text{Cos}^2 z},$$

$$f(z) = \text{th } z \Rightarrow f'(z) = \frac{1}{\text{Ch}^2 z},$$

Inverzek, stb.:

$$f(z) = \text{Ln } z \Rightarrow f'(z) = \frac{1}{z},$$

$$f(z) = \arcsin z \Rightarrow f'(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}},$$

$$f(z) = \arccos z \Rightarrow f'(z) = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}},$$

$$f(z) = \text{arctg } z \Rightarrow f'(z) = \frac{1}{1+z^2},$$

$$f(z) = \text{Ar sh } z \Rightarrow f'(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}},$$

$$f(z) = \text{Ar ch } z \Rightarrow f'(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}},$$

$$f(z) = \text{Ar th } z \Rightarrow f'(z) = \frac{1}{1-z^2}.$$

Ha nem akarunk komplex számokkal „nagyzolni”, akkor kis kezdőbetűt írunk nagy helyett (sin, cos, stb.) , és z helyett x -et: így szokás a valós, $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ elemi függvényekre felírni a deriváltakat.

- **Akármilyen** kitevőjű **hatványfüggvény** deriváltja is annak adódik, amit megszoktunk:

$$f(z) = z^\alpha \Rightarrow f'(z) = \alpha \cdot z^{\alpha-1}. \quad (\text{Útmutatás: } z^\alpha \equiv \text{Exp}(\alpha \cdot \text{Ln } z) \text{ volt a definíció.})$$

Általános (nem valós egész) $\alpha \in \mathbb{C}$ kitevőre $f(z) = z^\alpha$ minden $z \in \mathbb{C}$ -re differenciálható, kivéve a negatív valós féltengelyt (itt vágás van). A valós $f(x) = x^\alpha$ általános valós α -ra csak $x > 0$ -ra értelmes.

- Az imént tehát az elemi függvények deriváltjait (sőt, igaziból magukat a függvényeket is) a hatványsoraik segítségével vezettük be. Aki hallotta már a *Taylor-sor* kifejezést, annak kimagyarázom, hogy miért nem így hívtam az előkerült sorokat; ebben a lábjegyzetben: ¹⁰².

- Egy $f(x)$ függvény **primitív függvénye** ugye olyan $F(x)$, aminek deriváltja az f függvény: $F' = f$. Az ilyen F -et az f *határozatlan integráljának* is hívjuk, és így jelöljük: $F = \int f$.

- A deriválás a fentebb megadott szabályok és némi gyakorlás (vagy akár: számítógépbe beprogramozás) után teljesen gépies, algoritmikus műveletté válik (egy elemi függvényekkel és tetszőleges „kombinációjukkal” felírt függvényt véges sok lépésben egyértelműen „le lehet deriválni”). A primitív függvény megkeresése nem ilyen: nincs rá mindig működő algoritmus, csak helyel-közzel működő módszerek gyűjteménye. Egy elemi függvények kombinációjaként felírt $f(x)$ függvény primitív függvénye, *ha létezik is*, vagy kifejezhető elemi függvények egyszerű (véges) „kombinációjaként”, vagy nem; bőven vannak példák, amikor be van bizonyítva, hogy hiába is próbálkoznánk.

¹⁰² Egy $f(x)$ függvény a pontbeli Taylor-sora a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ sor, ahol $f^{(n)}(a)$ az n -edik derivált értéke a -ban. Taylor-sora minden sima f függvénynek van, de kérdés, hogy 1) konvergencia-e, 2) ha az is, tényleg előállítja-e $f(x)$ -et. Általában egyik sem igaz. Mármost a Sin, Cos, Exp, Ch, Sh függvényekkel nincs probléma, az ő Taylor-soruk is éppen az a sor, amivel most *definiáltuk* őket. Rögtön Taylor-sornak hívni őket azt sugallhatná, hogy valahogyan eleve értelmezve voltak ezek a függvények, „kézzel-lábbal lederiváltuk” őket, majd elkészítettük ($a=0$ körüli) Taylor-soraikat, és reménykedünk, hogy visszakapjuk őket. Ezt az utat is végigjárhatja az ember; mi már „felértünk a második alaptáborba”: innen nézve egyszerűbb, ha rögtön a hatványsoraikkal definiáljuk a függvényeket, ebből *levezetjük* az összes tulajdonságaikat és a deriváltjaikat. Ezután felírhatjuk a Taylor-soraikat is, amik persze ugyanezek a sorok lesznek, de innen nézve kissé csökkent az ő „Taylor-soruk” fogalmának jelentősége.

• **Néhány integrálszámító módszer** azért álljon itt összegyűjtve¹⁰³.

1. A fentebbi deriváltak „megfordításaként” néhány függvény primitív függvényét „illik fejből tudni” (vagy táblázatból gyorsan kikeresni tudni), ezeket most nem írom le újra.
2. A deriválás tulajdonságai „fordítva”: összeg, számszoros primitív függvénye összeg, számszoros:

$$\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx, \quad \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

3. A szorzat deriválási szabályát „megfordítva” (ill. azzal leellenőrizhető módon) adódik a **parciális integrálás** szabálya (primitív függvényekre megfogalmazva):

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Ha tehát egy szorzatban az egyik tényezőt felismerjük, mint egy $g'(x)$ -et (azaz valaminek a deriváltját), akkor az integrálást (primitívfüggvény-keresést) „átháríthatjuk” a másik tényezőre. Persze a végén „marad még integrálnivaló”, de sokszor jó ezt tudni.

4. A közvetett függvény deriváltját visszafelé felírva adódik a *helyettesítéssel integrálás* szabálya. Az x változó helyett az $x=g(t)$ módon (valamilyen $g(t)$ függvénnyel) a t változót bevezetve:

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt.$$

Akármilyen $g(t)$ -re igaz ez a képlet, de akkor járunk jól, ha olyan „kellemes” $g(t)$ -t sikerül választani, hogy a t új változót tartalmazó alak primitív függvényét már egyszerűbb tudni. A deriválással ellentétben ez (a többi szabállyal együtt) nem vezet el egyértelműen, algoritmikus lépésekben az eredményhez. Mindazonáltal sok esetben vannak jól használható helyettesítések.

5. Rutinná válhatnak olyan esetek, amikor „felismerjük”, hogy egy függvény minek a deriváltja. Pl. ha felismerjük, hogy $f(x)=g'(x)h(x)+g(x)h'(x)$ alakú valamilyen $g(x)$ és $h(x)$ függvényekkel, akkor a szorzat deriváltját tudva $\int f(x)dx=g(x)h(x)$. Vagy pl. ha $f(x)=g'(x)/g(x)$ alakú, akkor $\int f(x)dx=\ln(g(x))$, mivel a logaritmust éppen így kell deriválni, stb.

• A **határozott integrál** fogalma (valós, $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ függvényekre) a „függvény alatti terület” képzetének matematikai megfogalmazása. Többféle módon lehet eljutni ehhez a területfogalomhoz; azt kell elfogadnunk alapvetésnek, hogy egy A és B oldalú téglalap területe $A \cdot B$. Ami a „bonyolultabb” területeket illeti, legtöbbször még az ún. Riemann-féle integrálfogalom a természetes beidegződés. Mi is most erre fogunk hivatkozni, de megjegyezzük, hogy az eggyel modernebb szemlélet már az ún. Lebesgue-féle integrálfogalmat követeli meg, erről analízisórán lesz szó.

• Egy $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ függvény a -tól b -ig vett határozott integrálját, mely az $[a, b]$ szakaszon a függvény alatti területnek felel meg, így jelöljük:

$$\int_a^b f(x)dx, \quad \text{vagy fordítva írva is:} \quad \int_a^b dx f(x).$$

¹⁰³ Én még régi vágású vagyok; sok primitív függvényt tudok fejből, vagy gyorsan rekonstruálni. Ennek jelentősége egyre csökken; ma már sok számítógépes segítség is az ember rendelkezésére áll. Annyi a lényeg, hogy ha előkerülnek, az „egyszerűbb” (azaz: régen kiszámolni tudni elvárt) primitív függvények megkeresését a különböző könyvekben nem szokták nagyon részletezni, csak odaírják a végeredményt; „akí akarja, keresse meg, és ellenőrizze” alapon.

Az $\int$ integráljel a (szummára, azaz összegre utaló, ld. rögtön) S betű elkorcsosulásából keletkezett. Az a és b az integrálás határai¹⁰⁴, mégpedig a az *alsó*, b a *felső*. Hallgatólagosan úgy vettük, hogy $b > a$; hogy mindig működjön a dolog, a $b = a$ és a $b < a$ esetre is értelmezzük az integrált, így:

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \quad \text{illetve ha } b < a, \text{ akkor } \int_a^b f(x)dx := - \int_b^a f(x)dx.$$

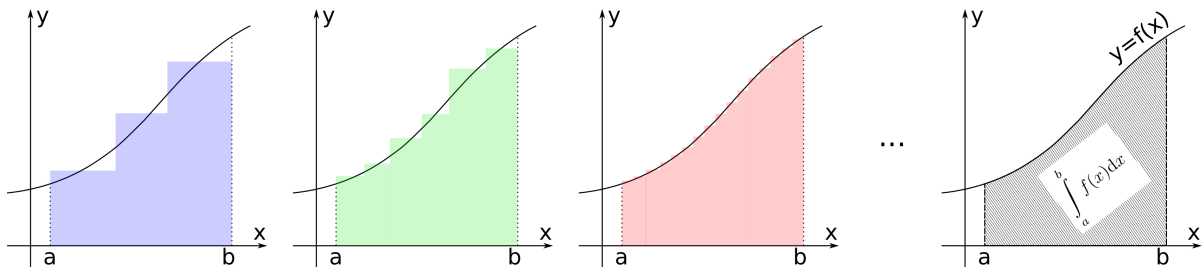
Tehát: „egy pontra” mint szakaszra vett integrál nulla (ez a „terület”-képzetből elég természetes), ill. ha a felső határ kisebb, mint az alsó, az „igazi terület” -1 -szeresét tekintjük az integrálnak.

• A függvény *integrálható* az $[a, b]$ szakaszon, ha létezik ez a mennyiség. Hogy ez milyen függvényekre, milyen szakaszokra van így, az függ attól, hogy pontosan hogyan is értelmeztük az integrált. A Riemann-féle integrálfogalom alapja a következő „eljárás”:

1. Az $[a, b]$ szakaszt sok (N darab) kis szakaszra bontjuk $N-1$ darab $a_1, a_2, \dots, a_{N-1}$ pont beszurásával, ezek $[a, a_1]$, $[a_1, a_2]$, $\dots$, $[a_{N-1}, b]$, a hosszait jelöljük Δx_k -val. Minden szakaszban tetszőlegesen kijelölünk egy x_k pontot, a k index tehát 1-től N -ig fut.
2. Minden k -ra a k -adik szakasz hosszát megszorozzuk a függvény x_k -ban felvett $f(x_k)$ értékével, és ezeket összeadjuk; így a „függvény alatti terület” egy téglalapokkal való közelítését kapjuk:
3. Ha ennek a „közelítő területnek” létezik és egyértelmű a határértéke, amikor az N -nel végtelenhez tartunk úgy, hogy minden kis szakasz hossza 0-hoz tart (de egyébként akárhogy), akkor ezt a határértéket hívjuk az $\int_a^b f(x)dx$ határozott integrálnak:

$$\Delta x_k := a_k - a_{k-1}. \quad \sum_{k=1}^N \Delta x_k \cdot f(x_k) \rightarrow (\text{ha létezik a határérték}) \rightarrow \int_a^b f(x)dx.$$

Röviden összefoglalva: 1) kis szakaszokra bontunk, 2) minden szakaszhoz a függvényértékkel szorzunk, majd összeadjuk, 3) végtelenre finomítjuk a felosztást. A 21. ábra szemlélteti ezt.



21. ábra. Egy függvény alatti terület (a jobb oldalon) és a határozott integrál Riemann-féle definíciójában szereplő közelítő összegek szemléltetése. A közelítő összegeknél szándékosan nem egyforma méretű ill. helyzetű szakaszokat ill. bennük lévő „kiértékelő-pontokat” rajzoltam.

• A Riemann-féle integrállal leginkább csak szakaszonként folytonos függvénynek (speciálisan: folytonosnak is) véges $[a, b]$ szakaszra vett integráljának van értelme; **bebizonyítható**, hogy ilyenkor a dolog „működik”: létezik az imént értelmezett integrál. Persze azért ez elég sok esetet lefed.

¹⁰⁴A határokat kézírással általában így, az integráljel alá és fölé írjuk; elektronikusan (pl. az itt használt L^AT_EX-ben is) sokszor kicsit „eltolva”, így: $\int_a^b$ helyett $\int_a^b$. Ennek nincs jelentősége; mindig ahogy jobban kifer.

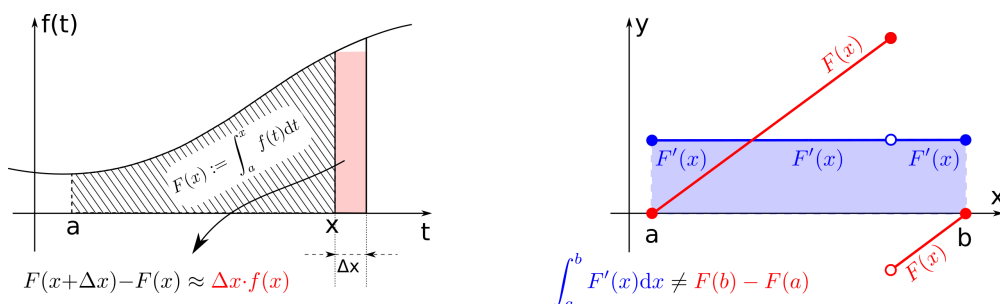
- A legfontosabb integrálszámító módszer a **Newton-Leibnitz-formula**, ami szerint:

$$\begin{array}{l} \text{Ha } F(x) \text{ az } [a, b] \text{ szakaszon} \\ \text{folytonosan differenciálható:} \end{array} \Rightarrow \int_a^b dx F'(x) = F(b) - F(a).$$

Általában az integrálandó $f(x)$ függvény (az *integrandus*) adott; itt ez $f(x) := F'(x)$. Itt kapcsolódik egymáshoz a (határozott) integrál és a primitív függvény keresése (emiat is hívják utóbbit határozatlan integrálásnak); adott $f(x)$ -re primitív függvényt, $F(x)$ -et keresve (aminek tehát $\dot{F}$, $f(x)$ a deriváltja) rögtön használhatjuk ezt a formulát.

A Newton-Leibnitz-formula származtatását a 22. ábra szemlélteti. Az f függvénynek egy kijelölt a alsó határ és egy változó x felső határ közötti függvény alatti területe nyilván az x függvénye: $F(x) := \int_a^x f(t)dt$. (Az „integrálási változót” bárhogy jelölhetjük, csak most ne x -szel, mert ez most másra foglalt!) Az x -ig és az $x+\Delta x$ -ig vett terület különbsége „körülbelül” éppen $\Delta x \cdot f(x)$; ebből ($\Delta x \rightarrow 0$ -t véve) adódik, hogy $F(x)$ deriváltja éppen az integrálandó $f(x)$. Ha a -ból „indítjuk” a területet, tényleg jó a fenti képlet: $F(a) - F(a)$ tényleg nulla, ahogy kell is.

- A Newton-Leibnitz-formulában az $F(x)$ függvény **tényleg mindenhol folytonosan differenciálható** kell, hogy legyen (nem elég, ha „szinte mindenhol”). Egy pont is már elronthatja a dolgot (ld. pl. a 22. ábra jobb oldalát). Elsőre ez felesleges körülményeskedésnek tűnhet, de ahogy haladunk előre, úgy lesz ennek majd egyre nagyobb jelentősége; ezért már most nagyon vessük az eszünkbe.



22. ábra. Bal oldalon a Newton-Leibnitz-formula származtatása: a területfüggvény, $F(x)$ deriváltja az integrandus, $f(x)$. Jobb oldalon példa arra, hogy a Newton-Leibnitz-formula nem feltétlenül működik, ha $F(x)$ nem *mindenhol* folytonosan differenciálható. A (piros) $F(x)$ deriváltja egy pontot kivéve (ezt üres karika jelöli) éppen a (kék; egy pont híján mindenhol értelmes) $f(x)$. Az $f(x)$ alatti terület pozitív szám (egy pont hiánya területnél nem számít), ellenben $F(b) - F(a) = 0$.

8.2. Többváltozós függvények, parciális deriváltak, Young-tétel

- Ismerősnek tűnhet pl. az alábbi képlet:

$$\begin{array}{ll} \text{Egy harmonikus rezgőmozgást végző} & x(t) = A \sin(\omega t), \\ \text{test kitérése } (x) \text{ az idő } (t) \text{ függvényében:} & \text{ahol } A \text{ az amplitúdó,} \\ & \omega \text{ a körfrekvencia,} \end{array}$$

és akkor azt mondanánk, hogy a sebesség éppen a kitérés (pozíció) idő szerinti deriváltja:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\omega \cdot \cos(\omega t).$$

Itt tehát úgy gondolunk a t -re, mint változóra (aminek a „változásának hatására” igaziból kíváncsiak

vagyunk), a többi jelölésre (ω és A) pedig mint **paraméterre**¹⁰⁵; amiket „egyszer megmondott valaki”, és utána az ő értékeit fixen tartva érdeklődünk a „változó” (itt: t) különböző értékeinél felvett függvényértékek után. A t szerinti deriválnál is úgy vettük, hogy pl. ω és A egy adott szám, konstansokként kezeltük őket a deriválás szabályainak alkalmazása közben.

- Az előző példában direkt úgy választottam a jelölést, hogy egyértelmű legyen, hogy melyik a paraméterek és melyik a változó. Ez dicséretes szokás, de általánosságban semmiféle ilyen „jelölési axiómarendszer” nincs. Egy olyan (adott hozzárendelési szabályú) függvényt, amely függ több „dologtól” (számtól, amiket akkor tekinthetünk *változónak*, *paraméternek*, mindegy), egyszerűen **többváltozós függvénynek** kell hívunk.

- Többváltozós függvények mindenféle deriváltjai nagyon sokszor előkerülnek. Ezek elvileg arra valók, hogy jellemezzék a függvény valamiféle „változási gyorsaságát” egy adott helyen; több változó esetén mindenféle irányú „elmozdulásra” külön-külön.

Bevezető fogalom a **parciális derivált**. Kiszemeljük valamelyik változót; a függvénynek az ő szerint való parciális deriváltja azt jelenti, hogy a többi változót (és/vagy paramétert) fixen tartva elvégezzük a deriválást. A parciális deriválást (az egyváltozós függvények rendes, eddig is ismert deriváltjától való megkülönböztetésekképpen) görbe, stilizált görög delta betűvel jelöljük, így: ∂ .

Például a következő háromváltozós függvényre (a változókat x -szel, y -nal és z -vel jelölve) meghatározhatjuk a parciális deriváltakat (*ellenőrizzük le ezeket!*):

$$f(x, y, z) = \frac{\sin(x^2 y)}{z} + x^3 \operatorname{th} z \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy \cos(x^2 y)}{z} + 3x^2 \operatorname{th} z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2 \cos(x^2 y)}{z}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{\sin(x^2 y)}{z^2} + \frac{x^3}{\operatorname{ch}^2 z}.$$

Amikor tehát pl. „ x szerint parciálisan deriválunk” (így mondjuk), akkor y -t és z -t konstans számnak tekintjük. Gyakoroljuk ezt, eleinte összekeverődhetünk konkrét függvények felírásánál.

- Kiegészítés: létezik az a fogalom is (visszatérünk ide), hogy egy többváltozós f függvény **differenciálható** Dom f egy pontjában. (Pl. hogy az x -től és y -től függő $f(x, y)$ függvény differenciálható egy (x, y) pontban). Ez olyasmit jelent, hogy a pont körül a függvény „közelíthető lineáris függvényvel”. (Egyváltozós, adott x_0 -ban differenciálható függvény is ugye a pont közelében „kb. lineáris”, hiszen $f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0)$.) Meglátjuk majd, hogy többváltozós függvényeknél a differenciálhatóság eredendően **többet jelent, mint** csupán hogy léteznek külön az x , y , stb. változók szerinti **parciális** deriváltak. Az esetek nagy többségében azonban a parciális deriválhatóság már elég ahhoz, hogy *maga a függvény is* differenciálható legyen¹⁰⁶.

