



TÁMOP-4.1.1.F-13/1-2013-0010

"Eltérő utak a sikeres élethez!" A Miskolci Egyetem társadalmi gazdasági szerepének fejlesztése különös tekintettel a duális képzési típusú megoldásokra

MŰSZAKI MECHANIKA

A vektor- és tenzorszámítás alapismeretei mérnököknek

**Összeállította:
Szeidl György**

**Gépészmérnöki és Informatikai Kar
Alkalmazott Mechanikai Intézet**

**MISKOLCI EGYETEM
2014**

SZÉCHENYI 2020



Európai Unió
Európai Szociális
Alap



TARTALOMJEGYZÉK

1. Bevezetés	1
2. Műveletek vektorokkal	2
2.1. Mi a vektor?	2
2.2. Additív vektorműveletek.	3
2.3. Vektor szorzása skalárral.	4
2.4. Lineárisan összefüggő és lineárisan független vektorok.	5
2.5. Skaláris szorzat.	8
2.6. Vektoriális szorzat.	10
2.7. Vegyes szorzat.	13
2.8. Kétszeres vektorszorzat, kifejtési tétel.	14
3. Koordináta-rendszerek	15
3.1. Bázis, duál bázis.	15
3.2. Descartes-féle KR.	16
3.3. Műveletek vektorokkal Descartes-féle KR-ben.	18
3.4. Vektorok és mátrixok.	20
4. Néhány geometriai alkalmazás	20
4.1. Egyenes egyenlete.	20
4.2. Lineárisan független egyenesek.	21
4.3. Sík egyenlete.	25
4.4. A térgörbék differenciál geometriájának néhány összefüggése.	26
5. Feladatok megoldásokkal, gyakorlatok	27
5.1. Mintafeladatok	27
5.2. Gyakorlatok	32
6. Másodrendű tenzorok	32
6.1. Diádikus szorzat.	32
6.2. A másodrendű tenzor értelmezése.	34
7. Műveletek másodrendű tenzorokkal	36
8. Speciális tenzorok	37
8.1. Transzponált, felbontási tétel, vektorinvariáns, inverz.	37
8.2. Tenzorok és mátrixok.	40
8.3. Szimmetrikus másodrendű tenzorok sajátértékfeladata.	41
9. Vektorok és tenzorok transzformációja	46
9.1. Vektorok transzformációja.	46
9.2. Tenzorok transzformációja.	48
10. Feladatok megoldásokkal, gyakorlatok	49
10.1. Mintafeladatok	49
10.2. Gyakorlatok	52
10.3. Olvasásra ajánlott.	53
Köszönetnyilvánítás.	54
Hivatkozások	54

1. BEVEZETÉS

A jelen bevezetésben röviden áttekintjük az oktatási segédlet (továbbiakban segédlet) megírásának alapvető célkitűzéseit és röviden kitérünk arra is, hogy miként javasoljuk annak felhasználását. Tesszük ezt annak reményében, hogy ez is elősegíti Műszaki Mechanikát tanuló hallgatókat, pontosabban fogalmazva a Statika tantárgyat a tavaszi, a Szilárdságtan tantárgyat pedig az őszi félévben felvenni szándékozó hallgatókat, az idézett két tantárgyhoz kötődő – részint matematikai jellegű – alapismeretek felfrissítésében és elsajátításában. Az alábbi felsorolás el különítetten pontokba szedve tekinti át a segédlet megírásának motivációit, a célkitűzéseket és a hasznosulás lehetséges módozatait.

1. Ismeretes és sajnálatos tény, hogy a középiskolákból műszaki egyetemi karokra jelentkező hallgatók természettudományi (pl. matematika, geometria, fizika) előismeretei nem minden esetben kielégítőek, noha a műszaki alaptárgyak (pl. műszaki mechanika – ezen belül a statika, szilárdságtan, dinamika, mechanizmusok – áramlástan, műszaki hőtan, hőtechnikai gépek stb.) elsajátítása, és az így megszerzett ismeretek alkalmazási készségének kialakítása jelentősen függ ezektől az előismeretektől.
2. A bolognai folyamat és a kétszintű képzés (BSc és MSc szint) bevezetésekor megváltozott az mérnöki ismeretek három nagy csoportjához tartozó tantárgyak (mérnöki alaptárgyak, alapozó szaktárgyak, szaktárgyak) tradicionális és a korában nyolc, majd ezt követően tíz féléves egyetemi képzésre jellemző egy évszázad alatt változatlan 1/3-1/3-1/3 aránya: a mérnöki alaptárgyak aránya a korábbi 33%-ról 20-22%-ra csökkent. Ennek és a természettudományi alapismeretek nem mindig kielégítő színvonalának együttes következménye, hogy jelentősen megnőtt a lemorzsolódás az első négy félévben és a sikertelenség egyik oka a műszaki mechanikai ismeretek (a vonatkozó tárgyak szigorlattal zárulnak) nem kielégítő elsajátítása.
3. Bár a műszaki mechanikát a mérnöki alaptárgyak közé soroljuk, alapvető a fontossága az alkalmazásokban: pl. géptervezés (ez a felmerülő statikai, szilárdságtani, kinematikai és dinamikai kérdések megértésének alapja és egyben megoldásuk eszközzrendszere). Felmerül tehát az a kérdés is, hogy mi az oka a hallgatói sikertelenségnek, ha a műszaki mechanikát, mint külön tantárgy csoportot tekintjük. A szerző tapasztalatai szerint komoly gondot okoz a vektor- és tenzoralképzési ismeretek nem kielégítő volta – a vektoralképzési alapokat a statika tárgy előadás sorozatának elején, a tenzorszámítást a szilárdságtani előadások elején tekintjük át – noha minden további ismeret az idézett két tárgyon belül (de a dinamika és mechanizmusok tárgyak tekintetében is) a vektor és tenzorszámítás eszközzrendszerének magabiztos tudására épül.
4. A fentebb mondottak motiválták a szerzőt a jelen segédlet elkészítésében, amelyet a szerző reményei szerint a Miskolci Egyetem műszaki karain statikát és szilárdságtant tanuló hallgatók haszonnal forgathatnak.

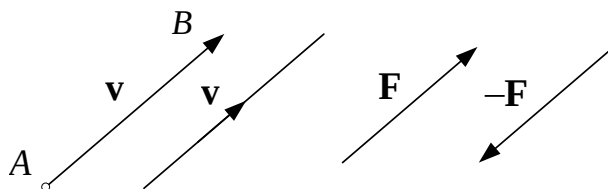
A segédlet szövege a tartalmat illetően külön tekinti át a vektoralképzési és tenzoralképzési alapismereteket. Ezek bemutatásakor a matematikai szigorúságot követelménynek tekintetem. A két fő részt kidolgozott mintafeladatok, és megoldásra váró gyakorlatok követik. A mintafeladatok lefedik a megoldások jellegzetes problémaköreit és azok áttanulmányozása elegendő a gyakorlatok megoldáshoz szükséges készségek kialakításához.

A szöveg monitoron történő olvasásra van kihegyezve. Az olvasás helyén felbukkanó piros- és zöldkeretes hivatkozásokra (egyenletszám, citátum) kattintva a hivatkozott helyre kerülünk, az olvasás helyére történő visszatérés pedig a baloldali ALT billentyű és jobboldali ← billentyű

együttes lenyomásával történhet, ha az Adobe Reader 10 (vagy későbbi), illetve a Sumatra 2.1 vagy későbbi verzióját használjuk – ezek ingyenes pdf olvasók.

2. MŰVELETEK VEKTOROKKAL

2.1. Mi a vektor? A vektor iránnyal rendelkező fizikai, illetve geometriai mennyiség. Ábrázolása a következő tulajdonságokkal rendelkező irányított egyenesszakasszal történik: (a) van nagysága (ez a vektort alkotó egyenesszakasz hossza, más névvel pedig a vektor abszolút értéke); (b) van mértékegysége (ez az a mértékegység, amiben a vektor hosszát mérjük); (c) van iránya (ezt a vektort alkotó egyenesszakasz térbeli elhelyezkedése szabja meg) és végül van (d) irányítása (ezt kezdő és végpont kijelölése határozza meg – pl. az A kezdőpontú és B végpontú vektor az 1. ábrán). Megjegyezzük, hogy a végpont helyét rendszerint a vektort szemléltető egyenesszakaszon feltüntetett nyíl mutatja meg, amely vagy magához a végponthoz kötött, vagy-pedig a kezdő és végpont között jelenik meg a vektort szemléltető ábrán).



1. ábra.

A vektor kezdő és végpontja egy egyenest határoz meg. Ezt az egyenest a vektor hatásvonalának (tartóegyeneseinek) nevezzük.

A vektorokat a latin abc félkövéren szedett kis és nagy betűivel jelöljük (pl. $\mathbf{v}$, ami a sebességvektor szokásos jelölése; avagy $\mathbf{F}$, ami a koncentrált erő, röviden erő megszokott jelölése). Bár szokásos a kezdő és végpontok megadásával jelölni valamely vektort: pl. $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$, a jelen oktatási segédlet általában a vastagbetűs szedést részesíti előnybe. A vektor hosszát (abszolút értékét) az ismert módon írjuk: $|\mathbf{v}|$.

Szabad vektorról beszélünk akkor, ha a vektor kezdőpontja nem rögzített (vagyis ha vektor kezdőpontját bármely térponthoz hozzá köthetjük). A szabad vektorok tehát eltolhatók önmagukkal párhuzamosan a térben.

Kötött vektorról beszélünk akkor, ha rögzített a vektor kezdőpontja. Kötött vektorok esetén a kezdőpontot általában a vektor támadáspontjának szokás nevezni. Ezt a szóhasználat elsősorban erővektorok – röviden erők – esetén alkalmazzuk.

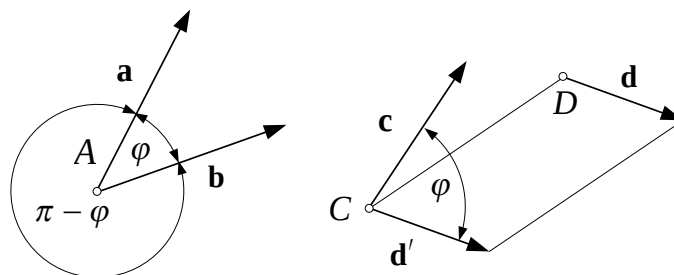
Két vektor egyenlő ha azonos a nagyságuk, mértékegységük, irányuk és irányításuk. Az egymással egyenlő vektorokat célszerű ugyanazzal a betűvel jelölni.

Adott vektor ellentettjének tekintjük értelmezés szerint az adott vektossal azonos nagyságú, mértékegységű, irányú de vele ellentétes irányítású vektort. Jelölésben ezt a negatív előjel kitétele különbözteti meg az eredeti vektortól – az ábrán pl. $-\mathbf{F}$.

A zérusvektor kezdő és végpontja egybeesik. Iránya határozatlan – bármely más vektossal egyező irányúnak vehetjük. Betűjele a félkövéren szedett nulla. $\mathbf{0}$.

Közös kezdőpontú vektorok által bezárt szögön – ilyenek pl. a 2. ábra $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorai – a két vektor hatásvonalai által alkotott két szög közül a $[0, \pi]$ intervallumba eső φ szöget értjük. Ha egybeesik két vektor hatásvonala, akkor a két vektor által bezárt szög (zérus) $[\pi]$, ha a két

vektornak (azonos)[ellentétes] az irányítása. Következésképp két párhuzamos vektornak zérus (azonos irányításúak), illetve π (ellentétes irányításúak) az egymással bezárt szöge.



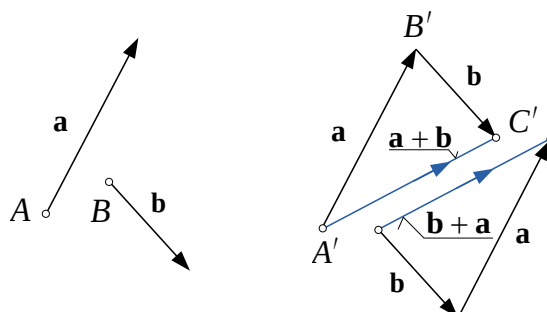
2. ábra.

Ha a tekintett két vektornak (mondjuk a C kezdőpontú c vektornak, valamint a D kezdőpontú d vektornak) nem közös a támadáspontja, akkor az egyiket (a jelen esetben d vektort) úgy toljuk el önmagával párhuzamosan, hogy az eltolás után essen egybe a kezdőpontja (az ábrán ez az eltolással adódó d' vektor kezdőpontja) a helyben maradó vektor (a c vektor) kezdőpontjával. A két vektor által bezárt szögön ebben az esetben a helyben maradó és az eltolt vektorok alkotta (a 2. ábrán a c vektor és a d' vektor által alkotott) szöget értjük. Vegyük észre, hogy a nem azonos kezdőpontú két vektor által bezárt szög nagysága független attól, hogy melyik vektort hagyjuk helyben, és melyik vektort toljuk el önmagával párhuzamosan oly módon, hogy az eltolt vektor és a helyben maradó vektor kezdőpontja egybe essen.

2.2. Additív vektorműveletek. A 3. ábra külön is feltünteti, függetlenül az a és b vektorok

$$a + b$$

összegének értelmezését szemléltető jobboldali ábrarészlettől, az a és b vektorokat. A kérdéses vektorösszeget úgy értelmezzük, hogy az A' kezdőponttal megrajzolt a vektor végpontjához illesztjük az önmagával párhuzamosan eltolt b vektor kezdőpontját (a B' pontot – ez a végponthoz a kezdőpontot séma). A két vektor összegének kezdőpontja az a vektor kezdőpontja (vagyis az A' pont), végpontja pedig az a vektor végpontjához illesztett b vektor végpontja (az utóbbi a C' pont).



3. ábra.

Az $A' B' C'$ háromszöget vektorháromszögnek nevezzük.

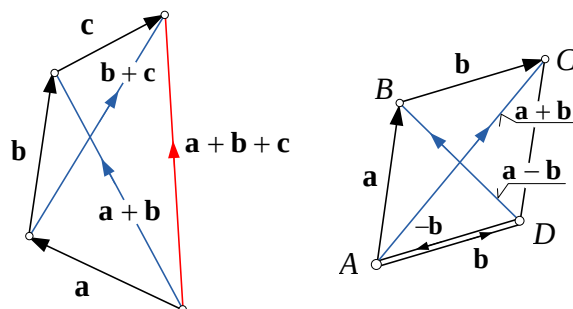
Az is leolvasható a 3. ábráról – lásd a végponthoz a kezdőpontot sémaiban megrajzolt $b + a$ összeget – hogy a vektorok összeadásának művelete kommutatív művelet.

A 4. ábra a végponthoz a kezdőpontot sémában megrajzolt $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ vektorösszeget tünteti fel. Leolvasható a baloldali ábrarészletről, hogy fennáll az

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$$

reláció, ami azt fejezi ki, hogy asszociatív a vektorok összeadásának művelete.

Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok különbségét – lásd a 4. ábra jobboldali részét – az $\mathbf{a}$ és $-\mathbf{b}$ vektorok $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ összegeként értelmezzük.



4. ábra.

Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által meghatározott $ABCD$ paralelogrammát vektor paralelogrammának nevezzük. Ha nem párhuzamos az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$, akkor az $\overrightarrow{AC}$ átló a két vektor összege, a $\overrightarrow{DB}$ átló pedig a két vektor különbsége. A vektorösszeadás paralelogramma szabálya az előzőek alapján fogalmazható meg: két nem párhuzamos vektor összege a közös pontból felmért két vektor által kifeszített paralelogramma ugyanezen pontból induló átlója.

Az eddigiek figyelembevételével – összegezve az additív műveletek lényeges tulajdonságait – megállapítható, hogy fennállnak az alábbi azonosságok:

- | | | |
|-------|---|--------------------------|
| (i) | $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ | (kommutativitás) , |
| (ii) | $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ | (asszociativitás) , |
| (iii) | $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ | (van zérusvektor) , |
| (iv) | $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ | (inverz elem létezése) . |

2.3. Vektor szorzása skalárral. Legyen a κ valós szám. A $\kappa\mathbf{a}$ szorzaton azt a vektort kell érteni, amelynek (a) $|\kappa||\mathbf{a}|$ az abszolút értéke (nagysága), (b) tetszőleges az iránya, ha $\kappa = 0$ vagy $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ – egyébként megegyezik az iránya az $\mathbf{a}$ irányával, (c) megegyezik az irányítása az $\mathbf{a}$ irányításával, ha $\kappa > 0$, illetve ellentétes az irányítása az $\mathbf{a}$ vektorével, ha $\kappa < 0$.

A vektorok skalárral történő szorzása esetén – ha κ és λ két tetszőleges skalár – az alábbi azonosságok teljesülnek:

- | | | |
|-------|---|----------------------|
| (i) | $(\kappa\lambda)\mathbf{a} = \kappa(\lambda)\mathbf{a}$ | (asszociativitás) , |
| (ii) | $\kappa(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \kappa\mathbf{a} + \kappa\mathbf{b}$ | (disztributivitás) , |
| (iii) | $(\kappa + \lambda)\mathbf{a} = \kappa\mathbf{a} + \lambda\mathbf{a}$ | (disztributivitás) , |
| (iv) | $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$. | |

Ezeket nem igazoljuk formálisan.

2.4. Lineárisan összefüggő és lineárisan független vektorok. Legyen a λ_i , valamint az $\mathbf{a}_i$ ($i = 1, \dots, n; n \geq 2$) n számú nem zérus skalár, valamint n számú nem zérus vektor. A $\mathbf{v}$ vektort adó

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n \quad (2.1)$$

vektorösszeget az $\mathbf{a}_i$ vektorok lineáris kombinációjának nevezzük.

Feltételezzük a továbbiakban – anélkül hogy erre általában ismét felhívnánk a figyelmet –, hogy nem zérus értékű az $\mathbf{a}_i$ és egyes külön megemlített esetektől eltekintve a λ_i is ($i = 1, \dots, n; n \geq 2$).

Lineárisan összefüggők értelmezés szerint az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ vektorok, ha fennáll az

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

egyenlet azaz ha zérus értékű a lineáris kombinációjuk. Mivel a két λ nem zérus, innen az

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathbf{a}_2$$

egyenlet következik, vagyis egymással párhuzamos kell legyen az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$. Az is nyilvánvaló, hogy nem egyértelműen meghatározott a λ_1 és a λ_2 skalárok értéke – a viszonyszámuk, azaz a λ_2/λ_1 hányados viszont igen. Ez az eredmény azt jelenti, hogy két párhuzamos vektor mindig lineárisan összefüggő.

Másként fogalmazva azt is mondhatjuk, hogy adott vektorral (mondjuk az $\mathbf{a}_1$ vektorral) párhuzamos vektor (mondjuk a $\mathbf{v}$ vektor) mindig előállítható az adott vektor és egy skalár szorzataként, azaz a

$$\mathbf{v} = \mu_1 \mathbf{a}_1 \quad (2.3)$$

alakban – a μ_1 skalár.

Lineárisan függetlennek nevezzük az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ vektorokat, ha a (2.2) vektorösszeg csak $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ esetben zérus. Nyilvánvaló a vektorösszeadást értelmező szerkesztési szabály alapján az, hogy két egymással nem párhuzamos vektor mindig lineárisan független.