- Ha „a szövegkörnyezetből egyértelmű”, hogy mik a függvény változói, akkor elég az eddigi jelölés; ha azonban elbonyolódik a helyzet, nem árt külön kijelölni, hogy miknek a változtatásának hatá-

¹⁰⁵ A *para* szóelőtag maga is olyasmit jelent görögül, hogy „mellett”, „mellékes”; a *méter* szó itt pedig „mérőszám”-nak felel meg. A *paraméter* tehát olyan jel, ami még „mellétesz” információt, mérőszámot.

¹⁰⁶ Be lehet bizonyítani, hogy 1) ha a többváltozós függvény differenciálható, akkor a parciális deriváltjai is léteznek; 2) ha a parciális deriváltak *folytónosak* egy pont környékén (ez „szép egészséges képlettel felírt” függvényekre szinte mindig teljesül), akkor maga a függvény is differenciálható ott. Amúgy simán a parciális deriváltak létezéséből még az sem következik, hogy a függvény folytonos (nemhogy az, hogy differenciálható). A példát lusta vagyok lerajzolni: legyen az $f(x, y)$ kétváltozós függvény olyan, hogy $f(x, y) = 1$, ha $0 < y < x^2$ (nagyon határozottan kisebb, nem kisebb-egyenlő van itt); és legyen $f(x, y) = 0$ máshol. Lássuk be (rajzoljuk le a síkot, és színezzük ki, ahol $f = 1$), hogy ez az $f(x, y)$ függvény a $(0, 0)$ pontban nem folytonos, de ott minden parciális deriváltja létezik (és nulla).

sára vagyunk kíváncsiak a parciális deriválásnál. Pl. ha x -szel, y -nal és z -vel jelöltük a változókat, akkor szinte mindig hallgatólagosan hozzáértjük, hogy az x szerinti parciális deriválás során y -t és z -t állandónak kell tartani, de ha akarjuk, külön kijelölhetjük ezt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{helyett azt írhatjuk, hogy} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{y=\text{const}, z=\text{const}}, \quad \text{vagy rövidítve:} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{y,z}.$$

Általában x, y, z *tényleg* három egyenrangú változót jelöl, de nem mindig. Ha nagyon egyértelmű, hogy mik a változók (pl. ilyen x, y, z esetre), akkor **még rövidebb jelölést** is lehet használni:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \partial_x f, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \equiv \partial_y f, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \equiv \partial_z f.$$

Néha (különösen, ha hosszú a formula) külön is szokták írni a parciális deriválást (mintegy „operátorként, ami hat a mögötte lévő dologra”); így: $\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial x} f$.

• Ugyanúgy, ahogyan „rendes”, egyváltozós függvényeket is lehet többször deriválni, **parciális deriváltakat is lehet többször** alkalmazni. Minden további nélkül létezhet pl. egy $f(x, y, z, \dots)$ többváltozós függvénynek x szerint kétszeres parciális deriváltja, jelben: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$.

Megint egy teljesen hasraütéses példát hozva (a számolást azért *ellenőrizzük!*):

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &:= \frac{\sin(x^2 y)}{xz} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x^2 y z \cos(x^2 y) - z \sin(x^2 y)}{x^2 z^2} = \frac{2y}{z} \cos(x^2 y) - \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 z} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dots = -\frac{4xy^2}{z} \sin(x^2 y) - \frac{2y}{xz} \cos(x^2 y) + \frac{2 \sin(x^2 y)}{x^3 z}. \end{aligned}$$

Persze ilyen függvényeket (közös nevezővel, kiemelve ezt-azt, stb.) más alakban is fel lehet éppen írni (ha pl. a deriválási szabályokat más sorrendben alkalmazzuk, más alak is jöhet ki elsőnek); ez is helyes, ha „más” jött ki, ellenőrizzük, hogy az ugyanez.

• Érdekesebb dolog adódik, ha először egyik, aztán másik változó szerinti deriválunk. Megint a példánknál (*ezt aztán **tényleg** ellenőrizzük, nagyon lényeges!!!*):

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &:= \frac{\sin(x^2 y)}{xz} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x^2 y z \cos(x^2 y) - z \sin(x^2 y)}{x^2 z^2} = \frac{2y \cos(x^2 y)}{z} - \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 z}, \\ &\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{z} \cos(x^2 y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &=? = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2y \cos(x^2 y)}{z} - \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 z} \right) = \frac{2}{z} \cos(x^2 y) - \frac{2x^2 y}{z} \sin(x^2 y) - \frac{1}{z} \cos(x^2 y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{1}{z} \cos(x^2 y) - \frac{2x^2 y}{z} \sin(x^2 y), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) =? = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{z} \cos(x^2 y) \right) = \frac{1}{z} \cos(x^2 y) - \frac{2x^2 y}{z} \sin(x^2 y).$$

Az eredmény (amit egy kis átalakítás után láthattunk be): két különböző változó szerinti parciális deriválásnál **a kétféle sorrendben ugyanaz** adódott.

• Akármilyen példára (ha maga az f függvény kétszer folytonosan differenciálható a vizsgált pontban) igaznak bizonyul ugyanez: a különböző változók szerinti parciális deriváltak (ha a többi

változót tartjuk fixen) **felcserélhető**. Kipróbálgathatjuk példákon; tényleg igaz¹⁰⁷. Rendesen *bebizonyítani* ezt a tételt viszont nehezebb; mindenesetre álljon itt azért kimondva, névvel:

Young-tétel: ha $f(x, y, \dots)$ kétszer folytonosan differenciálható, akkor:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{y=\text{const}} \right) \Big|_{x=\text{const}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x=\text{const}} \right) \Big|_{y=\text{const}}.$$

Ugyanez igaz bármelyik másik változópárra is. Részletesen kiírtam, hogy a parciális deriválás során mit is kell változtatni és mit kell állandónak tartani, de leginkább csak röviden szoktuk írni:

Kétszer folytonosan differenciálható $f(x, y, \dots)$ függvényre: $\partial_x \partial_y f = \partial_y \partial_x f$.

Sőt, ilyen tömör jelölést is szoktunk alkalmazni:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

észen tartva, hogy mindegy, melyik deriválást „csináljuk” előbb, és a másikat azután.

A Young-tétel még egy fontos újabb módon megfogalmazva:

Young-tétel másképp: kétszer diffható $f(x, y, \dots)$ többváltozós függvényre $\partial_k \partial_l f$ **szimmetrikus** mátrix minden pontban.

A következőkben igen sokszor alkalmazzuk a most a parciális deriválásról összeszedett tudást.

8.3. Egyszerű görbék és paraméterezései

Sokszor van szükség arra, hogy a síkon vagy a térben valamilyen „szavakkal elmagyarázott” görbét (vagy a térben akár: felületet) matematikailag megfogalmazzunk, egyenletét felírjuk.

- A síkgörbékkel kezdjük. Legyen adott a koordinátarendszer: x - y . Van, hogy a görbét megadhatjuk **explicit alakban**: ez azt jelenti, hogy a görbe egy $y=f(x)$ módon felírt függvény grafikonja. Pl. az $y=\alpha x^2$ kifejezés megad egy felfelé nyitott, origó csúcsú parabolát (különböző α értékekre más és más parabolát), az $y = ax$ egy origón átmenő a meredekségű egyenest, stb.
- Néha kellemesebb a görbét **implicit alakban** megadni. Ez azt jelenti, hogy megadunk egy *kétváltozós*, x -től és y -től függő függvényt, jelben mondjuk $F(x, y)$ -t, és keressük azon (x, y) pontokat, amikre $F(x, y) = C$, ahol C valamilyen állandó. Pl. ha $F(x, y) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, és $C := 1$, akkor az $F(x, y) = C$ implicit kifejezés ismert módon egy origó középpontú ellipszist ad meg.
- Emlékezzünk a 7.7. szakaszra, ahol általános síkbeli másodfokú kifejezés zérushelyeit vizsgálva (azaz: az $\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma xy + Ax + By + K = 0$ típusú egyenleteket „megoldva”) rájöttünk, hogy ezek kúpszeleteket határoznak meg! A mostani szóhasználattal azt mondhatjuk, hogy ott tulajdonképpen általános síkbeli helyzetű kúpszelet-görbék (ellipszis, parabola, hiperbola) implicit egyenleteit találtunk meg (és rendszereztük).
- Adott görbéhez az explicit alakban felírt egyenlete (ha van) egyértelmű. Az implicit alak már nem teljesen¹⁰⁸. Adott explicit alakot mindig implicit formába is tudunk írni: ha $y = f(x)$, akkor

¹⁰⁷Ha úgy tünne, hogy nem, akkor vagy valamit elrontottunk, vagy még egyszerűsíthetünk.

¹⁰⁸ Pl. könnyű látni, hogy az alábbi alakok is mind ugyanazt az ellipszist adják meg:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 5 = 6, \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^3 = 1, \quad \text{sh} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = 0, \quad \text{stb.}$$

nyilván $f(x)-y=0$, ami ugyanazon görbe az implicit egyenletének tekinthető. Pl. az $\alpha x^2-y=0$ tulajdonképpen egy parabola implicit egyenlete.

Érdekesebb a kérdés visszafelé: implicit alakból tudunk-e explicit alakot készíteni, azaz egy $F(x,y)=C$ képletből ki tudjuk-e fejezni y -t, mint x függvényét¹⁰⁹? Nem mindig: pl. az ellipszisre:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

ahol a $\pm$ a gyökvonás kétértelműségéből jön. Ez így nem *egy* darab explicit képlet az *egész* ellipszisre. Persze most nem nehéz rájönni, hogy a $-$ eset az (expliciten kifejezett) „alsó ívnek”, a $+$ eset pedig a „felső ívnek” felel meg; az ellipszis ezekből van összeragasztva. Ha azonban pl. „végig szeretnénk menni az egész ellipszisen”, akkor néha igen kényelmetlen tud lenni, ha mindent külön az egyik, külön a másik ívdarabra is végig kell mondani. Tehát noha az explicit kifejezés esetleg „jobban esik”, az implicit alak működhet olyan görbékre is, amikre az explicit alak nem.

• A görbék **paraméteres alakban** is megadhatók. Hallgassunk arra a képzetünkre, hogy a görbék a kétdimenziós sík „egydimenziós” részhalmazai, más szóval: egy számmal megadhatom, hogy hol vagyok rajtuk. Az ilyen „számot” fogjuk paraméternek hívni (jele lehet akármi, szokásosan: p , t , s , bármi), és az, hogy megadom, hogy a paraméter adott értékének a görbe melyik pontja felel meg, éppen azt jelenti, hogy megadom az $x(p)$ és $y(p)$ függvényeket.

Kicsit normálisabban megfogalmazva: legyen adott egy $I := [p_1, p_2]$ szakasz (intervallum) a valós számokon belül, legyen a sík jele $\mathbb{R}^2$, azaz az (x, y) számpárok halmaza. Egy $G : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvényt úgy is felfoghatunk, mint az $x(p)$ és $y(p)$ két függvény „együttesét”. Egy ilyen $x(p)$, $y(p)$ függvényt tehát egy síkgörbe paraméterezésének, paraméteres alakjának hívunk. Megköveteljük még azt is, hogy a függvények differenciálhatóak legyenek, azért, hogy a görbe „szép sima” legyen. Lényeg tehát: amíg a p paraméter végigmegy a $[p_1, p_2]$ szakaszon, az $(x(p), y(p))$ pont „végigfut” a görbén. **Zárt görbe** az, amire $x(p_2)=x(p_1)$ és $y(p_2)=y(p_1)$.

Példa: az origó középpontú R sugarú kör egy lehetséges paraméterezése a φ számmal a következő:

$$\varphi \in [-\pi, \pi], \quad x(\varphi) = R \cos(\varphi), \quad y(\varphi) = R \sin(\varphi).$$

A most használt φ paraméternek persze világos a geometriai jelentése is: ő a középponti szög.

• Adott görbének végtelen sokféle paraméterezése lehetséges. Hogy mást ne mondjak: ha $x(p)$, $y(p)$ egy paraméterezés, és megadunk valamilyen $p = p(t)$ kölcsönösen egyértelmű függvényt a p és a t valós számok között, ahol a t valamilyen $[t_1, t_2]$ tartományon végigfutva $p(t)$ is végigfut valamilyen $[p_1, p_2]$ tartományon, ahol $p_1 = p(t_1)$ és $p_2 = p(t_2)$, akkor az $x(p(t))$, $y(p(t))$ is jó paraméterezés ugyanarra a görbére. Pl. az iménti körre néhány egyéb paraméterezés (csak a játék kedvéért):

φ	$\varphi = \omega t$	$\varphi = p^3$	$\varphi = 2 \arctg s$
$\varphi \in [-\pi, \pi]$	$t \in \left[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}\right]$	$p \in [-\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi}]$	$s \in [-\infty, \infty]$
$x(\varphi) = R \cos(\varphi),$	$x(\varphi) = R \cos(\omega t),$	$x(p) = R \cos(p^3),$	$x(s) = R \frac{1-s^2}{1+s^2},$
$y(\varphi) = R \sin(\varphi).$	$y(\varphi) = R \sin(\omega t).$	$y(p) = R \sin(p^3).$	$y(s) = R \frac{2s}{1+s^2}.$

¹⁰⁹A latinos szavak körülbelüli jelentése is erre utal: explicit=„kifejezett”, implicit=„bennfoglalt”.

• Felmerül a kérdés: adott görbére **melyik a legjobb paraméterezés?** Sőt, egyáltalán: hogyan találhatunk „adott” (azaz: szavakkal elmesélt tulajdonságú, helyzetű) görbe esetén akárcsak egy jó paraméterezést is? **Nincs általános recept.** Sok fontos speciális esetben **vannak ismert**, jó tulajdonságú paraméterezések; ezekből mindjárt előveszünk néhányat. Több ilyennek az ismerete után pedig kialakul egyfajta „**érzék**” arra, hogy hogyan kell új esetben is megtalálni egy megfelelő paraméterezést. Hogy „a legjobbat” találtuk-e meg adott esetben, azon az múlhat, hogy a számolási feladat, amire használni akarjuk a paraméterezést, „elég egyszerűvé válik-e” vagy nem.

* * * *

Lássunk példákat, amelyeket érdemes „fejből” tudni, hogy kialakuljon az érzék!

• Először pár szó essék **egyenesekről** (amik nem görbülnek, de „görbék” főnévként...). Egyenest mindig x -ben és y -ban *lineáris* képlettel adunk meg, és fordítva is: lineáris képlet egyenest ad meg. Néhány példa különféle egyenes-egyenletekre, amelyek különböző „követelményeket” tudnak:

$$\begin{aligned} y = ax + b : & \quad a \text{ a meredeksége, és } b\text{-nél metszi az } y \text{ tengelyt.} \\ (y - y_0) = a(x - x_0) : & \quad a \text{ a meredeksége, és átmegy egy adott } (x_0, y_0) \text{ ponton.} \\ v_x(x - x_0) + v_y(y - y_0) = 0 : & \quad \begin{aligned} & \text{átmegy egy adott } (x_0, y_0) \text{ ponton, és merőleges egy adott} \\ & \underline{v} \equiv (v_x, v_y) \text{ vektorra (emlékezzünk a skalárszorzásra!)} \end{aligned} \\ (x - X_1)(Y_2 - Y_1) = (X_2 - X_1)(y - Y_1) : & \quad \text{átmegy az } (X_1, Y_1) \text{ és az } (X_2, Y_2) \text{ pontokon.} \\ x = x_0 + V_x t, \quad y = y_0 + V_y t : & \quad \begin{aligned} & \text{átmegy az } (x_0, y_0) \text{ ponton, és a } \underline{V} \text{ irányban áll;} \\ & \text{a } t \text{ paraméterrel „szaladunk végig” rajta.} \end{aligned} \end{aligned}$$

Ezeket megjegyezhetjük fejből, de könnyű rekonstruálni őket: mindig lineáris összefüggést kell kapunk, és „ízlésesen bele kell rakni” a megadott adatokat... Most áttérünk „komolyabb” görbékre.

• Tekintsünk először egy R sugarú, origó közepű **kört**! Már láttuk egy paraméterezését:

$$\text{Origó középpontú } R \text{ sugarú kör:} \quad \varphi \in [-\pi, \pi] \quad \begin{aligned} x(\varphi) &= R \cos \varphi, \\ y(\varphi) &= R \sin \varphi. \end{aligned}$$

Elég nyilvánvaló, hogy ez jó paraméterezés, de hogy lehetett erre rájönni annak idején?

Ha nézegetjük azt, hogy $x^2 + y^2 = R^2$, előbb-utóbb átírjuk úgy, hogy $(x/R)^2 + (y/R)^2 = 1$, itt pedig eszünkbe jut, hogy akármilyen W -re $\sin^2 W + \cos^2 W = 1$. Ha tehát $x/R = \cos W$, $y/R = \sin W$, akkor *automatikusan biztosan a körön mozgok*, ha W -t változtatgatok. Már csak ki kell gondolni, hogy milyen W -tartományon kell végigfutni, hogy az egész kört egyszer és csak egyszer járjuk be. Jó paraméterezést kapunk; az csak „hab a tortán”, hogy ennek W -vel jelölt paraméternek geometriai jelentése is van: ő a középponti szög, ami miatt mégis inkább φ -vel jelöljük; kész.

• Mi a helyzet az **ellipszissel**? Itt $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$, ahol a a nagytengely, b a kistengely; nem tűnik rossz próbálkozásnak a következő paraméterezés:

$$\begin{aligned} \text{Origó közepű, „rendes állású”} & \quad x(\tilde{\varphi}) = a \cos \tilde{\varphi}, \\ a \text{ és } b \text{ tengelyű ellipszis:} & \quad y(\tilde{\varphi}) = b \sin \tilde{\varphi}, \quad \text{és } \tilde{\varphi} \in [-\pi, \pi]. \end{aligned}$$

Ha tudjuk, hogy $\cos^2 \tilde{\varphi} + \sin^2 \tilde{\varphi} = 1$, tényleg rájövünk, hogy akármennyi is a $\tilde{\varphi}$, tényleg az ellipszisen mozgunk. Ha az előjeleket végiggondolva azt is belátjuk, hogy ha egyszer végigmegyünk a megadott tartományon, akkor valóban egyszer és csak egyszer végigmegyünk *az egész* ellipszisen, akkor készen is vagyunk. Persze ha $a=b$, akkor éppen az a sugarú kört kapom vissza; jó vicc.

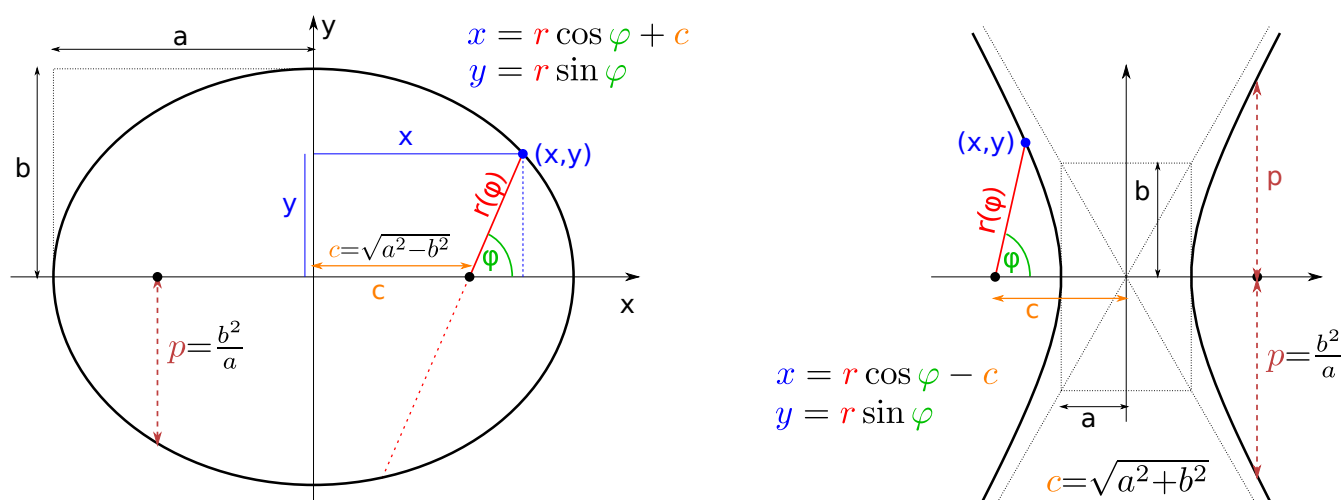
Azért raktam (ideiglenesen) hullámot $\tilde{\varphi}$ -ra mert ha $a \neq b$, akkor ez a $\tilde{\varphi}$ paraméter egyáltalán nem az $x(\tilde{\varphi})$, $y(\tilde{\varphi})$ koordinátájú pont „középponti szöge”! Azaz: noha amit láttunk, az az ellipszisnek jó (talán „a legjobb”) paraméterezése, mégis, a paraméternek nincs egyszerű geometriai jelentése.