Lineárisan összefüggők értelmezés szerint az egymással nem párhuzamos $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ vektorok, ha fennáll a

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

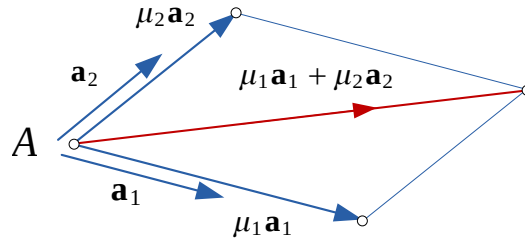
egyenlet azaz ha zérus értékű a lineáris kombinációjuk. Mivel a három λ nem zérus, következik innen, hogy

$$\mathbf{a}_3 = \underbrace{-\frac{\lambda_1}{\lambda_3}}_{\mu_1} \mathbf{a}_1 - \underbrace{\frac{\lambda_2}{\lambda_3}}_{\mu_2} \mathbf{a}_2 = \mu_1 \mathbf{a}_1 + \mu_2 \mathbf{a}_2, \quad (2.5)$$

ami azt jelenti, hogy az $\mathbf{a}_3$ súlyozott vektorösszege az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ vektoroknak – a súlyokat rendre μ_1 és μ_2 jelöli. Az 5. ábra a vektorösszeadás szabályainak megfelelően szemlélteti az A pontból rajzolva fel az $\mathbf{a}_3 = \mu_1 \mathbf{a}_1 + \mu_2 \mathbf{a}_2$ vektorösszeget. Ez nyilvánvalóan benne kell hogy legyen az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ vektorok által kifeszített síkban. Másként fogalmazva azt mondhatjuk, hogy közös ponthoz kötve három lineárisan összefüggő vektort azok egyetlen síkban kell hogy feküdjenek, idegen szóval komplanárisak kell, hogy legyenek.

A közös kezdőpontú nem párhuzamos $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ vektorok síkot feszítenek ki. Az ezzel a síkkal párhuzamos $\mathbf{v}$ vektor mindig előállítható a

$$\mathbf{v} = \mu_1 \mathbf{a}_1 + \mu_2 \mathbf{a}_2 \quad (2.6)$$



5. ábra.

alakban. Ez az állítás a (2.5) egyenlet következménye. Az tehát, hogy a $\mathbf{v}$ előállítható a fenti alakban nem kétséges. Az egyértelműség azonban tisztázásra szorul. Tegyük fel, hogy kétféle lineáris kombináció is – a súlyok rendre μ_1 és μ_2 , illetve ν_1 és ν_2 –, ugyanazt a $\mathbf{v}$ -t eredményezi azaz

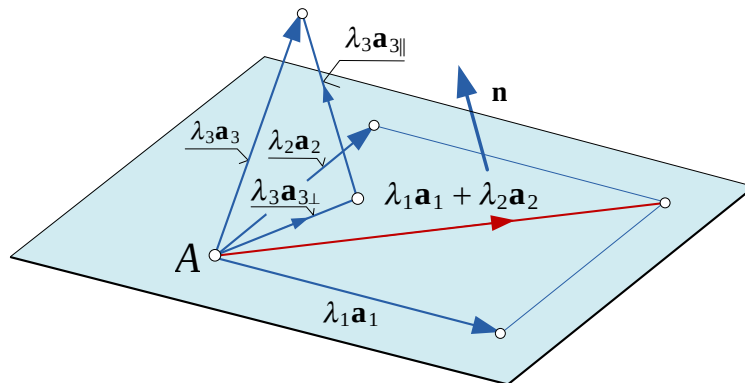
$$\mathbf{v} = \mu_1 \mathbf{a}_1 + \mu_2 \mathbf{a}_2 = \nu_1 \mathbf{a}_1 + \nu_2 \mathbf{a}_2 ,$$

vagyis

$$(\mu_1 - \nu_1) \mathbf{a}_1 + (\mu_2 - \nu_2) = \mathbf{0} .$$

Az utóbbi összegben lineárisan független az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$, ezért zérus értékűek kell, hogy legyenek a súlykülönbségek: egyértelmű tehát a $\mathbf{v}$ (2.6) alatti előállítása.

Lineárisan függetlennek nevezzük a nem zérus $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ vektorokat, ha a (2.4) vektorösszeg csak $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ esetben zérus.



6. ábra.

Tegyük fel, hogy a közös pontból felmért $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ vektoroknak nincs közös síkja. A 6 ábra ennek megfelelően ábrázolja a viszonyokat és külön is feltünteti (a) a $\lambda_1 \mathbf{a}_1$ és $\lambda_2 \mathbf{a}_2$ vektorok által kifeszített síkot, (b) a $\lambda_1 \mathbf{a}_1$ és $\lambda_2 \mathbf{a}_2$ vektorok összegét (amely ebben a síkban fekszik), (c) a sík $\mathbf{n}$ normálisát (ki szokás kötni, hogy $|\mathbf{n}| = 1$, de az $\mathbf{n}$ nagyságának nincs szerepe a gondolatmenetben) és (d) a $\lambda_3 \mathbf{a}_3$ vektort. Vegyük észre, hogy a $\lambda_3 \mathbf{a}_3$ két vektor összege, azaz

$$\lambda_3 \mathbf{a}_3 = \lambda_3 \mathbf{a}_{3\perp} + \lambda_3 \mathbf{a}_{3\parallel} ,$$

ahol $\lambda_3 \mathbf{a}_{3\perp}$ merőleges az $\mathbf{n}$ normálisra, azaz benne fekszik a $\lambda_1 \mathbf{a}_1$ és $\lambda_2 \mathbf{a}_2$ vektorok által kifeszített síkban, míg $\lambda_3 \mathbf{a}_{3\parallel}$ párhuzamos az $\mathbf{n}$ -el, azaz merőleges a $\lambda_1 \mathbf{a}_1$ és $\lambda_2 \mathbf{a}_2$ vektorok síkjára, emiatt nem állítható elő az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ lineáris kombinációjaként. Ez egyben azt is jelenti, hogy a (2.4) összeg eltűnéséhez zérus kell legyen a λ_3 . Ha zérus a λ_3 , akkor már csak azt kell tisztázni mikor zérus a $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2$ vektorösszeg. Erre a kérdésre már válaszoltunk korábban: ha nem

párhuzamos az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ – most ez az eset forog fenn –, akkor zérus kell, legyen a λ_1 és a λ_2 . Összegezve: ha valamely három vektornak, ezeket gondolatban közös kezdőponthoz kötjük, nincs közös síkja, akkor a három vektor lineárisan független.

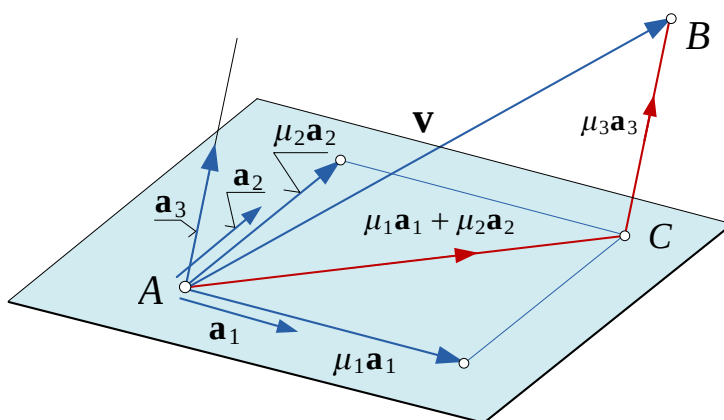
Tegyük ismét fel, hogy a közös pontból felmértnek gondolt $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ vektoroknak nincs közös síkja. Kikötjük továbbá, hogy az $\mathbf{a}_4$ vektor (a) nem párhuzamos az $\mathbf{a}_i$, ($i = 1, 2, 3$) vektorokkal (ekkor ugyanis lineárisan összefügg azzal amelyikkel párhuzamos – előállítható tehát annak többszöröseként), (b) nem párhuzamos az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$, vagy az $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$, avagy az $\mathbf{a}_3$ és $\mathbf{a}_1$ vektorok által kifeszített síkkal (ekkor ugyanis lineárisan összefügg azzal a kettővel, amelyek síkjával párhuzamos – előállítható tehát ezek lineáris kombinációjaként). A fenti feltételek teljesülése mellett is lineárisan összefüggők az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ és $\mathbf{a}_4$ vektorok, azaz fennáll, hogy

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3 + \lambda_4 \mathbf{a}_4 = \mathbf{0}, \quad (2.7)$$

ahonnan – nem zérus értékűek a λ -ák – az is következik, hogy

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}_4 = -\underbrace{\frac{\lambda_1}{\lambda_4}}_{\mu_1} \mathbf{a}_1 - \underbrace{\frac{\lambda_2}{\lambda_4}}_{\mu_2} \mathbf{a}_2 - \underbrace{\frac{\lambda_3}{\lambda_4}}_{\mu_3} \mathbf{a}_3 = \mu_1 \mathbf{a}_1 + \mu_2 \mathbf{a}_2 + \mu_3 \mathbf{a}_3. \quad (2.8)$$

A fentiek belátásához elegendő a (2.8) képlet helyességét igazolni. A geometriai viszonyokat – az A kezdőpontból felrajzolt $\mathbf{a}_i$ ($i = 1, 2, 3$) és $\mathbf{v}$ vektorokat, valamint az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ vektorok által kifeszített síkot – a 7. ábra szemlélteti. Húzzunk egy, az $\mathbf{a}_3$ -al párhuzamos egyenest a $\mathbf{v}$



7. ábra.

vektor B végpontján keresztül. Ez a C pontban dőli az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ vektorok által kifeszített síkot. Leolvasható az ábráról, hogy a $\mathbf{v}$ az $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{CB}$ vektorok összege. Mivel párhuzamos $\overrightarrow{CB}$ az $\mathbf{a}_3$ -al, ennél fogva mindig megadható a $\mu_3 \mathbf{a}_3$ alakban és ez az előállítás egy-egy értelmű. Ha ezek után párhuzamosokat húzzunk C ponton keresztül az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ vektorokkal akkor megkapjuk az $\overrightarrow{AC}$ vektort, mint az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ vektorokkal párhuzamos $\mu_1 \mathbf{a}_1$ és $\mu_2 \mathbf{a}_2$ vektorok összegét. Nyilvánvaló a korábbiak alapján, hogy ez az előállítás is egy-egy értelmű.

A végső konklúzió az eddig mondottakat összegezve, hogy fennáll a (2.8) egyenlet (a) akkor is, ha a $\mathbf{v}$ vektor párhuzamos az $\mathbf{a}$ vektorok valamelyikével (ekkor két μ zérus értékű), (b) akkor is, ha a $\mathbf{v}$ vektor párhuzamos az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$, vagy az $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$, vagy pedig az $\mathbf{a}_3$ és $\mathbf{a}_1$ vektorok által kifeszített síkok valamelyikével (ekkor egy μ zérus értékű), és végül de nem utolsón sorban a 7. ábrán szemléltetett esetben is. Másként fogalmazva azt mondhatjuk, hogy négy

térbeli vektor mindig lineárisan összefüggő, de ami még fontosabb az az, hogy bármely vektor előállítható három olyan térbeli vektor lineáris kombinációjaként (a súlyok egy-egy értelműen meghatározottak) amelyeknek, egy pontból mérve fel azokat, nincs közös síkjuk.

Tömörebben fogalmazva három olyan vektor amelynek nincs közös síkja a tér bázisát alkotja, hiszen bármely más vektor előállítható ezek egy lineáris kombinációjaként.

Az ilyen vektorokat bázisvektoroknak is szokás nevezni.

Megmutatható, hogy négynél több vektor mindig lineárisan összefüggő. Ennek az állításnak igazolását gyakorlatra hagyjuk.

2.5. Skaláris szorzat. Legyen az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két tetszőleges vektor. Jelölje φ a két vektor által bezárt szöget. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzatát az

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi \quad (2.9)$$

összefüggés értelmezi. Kiolvasható a képletből, hogy félkövéren szedett pont a skaláris szorzás műveleti jele.

Nyilvánvaló az értelmezés alapján, hogy

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2 |\cos \varphi|_{\varphi=0} \implies |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}. \quad (2.10)$$

A képletsor jobboldala az $\mathbf{a}$ vektor abszolút értékét adja.

Az egységnyi abszolút-értékű vektorokat egységvektoroknak nevezzük.

Zérus értékű az $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ skalárszorzat, ha (a) zérusvektor az $\mathbf{a}$, vagy $\mathbf{b}$ (vagy mindkettő), vagy pedig ha (b) $\varphi = \pi/2$ (merőleges egymásra a nem zérusvektor $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$). Mivel egy zérusvektornak tetszőleges lehet az iránya, úgy is fogalmazhatunk, hogy az bármely más vektorra merőleges.

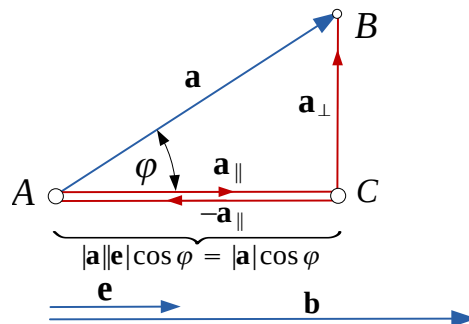
A fentiek alapján azt szokás mondani, hogy két vektor akkor merőleges egymásra ha zérus értékű a skaláris szorzatuk. Ez a feltétel szükséges és egyben elégséges is.

Két egymásra merőleges vektort ortogonálisnak is szokás nevezni.

Ha egymásra kölcsönösen merőlegesek (bármelyik merőleges a másik kettőre), azaz ortogonálisak a bázisvektorok, akkor ortogonális bázisvektor-rendszerről beszélünk.

Normálnak szokás nevezni valamilyen mennyiséget, ha elosztjuk azt az abszolút értékével. Az egységvektorok normált vektorok.

Ortonormált bázisvektor-rendszerről beszélünk akkor, ha a három egymásra kölcsönösen merőleges bázisvektor egyben egységvektor is.



8. ábra.

Valamely $\mathbf{a}$ vektor mindig felbontható egy adott iránnyal – ezt az irányt a $\mathbf{b}$ vektor határozza meg a viszonyokat szemléltető a 8. ábrán – párhuzamos $\mathbf{a}_{\parallel}$ és arra merőleges $\mathbf{a}_{\perp}$ vektor összegére. Az $\mathbf{a}_{\parallel}$ és $\mathbf{a}_{\perp}$ vektorokat az $\mathbf{a}$ vektor adott iránnyal párhuzamos és arra merőleges

összetevőinek szokás nevezni. Legyen $\mathbf{e}$ a $\mathbf{b}$ -vel azonos irányú és irányítású egységvektor. Nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{e} = \mathbf{b}/|\mathbf{b}|.$$

Felhasználva a skaláris szorzás (2.9) alatti értelmezését és az $\mathbf{e}$ fenti képletét, kapjuk a 8. ábra alapján, hogy

$$\mathbf{a}_{\parallel} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{e} = \frac{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}. \quad (2.11)$$

Ismételten, de a korábbiaktól kicsit eltérő szövegezéssel hangsúlyozzuk, hogy az $\mathbf{a}_{\parallel}$ vektor az $\mathbf{e}$ -re történő merőleges vetítéssel adódott. Az $\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}$ skalárt az $\mathbf{a}$ vektor $\mathbf{e}$ koordinátájának ($\mathbf{e}$ irányú összetevőjének) szokás nevezni. A magyar szaknyelv a koordináta szót részesíti előnybe az összetevő megfogalmazással szemben, amelyet általában csak a vektori összetevők esetén használunk.

Az is leolvasható a 8. ábráról, hogy

$$\mathbf{a}_{\perp} = (-\mathbf{a}_{\parallel}) + \mathbf{a} = \mathbf{a} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{e} = \mathbf{a} - \frac{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}. \quad (2.12)$$

A skaláris szorzat tekintetében fennállnak az alábbi tulajdonságok, ahol λ skalár.

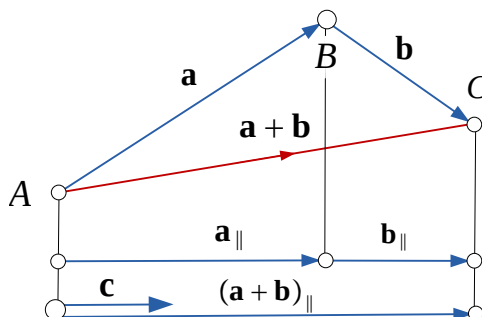
- (i) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (kommutativitás) ,
- (ii) $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$ (disztributivitás) ,
- (iii) $\lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b})$ (homogenitás) ,
- (iv) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$ ha 0, akkor $\Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Az (i) és (iv) alatti tulajdonság azonnal következik a művelet értelmezéséből.

Az (iii) alatti tulajdonság is következik az értelmezésből, ha kihasználjuk, hogy (a) $\lambda > 0$ esetén ugyanakkora marad az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$, $\lambda \mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$, valamint az $\mathbf{a}$ és $\lambda \mathbf{b}$ közötti φ szög (b) $\lambda < 0$ esetén pedig az kell figyelembe venni a szögváltozás miatt, hogy az $\lambda \mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$, valamint az $\mathbf{a}$ és $\lambda \mathbf{b}$ által bezárt szög egyaránt $\pi - \varphi$ és így $\cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi$. Következésképp pl.

$$(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = |\lambda \mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\pi - \varphi) = \underbrace{-|\lambda|}_{\lambda} |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\varphi) = \lambda \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Ami az (ii) alatti tulajdonságot illeti tekintettel az (i) és (iii) alatti tulajdonságokra feltehetjük, hogy egységvektor a $\mathbf{c}$. Ekkor a vele párhuzamos vektori összetevők mindegyike,



9. ábra.

amint azt a korábbiakkal is összhangban szemlélteti a 9. ábra, a $\mathbf{c}$ -re történő merőleges vetítéssel adódik, vagyis

$$[\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})] \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})_{\parallel} = \mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{b}_{\parallel} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{c} + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}.$$

A fenti egyenletet $\mathbf{c}$ -vel szorozva $-\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = 1$ – a kérdéses tulajdonság adódik.

2.6. Vektoriális szorzat. Tekintsük az egymással φ szöget bezáró $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokat. Ezek vektoriális szorzatának a $\times$ döntött kereszt a műveleti jele, magának a műveletnek pedig vektor az eredménye. Ha az utóbbit $\mathbf{c}$ jelöli akkor formálisan

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

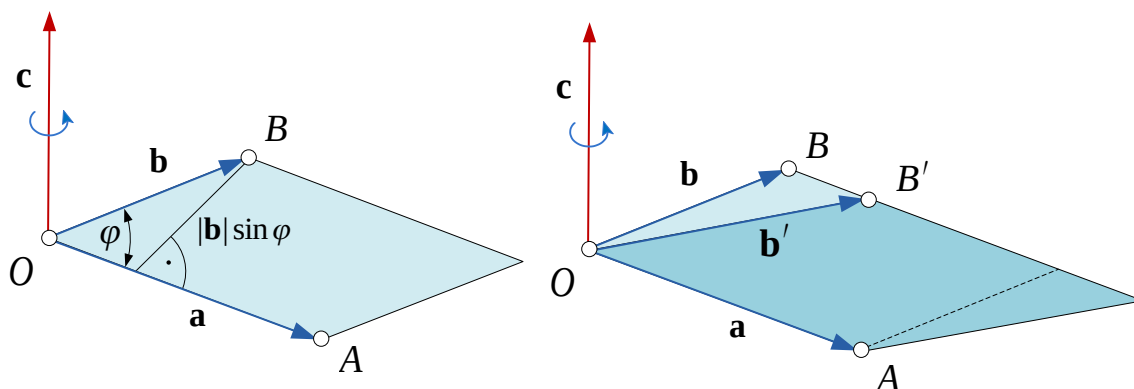
a vektoriális szorzat írásmódja. A szorzatot az alábbi három előírás határozza meg:

1. A $\mathbf{c}$ vektor merőleges a közös O kezdőponthoz kötöttnek gondolt $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített síkra.
2. A $\mathbf{c}$ vektor abszolút-értékét a

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \varphi$$

képlettel kell számolni. (Ez a pozitív szám az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített parallelogramma területe – lásd a 10. ábra baloldali részletét.)