• Ha már itt tartunk, találjuk ki a **hiperbola** (az egyik ág) paraméterezett alakját! Itt lesz világos, hogy a sh , ch függvényeket miért is hívtuk „hiperbolikus” függvényeknek: ahogy $\cos^2 + \sin^2 = 1$, ugyanúgy ugyebár $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$. Ez „ott van az agykérgünkben”. Így tehát a hiperbolára (origó közepű, vízszintesen „nyitott”, a és b tengelyű, ld. a korábbi 17. ábrát!) azt kaphatjuk, hogy

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \begin{array}{l} \text{A jobb oldali ág egy jó} \\ \text{paraméterezése lehet:} \end{array} \quad \omega \in [-\infty, \infty] \quad \begin{array}{l} x(\omega) = a \text{ch } \omega, \\ y(\omega) = b \text{sh } \omega. \end{array}$$

Ismerve a ch , sh függvényeket ellenőrizzük, hogy ha ω végigfut $\mathbb{R}$ -en, a pontunk végigfut az egész hiperbolaíven! A kapott alakot hívhatjuk a hiperbolaív „standard” paraméterezésének. Az ω paramétert azonban nem valami „geometriai jelentése” alapján vezettük be¹¹⁰.

• **Kiegészítés:** a Nap körüli bolygómozgás vizsgálatakor előkerül az ellipszis, hiperbola, parabola olyan egyenlete, ami megmondja, hogy a görbe pontjainak a(z egyik) *fókuszponttól* vett távolsága (r) hogy függ a tengelytől mért *szögtől* (φ). Egy görbe ilyen $r(\varphi)$ alakú megadását *polárkoordinátás* alaknak hívják; a kúpszeletek fókuszpontból nézett polárkoordinátás alakját keressük tehát.



23. ábra. Ellipszis (bal oldal) ill. hiperbolaív (jobb oldal) fókuszpontból nézett polárkoordinátás egyenletének levezetéséhez segédlet; ld. a szöveget is.

Kezdjük az ellipszissel; a 23. ábra segíthet. Az r távolsággal és a φ szöggel könnyű kifejezni a kerületi pont szokásos x , y koordinátáit, és ha tudjuk az ellipszis egyenletét, beírhatjuk ezeket oda:

$$\begin{array}{l} x = c + r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ahol } c = \sqrt{a^2 - b^2}, \\ \text{a fókuszpont távol-} \\ \text{sága az origótól.} \end{array} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(c + r \cos \varphi)^2}{a^2} + \frac{(r \sin \varphi)^2}{b^2} = 1.$$

Ezzel megkaptuk az összefüggést r és φ között. Elvégezzük a négyzetreemelést, és úgy rendezzük, hogy r -re hajthassunk (azt akarjuk kifejezni a φ függvényében). Bővítünk $a^2 b^2$ -tel, és észben tartjuk c , a és b kapcsolatát (hogy $c = \sqrt{a^2 - b^2}$), valamint „kiszűrjük” a $\sin$ -t, tudva, hogy $\sin^2 + \cos^2 = 1$.

¹¹⁰Érdekesség: *van* az ω -nak jelentése. Az origóból a pontunkba menő szakasz, a hiperbolaív és a hiperbola valós a tengelye által határolt „egyik oldalon görbe háromszög” előjeles területe $ab\omega$. Aki akarja, számítsa ki integrálással!

Másodfokú egyenletet kapunk¹¹¹:

$$(a^2 - c^2 \cos^2 \varphi) r^2 + 2rb^2 c \cos \varphi - b^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = b^2 \frac{\pm a - c \cos \varphi}{a^2 - c^2 \cos^2 \varphi}.$$

A + előjelű gyököt választjuk. (A másik negatív: ez az a lehetőség lett volna, amit a 23. ábra bal oldalán szaggatott piros jelöl, amikor a φ irányú egyenes „negatív irányban” metszi az ellipszist.) A nevezőben szorzatot felismerve egyszerűsíthetünk. Új jelöléssel így szokták írni az eredményt:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad \text{ahol } \varepsilon = \frac{c}{a}, \quad p := \frac{b^2}{a}.$$

Az $\varepsilon < 1$ excentricitást már ismerjük. A p -vel jelölt mennyiség jelentése: a fókuszponttól a nagytengelyre merőlegesen az ellipszisív ilyen messze van (ellenőrizzük!), ezt jelöltem a 23. ábrán is¹¹².

• Hiperbolára is megcsinálhatjuk ugyanezt (ld. a 23. ábra jobb oldalát). Ugyanazok a lépések, csak a fókuszpont helye $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ és egyenlet $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Megdöböntően ugyanolyan az eredmény:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad \text{ahol } \varepsilon = c/a > 1 \text{ a hiperbola excentricitása, és } p := b^2/a, \text{ az ellipszishöz hasonló mennyiség.}$$

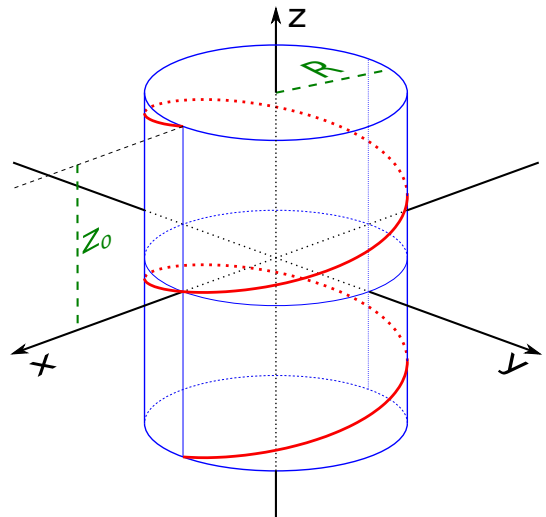
Parabolára (ami ugye „végtelenül kinyílt ellipszis”) is is ugyanez adódik, itt az excentricitás $\varepsilon = 1$.

• **Térbeli görbék** esetén ha a görbe véletlenül valamelyik koordinátságban van, akkor használhatjuk a síkgörbékre látott dolgokat. „Igazi” térgörbék esetén explicit és implicit alak helyett valójában leginkább a paraméterezett alak a célravezető: ilyenkor a görbe pontjainak x, y, z koordinátáit kell megadni egy paraméter (pl. p) függvényében, így: $x(p), y(p), z(p)$. Térgörbéknél sincs általános módszer a jó paraméterezés megtalálására, sőt *egy* jóéra sem; *gondolkodni* kell. Itt csak egy **példa** álljon arra, hogy hogyan lehet „elmagyarázott” görbe paraméteres alakját felírni.

Egy *csigavonal* egy R sugarú, z tengelyű henger palástján mászik föl egyenletesen körbe, és egy körülforduláshoz z_0 magasságemelkedés tartozik. Adjuk meg ennek a görbének egy paraméterezett alakját!

Mi lehetne a paraméter (ami egyértelmű megfeleltetésben van a görbe pontjaival)? Eszünkbe juthat, hogy „felülről nézve” körbe-körbe mozgunk, a kört pedig jó a középponti szöggel paraméterezni. Ahogy most φ változik, úgy emelkedik a z koordináta. Így tehát (megfelelően „belőve” a z emelkedési sebességét, hogy φ egy körülfordulása (2π) alatt éppen z_0 -t emelkedjen) arra jutunk, hogy

$$\begin{aligned} \text{paraméter:} \quad & x(\varphi) = R \cos(\varphi), \\ & y(\varphi) = R \sin(\varphi), \\ & z(\varphi) = z_0 \frac{1}{2\pi} \varphi, \\ \varphi \in [-\infty, \infty] \end{aligned}$$



24. ábra. Spirálgörbe rajza; paraméterezéséhez segédletként.

¹¹¹ Így volt érdemes átalakítani; persze arra, hogy „mit hogy érdemes”, akkor jön csak rá az ember, amikor már végigcsinálta (elsőre valószínűleg nem a legkényelmesebb módon).

¹¹² Ezt a p mennyiséget — én kérek elnézést — az ellipszis *paraméterének* (így, egyes számban) is hívják; ennek a névnek semmi köze az ellipszis mint görbe paraméterezett felírásához.

8.4. Felületek és paraméterezéseik

- A háromdimenziós térben egy felületet *implicit* vagy *paraméteres alakban* is megadhatunk:

Implicit alak: adott $F(x, y, z)$ függvény $\Rightarrow$ keressük azon (x, y, z) pontokat, amikre $F(x, y, z) = 0$.

Állítás: jó esetben, azaz ha $F(x, y, z)$ elég sima (legalábbis differenciálható) egy halmazon, az $F(x, y, z) = 0$ egyenlet (ezen a halmazon belül) egy „szép sima felületet” jelöl ki. Persze ha 0 helyett más konstans C valós számot írunk a jobb oldalra, akkor is egy (másik) felületet kapunk.

- Egy felület **paraméteres alakban** való megadásához *két* valós változó (paraméter) kell:

Egy felület paraméterezése: megfelelő $x(u, v)$ $y(u, v)$ $z(u, v)$ függvények megadása.

Azaz: úgy *paraméterezhetünk* egy felületet, hogy pontjainak x , y , z koordinátáit megadjuk két „paraméter” függvényében (ezeket itt most u -val és v -vel jelöltem), amelyek értékei egyértelműen meghatározzák, hogy hol vagyunk a felületen¹¹³, és ha u és v a megfelelő tartományaikon végigfutnak, a felületen is végigfutunk. Hogy hogy kell paraméterezést találni, az itt is „érzék” kérdése.

- Egy x -ben, y -ban és z -ben **lineáris** egyenlet **síkot** ad meg, akár implicit, akár paraméteres. Ez „oda-vissza” működik, jó érzékben tartani. Példák:

$$v_x x + v_y y + v_z z = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = 0 \quad \text{olyan (az origón átmenő) sík egyenlete,}$$

ami merőleges a $\underline{v} \equiv (v_x, v_y, v_z)$ vektorra.

$$v_x(x-x_0) + v_y(y-y_0) + v_z(z-z_0) = 0 \quad \text{átmegy az } (x_0, y_0, z_0) \text{ adott ponton, és}$$

merőleges a $\underline{v} \equiv (v_x, v_y, v_z)$ vektorra.

A következő paraméteres sík-egyenlet (ahol u és v külön-külön az egész $\mathbb{R}$ -et befutják) annak felel meg, hogy egy sík pontjaiba két adott vektor összes lineárkombinációival éppen eljuthatunk:

$$\begin{aligned} x(u, v) &= x_0 + uA_x + vB_x, \\ y(u, v) &= y_0 + uA_y + vB_y, \\ z(u, v) &= z_0 + uA_z + vB_z, \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{r}(u, v) = \underline{r}_0 + u\underline{A} + v\underline{B},$$

Átmegy egy adott $\underline{r}_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ ponton, és az adott $\underline{A} \equiv (A_x, A_y, A_z)$ ill. $\underline{B} \equiv (B_x, B_y, B_z)$ vektorok feszítik ki az irányát. ($\underline{A} \neq \lambda \cdot \underline{B}$).

- Nézzük meg a **körhenger** paraméterezését! Ha z irányú a tengely és az alapkör sugara R , akkor:

$$\begin{aligned} \text{Paraméterek: } z, \varphi \quad & x(z, \varphi) = R \cos \varphi, \\ z \in [-\infty, \infty], \quad & y(z, \varphi) = R \sin \varphi, \\ \varphi \in [-\pi, \pi], \quad & z(z, \varphi) = z. \end{aligned} \quad \text{Ez a } z \text{ irányú } R \text{ sugarú körhenger}$$

palástjának jó paraméterezése.

Az utolsó egyenlet $z = z$ alakú: itt z egyrészt a koordináta, amire kíváncsiak vagyunk, másrészt az egyik paraméter is, hiszen ez az egyik olyan változó, ami megmondhatja, hol is vagyunk.

- „Következő fokozat”: paraméterezzük egy **kúp** (egyenes körkúp) oldalpalástját! A kúp nyíljon a z tengely pozitív irányába, és nyílásszöge legyen α , ennyi elég, hogy „szavakban elmagyarázzuk”.

¹¹³ Eddig a „dimenzió” fogalmát matematikailag csak vektorterekre értelmeztük; egyelőre nem igazán értelmes, hogy mit is jelent az, hogy a tér egy („felület”-nek vagy „görbé”-nek nevezett) részhalmaza hány dimenziós. Ilyen részhalmazok dimenziószáma *éppen azt jelenti*, hogy hány paraméterrel mondhatjuk meg, hogy hol vagyunk rajtuk.

Hogyan paraméterezhetjük a kúp felszínét? A körkörös szimmetria sugallja az eddigi beidegződések alapján, hogy egy φ („azimut”)szög jól jöhet. A másik paraméter lehet maga a z magasság (0-tól ∞ -ig változva). Azt kell kigondolni, hogy adott z -nél a kúp metszete kör, aminek sugara nő, ahogy z nő: konkrétan ha α a kúp nyílásszöge, akkor a metszatkör sugara $z \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Így tehát:

Egyenes, $z > 0$ állású körkúp, adott α nyílásszöggel:	Paraméterek: z, φ , $z \in [0, \infty], \varphi \in [-\pi, \pi]$,	$x(\varphi, z) = z \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \varphi$, $y(\varphi, z) = z \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \varphi$, $z(\varphi, z) = z$.
--	---	---

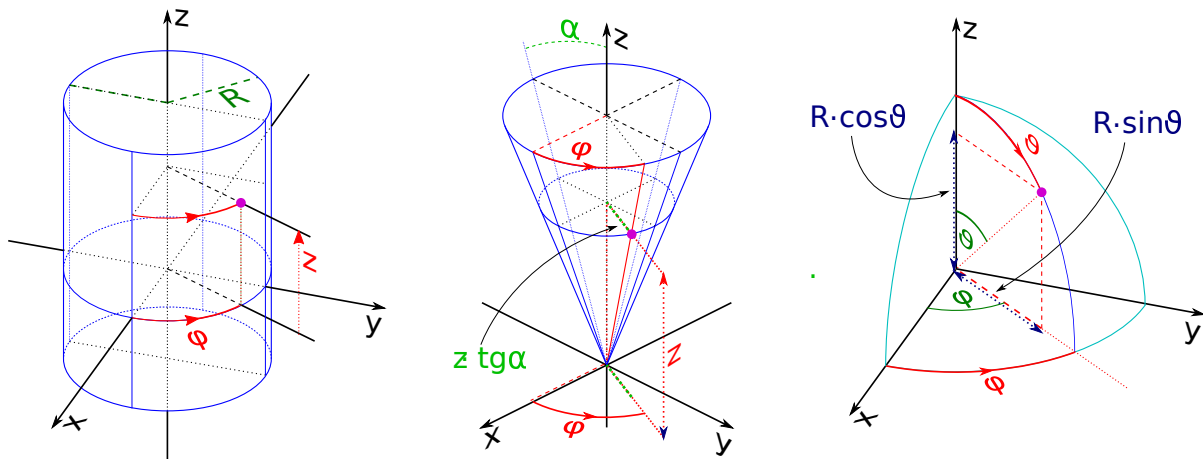
Még egyszer, a félreértések elkerülése végett: az eddigi összes (és ezután felírt) paraméterezések csupán egy-egy lehetőséget jelentenek az adott felület végtelenféle paraméterezhetőségei közül; noha esetleg „a legjobbat” írjuk most fel, adott esetben másmilyen paraméterezés is használható.

• A **gömb** felszínének paraméterezése sokszor előkerül. A (föld)gömb egy pontját megadja ugyebár két szög („szélességi és hosszúsági fok”). Fizikus hagyomány szerint módosítunk a földrajzhoz képest: a „szélességet” az Egyenlítő helyett az „északi sarktól” mérjük (ezt a szöget *polárszög*nek hívjuk és leginkább ϑ -val jelöljük), és az „északi sarkot” a z tengely irányába állítjuk. A „hosszúsági kört” megadó szög neve *azimut*szög, jele leginkább φ , és ezt az x tengelytől y irányba fordulva mérjük. **Jegyezzük meg** tehát, hogy az R sugarú gömbfelszín jó paraméterezése a következő:

Paraméterek: ϑ polárszög, φ azimut	$x(\vartheta, \varphi) = R \sin \vartheta \cos \varphi$,
Tartományok: $\vartheta \in [0, \pi]$ és $\varphi \in [-\pi, \pi]$.	Ezekkel: $y(\vartheta, \varphi) = R \sin \vartheta \sin \varphi$,
$\vartheta = 0$ ill. $\vartheta = \pi$: É-i ill. D-i sark.	$z(\vartheta, \varphi) = R \cos \vartheta$.

Ez a gömbfelszín „standard” paraméterezése. Itt adott gömbfelszínen mozogtunk; ha R -et is változtathatjuk, akkor az egész teret „befuthatjuk”. Az így egy ponthoz rendelt R, ϑ, φ számokat (amik tehát egyértelműen megadják, hogy hol van a pont) **gömbi koordinátarendszernek** nevezzük.

• A 25. ábra szemlélteti az eddigi felület-paraméterezéseket.



25. ábra. Körhengerfelület, kúppalást ill. gömbfelszín paraméterezéseihez segédlet. A pontot, amelynek paramétereit jelöltem, mindhárom ábrán lila pötty jelöli.

• A gömb paraméterezésénél érdemes esetleg megnézni, hogy hogyan lehet(ett volna) „fordítva” gondolkodni. Előhívhatjuk a Descartes-koordinátákban megfogalmazott gömbfelszín-definíciót:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad \text{másképp, egyből } z\text{-t ki-} \quad \left(\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} \right) + \frac{z^2}{R^2} = 1.$$

tüntetve (de ez nem baj):

Itt eszünkbe juthat, hogy nem hülyeség bevezetni egy ϑ , majd utána egy φ paramétert, így:

$$\frac{z}{R} = \cos \vartheta \quad \text{és} \quad \frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = \sin^2 \vartheta, \quad \text{utóbbiból pedig} \quad \frac{x}{R \sin \vartheta} = \cos \varphi, \quad \frac{y}{R \sin \vartheta} = \sin \varphi,$$

merthogy ugye $\sin^2 + \cos^2 = 1$ mindig. Tehát tényleg az $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ gömbfelszínen mozgunk, ha

$$x = R \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = R \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = R \cos \vartheta.$$

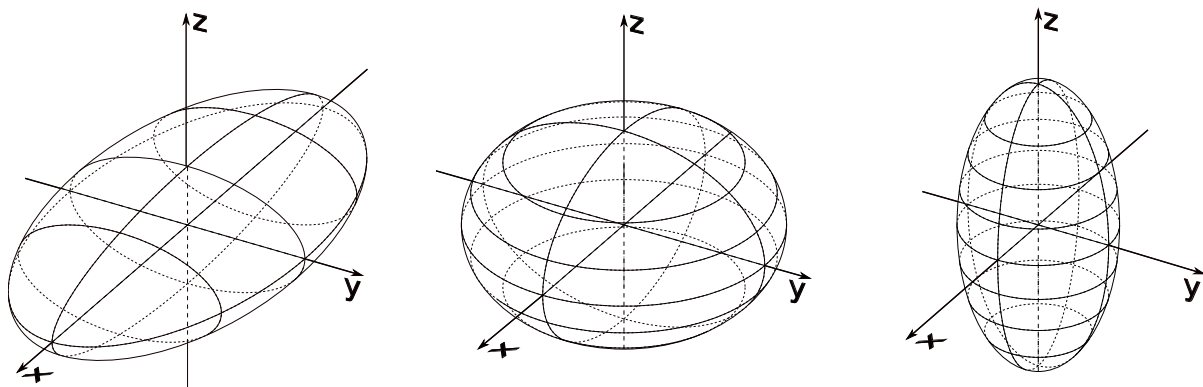
Így is eljutunk tehát a „standard” paraméterezéshez, ha ezután még végiggondoljuk (a koordináták ill. a $\sin$, $\cos$ függvények előjeleivel), hogy éppen a $\vartheta \in [0, \pi]$ és a $\varphi \in [-\pi, \pi]$ tartományokon kell végigmennünk ahhoz, hogy az egész gömbfelszínt pontosan egyszer „lefedjük”. Így nézve nem is feltétlenül volt szükség arra, hogy a ϑ , φ paraméterek (azaz: szögek) geometriai jelentése is egyből világos legyen; de persze az lesz előbb-utóbb, és akkor már hívhatjuk ϑ -t és φ -t a neveiken.