3. A $\mathbf{c}$ vektor csúcsából (végpontjából) tekintve az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített síkra az $\mathbf{a}$ vektor a φ szögtartományon keresztül az óramutató járásával ellentétesen forgatható be a $\mathbf{b}$ vektorba. (A 10. ábrán a $\mathbf{c}$ vektor hatásvonalát körülölelő nyilacska ezt a forgási irányt szemlélteti.)



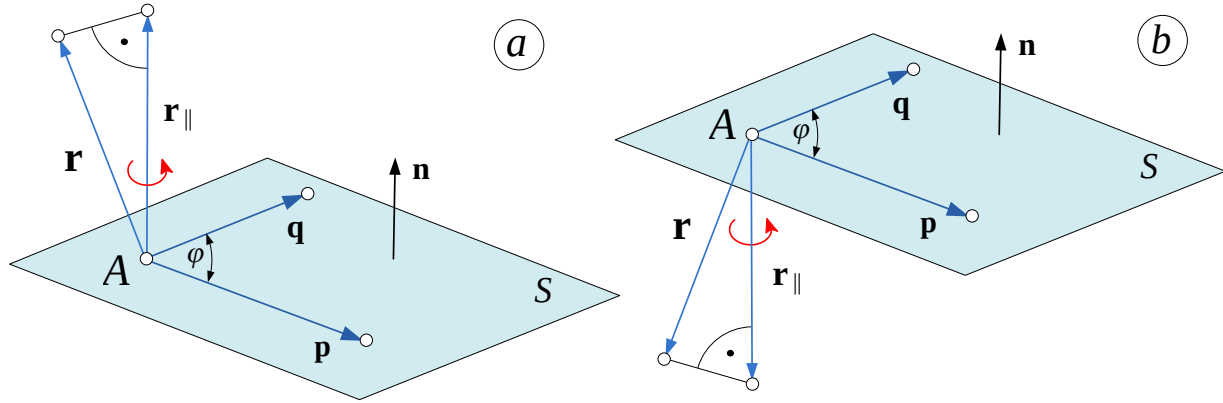
10. ábra.

A 11. ábra az A ponthoz kötötten szemlélteti a nem komplanáris $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ és $\mathbf{r}$ vektorok alkotta vektorhármast (triádot), a $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ vektorok által kifeszített S síkot és a sík $\mathbf{n}$ normálisát, továbbá az $\mathbf{r}$ vektor $\mathbf{n}$ vektorral párhuzamos $\mathbf{p}_{\parallel}$ összetevőjét. Rendezettnak tekintjük értelmezés szerint a $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ és $\mathbf{r}$ vektorok alkotta triádot, ha előírjuk a vektorok sorrendjét – a sorrend most $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ és $\mathbf{r}$. Nem változik a rendezettség, ha ciklikus cseréket hajtunk végre, vagyis a $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ és $\mathbf{p}$, valamint az $\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ sorrendek ugyanolyan rendezettséget jelentenek. [Jobbsodratúnak – 11.a. ábrarészlet] [Balsodratúnak 11.b. ábrarészlet] nevezzük a $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ és $\mathbf{r}$ vektorok alkotta rendezett triádot, ha a $\mathbf{p}_{\parallel}$ vektor végpontjából tekintve az S síkra, az óramutató járásával [ellentétes irányban] (megegyező irányban) forgatható be a $\mathbf{p}$ vektor a $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ által bezárt φ szögön keresztül a $\mathbf{q}$ vektorba.

Ha [jobbsodratú] (balsodratú) a $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ és $\mathbf{r}$ vektorok alkotta triád, akkor ugyancsak [jobbsodratú] (balsodratú) a vele azonos rendezettségű $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ és $\mathbf{p}$ illetve $\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ vektorok alkotta másik két triád is.

A vektoriális szorzat harmadik előírása azt jelenti a fentebb mondottak alapján, hogy jobbsodratú triádot alkotnak az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorok.

Vegyük észre, hogy nem változik a vektoriális szorzat értéke akkor, ha a $\mathbf{b}$ vektor végpontját – a kezdőpontját rögzítettnek gondolva – a végpontján keresztül az $\mathbf{a}$ vektorral párhuzamosan



11. ábra.

megrajzolt egyenes mentén mozgatjuk, mivel ez nem változtatja meg az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területét:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}'.$$

Zérus vektor a vektoriális szorzat értékét adó $\mathbf{c}$ vektor, (a) ha zérusvektor az $\mathbf{a}$, vagy $\mathbf{b}$ (vagy mindkettő), illetve (b) ha $\varphi = 0$ (párhuzamos és azonos irányítású a nem zérusvektor $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$) vagy pedig ha $\varphi = \pi$ (párhuzamos és ellentétes irányítású egymással a nem zérusvektor $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$). Mivel egy zérusvektornak tetszőleges lehet az iránya az bármely más vektorral párhuzamos vektornak is tekinthető.

Ennek alapján azt szokás mondani, hogy két vektor akkor párhuzamos egymással, ha zérusvektor a vektoriális szorzatuk. Ez a feltétel szükséges és egyben elégséges is.

A vektoriális szorzat esetén fennállnak az alábbi tulajdonságok – a λ tetszőleges skalár, az $\mathbf{e}$ pedig egységvektor.

- (i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (antiszimmetrikus – nem kommutatív) ,
- (ii) $\lambda (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b})$ (homogenitás) ,
- (iii) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ (disztributivitás) ,
- (iv) $\mathbf{a}_\perp = \mathbf{e} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{e})$ (az $\mathbf{a}$ vektor $\mathbf{e}$ -re merőleges komponense) .

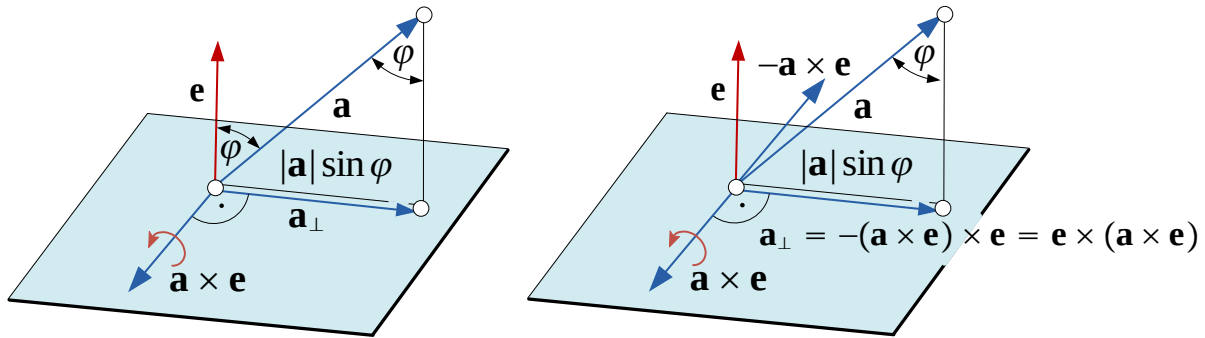
Az (i) alatti tulajdonság azonnal következik a művelet harmadik előírásából hiszen a sorrendcsere után csak akkor forgatható az eredmény végpontjából tekintve a $\mathbf{b}$ az $\mathbf{a}$ -ba a φ szögön keresztül, ha $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{c}$.

Az (ii) alatti tulajdonság nyilvánvaló a műveleti előírások alapján ha $\lambda > 0$. Ha a $\lambda < 0$ akkor a $\mu = -\lambda$ helyettesítéssel és a műveleti sorrend cseréjével lényegében az előző, azaz a skaláris szorzótényező pozitív értékű esethez jutunk vissza.

Elegendő, tekintettel (ii) alatti tulajdonságra, az (iii) alatti tulajdonságot arra az esetre igazolni, ha egységvektor a $\mathbf{c}$. Ezt a továbbiakban $\mathbf{e}$ -vel jelöljük. Ki fogjuk használni, hogy valamely vektor – a fentiek miatt mondjuk az $\mathbf{a}$ vektor – $\mathbf{e}$ -vel vett vektoriális szorzata két lépésben megszerkeszthető. (a) Vetítsük az $\mathbf{a}$ végpontját az $\mathbf{e}$ -re merőleges síkra (az eredmény az $\mathbf{a}_\perp$ vektor

lesz). (b) Forgassuk el az eredményt 90° -al az $\mathbf{e}$ -re merőleges síkban – a forgatás $\mathbf{a} \times \mathbf{e}$ szorzatot eredményezi.

Közbevetőleg jegyezzük meg, hogy elvben az előző két lépés végrehajtásával szerkeszthetjük meg a $-(\mathbf{a} \times \mathbf{e}) \times \mathbf{e} = \mathbf{e} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{e})$ szorzatot. Vegyük észre, hogy most azonban nincs szükség vetítésre, mivel az első szorzótényező, azaz a $-\mathbf{a} \times \mathbf{e}$ vektor, eleve az $\mathbf{e}$ -re merőleges síkban fekszik. A végeredmény tehát egyetlen forgatással kapható meg. Ez egyben az (iv) tulajdonság igazolása.

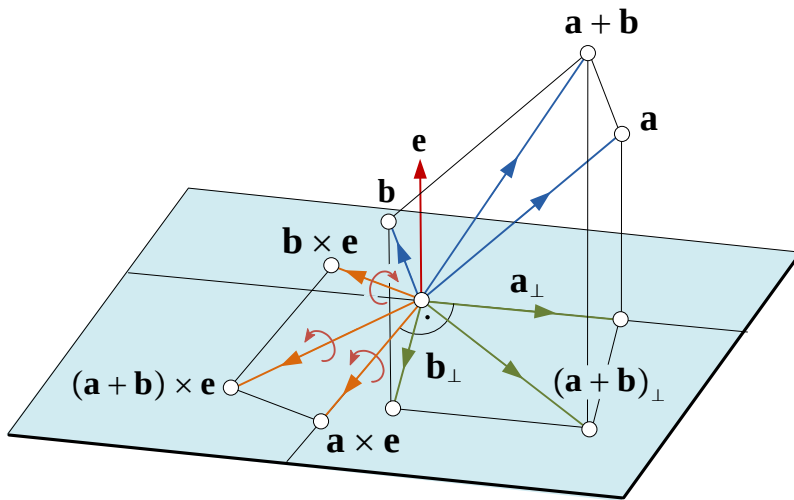


12. ábra.

Visszaidézve a (2.12) képletet az is fennáll, hogy

$$\mathbf{a}_\perp = \mathbf{e} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{e}) = \mathbf{a} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{e} . \quad (2.13)$$

Az utóbbi egyenlet az úgynevezett kifejtési tétel speciális esete.



13. ábra.

Visszatérve az (iii) alatti tulajdonság a disztributivitás kérdéséhez a 13. ábra szemlélteti az előzőek alapján az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokra az $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{e}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{e}$ és $\mathbf{b} \times \mathbf{e}$ vektoriális szorzatok szerkesztését. Érdekes a lépések végiggondolásakor összevetni a 13. ábrát a 12 ábrával. Leolvasható a 13. ábráról – lásd a vonatkozó vektorparalelogrammát –, hogy

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{e} = \mathbf{a} \times \mathbf{e} + \mathbf{b} \times \mathbf{e} .$$

Az egyenlet helyes volta annak a következménye hogy az előzőekben leírt kétlépéses geometriai transzformáció – a vetítésre és az azt követő forgatásra gondolunk ehelyütt – fenntartja a geometriai alakzatok illeszkedéseit.

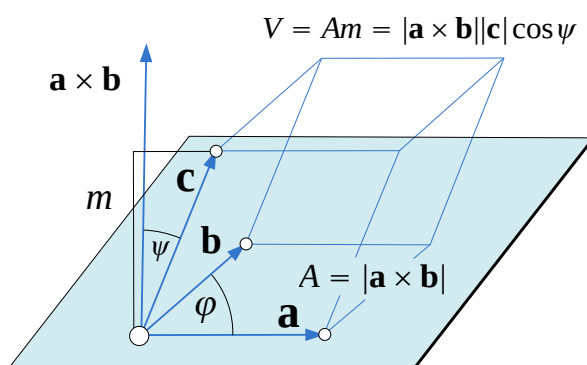
2.7. Vegyes szorzat. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok vegyes szorzatát az

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = [\mathbf{abc}]$$

képlet baloldala értelmezi. Az egyenlőségjel után álló jobboldal a szorzat tömör írásmódja (szedési módja).

A szorzat az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

- (i) A vegyesszorzat (pozitív)[negatív] szám ha a három feltevés szerint nem komplanáris vektor (jobbsodratú)[balsodratú] vektor hármaszt alkot.



14. ábra.

- (ii) A szorzat értéke a három vektor által kifeszített hasáb előjeles V térfogata – az előjelszámbát az előző (i) tulajdonság adja.
 (iii) Zérus értékű a vegyesszorzat, ha komplanáris (lineárisan összefüggő) az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$.
 (iv) Felcserélhető a műveleti jelek sorrendje, valamint ciklikusan a szorzótényezők sorrendje is. Fennáll, tehát hogy

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = [\mathbf{abc}]$$

(ez indokolja a három szorzótényezőt a $[\dots]$ dobozba helyező írásmódot), valamint hogy

$$\begin{aligned} [\mathbf{abc}] &= [\mathbf{bca}] = [\mathbf{cab}] = \\ &= -[\mathbf{bac}] = -[\mathbf{cba}] = -[\mathbf{acb}] , \end{aligned}$$

ahol az első sor a ciklikus felcserélhetőséget, a második pedig a sorrendcserékből adódó előjel váltásokat tükrözi.

- (v) A λ skalárral történő szorzás esetén

$$\lambda [\mathbf{abc}] = [(\lambda \mathbf{a}) \mathbf{bc}] = [\mathbf{a} (\lambda \mathbf{b}) \mathbf{c}] = [\mathbf{ab} (\lambda \mathbf{c})] .$$

- (vi) A fentiek mellett disztributív is a vegyes szorzat, azaz

$$[(\mathbf{a} + \mathbf{d}) \mathbf{bc}] = [\mathbf{abc}] + [\mathbf{dbc}] .$$

Az (i) és (ii) alatti tulajdonság leolvasható a 14. ábráról amely jobbsodratú $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorhármásra szemlélteti a viszonyokat. A paralelepipedon térfogata ez esetben pozitív hiszen jobbsodratú nem komplanáris vektorhármassal esetén $0 \leq \psi < \pi/2$ (balsodratú nem komplanáris vektorhármassal $\pi/2 < \psi \leq \pi$, következésképp negatív szám a térfogat).

A (iii) alatti tulajdonság abból adódik geometriailag, hogy ez esetben zérus az a , b és c által kifeszített paralelepipedon magassága. Formálisan is megmutatható a vegyes szorzat eltűnése, ha kihasználjuk, hogy lineárisan összefüggők az a , b és c vektorok. Ezt az igazolást mintafeladatra hagyjuk.

A (iv) két tulajdonságot részletez. A műveleti sorrendcsere csak annyit jelent, hogy nem az a és b által kifeszített paralelogramma területét szorozzuk meg a hozzá tartozó magassággal a V számítása során, hanem a b és c által kifeszített paralelogramma területét szorozzuk a hozzá tartozó magassággal.

A ciklikus felcserélhetőségnek is ugyanez a magyarázata, mint a műveleti sorrend felcserélhetőségének: mindegyik esetben más paralelogramma területet (oldallap területet) szorzunk a hozzá tartozó magassággal ugyanazon paralelepipedon esetén.

Az (v) a skaláris szorzással kapcsolatos homogenitás közvetlen következménye.

A (vi) a skaláris szorzással kapcsolatos disztributivitás közvetlen következménye.

2.8. Kétszeres vektorszorzat, kifejtési tétel. Az a , b és c vektorok közötti kétszeres vektoriális szorzatok egyszerű számításának a kifejtési tétel az alapja. A tétel szerint

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} , \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} . \end{aligned} \quad (2.14)$$

Vegyük észre, hogy az a vektor e -re merőleges $\mathbf{a}_\perp$ összetevőjét adó (2.13) összefüggés a (2.14)₁ képlet speciális esete: megkapható abból, ha az a , b és c helyén rendre e , a és ismét e áll.

A kifejtési tétel igazolása előkészületeket igényel. Tételezzük fel, hogy nem párhuzamos egymással és nem zérusvektor a b és c . Ekkor az

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{b}}{b}, \quad |\mathbf{b}| = b; \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{c}}{c}, \quad |\mathbf{c}| = c; \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|},$$

egységvektorok lineárisan függetlenek (nincs közös síkjuk) és az általuk alkotott triád jobbsodratú.

Ha teljesül a kifejtési tétel három egymástól lineárisan független a vektorra – ezeket a megkülönböztetés kedvéért rendre $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ jelöli és a fenti képletek értelmezik –, akkor nyilvánvaló, hogy bármilyen más a vektorra is igaz a tétel, mert az a vektor mindig megadható az egymástól lineárisan független $\mathbf{a}_i$ ($i = 1, 2, 3$) vektorok lineáris kombinációjaként (a kifejtési tétel lineáris az a -ban!).

A formális igazolást csak a tétel (2.14)₁ alatti alakjára mutatjuk meg, a második alak esetén a lenti gondolatmenet ismétlése vezet a kívánt eredményre.

1. Legyen $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1$. Ekkor az a helyére $\mathbf{e}_1$ -et, a b helyére pedig $b\mathbf{e}_1$ -et írva az a (2.14)₁ képletben és kihasználva a (2.13) összefüggést kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) - ((\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}) &= \\ &= b \mathbf{e}_1 \times (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{c}) - b (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{c}) \mathbf{e}_1 + b (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{c} = \\ &= -b \underbrace{\mathbf{e}_1 \times (\mathbf{c} \times \mathbf{e}_1)}_{=\mathbf{c}_\perp} + \overbrace{b (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{c} - b (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{c}) \mathbf{e}_1}^{=b \mathbf{c}_\perp} = \\ &= -b \mathbf{c}_\perp + b \mathbf{c}_\perp = \mathbf{0} , \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy az első esetben teljesül a kifejtési tétel.

2. Másodszor legyen az $\mathbf{a} = \mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_2$. Ekkor az $\mathbf{a}$ helyére $\mathbf{e}_2$ -t, a c helyére pedig $c\mathbf{e}_2$ -t írva az a (2.14)₁ képletben és kihasználva a (2.13) összefüggést kapjuk, hogy

$$\mathbf{e}_2 \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) - ((\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}) = \underbrace{c \mathbf{e}_2 \times (\mathbf{b} \times \mathbf{e}_2)}_{=\mathbf{b}_\perp} - \underbrace{(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2)}_{=1} \mathbf{b} + \underbrace{(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{b})}_{=-c \mathbf{b}_\perp} \mathbf{e}_2 = \\ = c \mathbf{b}_\perp - c \mathbf{b}_\perp = \mathbf{0} ,$$

ami azt jelenti, hogy a második esetben is teljesül a kifejtési tétel.

3. Végezetül legyen az $\mathbf{a} = \mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_3$. Ez esetben

$$\underbrace{\mathbf{e}_3 \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}_{=0} - \underbrace{(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{c})}_{=0} \mathbf{b} + \underbrace{(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{b})}_{=0} \mathbf{c} = \mathbf{0} ,$$

ahol az első tag vektorok párhuzamossága, a második és harmadik tag vektorok merőlegessége miatt tűnik el. Ez azt jelenti, hogy a harmadik esetben is fennáll a kifejtési tétel.

Az előzőekkel teljes egészében igazoltuk a kifejtési tételt.

Visszaidezve a 8 ábrát, továbbá a (2.11) és (2.12) képleteket, kihasználva továbbá a kifejtési tételt a tetszőleges és nem zérus $\mathbf{a}$ vektor adott irányú (legyen mondjuk $\mathbf{b}$ az irányt kijelölő nem szükségképp egységvektor) és arra az irányra merőleges összetevőkre (komponensekre) történő

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\parallel + \mathbf{a}_\perp \quad (2.15)$$

felbontásában a korábbiakat is összegezve

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\parallel &= (\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{e} = \mathbf{e} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}) = \frac{\mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|^2} , \\ \mathbf{a}_\perp &= (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{e} = \mathbf{e} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{e}) = \frac{\mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|^2} = \\ &= \mathbf{a} - \mathbf{e} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}) = \mathbf{a} - \frac{\mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|^2} , \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \end{aligned} \quad (2.16)$$

a két összetevő értéke.

3. KOORDINÁTA-RENDSZEREK

3.1. Bázis, duál bázis. Legyenek nem komplanárisak (lineárisan függetlenek) a $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ és $\mathbf{g}_3$ vektorok. Mivel ezek a tér egy bázisát alkotják nyilvánvaló, hogy tetszőleges $\mathbf{v}$ vektor megadható lineáris kombinációjukként

$$\mathbf{v} = v^1 \mathbf{g}_1 + v^2 \mathbf{g}_2 + v^3 \mathbf{g}_3 , \quad (3.1)$$

ahol a v^1 , v^2 és v^3 súlyokat a $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ és $\mathbf{g}_3$ bázisra vonatkoztatott vektor koordinátáinak (skaláris összetevőinek, vagy skaláris komponenseinek) nevezzük.

Vegyük észre, hogy ez a bázis tetszőleges lehet, azaz általában nem normált és nem ortogonális.

Tegyük fel, hogy a $\mathbf{g}^1$, $\mathbf{g}^2$ és $\mathbf{g}^3$ vektorok eleget tesznek a

$$\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}^\ell = \begin{cases} 0 & \text{ha } k \neq \ell , \\ 1 & \text{ha } k = \ell ; \end{cases} \quad k, \ell = 1, 2, 3 \quad (3.2)$$

feltétel rendszernek, ahol az első feltétel csoport szerint a $\mathbf{g}^1$, $\mathbf{g}^2$ illetve $\mathbf{g}^3$ vektorok rendre merőlegesek a $\mathbf{g}_2$ és $\mathbf{g}_3$, a $\mathbf{g}_3$ és $\mathbf{g}_1$, illetve a $\mathbf{g}_1$ és $\mathbf{g}_2$ vektorokkal párhuzamos (vektorok által kifeszített) síkra. Következik ebből a megfigyelésből, hogy a $\mathbf{g}^\ell$ vektorok is a tér egy bázisát alkotják.

A második feltétel csoport szerint $\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}^1 = \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}^2 = \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}^3 = 1$.

A $\mathbf{g}^1$, $\mathbf{g}^2$ és $\mathbf{g}^3$ vektorok alkotta bázist duál bázisnak nevezzük.

A fentieket kihasználva könnyen számíthatók a $\mathbf{v}$ vektor v^1 , v^2 és v^3 koordinátái (skaláris komponensei) a duál bázis ismeretében. Valóban írhatjuk, hogy

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}^1 = v^1 \underbrace{\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}^1}_{=1} + v^2 \underbrace{\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}^1}_{=0} + v^3 \underbrace{\mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}^1}_{=1} = v^1,$$

továbbá a részleteket elhagyva, hogy

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}^2 = v^2, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}^3 = v^3,$$

avagy tömören, hogy

$$\boxed{\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}^\ell = v^\ell, \quad \ell = 1, 2, 3.} \quad (3.3)$$

Az utóbbi képlet teszi lehetővé, hogy adott $\mathbf{v}$ vektort három előírt irányú nem komplanáris összetevőre bontsunk fel. Ez a feladat gyakran előfordul a statikában. A gyors megoldás előfeltétele a (3.3) képlet szerint a $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ és $\mathbf{g}_3$ vektorokhoz tartozó duál bázis ismerete.

Az alábbiakban tehát a duál bázis meghatározásának kérdését tekintjük át.

Mivel a $\mathbf{g}_k$ bázisvektoroknak nincs közös síkja fennáll, hogy

$$\gamma_o = [\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_3] \neq 0, \quad (3.4)$$

ami azt jelenti, hogy zérustól különböző a $\mathbf{g}_k$ vektorok fenti vegyesszorzata.

A

$$\boxed{\mathbf{g}^1 = \frac{\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3}{\gamma_o}, \quad \mathbf{g}^2 = \frac{\mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1}{\gamma_o}, \quad \mathbf{g}^3 = \frac{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2}{\gamma_o}, \quad \gamma_o = [\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_3]} \quad (3.5)$$

vektorok a $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ és $\mathbf{g}_3$ vektorokhoz tartozó úgynevezett reciprok vektorok. Vegyük észre, hogy ezek a reciprok vektorok egyben a keresett duál bázisvektorok. Valóban rögtön látszik a fenti képletek szerkezetéből, hogy teljesül a (3.2) feltételrendszer első csoportja, azaz a merőlegességi feltétel csoport. Ami a második feltétel csoportot illeti tekintsük példaként a $\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}^2$ szorzatot. Egyszerű átalakításokkal a ciklikus csere lehetőségének kihasználásával kapjuk, hogy

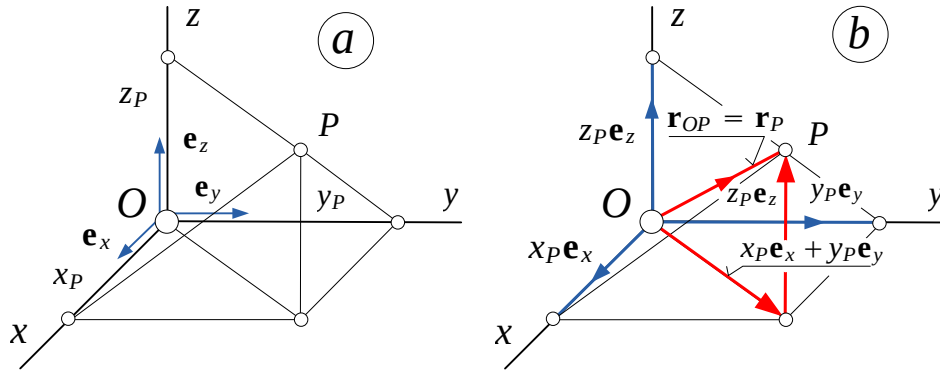
$$\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}^2 = \mathbf{g}_2 \cdot \frac{\mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1}{\gamma_o} = \frac{[\mathbf{g}_2 \mathbf{g}_3 \mathbf{g}_1]}{\gamma_o} = \frac{[\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_3]}{\gamma_o} = \frac{\gamma_o}{\gamma_o} = 1.$$

A másik két esetben hasonló gondolatmenet vezet ugyanerre az eredményre.

A fentiekben áttekintettük, hogyan lehet egy vektor adott bázisra vonatkozó koordinátáit (skaláris komponenseit) meghatározni, ha ismeretes a duál bázis.

A vektorokkal való műveleteket mindig valamilyen KR-ben fogjuk elvégezni.

3.2. Descartes-féle KR. A jelen könyv a Descartes-féle (más néven kartéziuszi) KR-t alkalmazza mind az elvi számításokban, mind pedig a feladat megoldásokban. Ezt a KR-t



15. ábra.

három közös ponton átmenő és egymásra kölcsönösen merőleges egyenes – ezek a koordináta tengelyek – feszíti ki. A közös pont a KR origója. Betűjele általában a nagy O betű. Az m jelű ($m = x, y, z$) koordináta-tengelyen valamely pont helyét az origótól mért előjeles távolsága határozza meg, amely (pozitív) [negatív] szám, ha az origóból kiindulva (pozitív) [negatív] irányban haladva jutunk el a kérdéses pontba. A pozitív koordináta-irányokat az e_x , e_y és e_z egységvektorok jelölik ki. Nyilvánvaló a viszonyokat szemléltető 15.a. ábráról, hogy ez a három vektor a fenti sorrendben tekintve jobbsodratú ortonormált bázisvektor rendszert alkot. Ennek alapján magát a KR-t is jobbsodratúnak nevezik. Az e_x , e_y , és e_z bázisvektorok kölcsönös merőlegessége miatt fennáll, hogy

$$\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \neq m, \\ 1 & \text{ha } m = n; \end{cases} \quad m, n = x, y, z. \quad (3.6)$$

Vegyük azt is észre, hogy az e_x , e_y , és e_z vektorok olyan kockát feszítenek ki, amelynek egységnyi a térfogata, vagyis $\gamma_o = [\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z] = 1$. Visszaidezve a vektoriális szorzás értelmezését adódik egyrészt, hogy

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_x, \quad (3.7)$$

ami másrészt pedig azt jelenti, hogy az e_x , e_y , és e_z vektorokhoz tartozó duális bázisvektorok (gondoljunk e_x , e_y , és e_z -t a $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, és $\mathbf{g}_3$ helyére a duális bázist adó (3.5) képletekben figyelembe véve emellett azt is, hogy most $\gamma_o = 1$) önmaguk, azaz egybeesik a két bázisvektor rendszer.

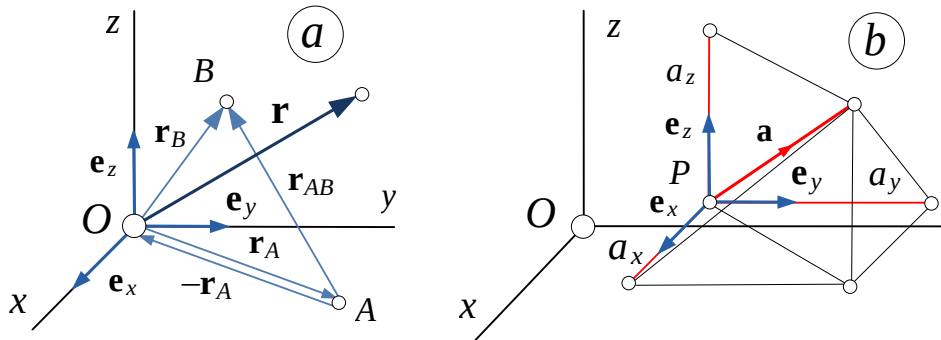
A tér egy tetszőlegesen lerögzített P pontjának helyét egyértelműen meghatározzák a pont (x_P, y_P, z_P) koordinátái. Ezek a koordináták az OP egyenesszakasz x , y és z tengelyekre vett merőleges vetületeiként adódnak. Maguk a vetületek egyúttal az $\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_{OP}$ vektor e_x , e_y , és e_z bázisvektorokhoz tartozó koordinátái (skaláris komponensei). Írható tehát a (3.3) képlet alapján, $\mathbf{w}$ helyére az $\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_{OP}$ vektort, $\mathbf{g}^\ell$ helyére az $\mathbf{e}_m$ vektort ($m = x, y, z$) gondolva, hogy

$$x_P = \mathbf{r}_P \cdot \mathbf{e}_x, \quad y_P = \mathbf{r}_P \cdot \mathbf{e}_y, \quad z_P = \mathbf{r}_P \cdot \mathbf{e}_z. \quad (3.8)$$

Következésképp a (3.1) képlet alapján – most az $\mathbf{e}_m$ vektort gondolva a $\mathbf{g}^\ell$ és az $\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_{OP}$ vektort gondolva a $\mathbf{w}$ helyére – kapjuk, hogy

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_{OP} = x_P \mathbf{e}_x + y_P \mathbf{e}_y + z_P \mathbf{e}_z. \quad (3.9a)$$

a P pont O origóra vonatkoztatott helyvektora. A fentebb mondottakat részint a 15.a. ábra részint pedig a 15.b. ábra szemlélteti.



16. ábra.

A tér egy tetszőleges de nem lerögzített pontjának helyvektorát (futópont) az

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \quad (3.9b)$$

módon adjuk meg az előzőek alapján az xyz KR-ben. Megjegyezzük hogy a 16.a. ábra csak magát az $\mathbf{r}$ vektort szemlélteti, annak x , y és z irányú összetevőit azonban nem. Leolvasható ugyanerről az ábráról, hogy valamely B pont egy másik pontra – a jelen esetben az A pontra – vonatkoztatott helyvektora a

$$\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = (x_B - x_A)\mathbf{e}_x + (y_B - y_A)\mathbf{e}_y + (z_B - z_A)\mathbf{e}_z \quad (3.10)$$

módon számítható, ahol a (3.9) képlet alapján helyettesítettük az $\mathbf{r}_B$ és $\mathbf{r}_A$ vektorokat.

A P térpontban tartózkodó anyagi részecske (ez lehet egy anyagi pont, avagy valamely test egy pontja) fizikai állapotát leíró, vagy ott valamilyen hatást kifejtő fizikai mennyiséget (pl. erővektor) a tekintett térponthoz kötöttnek¹ gondolt úgynevezett lokális bázisban írjuk általában fel. Az xyz kartézisi KR-ben minden térpontban ugyanaz a lokális bázis, amelyet jelen esetben az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ vektorok alkotnak. Görbevonaltú KR-ekben – pl. hengerKR – pontról pontra változik a lokális bázis.

A 16.b. ábra a P térponthoz kötött $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, és $\mathbf{e}_z$ vektorok alkotta lokális bázisban szemlélteti a P pontban tartózkodó anyagi pont valamilyen állapotát leíró

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z \quad (3.11a)$$

vektort, ami a szokásos jelöléseket véve alapul a tekintett anyagi pont gyorsulása is lehet. A képletben álló a_x , a_y és a_z skalárok az $\mathbf{a}$ vektor koordinátái (skaláris komponensei) ebben a bázisban.

3.3. Műveletek vektorokkal Descartes-féle KR-ben. Következik az eddigiekből, hogy valamely $\mathbf{b}$ vektor az $\mathbf{a}$ vektorhoz hasonló módon adható meg

$$\mathbf{b} = b_x\mathbf{e}_x + b_y\mathbf{e}_y + b_z\mathbf{e}_z, \quad (3.11b)$$

ahol a b_x , b_y , b_z skalárok, ugyanúgy mint azt az $\mathbf{a}$ vektor esetén láttuk, a $\mathbf{b}$ vektor koordinátái (skaláris komponensei). Nyilvánvaló ezek után, visszautalunk itt a (3.10) képletre is, hogy

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_x \pm b_x)\mathbf{e}_x + (a_y \pm b_y)\mathbf{e}_y + (a_z \pm b_z)\mathbf{e}_z \quad (3.12)$$

az additív vektorműveletek kiszámításának szabálya az xyz KR-ben.

¹Lokális bázis magához az anyagi ponthoz is köthető, de ennek a kérdésnek tárgyalása túlmutat a jelen könyv keretein.

Az $\mathbf{a}$ vektor és a λ skalár szorzata tekintetében az

$$\lambda \mathbf{a} = \lambda a_x \mathbf{e}_x + \lambda a_y \mathbf{e}_y + \lambda a_z \mathbf{e}_z \quad (3.13)$$

összefüggés áll fenn.

Ami az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzatát illeti érdemes kihasználni, hogy a (3.6) képlet alapján fennáll az

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_m = a_x \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_m + a_y \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_m + a_z \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_m = a_m, \quad m = x, y, z$$

egyenlet, ami nem más mint a (3.3) képlet speciális esete. Következésképp

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y + b_z \mathbf{e}_z) = \underbrace{\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_x}_{a_x} b_x + \underbrace{\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_y}_{a_y} b_y + \underbrace{\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_z}_{a_z} b_z,$$

azaz

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (3.14)$$

Az utóbbi képlet a skaláris szorzat kiszámításának szabálya az xyz kartéziszi KR-ben.

Az $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok vektoriális szorzatának számításakor – a korábbiakkal összhangban c_x , c_y és c_z módon jelölve a $\mathbf{c}$ vektor koordinátáit – ki fogjuk használni (a) a (3.7) összefüggést, (b) azt hogy a sorrendcsere előjelváltást eredményez és, (c) hogy $\mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_m = \mathbf{0}$. Mindezt figyelembevéve írható, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \times \mathbf{c} &= (b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y + b_z \mathbf{e}_z) \times (c_x \mathbf{e}_x + c_y \mathbf{e}_y + c_z \mathbf{e}_z) = \\ &= b_x c_y \underbrace{\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y}_{\mathbf{e}_z} + b_x c_z \underbrace{\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z}_{-\mathbf{e}_y} + b_y c_x \underbrace{\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x}_{-\mathbf{e}_z} + \\ &+ b_y c_z \underbrace{\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z}_{\mathbf{e}_x} + a_z c_x \underbrace{\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x}_{\mathbf{e}_y} + a_z c_y \underbrace{\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y}_{-\mathbf{e}_x} = \\ &= (b_y c_z - b_z c_y) \mathbf{e}_x - (b_x c_z - b_z c_x) \mathbf{e}_x + (b_x c_y - b_y c_x) \mathbf{e}_x. \end{aligned}$$

Tömör alakban

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (3.15)$$

Az $[\mathbf{abc}]$ vegyesszorzat tekintetében az előzőek alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} [\mathbf{abc}] &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \\ &= (a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z) \cdot ((b_y c_z - b_z c_y) \mathbf{e}_x - (b_x c_z - b_z c_x) \mathbf{e}_x + (b_x c_y - b_y c_x) \mathbf{e}_x) = \\ &= a_x (b_y c_z - b_z c_y) - a_y (b_x c_z - b_z c_x) + a_z (b_x c_y - b_y c_x) \end{aligned}$$

vagy ami ugyanaz, hogy

$$[\mathbf{abc}] = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (3.16)$$

Vegyük észre, hogy a vegyes szorzat, mint művelet (iii), (iv), (v) és (vi) alatti tulajdonsága következik a determinánsok tulajdonságaiból is.

3.4. Vektorok és mátrixok. Valamely vektor, mondjuk az $\mathbf{a}$ vektor, koordinátái (skaláris össze-
tevéi) oszlopmátrixba foglalhatók az

$$\underset{(3 \times 1)}{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

módon. A fentiek jelölésbeli megállapodást is kifejeznek, valamely vektor mátrixát az xyz KR-ben egyszer aláhúzott félkövér nagybetűvel, az utóbbi a vektort azonosító betű, jelöljük. A méretre utaló (3×1) képletrészt – a mátrixnak 3 sora és 1 oszlopa van – általában nem írjuk ki. A vektor mátrixának transzponáltját és a mátrixszorzás szabályait felhasználva az

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \underline{\mathbf{a}}^T \underline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (3.18)$$

alakban írható fel az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzata.

A $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{d}$ vektoriális szorzat is felírható mátrixokkal, ha a vektoriális szorzat első szorzótényezőjéhez, jelen esetben a $\mathbf{b}$ vektorhoz, hozzárendeljük azt a $\underline{\mathbf{B}}_{\times}$ ferdeszimmetrikus mátrixot, amelyet a

$$\underset{(3 \times 3)}{\underline{\mathbf{B}}_{\times}} = \begin{bmatrix} 0 & -b_z & b_y \\ b_z & 0 & -b_x \\ -b_y & b_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

összefüggés értelmez. Ez esetben

$$\underline{\mathbf{d}} = \underline{\mathbf{B}}_{\times} \underline{\mathbf{c}}, \quad \text{azaz} \quad \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -b_z & b_y \\ b_z & 0 & -b_x \\ -b_y & b_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_y c_z - b_z c_y \\ b_z c_x - b_x c_z \\ b_x c_y - b_y c_x \end{bmatrix}$$

a kérdéses szorzat, ahol a $\underline{\mathbf{d}}$ oszlop mátrix valóban a vektoriális szorzat koordinátáit (skaláris komponenseit) tartalmazza.

A (3.19) képlet jelölésbeli megállapodást is kifejez, a vektoriális szorzat első szorzótényezőjéhez, ha a szorzatot mátrixokkal számítjuk, mindig az idézett képlet alapján rendelünk hozzá egy mátrixot. A mátrix betűjele a vektort azonosító betű, amit következetesen nagybetűvel szedünk (magát a vektort kis és nagybetű egyaránt jelölheti).