* * *

• Röviden megbeszéljük az ún. **másodrendű felületeket**; ezek a kúpszeletek (ellipszis, parabola, hiperbola) „háromdimenziós megfelelői”. A legegyszerűbb ilyen az **ellipszoid**, melynek egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{ahol } a, b, c \text{ adott hosszúságok} \\ \text{(az } x, y \text{ és } z \text{ irányú tengelyek).}$$

Ez éppen egy R sugarú gömb az x , y és z irányokban rendre a/R , b/R , c/R arányban megnyújtva.



26. ábra. Ellipszoidok szemléltetése: rendre általános ($a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$), lapított forgási ill. nyújtott forgási (ezeknél a z irányú tengely különböző). A tengelyirányú síkmetszetek ellipszisek, ill. a forgásiaknál a kitüntetett tengelyre merőlegesen körök.

A koordinátasíkokkal párhuzamos síkmetszetek ellipszisek; pl. az y - z síkban beláthatjuk ezt, ha adott $x = x_0$ értéknél keressük az y és z között érvényes összefüggést:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-x_0^2/a^2}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-x_0^2/a^2}\right)^2} = 1.$$

Valóban: az y - z irányban ellipszist kaptunk. (Ahogy x_0 -lal a „csúcsok”, $\pm a$ felé haladunk, egyre kisebbeket). A másik két tengelyirányban is ugyanígy adódik, hogy a síkmetszetek ellipszisek.

• Ha az ellipszoid mindhárom tengelye ugyanannyi, akkor ő gömb. Ha két tengely megegyezik:

Pl. legyen $a = c$, ekkor
 forgási ellipszoidot kapunk: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ vagyis másképp: $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

A síkmetszetek itt a „különc” tengelyre merőlegesen körök, így az ilyen ellipszoidok egy ellipszisnek a tengelye körül való megforgatásából származnak. *Lapított/nyújtott*: ha a nem egybeeső tengely rövidebb/hosszabb, mint a másik kettő.

• Az ellipszoid egyenlete tehát az ellipszisének „ízlésesen háromdimenziósított változata”, síkmetszetei ellipszisek. Ha elkezdünk szórakozni az előjelekkel, ún. **hiperboloidokat** kapunk:

3+: a, b, c tengelyű

ellipszoid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

2+, 1–: z irányú tengelyű

egyköpenyű hiperboloid:

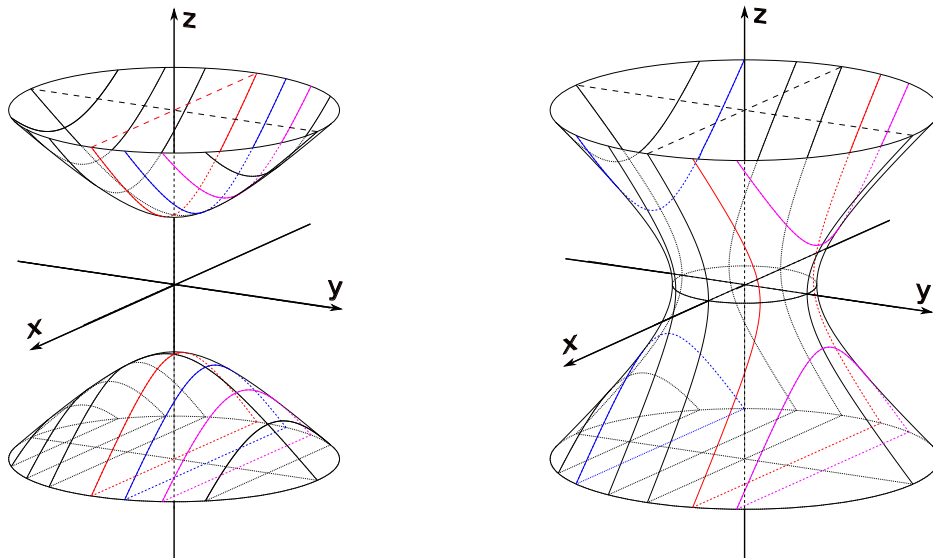
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

1+, 2–: z irányú tengelyű

kétköpenyű hiperboloid:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Persze (a hiperboloidoknál) a tengelyeket cserélgetve hasonló felületeket kapunk, csak más irányba állítva. Az alábbi 27. ábra segít; gondoljuk ki, hogy (mindkét fajta) hiperboloid síkmetszetei ellipszisek (a különc tengelyre merőlegesen), ill. hiperbolák (a többi koordinátasíkban).



27. ábra. Hiperboloidok (balra: kétköpenyű, jobbra: egyköpenyű), a z tengely irányába állítva. A tengelyekkel párhuzamos síkmetszetek ellipszisek (a z tengelyre merőlegesen), ill. leginkább hiperbolák; a kétköpenyűnél mindig a z -tengely a metszetek valós tengelye, az egyköpenyűnél nem mindig. Egyköpenyű hiperboloid síkmetszete hiperbola „helyett” lehet egyenespár is (ahol az egyik fajta hiperbolametszet „átmegy” a másik állásúba; ezt nem jelöltem). Erről ld. lentebb.

Itt is, ha a síkmetszetek ellipszisek helyett speciálisan körök, forgási hiperboloidokról beszélhetünk. Pl. az előző egyenletben $a=b$ -t írva:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 : \quad \begin{array}{l} z \text{ tengelyű egyköpenyű} \\ \text{forgási hiperboloid} \end{array}, \quad \frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 : \quad \begin{array}{l} z \text{ tengelyű kétköpenyű} \\ \text{forgási hiperboloid} \end{array}.$$

• A parabolyszerű háromdimenziós egyenletek (ahol egyik változó, most a példában a z , elsőfokon szerepel) paraboloidot ill. hiperbolikus paraboloidot adnak, a többi előjeltől függően.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0 : \quad \begin{array}{l} z \text{ tengelyű} \\ \text{paraboloid} \end{array}, \quad \text{speciálisan} \quad \frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z}{c} = 0 : \quad \begin{array}{l} z \text{ tengelyű} \\ \text{forgási paraboloid.} \end{array}$$

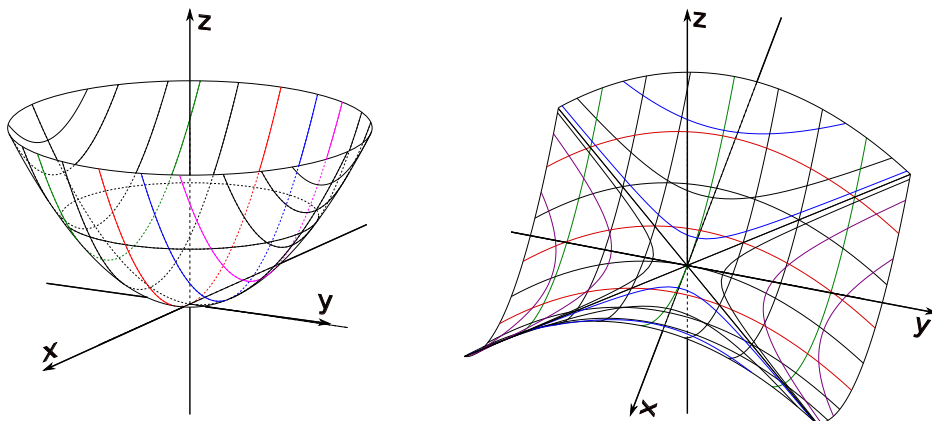
Ha a z -s tag előjele a másik lenne, az az x - y síkra vett tükrözést jelentene. A paraboloidok

tengelysíki metszetei parabolák ill. ellipszisek; a forgásiaké körök. Lássuk ezeket be, úgy, hogy pl. beírunk $z = z_0$ konstans, és ellenőrizzük, hogy a maradék egyenlet az x és y változóiban tényleg ellipszis-egyenlet, vagy $y = y_0$ konstans beírva az x és z változóiban parabolaegyenletet kapunk!

- Az utolsó lehetőség, amikor a z -s tag elsőfokú, és a másodfokú tagok ellenkező előjelűek:

$$\text{hiperbolikus paraboloid : } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0.$$

Itt az x ill. y tengelyre merőleges síkmetszetek parabolák (de a két síkban egymással ellentétes állásúak, nem úgy, mint a paraboloidnál), a z -re merőleges síkban pedig hiperbolák. Az alábbi 28. ábra szemlélteti a paraboloidot ill. a hiperbolikus paraboloidot a jellemző síkmetszeteikkel együtt.



28. ábra. Paraboloid (balra) és hiperbolikus paraboloid (jobbra) szemléltetése (utóbbi kicsit más szögből, hogy jobban látszon a lényeg). Tengelyekkel párhuzamosan a paraboloidok síkmetszetei parabolák ill. ellipszisek (ha utóbbiak körök, akkor *forgási paraboloid* az illető; ez egy parabolának a tengelye körüli megforgatásával áll elő). A hiperbolikus paraboloid tengelymetszetei parabolák ill. hiperbolák; utóbbiak között találunk egy metsző egyenespárt is (a hiperbolák határhelyzetében).

- A 7.7. szakaszban láttuk, hogy síkbeli kvadratikus forma (az $\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma xy + Ax + By + K = 0$ egyenlet) kúpszeletet ad meg, amely a koordináta-rendszerhez képest elforgatott helyzetben van, ha a „kereszttag” (az xy -os) nem tűnik el. Állítás: általános **térbeli másodfokú kifejezés**,

$$(x, y, z) = ?, \quad \text{amire} \quad \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2cxy + 2bxz + 2axy + Ax + By + Cz + K = 0,$$

ahol $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c, A, B, C, K$ adott számok,

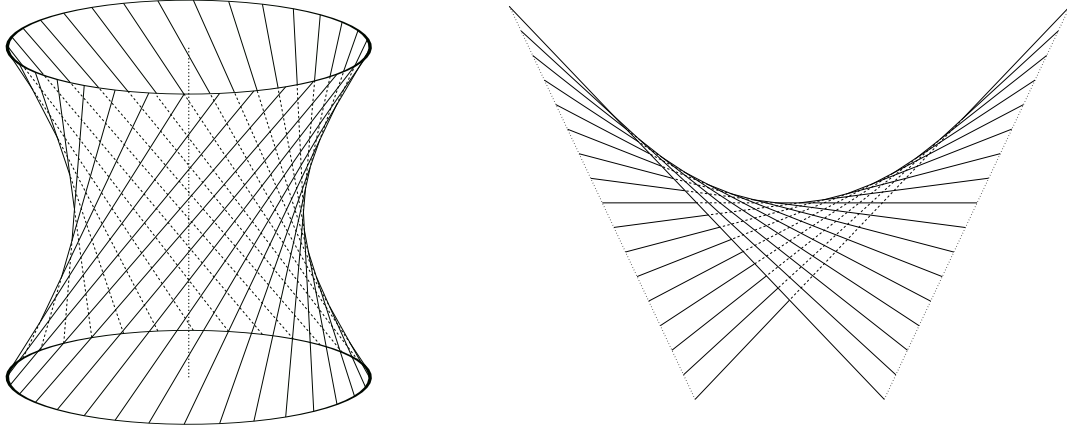
másodrendű felületet ad meg, és a lehetőségek osztályozása nagyon hasonló a síkban látottakhoz. Most csak **röviden megbeszéljük**, hogyan megy ez. Ellenőrizzük, hogy a (síkbeli esethez hasonlóan) a fenti térbeli másodfokú kifejezést is átírhatjuk a helyvektor, $\underline{r} \equiv (x, y, z)$ bevezetésével egy szimmetrikus $\underline{\underline{M}}$ mátrix és egy konstans $\underline{A}$ vektor felhasználásával így:

$$\begin{aligned} &\text{a fenti kifejezés} \\ &\text{másképp felírva:} \quad \underline{r} \underline{\underline{M}} \underline{r} + \underline{A} \underline{r} + K = 0, \quad \text{ahol} \quad \underline{\underline{M}} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & c & b \\ c & \beta & a \\ b & a & \gamma \end{pmatrix}, \quad \underline{A} \equiv \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{r} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Áttérhetünk az $\underline{\underline{M}}$ mátrix sajátvektoraiból álló (ortogonális) bázisba (amit vesszővel jelölünk), és az $\underline{A}$ vektorból így kapott $\underline{A'}$ vektor komponenseit tartalmazó x' -ben, y' -ben és z' -ben lineáris tagokat beolvaszthatjuk az x', y', z' -s négyzetes tagokba (ha maradtak). Az így kapott (tehát: elforgatott

és eltolt) koordináta-rendszerbeli új egyenlet lehetséges alakjai már olyasmik, mint amiket eddig láttunk; az általuk leírt felületek típusait a sajátértékek előjelei alapján osztályozhatjuk¹¹⁴.

- Külön fontos (pl. az építészetben), hogy az egyköpenyű hiperboloid és a hiperbolikus paraboloid olyan felületek, amelyek *görbültek* (nem lehet „kiteríteni” őket torzítatlanul), mégis tartalmaznak egyeneseket, sőt: előállíthatók mozgó egyenes nyomaként. Az alábbi 29. ábra szemlélteti ezt.



29. ábra. Egyköpenyű hiperboloid ill. hiperbolikus paraboloid szemléltetése, amelyen látszik, hogy „végigsöpörhető” egy egyenes mozgatásával (a vékony vonalak egyenesek). Csak az egyik „sereg” egyenest rajzoltam be, de mindkét felületen létezik egy másik sereg is, ami ennek mintegy „tükörképe”. A bal oldali ábra egyköpenyű forgási hiperboloidot ábrázol, de elliptikusra is működik.

- Már csak az van hátra, hogy valami értelmes **paraméterezést** kitaláljunk a másodrendű felületekre. A gömb szokásos paraméterezéséből indulva némi fantáziával az ellipszoidot is kipipálhatjuk:

Gömb: $\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} + \frac{z^2}{R^2} = 1,$ $\Rightarrow$ egy jó paraméterezés a $\vartheta \in [0, \pi], \varphi \in [-\pi, \pi]$ szögekkel: $\begin{aligned} x &= R \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y &= R \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z &= R \cos \vartheta. \end{aligned}$	Ellipszoid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$ $\Rightarrow$ egy jó paraméterezés a $\tilde{\vartheta} \in [0, \pi], \tilde{\varphi} \in [-\pi, \pi]$ paraméterekkel: $\begin{aligned} x &= a \sin \tilde{\vartheta} \cos \tilde{\varphi}, \\ y &= b \sin \tilde{\vartheta} \sin \tilde{\varphi}, \\ z &= c \cos \tilde{\vartheta}. \end{aligned}$
--	---

Vigyázat: itt is (mint a kör $\rightarrow$ ellipszis szintlépésnél) az itt ideiglenesen $\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}$ módon jelölt paraméterek *nem* az ellipszoid kiszemelt pontjának *gömbi koordináta-rendszerbeli* középponti szögei!

- Ezek után rutinfeladvány kigondolni, hogy ha a trigonometrikus függvényeket ízlésesen hiperbolikusakkal helyettesítjük, akkor hiperboloidok paraméterezését kapjuk:

z tengelyű egyköpenyű hiperboloid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	$\Rightarrow$	egy jó paraméterezés: $\omega \in [-\infty, \infty], \varphi \in [-\pi, \pi]$	$\begin{aligned} x &= a \operatorname{ch} \omega \cos \varphi, \\ y &= b \operatorname{ch} \omega \sin \varphi, \\ z &= c \operatorname{sh} \omega. \end{aligned}$
---	---------------	---	--

¹¹⁴ A síkmetszetekről: láttuk, hogy az összes tárgyalt másodrendű felület olyan, hogy tengelyirányú síkmetszeteik mind kúpszeletek (ellipszisek, hiperbolák, parabolák). Állítás: ezen felületek *akármilyen* (tehát nemcsak koordinátasíkkal párhuzamos) síkmetszetei is biztosan kúpszeletek. Indoklás: a ferde állású metsző síkon is akármilyen X, Y koordináta-rendszert is veszünk fel, az ott kapott görbét másodfokú egyenlet fogja leírni (hiszen az eredeti felületet is x, y, z -ben másodfokú kifejezés írta le): a metsző síkon másodfokú egyenlet pedig biztosan kúpszeletet ír le.

$$\begin{array}{llll}
 z \text{ tengelyű kétkö-} & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 & \Rightarrow & \text{egy jó paraméterezés:} \\
 \text{penyű hiperboloid:} & & & \omega \in [-\infty, \infty], \varphi \in [-\pi, \pi] \\
 & & & \begin{array}{l} x = a \operatorname{sh} \omega \cos \varphi, \\ y = b \operatorname{sh} \omega \sin \varphi, \\ z = \pm c \operatorname{ch} \omega. \end{array}
 \end{array}$$

A kétköpenyű hiperboloid két darabból áll: az utolsó képletben a + a felső, a – az alsó darabra vonatkozik. A felírt képlet tehát két különálló felületdarab két külön paraméterezése.

8.5. Derivált és integrál egyszerű alkalmazásai

Függvény alatti területet simán $\int_a^b f(x) dx$ módon lehet számolni. „Mire jó” még az integrálszámítás tudománya? Mielőtt a következő fejezetben rátérünk bonyolultabb (vonalmonti, felületi, térfogati) integrálokra, nézzünk meg a „klasszikus” integrál néhány egyszerű alkalmazását!

• Első pont: $y = f(x)$ módon, azaz függvénygrafikkal megadott **görbe ívhossza**. Eddig szó sem volt egzakt matematikai értelemben ívhosszról; itt inkább annak „kimagyarázása” következik, hogy hogyan is értelmezzük az ívhosszat. A képlet tulajdonképpen tehát definíciónak is felfogható:

$$\begin{array}{l}
 \text{Az } y(x) \text{ függvénygrafikon-görbe} \\
 \text{a-tól b-ig vett ívhossza:}
 \end{array}
 \quad \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx.$$

Ennek illusztrálása a 30. ábrán látható: az $[a, b]$ szakaszt kis részekre felosztva minden szakaszbeli görbehossz „közelítőleg” egy egyenesdarab hossza, ami $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, ezen felül a derivált jelentését tudva $\Delta y \approx \Delta x \cdot y'(x)$ így tehát egy görbedarab hossza kb. $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta x \cdot y'(x))^2} = \Delta x \cdot \sqrt{1 + [y'(x)]^2}$. Ezeket kell „összeadogatni, majd a felosztást végtelenre finomítani”. Ez éppen a felírt integrálformulára vezet.

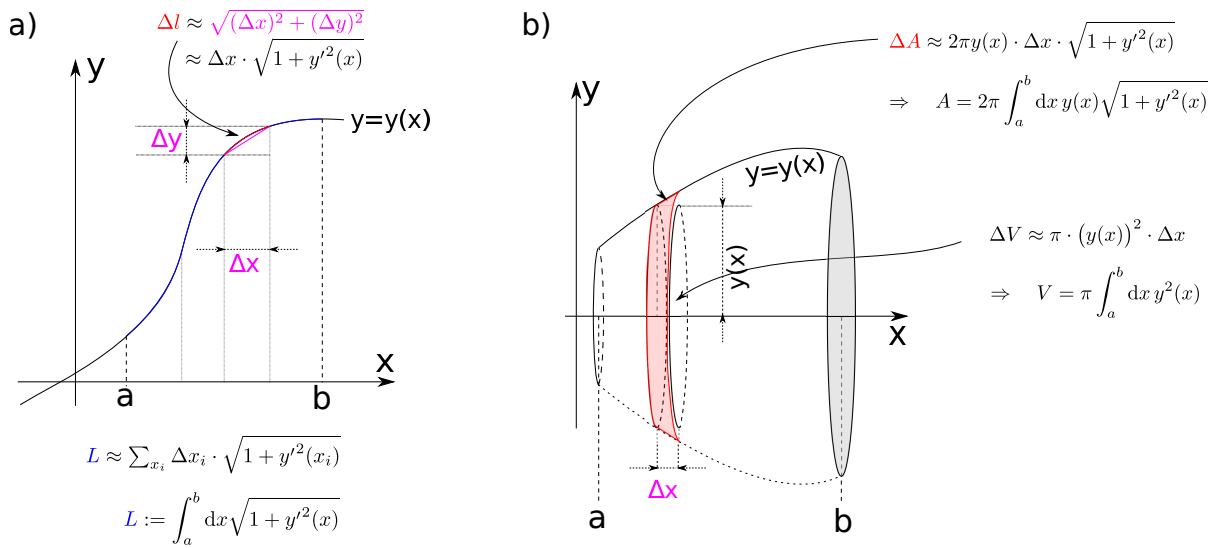
• Nemsokára általánosabb testekről is lesz szó; most előre vesszük a **forgástestek** felszín- és térfogatképleteit. Forgástest ugye úgy keletkezik, hogy valamilyen $y(x)$ függvénygrafikont „megforgatunk” egy tengely körül; kézenfekvő az x tengelyt választani. Ekkor

Az $y(x)$ görbe x tengely körüli megforgatásával kapott test a -tól b -ig vett darabjának

$$\begin{array}{ll}
 \text{térfogata:} & \pi \int_a^b dx [y(x)]^2, \quad \text{felszíne:} \quad 2\pi \int_a^b dx y(x) \sqrt{1 + [y'(x)]^2}.
 \end{array}$$

Ezek „indoklását” is a 30. ábrán láthatjuk. (Amit indoklásként mondunk, kb. az emelődik majd definíció rangjára.) A forgástest térfogatának kiszámításához azt kicsi Δx vastagságú szeletekre osztjuk, egy ilyen szelet térfogatát pedig $y(x)$ sugarú, Δx magasságú hengerével közelítjük: $\Delta x \cdot [y(x)]^2 \pi$. Ezeket kell „összeadni, majd a felosztást minden határon túl finomítani”.