4. NÉHÁNY GEOMETRIAI ALKALMAZÁS

4.1. Egyenes egyenlete. Megjegyezzük előljáróban, hogy a térben elhelyezkedő egyenes vektori egyenletével kapcsolatos áttekintés feltételezi egy helyen az erővektor nyomatékára vonatkozó fogalmak ismeretét.

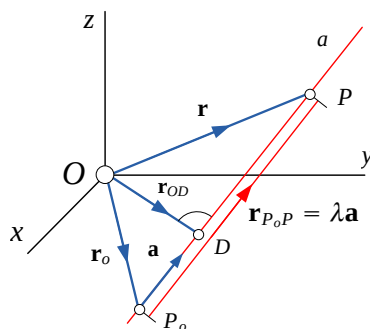
A kérdéses a egyenest a 17. ábra az szemlélteti. Ismertnek vesszük az egyenes rögzített P_o pontjának $\mathbf{r}_{P_o} = \mathbf{r}_o$ helyvektorát, valamint az egyenes irányát megadó $\mathbf{a}$ vektort, amely általában nem egységvektor. Az egyenes P futópontjának helyvektorát $\mathbf{r}$ jelöli. Leolvasható a viszonyokat szemléltető fenti ábráról, hogy párhuzamos egymással az $\mathbf{a}$ és az $\mathbf{r}_{P_o P}$ vektor. Mivel két párhuzamos vektornak zérus értékű a vektoriális szorzata teljesülnie kell az ezt kifejező

$$\mathbf{a} \times \mathbf{r}_{P_o P} = \mathbf{a} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) = \mathbf{a} \times \mathbf{r} + \underbrace{\mathbf{r}_o \times \mathbf{a}}_{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$$

egyenletnek. Ez az egyenlet, amelyet az egyenes vektor egyenletének nevezünk, tömören az

$$\boxed{\mathbf{a} \times \mathbf{r} + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{r}_o \times \mathbf{a}} \quad (4.1)$$

alakban írható fel, ahol az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok az egyenes Plücker² vektorai, más névvel Plücker koordinátái. Vegyük észre, hogy ez a két vektor kölcsönösen merőleges egymásra, következésképp teljesül a $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = 0$ merőlegességi feltétel.



17. ábra.

Ha kihasználjuk a kifejtési tétel felhasználásával ellenőrizhető

$$\frac{1}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = \underbrace{\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}}_{=1} \mathbf{b} - \frac{1}{|\mathbf{a}|^2} \underbrace{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})}_{=0} \mathbf{a} = \mathbf{b}$$

összefüggést, akkor az $\mathbf{a}$ vektor kiemelésével átírhatjuk az egyenes vektor egyenletét az

$$\boxed{\mathbf{a} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{OD}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r}_{OD} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}} \quad (4.2)$$

alakba. Nyilvánvaló a (4.2)₁ képlet szerkezetéből – ismét hangsúlyozzuk, hogy ezt az $\mathbf{a}$ formális kiemelésével kaptuk –, hogy az $\mathbf{r}_{OD}$ vektor az egyenes egy pontjának, ezt D jelöli, helyvektora kell legyen. Mivel emellett merőleges az $\mathbf{r}_{OD}$ vektor az $\mathbf{a}$ vektorra következik, hogy ez a vektor az egyenes origóhoz legközelebb fekvő pontjának helyvektora.

Adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ mellett a (4.1)₁ egyenlet az $\mathbf{r}$ vektort tartalmazza ismeretlenként. Ha kölcsönösen merőleges egymásra az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$, akkor a megoldásként megjelenő $\mathbf{r}$ egy egyenesen fut végig.

Ha erővektor lenne az $\mathbf{a}$ vektor, akkor a $\mathbf{b}$ vektor az erő O origóra vett nyomatékát jelentené.

Nyilvánvaló a 17. ábráról, hogy a P pontba az

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \lambda \mathbf{a} \quad (4.3a)$$

módon is eljuthatunk, ahol a λ skalár paraméter értéke a P pont helyétől függ. Az utóbbi egyenlet az egyenes egyenletének paraméteres alakja. A vonatkozó skaláris egyenletek pedig az

$$x = x_o + \lambda a_x, \quad y = y_o + \lambda a_y, \quad z = z_o + \lambda a_z \quad (4.3b)$$

módon írhatók, ahol x_o , y_o és z_o a P_o pont három koordinátája.

4.2. Lineárisan független egyenesek. Tekintsünk véges számú egyenest. Jelölje az egyenesek számát n ($n \geq 2$). Feltételezzük hogy ismeretesek a tekintett egyenesek

$$\mathcal{L}_i = \mathbf{a}_i \times \mathbf{r} + \mathbf{b}_i = \mathbf{0} \quad i = 1, \dots, n \quad (4.4a)$$

²Julius Plücker (1801–1868) német matematikus és fizikus.

alakú vektor egyenleteinek

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i &= a_{ix}\mathbf{e}_x + a_{iy}\mathbf{e}_y + a_{iz}\mathbf{e}_z, \\ \mathbf{b}_i &= b_{ix}\mathbf{e}_x + b_{iy}\mathbf{e}_y + b_{iz}\mathbf{e}_z \end{aligned} \quad i = 1, \dots, n \quad (4.4b)$$

Plücker vektorai.

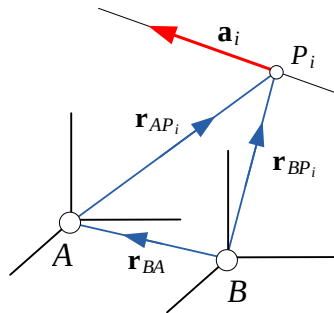
A továbbiakban, összhangban az eddigiekkel is, a λ_i ($i = 1, \dots, n$) skalárok súlyokat jelentenek majd. Értelmezés szerint lineárisan függetlennek nevezzük az $\mathcal{L}_i$ egyeneseket, ha az

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n &= \mathbf{0}, \\ \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{b}_n &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.5)$$

egyenletek csak akkor állnak fenn, ha $\lambda_i = 0$.

A fogalomhoz két megjegyzést érdemes hozzátenni.

- Az $\mathcal{L}_i$ egyenesek irányított egyeneseknek tekinthetők hiszen tartalmazza az egyenletük az $\mathbf{a}_i$ irányvektort. Ennek alapján egyes esetekben az egyenes szó helyett (vagy vele együtt) a tengely szót is használni fogjuk.
- Az egyenesek lineáris függetlensége geometriai sajátossága ezeknek az alakzatoknak. Másként fogalmazva a lineáris függetlenség KR független sajátosság kell, hogy legyen. Ennek ellentmond látszólag az a körülmény, hogy az egyenesek egyenletében álló $\mathbf{b}_i$ Plücker vektor az irányvektor nyomatéka az origóra, azaz KR függő. Az ellentmondás a következőképpen oldható fel. A 18. ábra két KR-ben szemlélteti az i -edik egyenest.



18. ábra.

Az A kezdőpontú KR-ben

$$\mathbf{a}_i, \quad \mathbf{b}_i = \mathbf{r}_{AP_i} \times \mathbf{a}_i,$$

a B kezdőpontú KR-ben pedig

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i, \quad \mathbf{b}'_i &= \mathbf{r}_{BP_i} \times \mathbf{a}_i = (\mathbf{r}_{BA} + \mathbf{r}_{AP_i}) \times \mathbf{a}_i = \\ &= \mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i \end{aligned}$$

az egyenes Plücker vektorai. Következésképp

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{b}'_i = \mathbf{r}_{BA} \times \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}_i}_{(4.5)_1 \Rightarrow \mathbf{0}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{b}_i}_{(4.5)_2 \Rightarrow \mathbf{0}} = \mathbf{0},$$

ami azt mutatja, hogy teljesül a lineáris függetlenség feltételrendszere a B kezdőpontú KR-ben is, ha az fennáll az A kezdőpontú KR-ben.

Az továbbiakban az értelmezés háttérét kívánjuk megvilágítani, és egyúttal azt a kérdést is megválaszoljuk, hogy milyen feltételeknek kell az egyenesek Plücker vektorainak eleget tenni ahhoz, hogy teljesüljön az egyenesek lineáris függetlenségének (4.5) alatti feltételrendszere.

A valós számok $\{d_{1i}, d_{2i}, d_{3i}, \dots, d_{Ni}\}$ rendezett N ($N \geq 2$) elemű sokaságát vektornak nevezzük majd és $\mathbf{d}_i$ -vel jelöljük. Vegyük észre, hogy ez az értelmezés $N = 3$ esetén tartalmazza a háromméretű tér vektor fogalmát is, hiszen a tetszőleges $\mathbf{w}$ vektort tekintve példának annak $\{w_x, w_y, w_z\}$ elemei rendezett sokaságot alkotnak. A $\mathbf{d}_i$ vektorok vektorteret alkotnak, amelynek elemeitől, jelöljön ezek közül tetszőleges kettőt $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ – nem Plücker vektorokról van ez esetben szó –, megköveteljük hogy az összeadás és a skalárral történő szorzás (jelölje κ és λ a kérdéses skalárokat) tekintetében eleget tegyenek a 2.2. és a 2.3. szakaszokban részletezett (i), (ii), (iii) és (iv) számú tulajdonságoknak. A két idézett műveletet, valamint a zérus elemet egyébként az

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_N + b_N \end{pmatrix}, \quad \kappa \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \kappa a_1 \\ \kappa a_2 \\ \dots \\ \kappa a_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

összefüggések értelmezik.

Lineárisan összefüggőnek nevezzük értelmezés szerint a $\mathbf{d}_i$ vektorokat, ha azon feltétel teljesülése mellett tűnik el a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{d}_i = \mathbf{0} \quad (4.7)$$

összeg, hogy legalább kettő a λ_i skalárok közül különbözik a zérustól. Ha az összeg csak akkor zérus, ha a λ_i skalárok (súlyok) mindegyike zérus, akkor lineárisan függetlenek a $\mathbf{d}_i$ vektorok.

A

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{d}_i = \mathbf{0} \quad (4.8)$$

összeg a $\mathbf{d}_i$ vektorok egy lineáris kombinációja.

A zérustól különböző $\mathbf{d}_i$, $i = 1, \dots, n$ vektorok akkor és csak akkor tekinthetők lineárisan összefüggőnek, ha valamelyik $\mathbf{d}_k$ vektor ($2 \leq k \leq n$) az öt megelőző vektorok lineáris kombinációja.

Valóban, ha lineárisan összefüggők a $\mathbf{d}_i$ ($i = 1, \dots, n$) vektorok, akkor fennáll a (4.7) összefüggés, amelyben λ_k ($k = 1, \dots, n$) az utolsó nem zérus értékű szorzótényező ($\lambda_i = 0$, $i = k + 1, \dots, n$). Ekkor

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{d}_i = \mathbf{0}, \quad \text{ahonnan} \quad \mathbf{d}_k = - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_k} \mathbf{d}_i = \mathbf{0} \quad (4.9)$$

Ha $k = 1$ akkor $\lambda_1 \mathbf{d}_1 = \mathbf{0}$, vagyis $\mathbf{d}_1$ el kell, hogy tűnjön. Ezt az esetet tehát kizárjuk.

A fentiek szerint a feltétel elégséges. A szükségesség pedig nyilvánvaló a (4.7) értelmezés alapján.

A vektortér egy bázisát alkotják értelmezés szerint a $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$ vektorok, ha tetszőleges $\mathbf{d}$ vektor előállítható ezek egy

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{g}_i = \mathbf{0} \quad (4.10)$$

alakú lineáris kombinációjaként.

A vektortér valamennyi bázisa azonos számú vektort tartalmaz.

Ezt az állítást az alábbiakban igazoljuk. Legyen $\mathcal{G} = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n\}$ és $\mathcal{F} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m\}$, $m > n$ két különböző bázis. Nem nehéz belátni, hogy ekkor bármely vektor előállítható az

$$\mathbf{f}_1, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n \quad (4.11)$$

vektorok lineáris kombinációjaként. Vegyük ugyanakkor észre, hogy ezek a vektorok nem lineárisan független vektorok. Következésképp létezik egy olyan $\mathbf{g}_k$ vektor, amelyik a többi lineáris kombinációja. Ha ezt elhagyjuk, akkor a fennmaradó

$$\mathbf{f}_1, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_{k-1}, \mathbf{g}_{k+1}, \dots, \mathbf{g}_n$$

vektorok ismét lineárisan függetlenek, azaz bázist alkotnak. Tekintsük most az utóbbi bázis bővítésével adódó

$$\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_{k-1}, \mathbf{g}_{k+1}, \dots, \mathbf{g}_n$$

vektorokat – ezek ismét lineárisan összefüggőek – és ismételjük meg az előző gondolatmenetet. Vegyük figyelembe, hogy az $\mathbf{f}_i$ vektorok lineárisan függetlenek, és így nem távolíthatók el a fentebb leírt eliminációs lépések során. Végeredményben – az utolsó eliminációs lépést követően – azt kapjuk, hogy lineárisan összefüggőek az

$$\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_{n+1}$$

vektorok, ez a megállapítás azonban ellentmond a kiinduló feltevésnek.

A vektortér méretét, a vektorteret alkotó vektorok elemeinek száma adja meg. Ezt N -el jelöltük.

A vektortér bármely bázisát a vektortér méretével azonos számú lineárisan független vektorok alkotja.

Ennek belátásához, tekintettel arra, hogy minden lineárisan független vektorok alkotta bázis ugyanannyi lineárisan független vektort tartalmaz, elegendő egy ilyen bázist megkonstruálni. Tekintsük az

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ e_{31} \\ \dots \\ e_{N1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \\ e_{32} \\ \dots \\ e_{N2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad \mathbf{e}_N = \begin{pmatrix} e_{1N} \\ e_{2N} \\ e_{3N} \\ \dots \\ e_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

vektorokat. A fenti vektorok lineárisan függetlenek, mivel a vonatkozó

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$$

alakú feltételi egyenlet szétesik egy ismeretlent tartalmazó

$$\lambda_i e_{ii} = 0, \quad i = 1, \dots, N$$

alakú egyenletekre, ahonnan $\lambda_i = 0$. Másrésztől az is nyilvánvaló, hogy tetszőleges $\mathbf{d} = \{d_1, d_2, \dots, d_N\}$ vektor előállítható a $\mathbf{e}_i$ vektorok egy olyan lineáris kombinációjaként, amelyben $d_i = \lambda_i$.

Visszatérve mostmár az egyenesek lineáris függetlenségével kapcsolatos (4.5) feltételrendszerhez értelmezzük az $N = 6$ elemű $\mathbf{d}_i$ vektorokat a háromméretű tér egyeneseseinek Plücker vektoraival a

$$\mathbf{d}_i = \{d_{1i}, d_{2i}, d_{3i}, d_{4i}, d_{5i}, d_{6i}\} = \{a_{ix}, a_{iy}, a_{iz}, b_{ix}, b_{iy}, b_{iz}\} \quad (4.13)$$

módon. A fentiek figyelembevételével átírható az egyenesek lineáris függetlenségének (4.5) alatti feltételrendszere a

$$\lambda_1 \mathbf{d}_1 + \lambda_2 \mathbf{d}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{d}_n = \mathbf{0} \quad (4.14)$$

alakba, ahol a λ_i ($i = 1, \dots, n$) zérus kell legyen ahhoz, hogy a kérdéses feltétel teljesüljön. Ennek az egyenletnek az az olvasata, hogy lineárisan függetlenek kell, hogy legyenek a Plücker vektorokból képzett $\mathbf{d}_i$ vektorok az $N = 6$ méretű térben. Mivel csak maximum hat lineárisan független vektora van ennek a térnek következik, hogy maximum hat a lineárisan független egyenesek száma.

Ha hat egyenes lineárisan független, akkor az

$$\lambda_1 \mathbf{d}_1 + \lambda_2 \mathbf{d}_2 + \lambda_3 \mathbf{d}_3 + \lambda_4 \mathbf{d}_4 + \lambda_5 \mathbf{d}_5 + \lambda_6 \mathbf{d}_6 = \mathbf{0} \quad (4.15)$$

egyenlet csak zérus λ_i ($i = 1, \dots, 6$) esetén teljesülhet. A fenti egyenlet átírható mátrixos formalizmussal a

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} & d_{46} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{55} & d_{56} \\ d_{61} & d_{62} & d_{63} & d_{64} & d_{65} & d_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.16a)$$

vagy ami ugyanez az

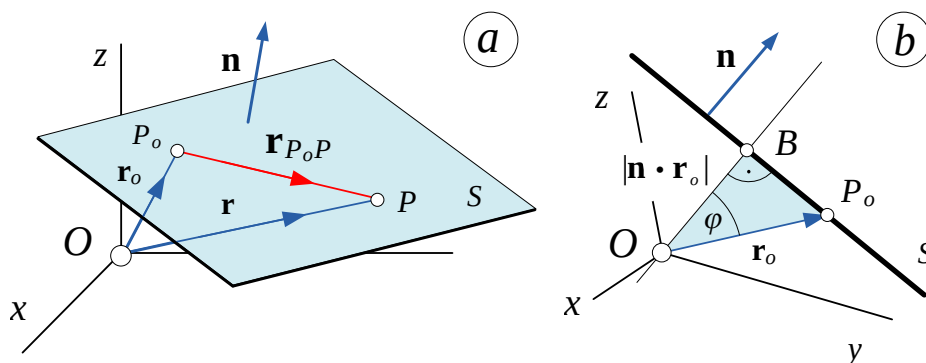
$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{1x} & a_{2x} & a_{3x} & a_{4x} & a_{5x} & a_{6x} \\ a_{1y} & a_{2y} & a_{3y} & a_{4y} & a_{5y} & a_{6y} \\ a_{1z} & a_{2z} & a_{3z} & a_{4z} & a_{5z} & a_{6z} \\ b_{1x} & b_{2x} & b_{3x} & b_{4x} & b_{5x} & b_{6x} \\ b_{1y} & b_{2y} & b_{3y} & b_{4y} & b_{5y} & b_{6y} \\ b_{1z} & b_{2z} & b_{3z} & b_{4z} & b_{5z} & b_{6z} \end{bmatrix}}_{\substack{\mathbf{A} \\ (6 \times 6)}} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix}}_{\substack{\boldsymbol{\lambda} \\ (6 \times 1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\mathbf{0} \\ (6 \times 1)}} \quad (4.16b)$$

alakba. Matematikailag homogén lineáris egyenletrendszerre jutottunk, amelyben a λ_i ($i = 1, \dots, 6$) skalárok (súlyok) az ismeretlenek. Akkor függetlenek tehát lineárisan a kérdéses egyenesek, ha ennek az egyenletrendszernek csak a $\lambda_i = 0$ triviális megoldás a megoldása. Ennek az a feltétele, hogy a kérdéses hat egyenes Plücker vektoraiból képzett $\mathbf{A}$ mátrixnak zérustól különböző legyen a determinánsa, azaz hogy teljesüljön az

$$\det \left(\underbrace{\mathbf{A}}_{(6 \times 6)} \right) \neq 0 \quad (4.17)$$

egyenlet. Nyilvánvaló, hogy hatnál kisebb számú egyenes is lehet lineárisan független.