A Δx vastagságú szelet oldalfelületét viszont nem egyszerűen az előző kicsi henger oldalfelületét „közelítőleg” (bár mindkettő nullához tart, ha $\Delta x \rightarrow 0$). Ha az $y(x)$ függvénynek dőlése is van, azaz $y'(x) \neq 0$, akkor a szelet oldalfelületét inkább egy *csonkakúp* oldalfelületével helyettesítenénk gondolatban, és ezek (végtelenre finomított felosztású) összegét gondolnánk a forgástest felszínének. A csonkakúp pontos oldalfelületképletére sincs szükség, elég, ha azt mondjuk, hogy a kis henger oldalfelületénél (ami $2\pi \cdot y(x) \Delta x$) kb. annyszor nagyobb, ahányszor a kicsi csonkakúp alkotójának hossza, $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \approx \Delta x \cdot \sqrt{1 + [y'(x)]^2}$ nagyobb a henger Δx magasságánál. Így egy szelet oldalfelületét $2\pi \cdot \Delta x \cdot \sqrt{1 + [y'(x)]^2}$, ha ezeket „összeadjuk, és finomítunk”, kész lesz.



30. ábra. a.) Explicit síkgörbe ívhosszának, b.) forgástest térfogatának ill. felszínének integrálképlettel való kiszámításához (azaz: az integrálképlet „kimagyarázásához”) segédlet.

- Hogy ne maradjunk **példa** nélkül, számítsunk ki ezt-azt! Ívhosszra jó példa a **lánCGörbe**:

$$y(x) = a(\operatorname{ch}(x/a) - 1), \quad \text{ahol } a \text{ egy hosszúság-mértékegységű paraméter.}$$

Ennek minimuma van $x=0$ -ban, és szimmetrikus; kivontunk 1-et, mert $\operatorname{ch} 0 = 1$, és így a minimumérték $y(x=0) = 0$ lesz. Számítsuk most ki a vízszintesen (azaz: x irányban) 0 és valamilyen x_0 érték közötti ilyen görbedarab L hosszát! Válasz:

$$\begin{aligned} y(x) = a(\operatorname{ch}(x/a) - 1) &\Rightarrow y'(x) = \operatorname{sh}(x/a) \Rightarrow 1 + y'^2 = 1 + \operatorname{sh}^2(x/a) = \operatorname{ch}^2(x/a) \Rightarrow \\ \Rightarrow L = \int_0^{x_0} \sqrt{1 + y'^2(x)} dx &= \int_0^{x_0} dx \operatorname{ch}(x/a) = a \operatorname{sh}(x/a) \Big|_0^{x_0} \Rightarrow L = a \operatorname{sh}(x_0/a). \end{aligned}$$

A képlet egyszerűségének „oka” a sh , ch függvények kellemes tulajdonságai ($\operatorname{ch}^2 = 1 + \operatorname{sh}^2$, ugyanakkor $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$) voltak¹¹⁵.

- Forgástestre példaként számítsuk ki, mennyi víz fér el az esőben kint felejtett parabolaantenna tányérjában. Utóbbi alakja forgási paraboloid. Itt (mint általában) az igazi „nehézség” az, hogy a megfogalmazott (értelmesnek tűnő...) feladatot „lefordítsuk” matematikai nyelvre.

Milyen adatok lehetnek érdekesek? Nyilván a parabolaantenna kerületének (az „üres körnek”) van sugara, legyen ez R , és érdekes lehet még a mélysége, legyen ez H . Az x tengelyt ugye érdemes a paraboloid tengelyének venni; így az egyenlet, és a térfogat:

$$y(x) = R \cdot \sqrt{\frac{x}{H}} \Rightarrow V = \pi \int_0^H y^2(x) dx = \pi \int_0^H dx R^2 \frac{x}{H} = \dots = \frac{R^2 \pi H}{2}. \quad (8.1)$$

Megjegyzés: fizikusok vagyunk; egy probléma megoldása során 1) kitűzzük(zik) a feladatot, 2) lefordítjuk matematikai nyelvre, 3) matematikai megoldást készítünk, majd 4) értelmezzük az eredményt (azaz: körbejárjuk, más oldalról megvilágítva is elmondjuk, hogy „leülepedjen”, jobban

¹¹⁵ Igaziból persze „fordított” a helyzet. A látott kellemes tulajdonság, hogy adott x_0 pontig vett ívhossz éppen arányos az adott x_0 pontbeli deriválttal (az arányossági tényező itt az a volt), igaziból éppen azon mechanikai követelményt fejezi ki, hogy egy homogén gravitációs térben lévő lánc pontról pontra erőegyensúlyban legyen. Ebből (a látott átalakításokat tudva) jön ki eredményként (megoldva a görbealakra felírt differenciálegyenletet), hogy a lógó lánc alakja éppen ilyen ch függvény, amit akkor ezért hívhatunk ezután tényleg lánCGörbének.

el tudjuk képzelni). Mindegyik lépés egyformán fontos; igazából az első és az utolsó az, ami nem megy algoritmikusan, csak a rutint tudhatjuk fejleszteni.

Most (a paraboloid térfogatának nem túl bonyolult iménti feladatában) annyiban jelentkezik ez a dolog, hogy a végeredményt egyszerű alakban írtam; továbbá „kötelező felfigyelni rá”, hogy a végeredmény szerint: *a parabolaantenna térfogata fele a bennfoglalt henger térfogatának*. Ugye hogy így szavakban elmondva jobban „értékelhető” az eredmény?

* * * *

A következő fejezetben rákanyarodunk az „igazi” vektoranalízisre. Háromdimenziós térben értelmezett („a tér pontjaiban”) értelmezett függvényekkel fogunk foglalkozni; a tér pontjait ugye (egy rögzített koordinátarendszer esetén) az $\vec{r}$ helyvektorral adhatom meg, ennek komponensei: $\underline{r} \equiv (x, y, z)$. Eddig kínosan ügyeltem, hogy ne keverjük a vektort magát (ennek jele $\vec{v}$ volt), és a komponenseiből alkotott számhármast (ennek jele $\underline{v}$ volt); hiszen ezek *ténylegesen* nem egészen *ugyanazok*. Mostantól felnőttnek tekintem a kedves Olvasót: elhagyom ezt, nyomtatásban (a továbbiakban) vektorokat egyszerűen vastag betűvel, így: $\mathbf{v}$, fogok jelölni, „vektort” mondok, komponenseit az adott koordinátarendszerben értem, és felteszem, hogy már eléggé megjegyeztük, hogy ha ugyanazt a vektort egy másik koordinátarendszerben akarnám reprezentálni, akkor más komponenseket kapnék.

9. Skalár– és vektorfüggvények integráljai

Az előző fejezetben láttunk néhány példát az integrál különböző alkalmazásaira: terület (ez az „alap”), ívhossz, forgástestek felszíne, térfogata, stb. Nagyon sokféle további integrál is van, amik mind fontosak a fizikában és alkalmazásaiban; ezeket vesszük most szemügyre.

9.1. Mezők

• A többváltozós függvényekre jó (és egyúttal legfontosabb) példalehetőség a **mezők**, mint függvények köre. Szokásosan mezőnek hívjuk az olyan függvényeket, amelyek a háromdimenziós, fizikai terünk pontjaihoz rendelnek dolgokat, azaz értelmezési tartományuk *a tér*. (Vagy esetleg: a két-dimenziós sík). A fizikai terünket ebben az összefüggésben sokszor $\mathbb{M}$ betűvel jelöljük; ha akarjuk, ennek egy pontját elképzelhetjük úgy, mint ami egy (a „szoba sarkában rögzített” origóhoz viszonyított) *helyvektorral* van megadva. A helyvektort magát szokásosan $\mathbf{r}$ -rel, három komponensét r_x, r_y, r_z módon, vagy esetleg rögtön x, y, z módon jelölöm.

- **Skalármező:** olyan függvény, ami a tér pontjaihoz számokat („skalármennyiséget”) rendel. Tipikus jele: $\Phi : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$, tehát ez minden térbeli ponthoz ($\mathbb{M}$ eleméhez, amit ugye akkor az $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$ koordinátákkal, azaz „helyvektorral” adhatunk meg) egy számot rendel. Fizikai példák: egy kiterjedt test hőmérséklet-eloszlása (ami pontról pontra változhat), a Naprendszerben az anyag (bolygóközi gáz) sűrűsége, stb.
- **Vektormező:** a tér pontjaihoz vektorokat rendelő függvény, azaz $\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{V}$ függvény, ahol $\mathbb{V}$ egy adott vektortér. Talán a legjobb fizikai példa: egy kiterjedt folyadéktömeg (pl. egy folyó, a maga örvényeivel, gyorsabb-lassabb, ilyen-olyan irányú) *sebességmezője*: minden pontban megadhatjuk a folyadék sebességvektorát, ez tehát (függvényként jelölve) egy $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektormező.

Milyen vektortér lehet az $\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{V}$ vektormező érkezési halmaza? Így, matematikai szempontból persze bármilyen, de a fizikában legfontosabbak azok, amikor a $\mathbb{V}$ háromdimenziós; annak megfelelően, hogy valamilyen „pontról pontra változó” vektorjellegű fizikai mennyiségünk van (a példaként hozott sebességmező is ilyen). A vektormező értékének (egy adott pontban), azaz a vektormennyiségnek mértékegysége is lehet. Jó úgy elképzelni a vektormező különböző pontbeli értékeit (azaz a különböző pontbeli vektorokat), hogy a $\mathbb{V}$ vektortérből (pl. a „lehetséges sebességvektorok” háromdimenziós $\mathbb{V}$ teréből) minden térbeli $\mathbf{r}$ pontban „oda van ragasztva egy kópia”, és az adott pontbeli vektorok abban a térben „vannak”. Így elkerülhető néhány szemléletbeli tévedés, pl. amikor a vektormező szemléltetésénél minden pontba „kis” vektorkákat rajzolva felmerül, hogy ezek „metszik-e egymást”... Nem. A különböző pontbeli vektorok a $\mathbb{V}$ tér *különböző másolataiban*, tulajdonképpen különböző „halmazokban” laknak.

• Alább különféle mezők különböző tartományokra vett integráljainak fogalmát, kiszámítási módszereit tárgyaljuk. A **mezők** (mindjárt látott) **integráljai** és a mezők különféle **deriváltjai** (amiket a következő fejezetben veszünk elő) igen **szoros kapcsolatban** állnak egymással, sokféleképpen, többféle „következtetési sorrenddel” meg lehet közelíteni ezt a témakört; „minden mindennel összefügg”. Az, hogy most az integrálokat hozom előbbre, igaziból egy kísérlet; meglátjuk, sikerül-e.

9.2. Különféle integráltípusok, példák

- A „függvény alatti terület” alapján a (Riemann-féle) integrálás alap gondolata még egyszer:
 - 1) a tartományt kis szakaszokra bontjuk,
 - 2) minden szakaszhoz a szakaszon belül valahol felvett függvényértékkel szorzunk,
 - 3) ha ezek összege tart valamihez, ahogyan a felosztást finomítjuk, akkor azt hívjuk integrálnak.
- Hasznos lesz kicsit átfogalmazni az integrálás nevezéktanát. Eddig az alábbi első módon jelöltük az $f(x)$ függvény a -tól b -ig vett integrálját; most ideiglenesen egy kicsit másképp is fogjuk:

$$\begin{array}{ll} \text{eddig így} & \int_a^b f(x)dx, \\ \text{jelöltük:} & \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{egy kicsit másfajta} & \\ \text{új jelölés ugyanerre:} & \int_{[a,b]} f(x)dx. \end{array}$$

Tehát az $[a, b]$ szakaszt, amit *integrálási tartománynak* hívhatunk, írhatjuk az integráljel alá is.

Az alább következő különféle integráltípusok értelmezésénél (illetve az eddig ismert, hagyományos, egydimenziós, „függvény alatti terület”-típusú integrálnál is) a következő három kérdést kell szem előtt tartanunk: **1.) mit** integrálunk, **2.) mire**, végül: **3.) milyen mérték szerint**.

- Az **eddig ismert**, $\int_{[a,b]} f(x)dx$ integrálnál a válaszok a következők. 1.) Egy $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, azaz valós értékű, **valós számokon értelmezett függvényt** integrálunk. 2.) Az $[a, b]$ **szakaszra**, ami az értelmezési tartományának egy részhalmaza. Az utolsó kérdés talán szokatlan elsőre; mindenesetre a 3.) válasz esetünkben: a $\mathbb{R}$ halmaz szakaszain értelmes **hosszmérték szerint** integráltunk. Ezt tömöríti a dx jelölés (a Δx „kis szakaszhoz” elkorcsosulása). A 3. válasz (hogy a „hosszmérték szerint” integráltunk) azt jelenti tehát, hogy az integrálási tartomány (a 2. kérdésre adott válasz) felosztásánál az egy „darabon” (itt: kis szakaszon) belül felvett függvényértéket a „darabnak mi-jével” szorozzuk: ugyebár a kis szakasz hosszával, Δx -szel. Ezután tartunk végtelen finomhoz a felosztással, és nézzük, hogy az összeg mihez tart: az lesz az integrál.

- Talán a legegyszerűsebb út az, ha most egyből nyakon öntöm a tisztelt Olvasót jónéhány féle különböző integráltípussal. Alább a táblázatban felsorolom őket, és szemléltető, motiváló példát is mondok hozzájuk; mint ahogyan a függvény alatti terület tulajdonképpen „szemléltető, motiváló példája” az eddig ismert egydimenziós integrálnak. A lehetséges válaszok a kérdéseinkre:

1. **Miket** integrálhatunk a következőkben? Mindenféle, a térben értelmezett függvényeket, azaz leginkább *mezőket*: adott **skalármezőt** (azaz: $\Phi: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, ahol ugye $\mathbb{M}$ a terünk; az ilyen jele: $\Phi(\mathbf{r})$), vagy adott **vektormezőt** (azaz: $\mathbf{v}: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{V}$ függvényt, ahol $\mathbb{V}$ vektortér, leginkább háromdimenziós: a vektormező tömör jele: $\mathbf{v}(\mathbf{r})$).
2. **Mire** integrálhatjuk ezeket a mezőket? Pl. egy **adott térfogatra** (adott, előre kijelölt „krumpli alakú tartományra”. A kijelölt térfogat jele leginkább V lesz). Vagy: a térben adott helyzetű és alakú **felületre**; az ilyenek jele leginkább A lesz. Vagy: adott helyzetű, alakú **görbére**: ilyenkor egy görbét γ -val vagy C -vel jelölünk. Ezeknek a „tartománytípusoknak” megfelelően beszélhetünk **térfogati, felületi, és görbementi (vagy: vonal-)integrálokról**.
3. **Milyen mérték szerint?** Ugye „kicsi” darabokra daraboljuk a tartományt, és azok „mértékével” szorozzuk a bennük felvett függvényértékeket. Mi lehet a *mérték*?

Térfogati integrálnál a *térfogati mérték*: a kis darab térfogata. Az ilyen integrált dV -vel jelöljük (ahogy a hosszmérték szerinti eddigi integrálban dx -et írtunk).

Felületi integrálnál lehet a mérték a darabka nagysága: ekkor *skaláris* felületi mértékről beszélünk („skaláris”=egy valós számmal leírható). Fontos a *vektori felületi mérték* is, amikor egy kis felületdarabkához a felületvektorát (idézzük fel, mi az!) rendeljük mértékként. Utóbbinak jele az integrálban: $d\mathbf{A}$, előbbié dA vagy $|d\mathbf{A}|$ (hiszen az eddigiek szerint ugye a skaláris felületmérték a vektorinak abszolútértéke¹¹⁶).

Görbementi integrálnál is van skaláris ill. vektori hosszmérték: a skaláris hosszmérték egy kis görbedarabhoz annak hosszát rendeli, a vektori hosszmérték pedig a szakaszának megfelelő vektort. Vektori mérték szerinti vonalintegrál jele lehet $d\mathbf{r}$, skaláris szerintié dl , vagy $|d\mathbf{r}|$.

- Következzék egy nagy áttekintő táblázat; lentebb mindegyiket alaposabban körbejárjuk. A táblázatban $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, $\mathbf{f}(\mathbf{r})$, $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ stb. adott vektormezőket jelöl, $p(\mathbf{r})$, $\Phi(\mathbf{r})$, $\rho(\mathbf{r})$, stb. adott skalármezőket. A legfontosabb típusokat külön kiemeltem. Azt is feltüntettem, hogy az eredmény egy skalár, vektor, vagy micsoda lesz.

Mire	Mit	Milyen mérték szerint	Tipikus jelölés	Eredmény	Tipikus példa	
Görbe (γ)	Skalármező	Skaláris hosszmérték	$\int_{\gamma} \rho(\mathbf{r}) dl$	<i>skalár</i>	Útépítés költsége változó terepen; hossz (ha $\rho \equiv 1$)	1.
		Vektori hosszmérték	$\int_{\gamma} \mathbf{f}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$	vektor	Súrlódásos impulzusátadás	2.
	Vektormező	Skaláris hosszmérték	$\int_{\gamma} \mathbf{g}(\mathbf{r}) dl$	vektor	Vonalmenti erő-sűrűségből erő	3.
		Vektori hosszmérték	$\int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$	<i>skalár</i>	Mechanikai munka	4.
Felület (A)	Skalármező	Skaláris felületmérték	$\int_A \Phi(\mathbf{r}) dA$	<i>skalár</i>	Lepedő összes helyzeti energiája; felszín (ha $\Phi \equiv 1$)	5.
		Vektori felületmérték	$\int_A p(\mathbf{r}) d\mathbf{A}$	vektor	Erő (nyomásból)	6.
	Vektormező	Skaláris felületmérték	$\int_A \mathbf{f}(\mathbf{r}) dA$	vektor	Erő (felületi erő-sűrűségből)	7.
		Vektori felületmérték	$\int_A \mathbf{v}(\mathbf{r}) d\mathbf{A}$	<i>skalár</i>	fluxus	8.
Térfogat (V)	Skalármező	térfogati mérték	$\int_V \rho(\mathbf{r}) dV$	<i>skalár</i>	Össztömeg	9.
	Vektormező	térfogati mérték	$\int_V \mathbf{f}(\mathbf{r}) dV$	vektor	Erő (térfogati erő-sűrűségből)	10.

¹¹⁶Nyomtatásban most a vektorokat félkövérrel jelölöm már; írásban leginkább aláhúzással szoktuk, úgyhogy papíron, táblán a $d\mathbf{A}$, és a $dA \equiv |d\mathbf{A}|$ jelre is készüljünk fel.

- Nézzük meg ezeket az integráltípusokat és példákat! Az „eljárás” mindenhol: 1.) felosztunk, 2.) kiértékelünk és a darabok mértékével szorzunk, 3.) végtelenhez finomítunk.