4.3. Sík egyenlete. A 19.a. ábra az S sík egy kiragadott darabját szemlélteti. Az $\mathbf{r}_o$ és $\mathbf{r}$ vektorok a sík rögzítettnek tekintett $\mathbf{r}_{P_o} = \mathbf{r}_o$ pontjának, valamint a síkon végigfutó P pontnak a helyvektorai. Az $\mathbf{r}_{P_o P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{P_o}$ különbség vektor benne fekszik az S síkban. Következőleg



19. ábra.

merőleges a sík $\mathbf{n}$ normálisára, amely nem szükségszerűen egységvektor. Mivel két merőleges vektornak zérus a skalárszorzata teljesülni kell

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) = 0$$

egyenletnek, amely átírható az

$$\boxed{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - d = 0, \quad d = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_o} \quad (4.18)$$

alakba. Ha az $\mathbf{n}$ egységvektor, akkor megállapítható a 19.b. ábráról, hogy a d a sík origótól vett előjeles távolsága. Ez az ábra oly módon szemlélteti az S síkot, hogy az élben látható. Az origóból az S síkra bocsátott merőleges, amely párhuzamos az $\mathbf{n}$ normálissal, a B pontban dőfi az S síkot. Nyilvánvaló egyrészt, hogy az OB egyenesszakasz hossza az origó síktól mért távolsága. Másrészt pedig, ha egységvektor az $\mathbf{n}$ akkor $|d| = |\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_o| = |\mathbf{r}_o| \cos \varphi$ a kérdéses távolság számításának képlete. Ami az előjellet illeti pozitív a d , ha az $\mathbf{n}$ és az $\mathbf{r}_o$ közötti φ szög a $[0, \pi/2)$ intervallumba esik. Az ábra ezt az esetet szemlélteti.

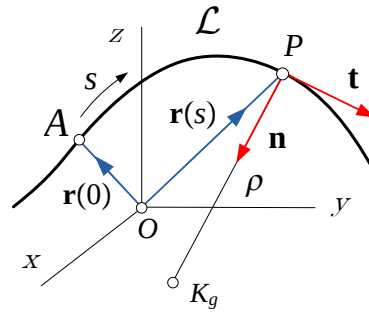
A (4.18) egyenlet kirészletezése az

$$n_x x + n_y y + n_z z - d = 0, \quad d = n_x x_o + n_y y_o + n_z z_o \quad (4.19)$$

alakú skalár egyenletre vezet.

4.4. A térgörbék differenciál geometriájának néhány összefüggése. A térgörbe rudak egyenlőségi egyenleteinek levezetése során szükség van a térgörbékre vonatkozó egyes geometriai tartalmú összefüggésekre. Az alábbiak ezeket az összefüggéseket kísérlük meg áttekinteni.

Az $\mathcal{L}$ térgörbe valamely kiragadott pontjának térgörbén elfoglalt helyét a pont s ívkoordinátájával adjuk meg. Az ívkoordináta a térgörbe egy rögzített pontjától a görbe mentén mért előjeles távolsága a kiragadott pontnak. Az előjel (pozitív)[negatív], ha a rögzített pontból (az ívkoordináta origójából) (pozitív)[negatív] haladási irányban jutunk el a kiragadott ponthoz. Az $\mathcal{L}$ térgörbét szemléltető 20. ábrán s az ívkoordináta, A az ívkoordináta origója és nyíl jelzi a pozitív haladási irányt a görbe mentén. A P futópont helyét megadó $\mathbf{r}(s)$ vektor-skalár függvény a térgörbe paraméteres egyenlete, az egyenletben s a paraméter. Feltételezzük a továbbiakban, anélkül, hogy erre külön is felhívnanánk a figyelmet, hogy kellő rendben deriválható az s szerint $\mathbf{r}(s)$ függvény. Megjegyezzük még, visszautalva a térbeli egyenes paraméteres egyenletére, hogy nemcsak az s ívkoordináta választható paraméterként.



20. ábra.

Az eddig mondottak alapján

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{e}_x + y(s)\mathbf{e}_y + z(s)\mathbf{e}_z \quad (4.20)$$

a térgörbe egyenletének általános alakja. A képletben az s ívkoordináta függvényei az $x(s)$, $y(s)$ és $z(s)$ koordináták.

Nem szorul különösebb magyarázatra, hogy a

$$\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \mathbf{t}(s) \quad (4.21)$$

ívkoordináta szerint vett derivált a térgörbe érintőirányú egységvektora. Ennek deriváltját az

$$\boxed{\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} = \kappa\mathbf{n}(s) = \frac{1}{\rho}\mathbf{n}(s)} \quad (4.22)$$

alakban írjuk fel, ahol úgy választjuk meg a $\kappa = 1/\rho \geq 0$ skalárt, hogy egységvektor legyen az $\mathbf{n}$. Mivel egységvektor a $\mathbf{t}$ következik, hogy

$$\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds}\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 2\mathbf{t}(s) \cdot \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} = 2\kappa\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{n}(s) = 0,$$

ami azt jelenti, hogy merőlegesek egymásra a $\mathbf{t}(s)$ és $\mathbf{n}(s)$ vektorok. A térgörbe egy adott s ívkoordinátájú pontjában az érintőre merőleges síkban fekvő vektorok mindegyike a térgörbe egy normálisa. Ezek közül a (4.22) egyenlettel adott $\mathbf{n}$ egységvektor a térgörbe főnormálisa, a $\mathbf{t}$ és $\mathbf{n}$ vektorok által kifeszített sík a térgörbe simulósíkja, κ a térgörbe görbülete és végül ρ a térgörbe görbületi sugara a simulósíkban. Megjegyezzük, hogy a (4.22) összefüggés az első Frenet–Serret³ képlet. A második és harmadik Frenet–Serret-képletre nem lesz szükség ezért ezeket nem részletezzük ehelyütt.

5. FELADATOK MEGOLDÁSOKKAL, GYAKORLATOK

5.1. Mintafeladatok

1. Feladat: Igazolja, hogy zérus a vegyesszorzat értéke, ha lineárisan összefüggő az $[\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}]$ szorzatot alkotó három vektor.

Megoldás: Mivel lineárisan összefüggőek az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok fennáll, hogy $\mathbf{a} = \kappa\mathbf{b} + \lambda\mathbf{c}$, ahol κ és λ skalár. Következésképp

$$[\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}] = [(\kappa\mathbf{b} + \lambda\mathbf{c}) \times \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c} = \underbrace{\kappa(\mathbf{b} \times \mathbf{b})}_{=0} \cdot \mathbf{c} + \underbrace{\lambda(\mathbf{c} \times \mathbf{b})}_{\perp \mathbf{c}} \cdot \mathbf{c} = 0.$$

³Jean Frédéric Frenet (1816–1900) francia matematikus, csillagász és meteorológus. Joseph Alfred Serret (1819-1885) francia matematikus.

Megfordítva, ha $[\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}] = 0$, akkor merőleges az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ az $\mathbf{a}$ -ra, a $\mathbf{b}$ -re, valamint a $\mathbf{c}$ -re is, ezért egy síkkal párhuzamosak (komplanárisak) vagyis lineárisan összefüggőek.

2. Feladat: Igazolja az (xyz) KR-ben végzett alkalmas átalakításokkal a kifejtési tételt!

Megoldás: Elegendő azt megmutatni, hogy azonosak az x koordináták, mivel a másik két esetben ugyanez a gondolatmenet vezet célra.

Nyilvánvaló egyrésztől, hogy

$$[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] \cdot \mathbf{e}_x = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \end{vmatrix} \cdot \mathbf{e}_x =$$

$$= a_y (b_x c_y - b_y c_x) - a_z (b_z c_x - b_x c_z),$$

másrészt pedig hogy

$$[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}] \cdot \mathbf{e}_x =$$

$$= (\underline{a_x c_x} + a_y c_y + a_z c_z) b_x - (\underline{a_x b_x} + a_y b_y + a_z b_z) c_x,$$

ami megegyezik az előző eredménnyel, ha figyelembe vesszük, hogy az aláhúzott tagokat tartalmazó két szorzat törli egymást.

3. Feladat: Tegyük fel, hogy $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Igazolja, hogy ez esetben

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}.$$

Megoldás: A feltételi egyenlet szerint $\mathbf{c} = -\mathbf{a} - \mathbf{b}$. Következésképp

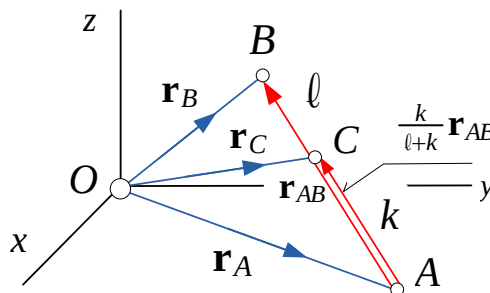
$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \times (-\mathbf{a} - \mathbf{b}) = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} - \mathbf{b} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

Ugyanez az eredmény adódik, ha figyelembe vesszük, hogy a három vektor zárt háromszöget alkot. Ebből adódóan a kérdéses vektor szorzatok mindegyikének a háromszög területének kétszerese az abszolút értéke. Azt sem nehéz ellenőrizni, hogy az előjelek is azonosak.

4. Feladat: Az A és B pontok origóra vonatkoztatott $\mathbf{r}_A$ és $\mathbf{r}_B$ helyvektorai egyértelműen meghatározzák az AB egyenes szakaszt. Mutassa meg, hogy az

$$\mathbf{r}_C = \frac{\ell}{k+\ell} \mathbf{r}_A + \frac{k}{k+\ell} \mathbf{r}_B$$

helyvektorú C pont rajta van az AB egyenes szakaszon, és hogy $\ell : k$ arányban osztja fel azt két részre!



21. ábra.

Megoldás: Leolvasható a fenti ábráról, hogy az AB egyenes szakaszt $\ell : k$ arányban felosztó pontnak

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_A + \frac{k}{k+\ell} \mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_A + \frac{k}{k+\ell} (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) =$$

$$= \left(\frac{k+\ell}{k+\ell} - \frac{k}{k+\ell} \right) \mathbf{r}_A + \frac{k}{k+\ell} \mathbf{r}_B = \frac{\ell}{k+\ell} \mathbf{r}_A + \frac{k}{k+\ell} \mathbf{r}_B \quad (5.1)$$

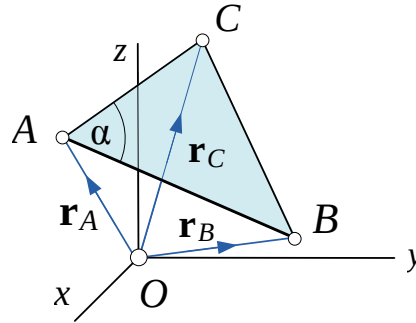
a helyvektora. Ezzel mindkét állítást igazoltuk.

Nyilvánvaló az előzőek alapján, hogy az AB egyenesszakasz felezési pontjának, ekkor ugyanis $k = \ell = 1$, az

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B)$$

vektor a helyvektora. Ez végpontokat megadó helyvektorok számtani közepe.

- 4. Feladat:** Ismeretesek az A , B és C pontok koordinátái az xyz KR-ben: $A(2; 0; 5)$ m, $B(-1; 4; 0)$ m, $C(-3; 0; 4)$ m. Határozza meg az ABC háromszögben az A csúcshoz tartozó α szöget!



22. ábra.

Megoldás: Az

$$\mathbf{r}_A = 2\mathbf{e}_x + 5\mathbf{e}_z \text{ [m]}, \quad \mathbf{r}_B = -\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_y \text{ [m]}, \quad \mathbf{r}_C = -3\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_y \text{ [m]}$$

helyvektorokkal

$$\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = -3\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_y - 5\mathbf{e}_z \text{ [m]}, \quad \mathbf{r}_{AC} = \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A = -5\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z \text{ [m]}$$

$$|\mathbf{r}_{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50} \approx 7.0711 \text{ [m]},$$

$$|\mathbf{r}_{AC}| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26} \approx 5.0990 \text{ [m]}.$$

A skaláris szorzás értelmezése alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{AB} \cdot \mathbf{r}_{AC} &= |\mathbf{r}_{AB}| |\mathbf{r}_{AC}| \cos \alpha, \\ \cos \alpha &= \frac{\mathbf{r}_{AB} \cdot \mathbf{r}_{AC}}{|\mathbf{r}_{AB}| |\mathbf{r}_{AC}|} = \frac{15 + 5}{7.0710 \times 5.0990} = 0.55470, \end{aligned}$$

ahonnan $\alpha = 0.98279 \text{ rad} = 56.30^\circ$.

- 5. Feladat:** Számítsa ki (a) a 22. ábrán vázolt ABC háromszög területét, és (b) az $OABC$ tetraéder térfogatát!

Megoldás: Az

$$\mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{r}_{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -3 & 4 & -5 \\ -5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4\mathbf{e}_x + 22\mathbf{e}_y + 20\mathbf{e}_z \text{ [m}^2\text{]}$$

vektorszorzat birtokában

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} |\mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{r}_{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 22^2 + 20^2} = 15 \text{ m}^2$$

a kérdéses terület. Ami pedig az $OABC$ tetraéder térfogatát illeti emlékezzünk arra, hogy az a befoglaló paralelepipedon térfogatának egy hatoda. Következésképp

$$V_{OABC} = \frac{1}{6} [\mathbf{r}_A \mathbf{r}_B \mathbf{r}_C] = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \frac{92}{6} = 15\frac{1}{3} \text{ m}^3.$$

6. Feladat: Írja fel a 22. ábrán vázolt ABC háromszög AB oldalára által meghatározott egyenes egyenletét!

Megoldás: A kérdéses egyenes vektor egyenletét egyértelműen meghatározzák az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ Plücker vektorok. Nyilvánvaló az ábráról, hogy

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}_{AB} = -3\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_y - 5\mathbf{e}_z \text{ [m]},$$

és, hogy

$$\mathbf{b} = \mathbf{r}_A \times \mathbf{a} = \mathbf{r}_A \times \mathbf{r}_{AB} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & -5 \end{vmatrix} = -20\mathbf{e}_x - 5\mathbf{e}_y + 8\mathbf{e}_z \text{ [m]}^2,$$

mivel a $\mathbf{b}$ vektor az $\mathbf{a}$ vektor nyomatéka az origóra. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ Plücker vektorok ismeretében

$$\mathbf{a} \times \mathbf{r} + \mathbf{b} = (-3\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_y - 5\mathbf{e}_z) \times (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z) - 20\mathbf{e}_x - 5\mathbf{e}_y + 8\mathbf{e}_z = \mathbf{0}$$

az egyenes egyenlete. Az egyenlet paraméteres alakja pedig az

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \lambda \mathbf{a}, \text{ azaz az } x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = 2\mathbf{e}_x + 5\mathbf{e}_z + \lambda(-3\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_y - 5\mathbf{e}_z)$$

módon írható fel.

7. Feladat: Számítsa ki a 22. ábrán vázolt ABC háromszög adataival az $\mathbf{r}_{AC}$ vektor $\mathbf{r}_{AB}$ vektorral párhuzamos $\mathbf{r}_{AC||}$ és arra merőleges $\mathbf{r}_{AC\perp}$ összetevőit!

Megoldás: Az $\mathbf{r}_{AB}$ vektorhoz tartozó

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{|\mathbf{r}_{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{50}}(-3\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_y - 5\mathbf{e}_z)$$

egységvektorral

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{AC||} &= \mathbf{e}(\mathbf{r}_{AC} \cdot \mathbf{e}) = \frac{1}{50}(-3\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_y - 5\mathbf{e}_z)[(-5\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z) \cdot (-3\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_y - 5\mathbf{e}_z)] = \\ &= \frac{1}{50}(-3\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_y - 5\mathbf{e}_z)(15 + 5) = -1.2\mathbf{e}_x + 1.6\mathbf{e}_y - 2\mathbf{e}_z \text{ [m]} \end{aligned}$$

a keresett párhuzamos vektor összetevő. A merőleges összetevő pedig

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{AC\perp} &= \mathbf{e} \times (\mathbf{r}_{AC} \times \mathbf{e}) = \mathbf{r}_{AC} - \mathbf{e}(\mathbf{r}_{AC} \cdot \mathbf{e}) = \mathbf{r}_{AC} - \mathbf{r}_{AC||} = \\ &= -5\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z - (-1.2\mathbf{e}_x + 1.6\mathbf{e}_y - 2\mathbf{e}_z) = -3.8\mathbf{e}_x - 1.6\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \text{ [m]}. \end{aligned}$$

8. Feladat: Írja fel a 22. ábrán vázolt ABC háromszög síkjának egyenletét! Mekkora a sík origótól mért távolsága?

Megoldás: Az

$$\mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{r}_{AC} = 4\mathbf{e}_x + 22\mathbf{e}_y + 20\mathbf{e}_z \text{ [m}^2\text{]}$$

vektorszorzat a sík egy normálisa. Az

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{r}_{AC}}{|\mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{r}_{AC}|} = \frac{1}{\sqrt{4^2 + 22^2 + 20^2}}(4\mathbf{e}_x + 22\mathbf{e}_y + 20\mathbf{e}_z) = \frac{1}{30}(4\mathbf{e}_x + 22\mathbf{e}_y + 20\mathbf{e}_z)$$

egységnormális felhasználásával kapjuk a sík általános alakú

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) = 0$$

egyenletéből a kérdéses sík egyenletét

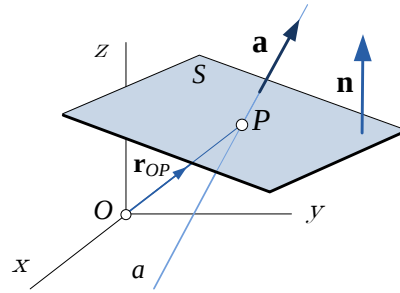
$$\frac{1}{30}(4\mathbf{e}_x + 22\mathbf{e}_y + 20\mathbf{e}_z) \cdot [(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z) - (2\mathbf{e}_x + 5\mathbf{e}_z)] = 0.$$

A skaláris szorzatokat is számítva következik innen, hogy

$$\frac{1}{30}(4x + 22y + 20z) - \underbrace{\frac{1}{30}(8 + 100)}_{d=3.6} = 0,$$

ahol a $d = 3.6$ m érték a sík origótól mért távolsága.

9. Feladat: Határozza meg az S sík, és az a egyenes
dőféspontjának helyvektorát!



23. ábra.

Megoldás: A megoldás során ismertnek tekintjük az egyenes és a sík

$$\mathbf{a} \times \mathbf{r} + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - d = 0$$

alakú egyenleteinek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{n}$ és d paramétereit. Szorozzuk meg az egyenes egyenletét jobbról vektoriálisan az $\mathbf{n}$ vektorral. Kapjuk, hogy

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{n} + \mathbf{b} \times \mathbf{n} = \mathbf{0},$$

ahonnan a kifejtési tétel alkalmazásával és átrendezéssel az

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{r} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{a} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}$$

képlet következik. Innen kifejezhető az $\mathbf{r}$ vektor:

$$\mathbf{r} = \frac{1}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}} (\mathbf{n} \times \mathbf{b} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{a}).$$

Ha az $\mathbf{r}$ a síknak is pontja, akkor $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = d$. Következésképp

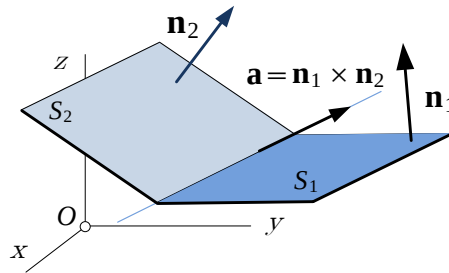
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{OP} = \frac{1}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}} (\mathbf{n} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} d).$$

a dőféspont helyvektora. Ha párhuzamos egymással az egyenes és a sík, akkor $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0$ és nincs végesben fekvő megoldása a feladatnak.

10. Feladat: Ismeretese az S_1 és S_2 síkok

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r} - d_1 = 0 \quad \text{és} \quad \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r} - d_2 = 0$$

egyenleteinek paramétereit. Határozza meg a két sík metszésvonalának egyenletét!



24. ábra.

Megoldás: Szorozzuk meg az S_1 sík egyenletét $\mathbf{n}_2$ -vel, az S_2 sík egyenletét $\mathbf{n}_1$ -el, majd vonjuk ki a második egyenletet az elsőből. Kapjuk, hogy

$$\underbrace{\mathbf{n}_2 (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{n}_1 (\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r})}_{(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \times \mathbf{r}} - (\mathbf{n}_2 d_1 - \mathbf{n}_1 d_2) = 0$$

azaz, hogy

$$\underbrace{(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)}_{=\mathbf{a}} \times \mathbf{r} - \underbrace{(\mathbf{n}_2 d_1 - \mathbf{n}_1 d_2)}_{=\mathbf{b}} = 0$$

ami valóban a kérdéses egyenes egyenlete, hiszen $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Ha a síkok párhuzamosak, akkor $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{0}$ következõleg nincs végesben fekvő metszésvonal.

5.2. Gyakorlatok

1. Igazolja a vektorok skalárral történő szorzásával kapcsolatos azonosságokat!
2. Igazolja, hogy a háromméretű térben négy vagy több vektor mindig lineárisan összefüggő!
3. Hogyan kell megválasztani a λ skalár paraméter értékét ahhoz, hogy kölcsönösen merőlegesek legyenek egymásra az $\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b}$ vektorok?
4. Ismeretesek egy paralelogramma A, B és C csúcsának koordinátái: $A(2; 0; 5)$ m, $B(-1; 4; 0)$ m, $C(-3; 0; 4)$ m. Számítsa ki a negyedik, azaz a D csúcs koordinátáit.
5. Ismeretesek az A, B, C és D pontok koordinátái:
 - (a) $A(3; -1.5; 6)$ m, $B(-1.5; 0; 4.5)$ m, $C(4.5; -1.5; 0)$ m, $D(1.5; 1.5; 3)$ m;
 - (b) $A(1; 0; -3)$ m, $B(-2; 1; 4)$, $C(-1; -1; -2)$ m, $D(-3; 1; 0)$ m;
 - (c) $A(1; -9; -12)$ m, $B(3; -5; -14)$ m, $C(0; -11; -11)$, $D(2; -7; -13)$ m.
 Ellenőrizze, hogy vajon egy síkban vannak-e az A, B, C és D pontok!
6. Ismeretesek az A, B és C pontok koordinátái: $A(0; -2; 5)$ m, $B(4; 1; 0)$ m, $C(0; 3; 4)$ m.
 - (c) Számítsa ki az ABC háromszög B csúcsánál fekvő β szöget!
 - (a) Határozza meg az AC pontokon átmenő egyenes vektoriális és paraméteres egyenletét!
 - (b) Írja fel az ABC sík egyenletét. Mekkora a sík origótól mért távolsága?

6. MÁSODRENDŰ TENZOROK

6.1. Diádikus szorzat. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ ($|\mathbf{a}| \neq 0$, $|\mathbf{b}| \neq 0$) vektorok diádikus szorzatát a

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \quad (6.1)$$

módon jelöljük: a képletben álló félkövér dőlt nagybetű a diád tömör jelölése (a diádösszegeket is ugyanilyen módon jelöljük majd), az $\mathbf{a}$ vektor az első szorzótényező, az $\otimes$ szimbólum a diádikus szorzás műveleti jele, a $\mathbf{b}$ vektor pedig a második szorzótényező.

A diádikus szorzás nem kommutatív művelet:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} \quad (6.2)$$

Legyen $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$ ($|\mathbf{a}| \neq 0$, $|\mathbf{b}| \neq 0$) két további vektor, és jelölje $\mathbf{C}$ ezek diádikus szorzatát. A diádok összegezése kommutatív művelet:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} = \mathbf{A} + \mathbf{C} = \mathbf{C} + \mathbf{A}. \quad (6.3)$$

A diádikus szorzat további tulajdonságait az alábbiak részletezik, az α skalár:

$$\mathbf{a} \otimes (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{c} \quad \text{disztibutivitás} \quad (6.4a)$$

$$(\alpha\mathbf{a}) \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \otimes (\alpha\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \quad \text{asszociativitás} \quad (6.4b)$$

Két vektor diádikus szorzatának egy harmadik vektorral vett skaláris szorzatát a

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}), \quad \mathbf{c} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} \quad (6.5a)$$

módon értelmezzük:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} \neq \mathbf{c} \cdot \mathbf{A} \quad (6.5b)$$

nem mindegy, tehát hogy a diádot jobbról vagy pedig balról szorozzuk skalárisan egy vektorral.

Tulajdonságok:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{d}) &= \mathbf{a} \otimes (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) + \mathbf{a} \otimes (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) \\ (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) \cdot \mathbf{e} &= \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}) + \mathbf{c}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}) \end{aligned} \quad \text{disztibutivitás} \quad (6.6a)$$

$$\begin{aligned} [(\alpha\mathbf{a}) \otimes \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c} &= [\mathbf{a} \otimes (\alpha\mathbf{b})] \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot (\alpha\mathbf{c}) \\ (\alpha\mathbf{c}) \cdot [\mathbf{b} \otimes \mathbf{c}] &= \mathbf{a} \cdot [(\alpha\mathbf{b}) \otimes \mathbf{c}] = \mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \otimes (\alpha\mathbf{c})] \end{aligned} \quad \text{asszociativitás} \quad (6.6b)$$

A fenti tulajdonságok a jobbról történő skaláris szorzás esetén is érvényesek.

Két vektor diádikus szorzatának egy harmadik vektorral vett vektoriális szorzatát a

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \otimes (\mathbf{b} \times \mathbf{c}), \quad \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \otimes \mathbf{b} \quad (6.7)$$

módon értelmezzük (nem mindegy, hogy a diádot jobbról vagy pedig balról szorozzuk vektoriálisan egy adott vektorral), az eredmény tehát egy diád.

Tulajdonságok:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} + \mathbf{d}) &= \mathbf{a} \otimes (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{a} \otimes (\mathbf{b} \times \mathbf{d}) \\ (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) \times \mathbf{e} &= \mathbf{a} \otimes (\mathbf{b} \times \mathbf{e}) + \mathbf{c} \otimes (\mathbf{d} \times \mathbf{e}) \end{aligned} \quad \text{disztributivitás} \quad (6.8a)$$

$$\begin{aligned} [(\alpha \mathbf{a}) \otimes \mathbf{b}] \times \mathbf{c} &= [\mathbf{a} \otimes (\alpha \mathbf{b})] \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \times (\alpha \mathbf{c}) \\ (\alpha \mathbf{c}) \cdot [\mathbf{b} \otimes \times \mathbf{c}] &= \mathbf{a} \times [(\alpha \mathbf{b}) \otimes \mathbf{c}] = \mathbf{a} \times [\mathbf{b} \otimes (\alpha \mathbf{c})] \end{aligned} \quad \text{asszociativitás} \quad (6.8b)$$

Tekintsük az $\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ és $\mathbf{C} = \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}$ diádokat.

Valamely diád transzponáltja a szorzótényezők sorrendjének felcserélésével kapható meg. Betűjele a jobb felső indexben álló nagy T betű: $\mathbf{A}^T = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$.

Diádösszeg transzponáltja az egyes összeadandók transzponáltjainak összege.

Nem nehéz ellenőrizni a fentiek alapján a

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T = \mathbf{c} \cdot \mathbf{A}^T, \quad (6.9a)$$

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T \cdot \mathbf{c} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{c} \quad (6.9b)$$

képletek helyességét.

Tekintsük ismét az $\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ és $\mathbf{C} = \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}$ diádokat. Két diád skaláris szorzatát a

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) (\mathbf{a} \otimes \mathbf{d}) = \mathbf{D}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \neq \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \quad (6.10)$$

módon értelmezzük. Az eredmény a $\mathbf{D}$ diád. A művelet általában nem kommutatív. Legyen az $\mathbf{R} = \mathbf{e} \otimes \mathbf{f}$ egy további diád – az $\mathbf{e}$ és $\mathbf{f}$ tetszőleges nem zérus vektorok. A diádok skaláris szorzatára nézve fennáll, hogy

$$(\mathbf{A} + \mathbf{C}) \cdot \mathbf{R} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{R} \quad \text{disztributivitás} \quad (6.11a)$$

$$\mathbf{R} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{C}) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \quad (6.11b)$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{R} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{R}) \quad \text{asszociativitás} \quad (6.11c)$$

$$(\alpha \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\alpha \mathbf{C}) = \alpha (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \quad (6.11d)$$

Nem nehéz ellenőrizni, hogy fennáll az

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})^T = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{A}^T \quad (6.12)$$

egyenlet is.

Az $\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ és $\mathbf{C} = \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}$ diádok energia típusú (más elnevezéssel belső, vagy kettős skaláris) szorzatát a

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{C} &= (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \cdot (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) \cdot \mathbf{b} = \\ &= (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) (\mathbf{d} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) \cdot \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{A} \end{aligned} \quad (6.13)$$

módon értelmezzük. A műveleti jel egymás mellett fekvő két félkövér pont. Vegyük észre, hogy az így értelmezett szorzat, amint azt a fenti egyenletből közvetlenül kiolvasható, kommutatív művelet. Tulajdonságok:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{C}) \cdot \cdot \mathbf{R} = \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{R} + \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{R} \quad \text{disztributivitás} \quad (6.14a)$$

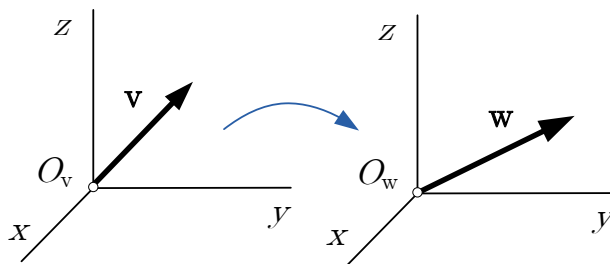
$$(\alpha \mathbf{A}) \cdot \cdot \mathbf{R} = \mathbf{A} \cdot \cdot (\alpha \mathbf{R}) = \alpha (\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{R}) \quad \text{asszociativitás} \quad (6.14b)$$

6.2. A másodrendű tenzor értelmezése. Megállapodunk abban, hogy a skalárokat nulladrendű, a vektorokat pedig elsőrendű tenzoroknak tekintjük. A jelen szakaszban a másodrendű, tenzorokkal alapvetően kapcsolatos kérdéseket tekintjük át.

Értelmezés szerint homogén lineáris a $\mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{v})$ vektor-vektor függvény, ha tetszőleges véges λ^i skalár és $\mathbf{v}_i$ vektor mellett ($i=1,2,3,\dots,n$) fennáll az

$$\mathbf{f}\left(\sum_{i=1}^n \lambda^i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda^i \mathbf{f}(\mathbf{v}_i) \quad (6.15)$$

függvényegyenlet. Geometriailag a $\mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{v})$ homogén lineáris vektor-vektor függvény az O_v pontból felmért $\mathbf{v}$ vektorok terét az O_w pontból felmért $\mathbf{w}$ vektorok terére képezi le. Mivel eszerint minden $\mathbf{v}$ és minden $\mathbf{w}$ vektornak megfelel a vonatkozó háromdimenziós tér egy-egy pontja, azt mondhatjuk, hogy a $\mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{v})$ függvény – ha az nem elfajuló – a háromméretű teret úgy képezi le kölcsönösen egyértelműen önmagára, hogy pontnak pont, egyenesnek egyenes és síknak sík felel meg. Az elfajuló $\mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{v})$ függvény a teret egyetlen síkra, vagy egyetlen egyenesre, vagy egyetlen pontra képezi le. Az O_v és O_w origók egybeeshetnek.



25. ábra. A $\mathbf{v}$ tárgyvektor és $\mathbf{w}$ képe.

A (3.1) képlet szerint tetszőleges $\mathbf{v}$ vektor megadható a háromméretű tér egy bázisát alkotó $\mathbf{g}_i$ vektorok lineáris kombinációjaként. Következésképp fennáll, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{v}) &= \mathbf{f}(v^1 \mathbf{g}_1 + v^2 \mathbf{g}_2 + v^3 \mathbf{g}_3) = v^1 \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{g}_1)}_{\mathbf{w}_1} + v^2 \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{g}_2)}_{\mathbf{w}_2} + v^3 \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{g}_3)}_{\mathbf{w}_3} = \\ &= v^1 \mathbf{w}_1 + v^2 \mathbf{w}_2 + v^3 \mathbf{w}_3. \end{aligned} \quad (6.16a)$$

A képletben álló $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ és $\mathbf{w}_3$ vektorok rendre a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ és $\mathbf{v}_3$ tárgyvektorok képei, azaz képvektorok. Kiolvasható a fenti összefüggésből, hogy a három képvektor (kilenc skalár) egyértelműen meghatározza a leképezést, mivel a három képvektor ismeretében tetszőleges $\mathbf{v}$ tárgyvektorhoz – feltéve, hogy ismert annak (3.1) szerinti előállítása – kiszámítható az $\mathbf{f}(\mathbf{v})$ függvény, azaz a $\mathbf{v}$ képe.

Az (x, y, z) Descartes-féle KR-ben

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{v}) &= \mathbf{f}(v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z) = v_x \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{e}_x)}_{\mathbf{w}_x} + v_y \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{e}_y)}_{\mathbf{w}_y} + v_z \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{e}_z)}_{\mathbf{w}_z} = \\ &= v_x \mathbf{w}_x + v_y \mathbf{w}_y + v_z \mathbf{w}_z. \end{aligned} \quad (6.16b)$$

az előző összefüggés alakja – v_m $m = x, y, z$ a $\mathbf{v}$ vektor koordinátáit (skaláris összetevőit) jelöli.

Tovább alakítható a (6.16a) összefüggés, ha kihasználjuk (a) a v^ℓ -t adó (3.3) képletet, (b) a diádikus szorzattal kapcsolatos (6.5a)₁ összefüggést, (c) valamint a disztributivitást:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{w}_1(\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{w}_2(\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{w}_3(\mathbf{g}^3 \cdot \mathbf{v}) = \\ &= \underbrace{(\mathbf{w}_1 \otimes \mathbf{g}^1 + \mathbf{w}_2 \otimes \mathbf{g}^2 + \mathbf{w}_3 \otimes \mathbf{g}^3)}_{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Itt külön is kiemelve:

$$\mathbf{W} = \mathbf{w}_1 \otimes \mathbf{g}^1 + \mathbf{w}_2 \otimes \mathbf{g}^2 + \mathbf{w}_3 \otimes \mathbf{g}^3. \quad (6.18)$$

A fentiek szerint a $\mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{v})$ homogén lineáris vektor-vektor függvény felírható az $y = mx$ homogén lineáris skalár-skalár függvény mintájára a $\mathbf{w} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{v}$ alakban, ahol az eredmény – a képvektor – a $\mathbf{W}$ másodrendű tenzor és a $\mathbf{v}$ vektor (jobboldali) skaláris szorzataként jelenik meg.

Összevetve az előzőeket a 6.1 Diádikus szorzat című szakaszban mondottakkal adódik a következtetés, hogy a diád másodrendű tenzor. Rámutatunk majd a 10.1 Mintafeladatok szakasz 1. Feladatának megoldásában, hogy egy diád (avagy két diád összege) mindig elfajuló másodrendű tenzort alkot.

A $\mathbf{w} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ elfajuló homogén lineáris függvénynek pedig (a $\mathbf{v}$ tetszőleges) a $\mathbf{W} = \mathbf{0}$ zérustenzor (nulltenzor) felel meg.

A másodrendű tenzor fogalmának bevezetése alapján a másodrendű $\mathbf{W}$ tenzor minden tulajdonsága abból a követelményből adódik, hogy a $\mathbf{W} \cdot \mathbf{v}$ szorzat a $\mathbf{v}$ vektor homogén lineáris függvénye legyen és mint ilyen nem elfajuló esetben három diádikus szorzat összegeként legyen előállítható.

A továbbiakban az (xyz) Descartes-féle KR-ben tekintjük át a másodrendű tenzorokkal kapcsolatos alapismereteket.

Legyen az egymástól lineárisan független $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ és $\mathbf{g}_3$ vektoroknak a

$$\mathbf{g}^1 = \lambda_x \mathbf{e}_x + \lambda_y \mathbf{e}_y + \lambda_z \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{g}^2 = \mu_x \mathbf{e}_x + \mu_y \mathbf{e}_y + \mu_z \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{g}^3 = \nu_x \mathbf{e}_x + \nu_y \mathbf{e}_y + \nu_z \mathbf{e}_z \quad (6.19)$$

vektorhármassal, összhangban a (3.5) képletekkel, az (xyz) KR-ben előállított reciprok vektorhármassal – λ_m , μ_m és ν_m ($m = x, y, z$) a vonatkozó vektor koordináták (skaláris összetevők). Behelyettesítve a (6.18) képletbe a

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \underbrace{(\lambda_x \mathbf{w}_1 + \mu_x \mathbf{w}_2 + \nu_x \mathbf{w}_3)}_{\mathbf{w}_x} \otimes \mathbf{e}_x + \underbrace{(\lambda_y \mathbf{w}_1 + \mu_y \mathbf{w}_2 + \nu_y \mathbf{w}_3)}_{\mathbf{w}_y} \otimes \mathbf{e}_y + \\ &\quad + \underbrace{(\lambda_z \mathbf{w}_1 + \mu_z \mathbf{w}_2 + \nu_z \mathbf{w}_3)}_{\mathbf{w}_z} \otimes \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

illetve a

$$\boxed{\mathbf{W} = \mathbf{w}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{w}_y \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{w}_z \otimes \mathbf{e}_z} \quad (6.20)$$

eredményre jutunk, ahol a

$$\mathbf{w}_x = \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{w}_y = \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_y \quad \text{és} \quad \mathbf{w}_z = \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_z \quad (6.21)$$

vektorok rendre az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ tárgyvektorokhoz tartozó képvektorok, avagy más elnevezéssel a tenzor vektoriális koordinátái (összetevői). A

$$\mathbf{w}_x = w_{xx} \mathbf{e}_x + w_{yx} \mathbf{e}_y + w_{zx} \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{w}_y = w_{xy} \mathbf{e}_x + w_{yy} \mathbf{e}_y + w_{zy} \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{w}_z = w_{xz} \mathbf{e}_x + w_{yz} \mathbf{e}_y + w_{zz} \mathbf{e}_z \quad (6.22)$$

alakban felírt képvektorokban a

$$\boxed{w_{mn} = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{w}_n = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_n, \quad m, n = x, y, z} \quad (6.23)$$

skalárok a másodrendű tenzor skaláris koordinátái (összetevői).

7. MŰVELETEK MÁSODRENDŰ TENZOROKKAL

Az alábbiak – figyelembevételével, hogy a másodrendű tenzor általános esetben három diád összege, figyelembevételével továbbá a diádokkal kapcsolatos műveletek 6.1. szakaszban áttekintett szabályait – a másodrendű tenzorokkal kapcsolatos műveleteket tekintik át.