1. **Skalármezőt** szeretnénk adott γ **görbére** a **skaláris hosszmérték szerint** integrálni. Felosztjuk a görbét kis darabokra, minden darabban valahol kiértékeljük a mezőt, megszorozzuk a görbedarab hosszával; ezeket összeadjuk, majd a felosztást végtelen finommá tesszük.

$$\begin{array}{lll} \text{Egy szakaszra:} & \Rightarrow & \text{az egész} \\ \rho(\mathbf{r}) \cdot \Delta l & & \gamma \text{ görbére: } \sum_{i=1}^N \Delta l_i \cdot \rho(\mathbf{r}_i), \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Végtelenre fino-} \\ \text{mított határeset: } \int_{\gamma} \rho(\mathbf{r}) dl. \end{array}$$

Példa: változó talajú területen legyen egységnyi hosszú út építésének (helyfüggő) költsége: Δl úté $\rho(\mathbf{r}) \cdot \Delta l$. („Kis” darabokra már kb. arányos az úthosszal). Mennyibe kerül összesen egy adott γ görbével leírt út építése? Felosztjuk kis szakaszokra, minden kis Δl_i hosszat megszorozzuk az ott érvényes $\rho(\mathbf{r}_i)$ „drágasággal” (ahol a $\mathbf{r}_i$ hely az i -edik szakaszban valahol van), a $\rho(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta l_i$ -ket összeadjuk, majd finomítjuk a felosztást. A $\rho(\mathbf{r})$ integrálja a válasz.

Megjegyzés: Ha a skalármezőnk mindenhol 1, akkor az integrálunk a görbe *ív*hosszát értelmezi:

$$\int_{\gamma} dl = \text{a görbe ívhossza.}$$

2. Adott $f(\mathbf{r})$ **skalármezőt** integrálhatunk **görbére** a **vektori hosszmérték szerint** is:

$$\sum_i \Delta \mathbf{r}_i \cdot f(\mathbf{r}_i) \rightarrow \int_{\gamma} d\mathbf{r} f(\mathbf{r}), \quad (\text{skalármezőt, vektori hosszmérték szerint.})$$

Példa: legyen $f(\mathbf{r})$ helyfüggő súrlódási erőnagyság (a súrlódási együttható és a nyomóerő szorzata); keressük azt, hogy az adott görbénken állandó v_0 sebességgel végighúzva egy testet összesen mennyi erőlkést (=impulzust) kellett átadnunk neki a súrlódás miatt. (Ha az asztal vízen úszik, akkor az ő impulzusa is összesen ennyivel fog változni.)

A test egy $\Delta \mathbf{r}$ helyvektor-különbségű szakaszon $\frac{1}{v_0} |\Delta \mathbf{r}|$ idő alatt megy végig, a súrlódási erő pedig $f(\mathbf{r}) \cdot \frac{\Delta \mathbf{r}}{|\Delta \mathbf{r}|}$, hiszen nagysága adott, iránya pedig $\Delta \mathbf{r}$ iránya. A kis szakaszon átadott impulzus erő-ször-idő, tehát: $\frac{1}{v_0} |\Delta \mathbf{r}| \cdot f(\mathbf{r}) \cdot \frac{\Delta \mathbf{r}}{|\Delta \mathbf{r}|} = \frac{1}{v_0} f(\mathbf{r}) \Delta \mathbf{r}$. Itt tehát a kis szakasz „mértéke” nem a hossza, hanem az általa kijelölt vektor. A kis szakaszra kiszámolt erőlkést kell tehát a görbe minden kis darabkájára összeadni. Végtelenre finomított határesetben a keresett integrálfogalmat kapjuk.

Megjegyzés: ha az integrálandó skalármező véletlenül konstans 1, akkor éppenséggel a görbe végpontjainak különbségvektorát kapjuk, hiszen éppen ez lesz a kis $\Delta \mathbf{r}$ vektorok összege:

$$\int_{\gamma} d\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\text{végpont}} - \mathbf{r}_{\text{kezdőpont}}.$$

3. Adott γ görbe alakú hosszú kötél a közeli világűrben lebeg. Mekkora össz-erővel hat a Föld helyről helyre változó $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ gravitációs erő-mezője az egész kötéltre? A körüljárt fogalom: a $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ **vektormezőnek** a γ **görbére** a **skaláris hosszmérték szerint** vett integrálja.

$$\begin{array}{l} \text{Ha egy kis } \Delta l \text{ darab tömege} \\ \Delta m = \eta \cdot \Delta l, \text{ akkor az össz-erő:} \end{array} \quad \eta \sum_i \Delta l_i \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}_i) \rightarrow \eta \int_{\gamma} \mathbf{g}(\mathbf{r}) dl.$$

Itt beírtuk az η -val jelölt hosszanti tömegsűrűséget (hogy fizikai mértékegység szempontjából is kellemes képletet írassunk); η mértékegysége $[\eta] = \text{mkg/m}$. A $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ jelentése itt *gravitációs*

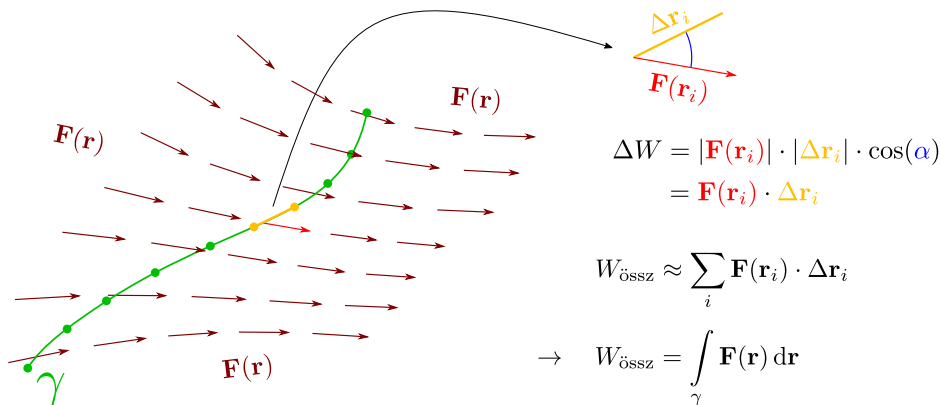
gyorsulás: egy kis szakaszra $\mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot \eta \Delta l$ erő hat (ahol itt $\mathbf{r}$ a szakasz „helye”). Ezeket kell összeadni az egész görbére, majd a felosztást finomítani: így definiálhatjuk a kijelölt integrált.

4. **Vektormező vektori hosszmérték szerinti integrálja görbére**, skalárszorzással: ez pl. a mechanikai *munka*, W definíciója, helytől függő $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ erő és előírt γ görbén mozgás esetére.

$$W \approx \sum_i \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta \mathbf{r}_i, \quad \begin{array}{l} \text{a felosztást finomítva} \\ \text{értelmezzük az integrált:} \end{array} \quad W = \int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}.$$

A $\cdot$ jel skalárszorzást jelöl (ill. az $\mathbf{F}$ és a $d\mathbf{r}$ egymás mellé írása emlékeztet, hogy a kis szakaszoknál skalárszorozni kellett). Egyenes szakaszon a munka $W = F \cdot l \cdot \cos \alpha$ volt (α az erő és elmozdulás bezárt szöge); ezt a skalárszorzatot ismerve $\mathbf{F} \cdot l$ -ként is írhatjuk. A próbatestnek a γ görbe egy kis $\Delta \mathbf{r}_i$ szakaszán való végigviteléhez tehát $\Delta \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}_i)$ munkát társítunk (az $\mathbf{r}_i$ az i -edik szakaszban van); ilyenek összege, ill. majd az összeg határértéke az, amit össz-munkának hívhatunk.

Ez talán a letfontosabb típusú vonalintegrál. Az eredmény: egy *szám*, azaz skalármennyiség. A következő 31. ábra próbálja szemléltetni ezt a fajta integrált.



31. ábra. Vektormezőnek vektori hosszmérték szerinti integráljának szemléltetése (a mechanikai munka példájából vett jelöléssel).

5. Egy $\Phi(\mathbf{r})$ **skalármezőt** integrálhatunk **felületre**, a **skaláris felületmérték szerint**. A felületet kis darabokra osztjuk, az i -edik darabhoz mértékként a területét, ΔA_i -t rendeljük, ezt a Φ skalármező ottani $\Phi(\mathbf{r}_i)$ értékével szorozzuk, ezeket összeadjuk, majd végtelenre finomítunk:

$$\sum_i \Phi(\mathbf{r}_i) \Delta A_i = \sum_i \Phi(\mathbf{r}_i) |\Delta \mathbf{A}_i| \quad \rightarrow \quad \int_A \Phi(\mathbf{r}) \, dA \equiv \int_A \Phi(\mathbf{r}) |d\mathbf{A}|.$$

A felületvektorka, $\Delta \mathbf{A}$ abszolútértéke (nagysága) ugye éppen a felületdarab ΔA nagysága; innen adódik, hogy a fenti mindkétféle jelölést is szoktuk használni erre az integrálási mértékre.

Példa: legyen $\Phi(\mathbf{r})$ egységnyi tömeg (helyfüggő) gravitációs helyzeti energiája (pl. a Föld környékén), az A felületünk pedig egy állandó tömegsűrűségű lepedő. Egy ΔA darab helyzeti energiája $\Delta A \cdot \Phi(\mathbf{r})$, az *egész* lepedő összes energiája pedig a leírt módon (felosztva, finomítva), azaz $\Phi(\mathbf{r})$ -nek az A felületre vett skaláris dA mérték szerinti integráljaként értelmezhető.

6. Következő: **skalármező**, $p(\mathbf{r})$ **vektori felületmérték szerinti integrálja felületre**. Itt a kis felületdarabkákhoz annak $\Delta \mathbf{A}$ felületvektorát rendeljük, ezt szorozzuk p ottani értékével, és

adjuk össze a felületre, majd finomítjuk a felosztást végtelenre. Az eredmény egy *vektor*:

$$\sum_i \Delta \mathbf{A}_i \cdot p(\mathbf{r}_i) \rightarrow \int_A d\mathbf{A} p(\mathbf{r}).$$

Példa: ha $p(\mathbf{r})$ egy közeg (pl. víz) helyfüggő nyomása, mekkora összes erővel hat ez egy benne lebegő adott alakú felület (lepedő) egyik oldalára? Egy ΔA nagyságú felületdarabra $p(\mathbf{r}) \cdot \Delta A$ nagyságú erő hat, a felületre merőlegesen: az erővektor tehát éppen $\Delta \mathbf{A} \cdot p(\mathbf{r})$. Ezek összege (majd annak határeseteként) adja meg a nyomásból származó teljes erővektort.

7. Ha a felületünket feldarabolván egy kis darab ΔA területével szorozzuk egy adott $\mathbf{g}$ vektormező ottani $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ értékét, ezeket összeadjuk, akkor a végtelen finom felosztás határesetében a $\mathbf{g}$ vektormezőnek a skaláris felületmérték szerinti felületi integrálját kapjuk:

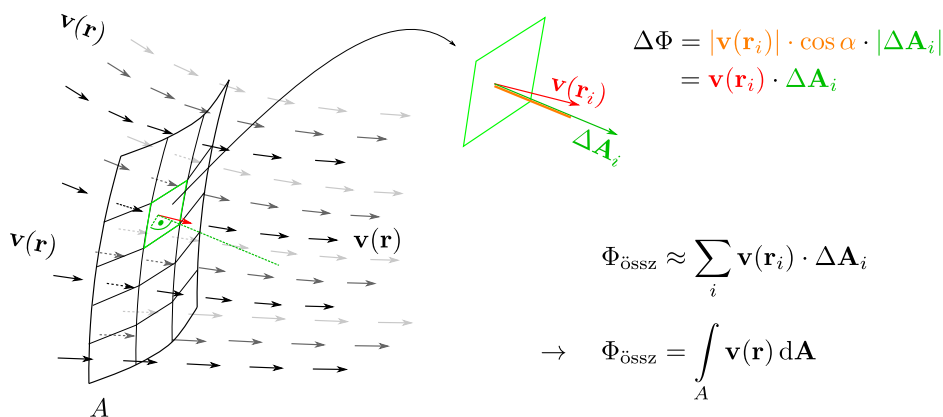
$$\sum_i \Delta A_i \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}_i) \rightarrow \int_A dA \mathbf{g}(\mathbf{r}) \equiv \int_A |\mathbf{dA}| \mathbf{g}(\mathbf{r}).$$

Példa: külső $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ gravitációs térben (ahol $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ jelentése itt is a gravitációs gyorsulás) lebegő állandó σ felületi tömegsűrűségű lepedőre ható össz-erő; ugyanúgy, mint fentebb, a vonal hasonló eseténél. ΔA nagyságú felületre $\sigma \Delta A \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r})$ erő hat; σ mértékegysége kg/m^2 .

8. Újabb típus: **vektormezőnek** adott **felületre** vett integrálja **vektori felületmérték szerint**, skalárszorzással. A definiáló eljárás (A a felület, $\mathbf{v}$ a vektormező jele), tömören:

egy felületdarab- hoz rendeljük:	a felületet feldarabolva:	Végtelenre finomítva a felosztást:
$\Delta \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}_i)$	$\sum_i \Delta \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}_i)$	$\rightarrow \int_A d\mathbf{A} \mathbf{v}(\mathbf{r}).$

Példa: fluxus, azaz „átfolyás”. Ha $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ egy közeg *sebességmezője* (amely minden pontban a sebességet adja meg), akkor adott A felületre vett ilyen integrál (a fluxus) megadja, hogy a felületen (mint „halászhálón”) egységnyi idő alatt mennyi anyag folyik át.



32. ábra. A fluxusnak mint vektormező vektori felületi mérték szerinti integráljának szemléltetése.

Valóban: ha egy kis ΔA nagyságú felületdarab éppen merőleges az ott érvényes $\mathbf{v}$ sebességre, akkor t idő alatt egy ΔA alapterületű és $|\mathbf{v}| \cdot t$ magasságú „doboznyi” víz éppen átfolyik. Ha $\mathbf{v}$ éppen a felületke síkjában van, akkor semennyi sem folyik át. Általánosan is könnyen látható: a $\mathbf{v}$ -nek a kis felületkére merőleges komponense számít. Ezért (is) volt értelme bevezetni a $\Delta \mathbf{A}$ felületvektort: az egységnyi idő alatt átfolyó víz így $\Delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$ módon írható, skalárszorzással.

Ezeket kell összeadni az egész felületre, és végül végtelenre finomítani a felosztást. A 32. ábra próbálja szemléltetni a fluxus fogalmát ezzel az integrállal.

9. Vegyük most szemügyre egy $\rho(\mathbf{r})$ **skalármezőnek** adott V **térfogatra vett** integrálját! A mérték a **térfogatmérték**, minden kis darabkához az ő ΔV térfogata¹¹⁷. A definíció jellegű eljárás: felosztjuk a térfogatot kis darabokra, majd

egy térfogatdarab- hoz rendeljük: $\Delta V_i \cdot \rho(\mathbf{r}_i)$	az egész térfogatra összeadogatva: $\sum_i \Delta V_i \cdot \rho(\mathbf{r}_i)$	$\rightarrow$ Végtelenre finomítva a felosztást: $\int_V dV \rho(\mathbf{r}).$
---	---	--

Az alapvető szemléltető **példa** ide: ha $\rho(\mathbf{r})$ helyről helyre változó tömeg(vagy pl. töltés-) *sűrűség*, akkor ezen integrál eredménye éppen az adott V alakú test östömege (vagy össztöltése). Gondoljuk ki; éppen így értelmeznénk az utóbbi fogalmakat, kis darabokra felosztással.

10. Utolsó (egyelőre): **vektormezőnek térfogati integrálja**, térfogati mérték szerint. Annyi a különbség az iméntihez képest, hogy a kis darabkák térfogatait nem skalármezővel, hanem adott $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ vektormező értékeivel szorozgatjuk:

egy térfogatdarab- hoz rendeljük: $\Delta V_i \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}_i)$	az egész térfogatra összeadogatva: $\sum_i \Delta V_i \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}_i)$	$\rightarrow$ Végtelenre finomítva a felosztást: $\int_V dV \mathbf{g}(\mathbf{r}).$
---	---	--

Példa a bevált: most egy adott (állandó ρ sűrűségű, $[\rho] = \text{kg/m}^3$) krumpli lebeg a Föld $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ változó gravitációs mezőjében; a rá ható össz-erő az egyes darabkákra ható $\rho \Delta V \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r})$ erők összege, ill. végtelenre finomítás után: integrálja. Az alábbi 33. ábra szemlélteti a vektormező skaláris mérték szerinti (vonalmenti, felületi, térfogati) integráljait; mindháromszor a gravitációs mező össz-erejét hoztuk példának.

* * * *

Néhány egyéb jelölés és megfontolás álljon itt még; később ezeket használjuk is.

- Egy görbe *határa* két pont (az eleje és a vége), egy felület (lepedő) határa egy görbe vonal, egy térfogattartomány határa pedig egy felület. Egy kijelölt **tartomány határát a ∂ jellel jelölik**¹¹⁸:

Ha V egy adott térfogat-tartomány: a V -t határoló felület jele: ∂V .

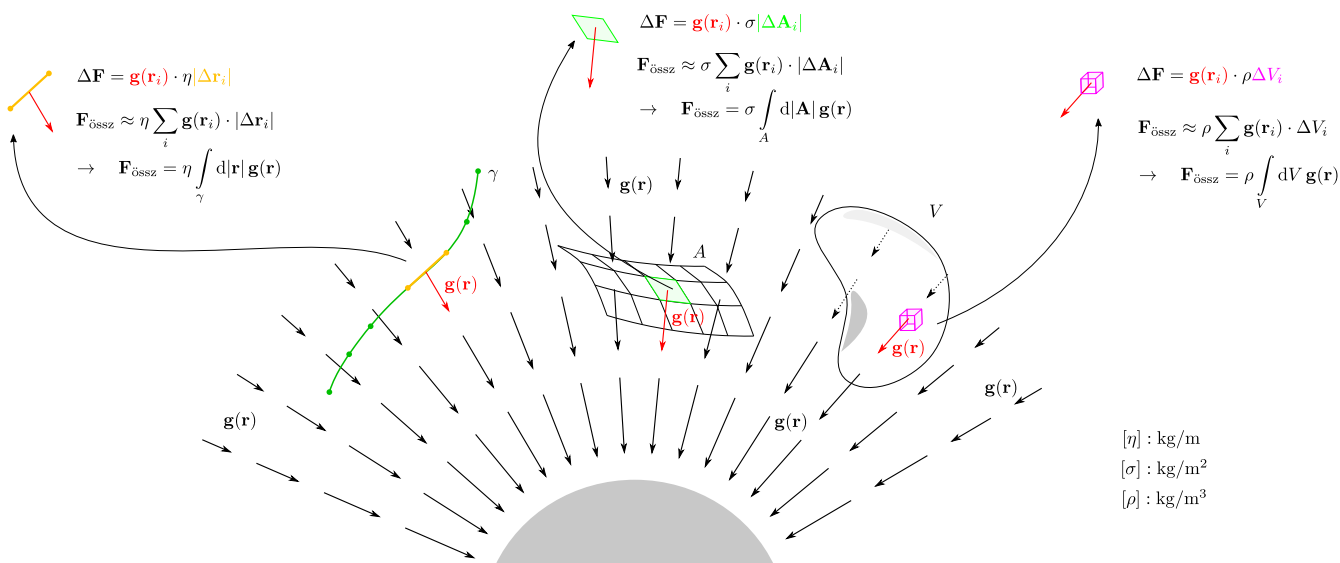
Ha A egy adott felület: az A -t határoló görbe jele: ∂A .

- Egy tartomány (egy görbe, egy felület) lehet *zárt* tartomány¹¹⁹, ha nincs határa (pl. egy gömb felszíne zárt felület, egy körvonal zárt görbe, míg pl. egy darab parabola nem az). Ha egy integrált zárt tartományra (görbére, felületre) akarunk kiszámítani, sokszor külön kis körrel jelöljük az

¹¹⁷Vektori térfogatmérték nincs; egy térfogatdarabkához milyen vektort is tudnánk rendelni?

¹¹⁸ Elsőre zavaró lehet, hogy ez a „határ”-jel, ∂ , a parciális deriválásra emlékeztet. Későbbi életünk során eljutunk oda, ahonnan nézve teljesen természetesnek fog tűnni, hogy ez a jó jelölés (mert egy elvont értelemben egy tartomány határának igenis *lesz köze* valamiféle „deriválthoz”).

¹¹⁹Aki túlművelt analízisben, vagy topológiában, annak most mondom, hogy ez a „zárttság” nem ugyanazt jelenti, mint ott a „nyílt halmazok” ill. „zárt halmazok” fogalma.



33. ábra. Gravitációs $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ mezőben állandó η , σ , ρ sűrűségű vonalra, felületre ill. térfogatra ható össz-erő éppen az erő-mező skaláris mérték szerinti vonalmenti, felületi ill. térfogati integrálja (ill. annak sűrűség-szerese).

integráljelen, hogy a tartomány zárt, így:

$$\text{Zárt görbére vett integrál: } \oint_{\gamma} d\mathbf{r}, \quad \text{Zárt felületre vett integrál: } \oint_A d\mathbf{A}.$$

- *Határ határa üreshalmaz.* Ha a γ görbe egy felületdarab határa, akkor ő zárt görbe, vagyis nincsenek végpontjai. Ha az A felület maga egy térfogattartomány határa (pl. egy ellipszoid felszíne), akkor ő maga zárt felület, azaz nem határolja görbe.

- A vektori (hossz, felület)mértéknél felmerül az **irányítás** kérdése, azaz hogy „merre mutat” a felületvektor ($\Delta \mathbf{A}$), vagy a görbe „érintővektora” ($\Delta \mathbf{r}$). Görbék mindig **irányíthatók**, azaz kijelölhetjük az egyik irányt, amelyik mentén végigmegyünk rajtuk. Vonalintegrálnál úgy vesszük, hogy ez ki is van jelölve. Ha ezután a görbét **ellentétesen irányítjuk**, akkor a **vektormérték** szerinti vonalintegrálnál **–1-szerest** kapunk (hiszen minden egyes $\Delta \mathbf{r}$ vektorka $-\Delta \mathbf{r}$ -be megy át). A munkára gondolva: ha egy görbén végigvive a próbatestet W munkát végeznénk, akkor ellentétes irányban bejárva a görbét $-W$ munkát végzünk.

$$W = \int_{\gamma} d\mathbf{r} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \rightarrow \text{ellentétes irányítással az eredmény: } -W.$$

- **Vektori felületmérték** szerinti integrálás csak **irányítható felületre értelmes**. Egy felület **irányítható**, ha (szemléletesen fogalmazva) egyértelműen meg lehet különböztetni a két oldalát (a „színét” és „fonákját”). A „normális” felületek (kockafelszín, gömbfelszín, sőt, bármilyen test felszíne; továbbá egy körlap, egy begömbült ellipszislapp, stb.) mind irányíthatók; a legismertebb példa nem irányítható felületre az ún. Möbius-szalag. Irányítható felületnél ha ellentétes irányítást választunk, a vektori mérték szerinti felületi integrál itt is -1 szeresére változik:

$$\Phi = \int_A d\mathbf{A} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \rightarrow \text{ellentétes irányítással az eredmény (ugye az } A \text{ felület irányítható volt): } -\Phi.$$

A fluxusra gondolva: ha megvan egy „hálón” időegységenként átfolyó víz mennyisége, akkor ha

ellentétes irányban vesszük pozitívnak a „ki”folyást, akkor az eredmény nyilván -1 -szeres lesz.

- A térben „lebegő lepedő” esetében nem állapodhatunk meg előre a $d\mathbf{A}$ vektori felületmérték irányítását illetően (persze eleve csak akkor értelmes a kérdés, ha a felület irányítható). Azonban: ha kijelöljük az egyik felület-irányt pozitívnak, akkor a felületet határoló zárt görbe irányítását „kötelező jelleggel szokásosan” a kijelölt felületirányhoz képest jobbsodrással választjuk: jobb kezünk begörbített nemhüvelyk ujjai mennek körbe, a hüvelykujjunk pedig mutat a felület irányába.
- Véges térfogatot határoló **zárt felület irányítását** szinte mindenki **kifele mutatónak** veszi, mi is. Pl., ha a vektortér egy folyadék sebességmezője, akkor a zárt felületre vett felületi integrál a *kifolyó* víz fluxusát (időegységenkénti térfogatát) adja meg.

9.3. Integrálok kiszámítása: bevezető megfontolások

- Az előző szakaszban megismerkedtünk jónéhány integráltípussal; most azt szeretnénk, hogy az ilyeneket valahogyan ki is tudjuk számítani. Ehhez nyilván az kell, hogy képletekkel megadjunk minden „szereplőt”. Az **integrálandó mezőt** (integrandust) nyilván **megadhatjuk** a tér pontjainak (x, y, z) koordinátáitól függő **függvényekkel**, skalármezőt egy, vektormezőt pedig (komponensenként) három függvénnyel:

$$\Phi(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \Phi(x, y, z), \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_x(x, y, z) \\ v_y(x, y, z) \\ v_z(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

Az **integrálási tartomány**: a görbevonala, vagy felület („lepedő”), vagy térfogat („krumpli”) is lehet bonyolult alakú. A legalkalmasabb módszer az, ha ezeket **paraméterezett alakban** adjuk meg (illetve: keressük meg, ha csak „szavakkal volt elmagyarázva”). Most tehát feltesszük, hogy a tartomány így van megadva:

Görbe:	Felület:	Térfogattartomány:
$x = x(t),$	$x = x(u, v),$	$x = x(u, v, w),$
$y = y(t),$	$y = y(u, v),$	$y = y(u, v, w),$
$z = z(t),$	$z = z(u, v),$	$z = z(u, v, w),$
azaz: $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(t),$	azaz: $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(u, v),$	azaz: $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(u, v, w),$
ahol t paraméter,	ahol u, v paraméterek,	ahol u, v, w paraméterek,
$t \in [t_1, t_2].$	$u \in [u_1, u_2], v \in [v_1, v_2].$	$u \in [u_1, u_2], v \in [v_1, v_2], w \in [w_1, w_2].$

Görbék paramétereit jelölhetjük t -vel, s -sel, stb. is. Persze ha pl. a görbe explicit $y = f(x)$, $z = f(x)$ módon van megadva (vagy síkban csak $y = f(x)$ módon), akkor maga az x koordináta tekinthető a jó paraméternek.

A felszín- és térfogatparamétereket pedig jelölhetjük u, v, w helyett teljesen máshogy is, pl. ha azoknak a jelöléseknek van valami geometriai sugallata (pl. az r, ϑ, φ jeleket használjuk a gömbi koordinátákban egy pont helyét megadó „paraméterekre”, azaz a gömbi koordináták értékeire).

- Ha pl. egy felszínen egy adott u, v paraméter-értékeknek megfelelő $\mathbf{r}(u, v)$ pontból kicsit (Δu -nyit és Δv -nyit) odébb megyünk a paraméterekben, akkor az $\mathbf{r}(u, v)$ helyvektor komponensei is kicsit

változnak; éppen a parciális deriváltaknak megfelelően:

$$\begin{aligned} x(u, v) &\rightarrow x(u+\Delta u, v+\Delta v) \approx x(u, v) + \Delta u \cdot \partial_u x(u, v) + \Delta v \cdot \partial_v x(u, v), \\ u, v \rightarrow u+\Delta u, v+\Delta v &\Rightarrow y(u, v) \rightarrow y(u+\Delta u, v+\Delta v) \approx y(u, v) + \Delta u \cdot \partial_u y(u, v) + \Delta v \cdot \partial_v y(u, v), \\ z(u, v) &\rightarrow z(u+\Delta u, v+\Delta v) \approx z(u, v) + \Delta u \cdot \partial_u z(u, v) + \Delta v \cdot \partial_v z(u, v). \end{aligned}$$

Itt persze ∂_u az u szerinti, konstans v melletti parciális deriváltat jelenti (és viszont); azaz pl. $\partial_u x \equiv \frac{\partial x}{\partial u} \Big|_{v=\text{const}}$ és $\partial_v x \equiv \frac{\partial x}{\partial v} \Big|_{u=\text{const}}$. Tömör jelöléssel az előző kis megváltozás így is írható:

$$\mathbf{r}(u, v) \rightarrow \mathbf{r}(u+\Delta u, v+\Delta v) \approx \mathbf{r}(u, v) + \Delta u \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} + \Delta v \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v},$$

ahol tehát

$$\mathbf{r}(u, v) \equiv \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial y(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial z(u, v)}{\partial u} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial z(u, v)}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Tehát a komponenseket egybefoglalva „gátlástalanul” vektor deriváltját írhatjuk (és ezzel a kis megváltozást a fenti egyszerű képlet módjára fejezhetjük ki): $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ komponensei a komponenseknek (mint a paraméterek függvényeinek) deriváltjai. A $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ maga nem egy helyvektor (hanem akár már most is látható, hogy a felület (egyik) *érintővektora* lesz).

Ugyanezt a tömör $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ jelölést használhatjuk persze akkor is, ha az $\mathbf{r}$ helyvektor egy paraméter függvényeként (görbe esetén) vagy három paraméter függvényeként (térfogattartomány esetén) van megadva (előbbi esetben esetleg egyenes deriváltat írva parciális helyett, a kulcsin végett).

• Görbéket tehát egy, felületeket kettő, térfogattartományokat pedig három paraméterrel lehet paraméterezni. Az utolsóhoz: „mit nyerünk”, ha a három x, y, z koordinátát ugyancsak három paraméterrel fejezzük ki? Válasz: akkor járunk jól, ha a paraméterek egyenként valami „kellemes”, „jól körülhatárolható” tartományon kell, hogy végigfussanak, amíg az egész (háromdimenziós) tartományunkon végigmegyünk. Ez sokszor nagyon leegyszerűsíti a feladatot.

Példa: adott egy R sugarú gömb, „szaladjunk végig” egyszer és csak egyszer minden, a gömb belsejében lévő ponton, azaz az olyan x, y, z számokon, amikre $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$. Descartes-koordinátákban gondolkodva bonyolultak (és a többitől függenek) az egyes változók határai, gömbi koordinátákkal paraméterezve viszont egyszerűbb a dolgunk:

A gömb belsején végigmenni

Descartes-koordinátákkal:

$$x \in [-R, R], \quad \text{adott } x\text{-re ezután:}$$

$$y \in [-\sqrt{R^2 - x^2}, \sqrt{R^2 - x^2}], \quad \text{ezután:}$$

$$z \in [-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}].$$

Gömb belsején végigmenni

gömbi koordinátákkal:

$$x = R \sin \vartheta \cos \varphi, \quad r \in [0, R],$$

$$y = R \sin \vartheta \sin \varphi, \quad \Rightarrow \quad \vartheta \in [0, \pi],$$

$$z = R \cos \vartheta. \quad \varphi \in [-\pi, \pi].$$

• Az lesz a cél, hogy egy **vonalmonti integrált** a görbe paramétertartományára vonatkozó egy darab ismert **valós integrálra vezessünk vissza**. Ezt teljesítve úgy vesszük, hogy „elbántunk a vonalintegrállal”: persze előfordulhat, hogy a kapott „hagyományos” integrált nem tudjuk egyszerűen kiszámítani, mindenesetre ez már akkor „alacsonyabbrendű probléma”.

- Felületi ill. térfogati integrálokat *kettős* ill. *hármass* integrálokra vezetünk vissza; pl. így:

Adott A felület.
 Paraméterezve: $\Rightarrow$ azt szeretnénk, hogy $\int_A d\mathbf{A} \mathbf{v}(\mathbf{r})$ felírható legyen, mint $\int_{u_1}^{u_2} du \int_{v_1}^{v_2} dv X(u, v)$.
 $u \in [u_1, u_2], v \in [v_1, v_2],$

Tehát: a lepedő-felületre vett integrált szeretnénk egy (valamilyen) kétváltozós függvénynek a két változója szerinti integráljára visszavezetni. Hogy mi is lesz ez a valamilyen X függvény (adott mező, (itt ez most a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektormező) ill. adott A felület esetén), ezt a következő szakaszban tárgyaljuk. Most előzetesen egy kis fogalmi pontosítást kell tennünk.

- Eddig ugyanis nem volt szó pl. *kettős integrálokról*. Az alapkérdés: adott $f(x, y)$ függvényre

Legyen a $H \subset \mathbb{R}^2$ halmaz az x - y síkon adott, $[x_1, x_2]$ ill. $[y_1, y_2]$ oldalú téglalap.
 vajon $\int_H dx dy f(x, y) \stackrel{?}{=} \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\int_{y_1}^{y_2} dy f(x, y) \right) \quad ??$

A H -ra vett integrált (az első jelölést) úgy értjük, ahogy gondoljuk: felosztjuk a H -t darabokra, mindegyiknek a területét megszorozzuk az f függvény ottani értékével, a kapottakat összeadjuk. Ha ez egyértelműen tart valahova, amikor egyre több darabot veszünk (úgy, hogy a darabok átmérője nullához tart), akkor azt hívjuk ugye $f(x, y)$ -nek a H -ra vett „kétdimenziós” integráljának.

Kényelmesen integrálni viszont (pl. a Newton-Leibnitz-formulával) csak egyváltozós függvényeket tudunk. Eszünkbe juthat, hogy ha külön az $[x_1, x_2]$ és az $[y_1, y_2]$ oldalakat is Δx_i ill. Δy_j szakaszokká osztjuk, az meghatározza H -nak is egy $(\Delta x_i \cdot \Delta y_j)$ méretű téglalapocskákra való feldarabolását. (Itt az i ill. a j indexek az x és y irányú darabokon futnak végig; a végén ezek számával végtelenhez tartunk.) A H ilyen darabjainak járulékát pedig összeadhatjuk úgy, hogy *először egy adott x_i -re* az összes y_i -n megyünk végig, majd *ezután* az így kapott (x -től függő) összegeket adjuk össze az x irányban. Ha végül minden felosztást végtelenig finomítunk, akkor ezzel az eljárással az $f(x, y)$ függvénynek a következő sorrendbeli kettős integrálját értelmeztük:

téglalapokra darabolva, először y , majd x irányban haladva: $\sum_i \Delta x_i \left[\sum_j f(x_i, y_j) \Delta y_j \right] \rightarrow$ a felosztást végtelenre finomítva: $\rightarrow \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\left(\int_{y_1}^{y_2} dy f(x, y) \right)}_{\text{ez még } x\text{-től függ}}.$

A fentebbi formulában ez volt a másodiknak kijelölt integrál. Ezt már (pl. kétszer használva a Newton-Leibnitz-formulát) akár ki is tudhatjuk számítani.

- Vajon az ilyen, először y , aztán x szerint elvégzett kettős integrál megegyezik-e *magának az $f(x, y)$ függvénynek* a H téglalapra vett integráljával? Utóbbi létezéséhez ugye azt kell, hogy *bármilyen síkidomokra* (tehát nemcsak tengelyirányítású téglalapokra) való feldarabolás esetén is ugyanazt a határértéket kapjuk. Érezzük ez alapján, hogy igaz a következő (és tényleg):

Ha létezik a $H \subset \mathbb{R}^2$ -ra vett $\int_H f(x, y)$ integrál, $\rightarrow$ akkor léteznek (és egyenlőek) a sorrendbeli integrálok: $\int dy \left(\int dx f(x, y) \right) = \int dx \left(\int dy f(x, y) \right),$
 és ezek egyenlőek a H -ra vett „igazi” integrállal.

- Ha létezik a H -re vett integrál, *akkor* tehát azt kiszámíthatjuk kettős integrállal, előbb y , aztán x

szerint (vagy fordítva). A kérdés az, hogy vajon **létezik-e a $H \subset \mathbb{R}^2$ -ra vett integrál**. Ez eredendően **többet jelent, mint** csupán hogy **a sorrendi integrálok** léteznek. Ha a sorrendi integrálok közül valamelyik nem létezik, vagy ugyan léteznek, de nem egyelők, akkor *maga a H -ra vett integrál* nem létezik¹²⁰. Megemlítjük a következő tételt (a részletes bizonyítást mellőzve), miszerint ha az $f(x, y)$ függvény *abszolútértékének*, $|f(x, y)|$ -nak létezik valamelyik *sorrendi* integrálja, akkor *maga a függvény is* integrálható a kétdimenziós tartományra¹²¹:

Fubini-tétel: ha létezik $|f|$ sorrendi integrálja: $\rightarrow$ akkor maguk az integrálok is:
létezik $\int dx \left(\int dy |f(x, y)| \right)$, $\int_H |f(x, y)|$ és $\int_H f(x, y)$ is.

Ekkor persze $f(x, y)$ mindkét sorrendű integrálja is létezik, és ezek egyenlők magával a H -ra vett integrállal (és egymással), mint az előbb mondtuk. Ezt a szőrözést jó tudni, de a legtöbbször nem kell izgulni miatta; sokszor külön le sem ellenőrizzük, hogy $|f|$ is integrálható sorrendben (nemcsak f), mert annyira egyszerű.

• Háromdimenziós tartományokra vett integrálra is igaz a Fubini-tétel (és az összes megelőző megfontolás): ha a függvény abszolútértéke a három változó szerint valamelyik sorrendben integrálható, akkor maga a függvény is az, az integrál megegyezik bármelyik sorrendbeli integrállal (amelyek ekkor egyenlők egymással is).

9.4. Integrálok kiszámítása: alapszabályok

Vegyük sorra a vonalmenti, felületi és térfogati integrálokat; paraméterezett tartományokra!

• Ha adott egy görbe $\mathbf{r}(t)$ paraméterezése, úgy, hogy amikor a t végigfut egy adott $[t_1, t_2]$ intervallumon, akkor a $\mathbf{r}(t)$ végigfut a görbén (és a paraméterezés elég sima, amit felteszünk), akkor ha a $[t_1, t_2]$ szakaszt felosztjuk kis Δt szakaszokra, akkor az ezeknek megfelelő $\Delta \mathbf{r}$ görbeszakaszok is feldarabolják a görbét. Egy ilyen szakaszvektorkára ill. a hosszára azt mondhatjuk, hogy

$$\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t) \approx \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \Delta t, \quad \text{azaz: } \Delta \mathbf{r} \approx \frac{d\mathbf{r}}{dt} \Delta t, \quad \text{ebből } |\Delta \mathbf{r}| \approx \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \cdot \Delta t.$$

Emlékezzünk: a három komponens (és deriváltjait) foglalja egybe az $\mathbf{r}$, ill. a $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ vektor-jelölés.

• Felületen haladva az $\mathbf{r}(u, v)$ függvény is kicsit változik, ha u -ban Δu -nyit, vagy v -ben Δv -nyit megyünk odébb: u és v megengedett tartományainak ($\Delta u \cdot \Delta v$ méretű) téglalapokra darabolása

¹²⁰Példa egy problémás esetre: az alábbi, az origó környékén kicsit (de nem nagyon) patológikus $f(x, y)$ függvény az origót kivéve mindenhol értelmezett. Különbféle sorrendű integráljai (a részleteket aki akarja, kibogozgathatja):

$$f(x, y) := \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow \int_0^\infty dy f(x, y) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int_0^\infty dx \left(\int_0^\infty dy f(x, y) \right) = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Ugyanakkor: } \Rightarrow \int_0^\infty dx f(x, y) = \frac{-1}{1+y^2} \Rightarrow \int_0^\infty dy \left(\int_0^\infty dx f(x, y) \right) = - \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Eme $f(x, y)$ -nak tehát létezik mindkét sorrendi integrálja az $x > 0, y > 0$ negyedsíkra, de ezek nem egyenlők: eszerint ez a *függvény önmaga* nem integrálható erre a tartományra. Hogy a sorrendi integrálok léteznek, abból jóval kevesebb dolog következik, mint amiket akkor tudhatnánk, ha maga a kétdimenziós integrál létezne.

¹²¹A Fubini-tétel azért „kellemes”, mert az $|f(x, y)|$ sorrendi integráljának létezéséhez csak „egydimenziós” integrálokat kell kiszámítani (vagy legalábbis létezésüket ellenőrizni), és ebből következtethetünk *magának az $f(x, y)$ -nak a kétdimenziós tartományra vett integráljának* létezésére; utóbbi kérdésre a válasz amúgy elég megfoghatatlan lenne.

meghatározza a felület feldarabolását is. Találjuk ki egy darabka felületvektorát!

Adott u, v -nél a felületi pont: $\mathbf{r}(u, v)$.

Δu -t változtatva (v marad): $\mathbf{r}(u + \Delta u, v)$.

u marad, v -t változtatva: $\mathbf{r}(u, v + \Delta v)$.

A kijelölt kis felületdarab két oldala:

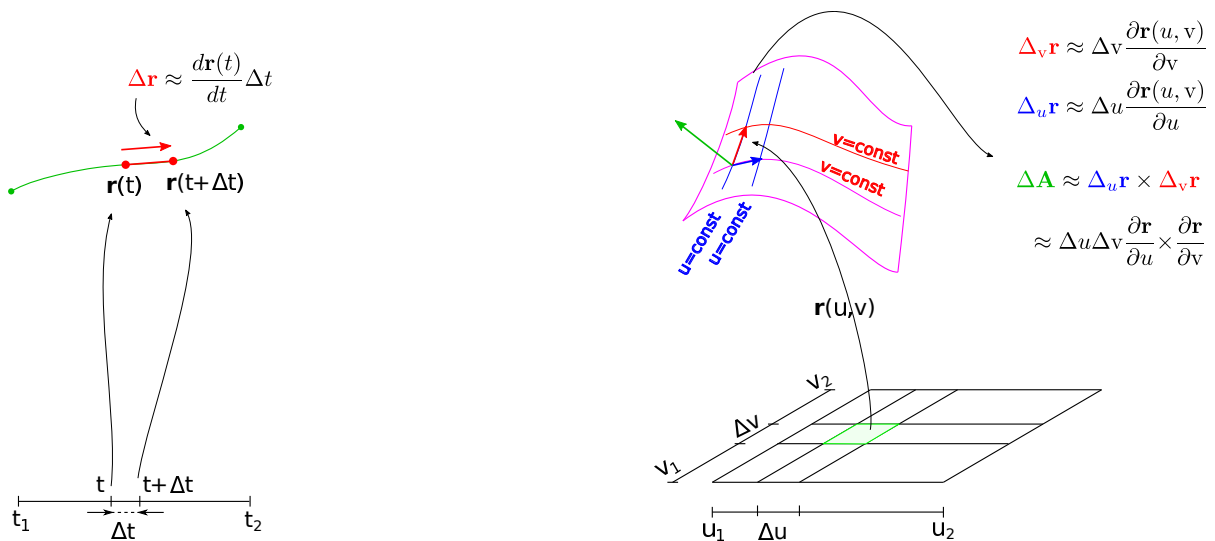
$$\Delta_u \mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(u + \Delta u, v) - \mathbf{r}(u, v) \approx \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u} \Delta u,$$

$$\Delta_v \mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(u, v + \Delta v) - \mathbf{r}(u, v) \approx \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v} \Delta v.$$

Itt ideiglenesen vezettük be a $\Delta_u \mathbf{r}$, $\Delta_v \mathbf{r}$ jelöléseket. Ne feledjük: a $\mathbf{r}$ helyvektor (mint u, v függvénye) három komponens összessége. A felületdarab vektora merőleges $\Delta_u \mathbf{r}$ -ra és $\Delta_v \mathbf{r}$ -re is, és nagysága éppen az ezek által kijelölt kicsi „paralelogramma” területe. Vektorszorzás kell tehát:

$$\Delta \mathbf{A} \approx \Delta_u \mathbf{r} \times \Delta_v \mathbf{r} = \Delta u \Delta v \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \Rightarrow \Delta A \approx \Delta u \Delta v \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|.$$

Az eddigi átírásokat szemlélteti a következő 34. ábra.



34. ábra. Vonal- és felületi integrálok paraméterezett alakban: az integrálási mérték „kitalálása”.

- Végül térfogati integrálásnál a három (most u, v, w -vel jelölt) paramétert egyenként megváltoztatva három kicsi elmozdulást kapunk; ezek

$$\mathbf{r}(u + \Delta u, v, w) = \mathbf{r}(u, v, w) + \Delta_u \mathbf{r},$$

$$\mathbf{r}(u, v + \Delta v, w) = \mathbf{r}(u, v, w) + \Delta_v \mathbf{r}, \quad \text{és a megváltozások:}$$

$$\mathbf{r}(u, v, w + \Delta w) = \mathbf{r}(u, v, w) + \Delta_w \mathbf{r},$$

$$\Delta_u \mathbf{r} \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \Delta u,$$

$$\Delta_v \mathbf{r} \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \Delta v,$$

$$\Delta_w \mathbf{r} \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \cdot \Delta w.$$

Az ezek által kijelölt kis paralelepipedon-szerű darab térfogata megkapható vegyszorzással:

$$\Delta V \approx (\Delta_u \mathbf{r} \times \Delta_v \mathbf{r}) \cdot \Delta_w \mathbf{r} = \Delta u \Delta v \Delta w \cdot \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right],$$

vagy, ami ugyanaz, determinánssal:

$$\Delta V \approx (\Delta_u \mathbf{r} \times \Delta_v \mathbf{r}) \cdot \Delta_w \mathbf{r} = \Delta u \Delta v \Delta w \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

• A különféle integrálokat tehát **átírhatjuk a paraméter-halmazra vett integrálokra** az előzőek alapján; az integrálási mértéket mindenhol az előbbiekben „kitalált” kombinációkkal helyettesítve a közelítő összegben, majd a közelítő összeget már a paramétertartományra vett integrálként beazonosítva.

A szokásos fajta megjegyzésünk most is érvényes: „matematikusabban”, ha eleve magát a (hagyományos, egydimenziós) integrált eggyel precízebben definiáltuk volna, akkor azt mondanánk, hogy a vonalmenti, felületi, térfogati integrálokat úgy *értelmezzük*, ahogyan azokat most mindjárt a paraméter-tartományra átírt alakjukkal felírjuk. Ezen szakasz eddigi megfontolásai tulajdonképpen arra voltak jók, hogy meglássuk, hogy *miért* így érdemes definiálni őket.

• Pl. egy vektormező (vektormérték szerinti, skalárszorzásos) vonalmenti integrálját így számíthatjuk ki (ugye ez az, ami a mechanikai *munka* fogalmát vezette be):

$$\sum_i \Delta \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \approx \sum_i \underbrace{\Delta t_i \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \Big|_{t=t_i}}_{\Delta \mathbf{r}_i} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \quad \Rightarrow \quad \int_{\gamma} d\mathbf{r} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} dt.$$

Tehát: a t paraméter függvényében kifejezet $\mathbf{r}(t)$ -t helyettesítjük be a $\mathbf{F}$ mező argumentumába, ezt (skalár)szorozzuk a $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ deriválttal (ez ugye végülis a $\Delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}_i)$ skalárszorzásból öröklődött), ezután integrálunk t szerint (a görbét megadó tartományra).

• Skaláris mérték és skalármező esetén hasonlóan járhatunk el, arra jutunk, hogy

$$\int_{\gamma} dl \rho(\mathbf{r}) = \int_{t_1}^{t_2} \rho(\mathbf{r}(t)) \left| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right| dt.$$

Lentebb ezeket újfent összefoglaljuk.

• Felületi mérték esetén is (most a fluxust hozva példának) átírhatjuk a feldarabolást az u, v paraméter-halmaz feldarabolására, így:

$$\begin{aligned} \sum_i \Delta \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}_i) &= \sum_i \overbrace{\Delta u_i \Delta v_i (\partial_u \mathbf{r}(u_i, v_i) \times \partial_v \mathbf{r}(u_i, v_i))}^{\Delta \mathbf{A}_i} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}(u_i, v_i)) \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_A d\mathbf{A} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} \mathbf{v}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v} \right) du dv. \end{aligned}$$

Itt is: skalárszorzás szerepel a deriváltak keresztszorzata és a $\mathbf{v}$ vektormező között; ezt „jelölte ki” az $d\mathbf{A}$ és a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ egymás mellé skalárszorzatként való írása az integrálban.

Skaláris felületi mérték esetén (most skalármezőre felírva) arra jutunk, hogy

$$\int_A dA \Phi(\mathbf{r}) = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} \Phi(\mathbf{r}(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v} \right| du dv.$$

• Végül térfogati integrálban (most a $\rho(\mathbf{r})$ skalármező integrálját felírva, ami ugye pl. változó tömegsűrűségű test össztömegét adhatja meg) az átírással arra jutunk, hogy

$$\begin{aligned} \Delta V_i \cdot \rho(\mathbf{r}_i) &= \overbrace{\Delta u_i \Delta v_i \Delta w_i \cdot [(\partial_u \mathbf{r}(u_i, v_i, w_i) \times \partial_v \mathbf{r}(u_i, v_i, w_i)) \cdot \partial_w \mathbf{r}(u_i, v_i, w_i)]}^{\Delta V_i} \cdot \rho(\mathbf{r}(u_i, v_i, w_i)) \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_V dV \rho(\mathbf{r}) = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} \int_{w_1}^{w_2} \mathbf{v}(\mathbf{r}(u, v, w)) \cdot \left(\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right) du dv dw. \end{aligned}$$

- **Összefoglaljuk** az eddigieket: minden fajta integrálhoz megadjuk, hogy hogyan is kell paraméterezett alakban megadott tartományokra kiszámítani.

Vonalmenti, vektori mérték:
paraméterezés: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$

$$\int_{\gamma} d\mathbf{r}(\dots) \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}(t)} (\dots).$$

Vonalmenti, skaláris mérték:

$$\int_{\gamma} dl(\dots) \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \underbrace{(\dots)}_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}(t)}.$$

Felületi, vektori mérték:
paraméterezés: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$

$$\int_A d\mathbf{A}(\dots) \rightarrow \int_{u_1}^{u_2} du \int_{v_1}^{v_2} dv \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \underbrace{(\dots)}_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}(u, v)}.$$

Felületi, skaláris mérték:

$$\int_A dA(\dots) \rightarrow \int_{u_1}^{u_2} du \int_{v_1}^{v_2} dv \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \underbrace{(\dots)}_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}(u, v)}.$$

Térfogati, térfogati mérték:
paraméterezés: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v, w)$

$$\int_V dV(\dots) \rightarrow \int_{u_1}^{u_2} du \int_{v_1}^{v_2} dv \int_{w_1}^{w_2} dw \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right] \underbrace{(\dots)}_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}(u, v, w)}.$$

A (...) -tal kijelölt integrandus helyébe (ami általában ugye az $\mathbf{r}$ helyvektor függvényében van megadva) mindenhol be kell írni $\mathbf{r}$ helyébe az ő paraméterekkel kifejezett alakját; ezt kijelöltem. Nem jelöltem külön, de persze a deriváltak ($\frac{d\mathbf{r}}{dt}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}$, stb.) is a paraméterek (t , ill. u , v , stb.) függvényei, csak úgy, mint az $\mathbf{r}$ vektor.

9.5. Integrálok kiszámítása: néhány példa

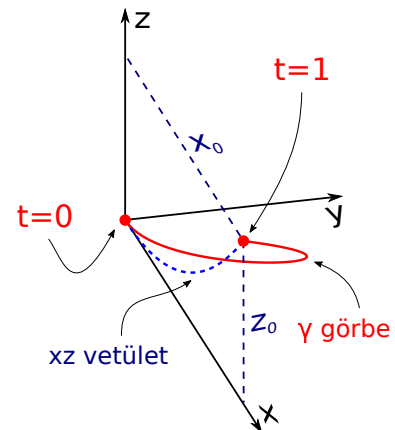
Az előző szakaszban átbeszéltük, hogy hogyan kell a különféle integrálokat ténylegesen (paraméteres alakban megadott) felületekre, vonalakra, térfogat-darabokra kiszámítani; most jöjjön néhány példa, hogy kicsit begyakoroljuk a dolgot.

- Tekintsük a következő vektormezőt (képlettel, $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ módon megadva, „erő”-jelöléssel), és a következő, egyből képlettel (a t paraméterrel) leírt γ görbét:

a t paraméter
végigfut $t \in [0, 1]$ -en;

$$\mathbf{r}(t) \equiv \begin{pmatrix} x_0 t \\ y_0 t^2(1-t) \\ z_0 t^2 \end{pmatrix}.$$

A vektormező: $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{F_0}{L_0^2} \begin{pmatrix} y^2 - x^2 \\ 2xy + z^2 \\ 2yz - z^2 \end{pmatrix}.$



Az x_0 , y_0 , z_0 , L_0 hosszúság (méter) mértékegységű állandók, F_0 pedig erő dimenziójú állandó. Számítsuk ki az $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ vektormezőnek a megadott görbére vett, vektori hosszmérték szerinti integrálját (a megadott erőmező munkáját)!

Válaszok: (ellenőrizze le, próbálja meg magától is mindenki):

Először is, a görbét paraméteresen adtam meg; szemléltetésképpen lerajzolhatjuk(tuk). A főbb „jellemvonások”: $t=0$ -ban az origóból indul, $t=1$ -re visszaér az x - z síkba, x_0 -ba és z_0 -ba. Az y irányból nézve (az x - z síkra vetítve) parabola, az y pedig 0-tól elmegy $\frac{4}{27}y_0$ -ig és vissza (ezt a $t^2(1-t)$ függvény maximumát megkeresve kaphatjuk). Tényleg ilyesmi görbét rajzoltam¹²².

Ezek után viszont csak a receptet kell alkalmazni: ki kell számítani a $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ deriváltat, ill. behelyettesíteni $\mathbf{r}(t)$ -t az $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ hasába, majd skalárszorozni:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 t \\ y_0 t^2(1-t) \\ z_0 t^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 t(2-3t) \\ 2z_0 t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \frac{F_0}{L_0^2} \begin{pmatrix} y_0^2 t^4(1-t)^2 - x_0^2 t^2 \\ 2x_0 y_0 t^3(1-t) + z_0^2 t^4 \\ 2y_0 z_0 t^4(1-t) - z_0^2 t^4 \end{pmatrix},$$

ebből pedig az integrál:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} &= \int_0^1 dt \frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \\ &= \frac{F_0}{L_0^2} \int_0^1 dt \{ x_0 \cdot (y_0^2 t^4(1-t)^2 - x_0^2 t^2) + y_0 t(2-3t) \cdot (2x_0 y_0 t^3(1-t) + z_0^2 t^4) + 2z_0 t \cdot (2y_0 z_0 t^4(1-t) - z_0^2 t^4) \}. \end{aligned}$$

A „vonalegintegrál-sággal” ezennel elbántunk; kérdés persze, hogy a kapott (a $t \in [0, 1]$ tartományra vett) valós egydimenziós integrált ki tudjuk-e számítani. Most igen, ugyanis csupa polinom van t -ben; elvégezve a szorzásokat és az integrálokat (ugye $\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$), majd egyszerűsítve:

$$\text{a példánkban a végeredmény: } \int_{\gamma} d\mathbf{r} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \dots = -\frac{F_0}{3L_0^2} (x_0^3 + z_0^3).$$

Arra érdemes esetleg fölfigyelni, hogy y_0 kiesett: nem függ itt az eredmény attól, hogy a görbe a sok lehetséges közül (amiket a különböző y_0 lehetőségek különböztetnek meg) éppen melyik. Erre később (a *gradiens* és a *rotáció* fogalmát már ismerve) visszatérünk.

- Következő példaként legyen adott a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektormező mint

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\tau_0} \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 2(z+L_0) \end{pmatrix}, \quad \text{ahol } \tau_0 \text{ és } L_0 \text{ adott konstansok.}$$

Integráljuk ezt a vektormezőt egy olyan felületre, amelynek „kerete” egy az x - y síkban lévő a ill. b tengelyű ellipszis, a z irányban pedig kidudorodik, parabola alakban, úgy, hogy „középen”, $x=y=0$ -nál van a legnagyobb kidudorodás, aminek értéke legyen z_0 .

Válaszok:

Amit elmagyaráztunk, az tulajdonképpen egy (elliptikus) paraboloid alakú felület: adott x , y esetén a z koordináta a parabola-alakok miatt egyértelműen meghatározódik, méghozzá így:

$$z(x, y) = z_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right). \quad \begin{array}{l} \text{Ezt némi rutinnal lehet így egyből felírni, de jó:} \\ \text{ha } x \text{ és } y \text{ rajta van az } a, b \text{ tengelyű ellipszisen,} \\ \text{tényleg } z=0. \text{ Továbbá „középen” van a maximum.} \end{array}$$

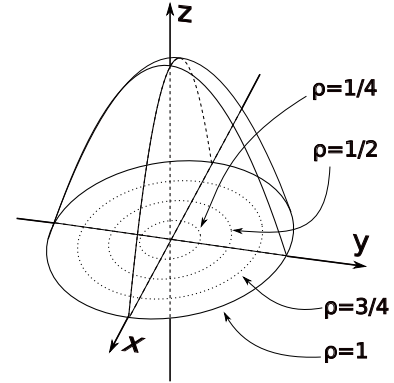
Mármost egy ellipszisvonal jó paraméterezése: $x=a \cos \tilde{\varphi}$, $y=b \sin \tilde{\varphi}$, ahol $\tilde{\varphi} \in [-\pi, \pi]$. Nem nagy

¹²² Az ábrán kb. *pontosan* a kijelölt görbét rajzoltam le (programmal); azért „meséltem el” mégis kicsit a diszkusszióját, hogy magunktól is láthassuk, hogyan kell(ene) ezen paraméterezett görbe főbb vonásait kikutatni.

fantázia rájönni, hogy az x - y síkbeli vetületet, a teli ellipsziskorongot kitölthetjük önhasonló, egyre nagyobb, de fix a/b tengelyarányú ellipszisvonalakkal (amelyek közül a legnagyobb éppen a határvonal, a legkisebb, pedig az $x=y=0$ origó, mint egyetlen pont). Így tehát egy (pl. ρ -val jelölt) paraméter, amely 0-tól 1-ig fut, leírhatja azt, hogy ezek közül melyik ellipszisvonalon vagyunk, a $\tilde{\varphi}$ pedig azt, hogy ezen belül hol. Összerakva ezeket, ill. z -t az imént felírt módon kifejezve az így kapott x -szel és y -nal azt kapjuk, hogy a paraméterezés:

$$\mathbf{r}(\rho, \tilde{\varphi}) = \begin{pmatrix} a\rho \cos \tilde{\varphi} \\ b\rho \sin \tilde{\varphi} \\ z_0(1-\rho^2) \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \text{a tartományok:} \\ \tilde{\varphi} \in [-\pi, \pi], \\ \rho \in [0, 1]. \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} a \cos \tilde{\varphi} \\ b \sin \tilde{\varphi} \\ -2z_0\rho \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tilde{\varphi}} = \begin{pmatrix} -a\rho \sin \tilde{\varphi} \\ b\rho \cos \tilde{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Ezután már egyszerű dolgunk van. A két paraméter jele itt u és v helyett ρ és $\tilde{\varphi}$, a helyvektor szerintük való deriváltjait egyből kiszámoltam. A felületelem-vektor ebből, ill. a vektormezőnk:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tilde{\varphi}} = \begin{pmatrix} 2z_0 b \rho^2 \cos \tilde{\varphi} \\ 2z_0 a \rho^2 \sin \tilde{\varphi} \\ ab\rho \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}(\rho, \tilde{\varphi})) = \frac{1}{\tau_0} \begin{pmatrix} -a\rho \cos \tilde{\varphi} \\ -b\rho \sin \tilde{\varphi} \\ 2[z_0(1-\rho^2) + L_0] \end{pmatrix} \Rightarrow \int_A d\mathbf{A}, \mathbf{v}(\mathbf{r}) =$$

$$= \int_0^1 d\rho \int_{-\pi}^{\pi} d\tilde{\varphi} \mathbf{v}(\mathbf{r}(\rho, \tilde{\varphi})) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tilde{\varphi}} \right) = \int_0^1 d\rho \int_{-\pi}^{\pi} d\tilde{\varphi} [-2z_0 ab \rho^3 + 2ab\rho(z_0(1-\rho^2) + L_0)].$$

A felületi integrál „visszavezetése” tehát kész; kérdés, hogy a kapott kettős integrált ki tudjuk-e számítani (pl. sorrendi integrállal, a Newton-Leibnitz-formulát alkalmazva). Most éppen igen: a $\tilde{\varphi}$ szerinti integrálás 2π szorzót ad (hiszen az integrandus nem függ $\tilde{\varphi}$ -től), a ρ szerinti integrálás¹²³ pedig egyszerűen elvégezhető:

$$\text{a példánkban a végeredmény: } \int_A d\mathbf{A} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \dots = \frac{2\pi L_0 ab}{\tau_0}.$$

Érdemes itt esetleg fölfigyelni arra, hogy z_0 kiesett: nem függ itt az eredményünk attól, hogy a felület mennyire „púposodik be”. Mintha itt a felületi integrál csak a határoló görbétől, nem is annyira magától a felületalaktól függene... Erre később (a *divergencia* és a *rotáció* fogalmát már ismerve) visszatérünk.

¹²³Emlékezzünk: a Fubini-tétel szerint ha a sorrendi integrál *abszolútértékben* is létezik, akkor az igazi integrál is létezik, és tényleg kiszámíthatjuk sorrendben. Itt is ez a helyzet.