Legyen a $\mathbf{T} = \mathbf{t}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{t}_y \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{t}_z \otimes \mathbf{e}_z$ tetszőleges másodrendű tenzor. Két másodrendű tenzor összege az azokat alkotó diádok összege, a művelet kommutatív:

$$\mathbf{T} + \mathbf{W} = \mathbf{W} + \mathbf{T} \quad (7.1)$$

A másodrendű tenzor összhangban a (6.5a)₂ és (6.9) képletekkel balról is szorozható egy, mondjuk a $\mathbf{d}$, vektorral. Az eredmény vektor:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} \cdot \mathbf{W} &= \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{d} = \mathbf{d} \cdot (\mathbf{w}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{w}_y \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{w}_z \otimes \mathbf{e}_z) = \\ &= (\mathbf{d} \cdot \mathbf{w}_x) \mathbf{e}_x + (\mathbf{d} \cdot \mathbf{w}_y) \mathbf{e}_y + (\mathbf{d} \cdot \mathbf{w}_z) \mathbf{e}_z = \mathbf{c} . \end{aligned} \quad (7.2)$$

Fennáll az eddigiek alapján, hogy

$$(\mathbf{T} + \alpha \mathbf{W}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} + \alpha \mathbf{W} \cdot \mathbf{v} \quad (7.3)$$

A másodrendű tenzor jobbról és balról egyaránt megszorozható vektoriálisan egy vektorral. Az eredmény másodrendű tenzor. A vonatkozó (6.7) képlet alapján a jobboldalról történő szorzást szemléltetjük:

$$\mathbf{W} \times \mathbf{d} = \mathbf{w}_x \otimes (\mathbf{e}_x \times \mathbf{d}) + \mathbf{w}_y \otimes (\mathbf{e}_y \times \mathbf{d}) + \mathbf{w}_z \otimes (\mathbf{e}_z \times \mathbf{d}) = \mathbf{C} \quad (7.4)$$

Két másodrendű tenzor skaláris szorzata másodrendű tenzor. A $\mathbf{W}$ és $\mathbf{T}$ tenzort tekintve – visszaidézve emellett az alapszabályt jelentő (6.10) képletet – tagonkénti szorzással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \mathbf{W} &= (\mathbf{t}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{t}_y \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{t}_z \otimes \mathbf{e}_z) \cdot (\mathbf{w}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{w}_y \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{w}_z \otimes \mathbf{e}_z) = \\ &= [(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{w}_x) \mathbf{t}_x \otimes \mathbf{e}_x + (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{w}_x) \mathbf{t}_y \otimes \mathbf{e}_x + (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{w}_x) \mathbf{t}_z \otimes \mathbf{e}_x + \\ &\quad + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{w}_y) \mathbf{t}_x \otimes \mathbf{e}_y + (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{w}_y) \mathbf{t}_y \otimes \mathbf{e}_y + (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{w}_y) \mathbf{t}_z \otimes \mathbf{e}_y + \\ &\quad + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{w}_z) \mathbf{t}_x \otimes \mathbf{e}_z + (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{w}_z) \mathbf{t}_y \otimes \mathbf{e}_z + (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{w}_z) \mathbf{t}_z \otimes \mathbf{e}_z] = \mathbf{C} \neq \\ &\neq \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Nyilvánvaló, hogy

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{W}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{T} \cdot (\mathbf{W} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{w} . \quad (7.6)$$

Az egységtenzor, betűjele $\mathbf{I}$, önmagára képezi le a $\mathbf{v}$ vektorok terét. A

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \underbrace{(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{v})}_{v_x} + \mathbf{e}_y \underbrace{(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{v})}_{v_y} + \mathbf{e}_z \underbrace{(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v})}_{v_z} = \\ &= \underbrace{(\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z)}_{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

átalakítás alapján azonnal kapjuk, hogy

$$\boxed{\mathbf{I} = \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z} \quad (7.7)$$

az egységtenzor.

Az $\alpha \mathbf{I}$ tenzort gömbi tenzornak nevezik: gömböt gömbre képez le.

A

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{I} \quad (7.8)$$

egyenlet a $\mathbf{W}$ tenzor $\mathbf{W}^{-1}$ inverzét értelmezi. Az inverz számítását a 8.2. szakaszban tekintjük át.

Két másodrendű tenzor belső, más elnevezéssel energia típusú szorzatát az a (6.13) és (6.13) képletek felhasználásával képezhetjük. Az előző két tenzorral szemlélítve:

$$\begin{aligned}\mathbf{W} \cdot \cdot \mathbf{T} &= (\mathbf{w}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{w}_y \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{w}_z \otimes \mathbf{e}_z) \cdot \cdot (\mathbf{t}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{t}_y \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{t}_z \otimes \mathbf{e}_z) = \\ &= (\mathbf{w}_x \cdot \mathbf{t}_x) \underbrace{(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x)}_{=1} + (\mathbf{w}_x \cdot \mathbf{t}_y) \underbrace{(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y)}_{=0} + (\mathbf{w}_x \cdot \mathbf{t}_z) \underbrace{(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_z)}_{=0} + \\ &+ (\mathbf{w}_y \cdot \mathbf{t}_x) \underbrace{(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_x)}_{=0} + (\mathbf{w}_y \cdot \mathbf{t}_y) \underbrace{(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y)}_{=1} + (\mathbf{w}_y \cdot \mathbf{t}_z) \underbrace{(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z)}_{=0} + \dots = \\ &= \mathbf{w}_x \cdot \mathbf{t}_x + \mathbf{w}_y \cdot \mathbf{t}_y + \mathbf{w}_z \cdot \mathbf{t}_z = \sum_{m,n=x,y,z} w_{mn} t_{mn}, \quad (7.9)\end{aligned}$$

azaz

$$\boxed{\mathbf{W} \cdot \cdot \mathbf{T} = \mathbf{w}_x \cdot \mathbf{t}_x + \mathbf{w}_y \cdot \mathbf{t}_y + \mathbf{w}_z \cdot \mathbf{t}_z = \sum_{m,n=x,y,z} w_{mn} t_{mn}.} \quad (7.10)$$

A $\mathbf{W}$ másodrendű tenzor ún. nyomát – a 8.3 alszakaszban látni fogjuk majd, hogy ez a skaláris mennyiség a tenzor első skalárinvariánsa – a

$$\text{tr } \mathbf{W} = \mathbf{I} \cdot \cdot \mathbf{W} = w_{xx} + w_{yy} + w_{zz} \quad (7.11)$$

kifejezés értelmezi.

8. SPECIÁLIS TENZOROK

8.1. Transzponált, felbontási tétel, vektorinvariáns, inverz. A $\mathbf{W}$ tenzor transzponáltját kapjuk, összhangban a (6.9) képletekkel kapcsolatban mondottakkal, ha felcseréljük a tenzort adó (6.20) képletekben a diádikus szorzatok szorzótényezőinek sorrendjét:

$$\mathbf{W}^T = \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{w}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{w}_y + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{w}_z \quad (8.1)$$

A (6.9) képletek könnyen ellenőrizhető következménye, hogy fennáll az

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{W}^T = \mathbf{W} \cdot \mathbf{v}, \quad (8.2)$$

összefüggés, ahonnan

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{v} \quad (8.3)$$

bármilyen legyen is az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektor.

Szimmetrikus a $\mathbf{W}$ tenzor, ha $\mathbf{W} = \mathbf{W}^T$, és ferdeszimmetrikus, ha $\mathbf{W} = -\mathbf{W}^T$.

Ha szimmetrikus a $\mathbf{W}$ tenzor, akkor

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{v} \quad \text{illetve} \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{v} \quad (8.4a)$$

ha pedig ferdeszimmetrikus, akkor

$$-\mathbf{v} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{v} \quad \text{illetve} \quad -\mathbf{v} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{v} \quad (8.4b)$$

bármilyen legyen is az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$.

A $\mathbf{W}$ tenzor

$$\left. \begin{array}{l} \text{pozitív definit} \\ \text{pozitív szemidefinit} \\ \text{negatív szemidefinit} \\ \text{negatív definit} \end{array} \right\} \quad \text{ha bármely } \mathbf{u} - \text{ra} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{u} > 0 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{u} \geq 0 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{u} \leq 0 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{u} < 0 \end{array} \right. .$$

Az $\mathbf{I}$ egységtenzor szimmetrikus tenzor.

A

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{W} + \mathbf{W}^T) + \frac{1}{2} (\mathbf{W} - \mathbf{W}^T) \quad (8.5)$$

átalakítás alapján adódik a következtetés, hogy bármely $\mathbf{W}$ tenzor felbontható egy szimmetrikus $\mathbf{W}_{sz}$ és egy ferdeszimmetrikus $\mathbf{W}_{asz}$ tenzor összegére:

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_{sz} + \mathbf{W}_{asz} \quad (8.6a)$$

ahol

$$\mathbf{W}_{sz} = \frac{1}{2} (\mathbf{W} + \mathbf{W}^T) \quad \text{illetve} \quad \mathbf{W}_{asz} = \frac{1}{2} (\mathbf{W} - \mathbf{W}^T) \quad (8.6b)$$

Ez az eredmény *additív felbontási tétel* néven ismeretes.

Vizsgáljuk meg milyen a $\mathbf{W}$ tenzor ferdeszimmetrikus részéhez tartozó leképezés.

A ferdeszimmetrikus részt adó (8.6b)₂, továbbá a (8.1)₁ képlet felhasználásával – kihasználva egyúttal a diádokon végzett skaláris szorzás műveleti szabályait és a kétszeres vektorszorzatokkal kapcsolatos kifejtési tételt – írható, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{asz} \cdot \mathbf{v} &= \frac{1}{2} (\mathbf{W} - \mathbf{W}^T) \cdot \mathbf{v} = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{w}_x \circ \mathbf{e}_x + \mathbf{w}_y \circ \mathbf{e}_y + \mathbf{w}_z \circ \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2} (\mathbf{e}_x \circ \mathbf{w}_x + \mathbf{e}_y \circ \mathbf{w}_y + \mathbf{e}_z \circ \mathbf{w}_z) \cdot \mathbf{v} = \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{[\mathbf{w}_x (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{e}_x (\mathbf{w}_x \cdot \mathbf{v})]}_{-(\mathbf{w}_x \times \mathbf{e}_x) \times \mathbf{v}} + \frac{1}{2} \underbrace{[\mathbf{w}_y (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{e}_y (\mathbf{w}_y \cdot \mathbf{v})]}_{-(\mathbf{w}_y \times \mathbf{e}_y) \times \mathbf{v}} + \frac{1}{2} \underbrace{[\mathbf{w}_z (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{e}_z (\mathbf{w}_z \cdot \mathbf{v})]}_{-(\mathbf{w}_z \times \mathbf{e}_z) \times \mathbf{v}} = \\ &= \underbrace{-\frac{1}{2} [\mathbf{w}_x \times \mathbf{e}_x + \mathbf{w}_y \times \mathbf{e}_y + \mathbf{w}_z \times \mathbf{e}_z]}_{\mathbf{w}_a} \times \mathbf{v} \end{aligned}$$

vagy, elhagyva a közbülső átalakítás lépéseit

$$\mathbf{W}_{asz} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{w}^{(a)} \times \mathbf{v} \quad (8.7)$$

ahol, összhangban a fentiekkel

$$\boxed{\mathbf{w}^{(a)} = -\frac{1}{2} [\mathbf{w}_x \times \mathbf{e}_x + \mathbf{w}_y \times \mathbf{e}_y + \mathbf{w}_z \times \mathbf{e}_z]} \quad (8.8)$$

A $\mathbf{w}^{(a)}$ vektor a $\mathbf{W}$ tenzor un. *vektorinvariánsa* (axial vector). Mivel a (8.7) baloldalán álló leképezés KR független, a jobboldal $\mathbf{w}_a$ vektora is KR független kell, hogy legyen. Maga az invariáns szó erre a körülményre utal.

Vegyük észre, hogy a (8.8) képlet könnyen megjegyezhető, hiszen csak annyit kell tenni a memorizáláskor, hogy a $\mathbf{W}$ tenzort megadó (6.18) illetve (6.20) képletekben a diádikus szorzás $\otimes$ műveleti jelét a vektoriális szorzás $\times$ műveleti jelére cseréljük, majd megszorozzuk az eredményt $-1/2$ -el.

A (6.22) képvektorokat felhasználva

$$\mathbf{w}_x \times \mathbf{e}_x = w_{zx} \mathbf{e}_y - w_{yx} \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{w}_y \times \mathbf{e}_y = w_{xy} \mathbf{e}_z - w_{zy} \mathbf{e}_x \quad \text{és} \quad \mathbf{w}_z \times \mathbf{e}_z = w_{yz} \mathbf{e}_x - w_{xz} \mathbf{e}_y,$$

következésképp

$$\mathbf{w}^{(a)} = \underbrace{-\frac{1}{2} (w_{yz} - w_{zy}) \mathbf{e}_x}_{w_{ax}} - \underbrace{\frac{1}{2} (w_{zx} - w_{xz}) \mathbf{e}_y}_{w_{ay}} - \underbrace{\frac{1}{2} (w_{xy} - w_{yx}) \mathbf{e}_z}_{w_{az}} \quad (8.9)$$

Ha a $\mathbf{W}$ tenzor szimmetrikus, akkor a (8.7) alapján – figyelembevételével a $\mathbf{W} = \mathbf{W}^T$ szimmetriafeltételt – írható, hogy

$$\mathbf{w}^{(a)} \times \mathbf{v} = \frac{1}{2} (\mathbf{W} - \mathbf{W}^T) \cdot \mathbf{v} = 0 .$$

Mivel ez az egyenlet bármely $\mathbf{v}$ -re fennáll következésképpen, hogy $\mathbf{w}^{(a)} = \mathbf{0}$ (zérusvektor a vektorinvariáns), azaz, hogy *szimmetrikus tenzorok* esetén az xyz KR $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ egységvektoraihoz rendelt $\mathbf{w}_x, \mathbf{w}_y$ és $\mathbf{w}_z$ képvektorok koordinátái (összetevői) eleget tesznek a

$$w_{xy} = w_{yx} , \quad w_{yz} = w_{zy} \quad \text{és} \quad w_{zx} = w_{xz} \quad (8.10)$$

feltételeknek.

Ha a $\mathbf{W}$ tenzor ferdeszimmetrikus, akkor a w_{mn} -t adó (6.22) és a (8.4b)₂ képletek szerint, az utóbbiban rendre $\mathbf{e}_m$ és $\mathbf{e}_n$ -t gondolunk $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ helyére, írhatjuk, hogy

$$\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_n = -\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_m \quad m, n = x, y, z$$

ahonnan némi számolással következik, hogy

$$\begin{aligned} W_{xy} &= -W_{yx} , & W_{yz} &= -W_{zy} , & W_{zx} &= -W_{xz} , \\ W_{xx} &= W_{yy} = W_{zz} = 0 . \end{aligned} \quad (8.11)$$

Kihasználva a (8.6a) additív felbontást, valamint a (8.7) összefüggést a $\mathbf{W} \cdot \mathbf{v}$ leképezés az

$$\boxed{\mathbf{W} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{W}_{sz} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{W}_{asz} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{W}_{sz} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{w}^{(a)} \times \mathbf{v}} \quad (8.12)$$

alakban is felírható.

Legyen szimmetrikus tenzor a $\mathbf{T}$ és antiszimmetrikus a $\mathbf{W}$. Ez esetben, amint az a (7.9) számítási képlettel ellenőrizhető, zérus értékű a két tenzor energia típusú (belső) szorzata:

$$\mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{W} = 0 \quad (8.13)$$

Jelölje $\mathbf{W}^{-1}$, összhangban a korábbiakkal, a tetszőleges $\mathbf{W}$ tenzor inverzét. Maga az inverz a (7.8) egyenlet $\mathbf{W}^{-1}$ -re vonatkozó megoldása.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy nem elfajuló a $\mathbf{W}$ tenzorral kapcsolatos leképezés (azaz nincs közös síkja a $\mathbf{w}_x, \mathbf{w}_y$ és $\mathbf{w}_z$ képvektoroknak). Ez esetben a (3.5) képletek alapján

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_x^* &= \frac{\mathbf{w}_y \times \mathbf{w}_z}{w_o} , & \mathbf{w}_y^* &= \frac{\mathbf{w}_z \times \mathbf{w}_x}{w_o} , & \mathbf{w}_z^* &= \frac{\mathbf{w}_x \times \mathbf{w}_y}{w_o} , \\ w_o &= (\mathbf{w}_x \times \mathbf{w}_y) \cdot \mathbf{w}_z = [\mathbf{w}_x \mathbf{w}_y \mathbf{w}_z] \neq 0 \end{aligned} \quad (8.14)$$

módon számíthatjuk a $\mathbf{w}_x, \mathbf{w}_y$ és $\mathbf{w}_z$ képvektorokhoz rendelt reciprok vektorokat. Az is nyilvánvaló visszaidézve a (3.2) képletet, hogy

$$\mathbf{w}_m \cdot \mathbf{w}_n^* = \begin{cases} 1 & \text{ha } m = n \\ 0 & \text{ha } m \neq n \end{cases} \quad m, n = x, y, z . \quad (8.15)$$

A $\mathbf{w}_x^*, \mathbf{w}_y^*$ képvektorokhoz tartozó $\mathbf{w}_z^*$ reciprok vektorokkal

$$\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{e}_x \circ \mathbf{w}_x^* + \mathbf{e}_y \circ \mathbf{w}_y^* + \mathbf{e}_z \circ \mathbf{w}_z^* \quad (8.16)$$

a keresett inverz hiszen – amint az reciprok vektorok tulajdonságának kihasználásával, valamint a két tenzor szorzatát adó (7.5) alatti képlet értelemszerű alkalmazásával adódik –, fennáll, hogy

$$\mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{W} = (\mathbf{e}_x \circ \mathbf{w}_x^* + \mathbf{e}_y \circ \mathbf{w}_y^* + \mathbf{e}_z \circ \mathbf{w}_z^*) \cdot (\mathbf{w}_x \circ \mathbf{e}_x + \mathbf{w}_y \circ \mathbf{e}_y + \mathbf{w}_z \circ \mathbf{e}_z) =$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{e}_x \circ \underbrace{\mathbf{e}_x \left(\overset{*}{\mathbf{w}}_x \cdot \mathbf{w}_x \right)}_{=1} + \mathbf{e}_y \circ \underbrace{\mathbf{e}_y \left(\overset{*}{\mathbf{w}}_y \cdot \mathbf{w}_y \right)}_{=1} + \mathbf{e}_z \circ \underbrace{\mathbf{e}_z \left(\overset{*}{\mathbf{w}}_z \cdot \mathbf{w}_z \right)}_{=1} + \\
&+ \underbrace{\mathbf{e}_x \circ \mathbf{e}_y \left(\overset{*}{\mathbf{w}}_x \cdot \mathbf{w}_y \right)}_{=0} + \cdots + \underbrace{\mathbf{e}_z \circ \mathbf{e}_z \left(\overset{*}{\mathbf{w}}_y \cdot \mathbf{w}_y \right)}_{=0} = \mathbf{e}_x \circ \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \circ \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \circ \mathbf{e}_z = \mathbf{I},
\end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy teljesül az inverzzel kapcsolatos $\mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{I}$ összefüggés. A $\mathbf{W} \cdot \mathbf{W}^{-1} = \mathbf{I}$ egyenlet igazolását gyakorlatra hagyjuk.

A $\mathbf{W}^{-1}$ tenzor transzponáltját az áttekinthetőbb olvasás kedvéért $\mathbf{W}^{-T}$ módon szedjük majd.

8.2. Tenzorok és mátrixok. A $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{w}$ képvektorához, valamint az egységvektorok $\mathbf{w}_x$, $\mathbf{w}_y$ és $\mathbf{w}_z$ képvektoraihoz rendelt $\underline{\mathbf{v}}$, $\underline{\mathbf{w}}$, $\underline{\mathbf{w}}_x$, $\underline{\mathbf{w}}_y$ és $\underline{\mathbf{w}}_z$ oszlopvektorok (oszlopmátrixok) segítségével mátrix jelölésekkel is felírható a másodrendű tenzor értelmezésével kapcsolatos (6.16b) képlet:

$$\underline{\mathbf{w}} = \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{v}}) = \underline{\mathbf{w}}_x v_x + \underline{\mathbf{w}}_y v_y + \underline{\mathbf{w}}_z v_z.$$

Kirészletezve

$$\underbrace{\begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{w}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} w_{xx} \\ w_{yx} \\ w_{zx} \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{w}}_x} v_x + \underbrace{\begin{bmatrix} w_{xy} \\ w_{yy} \\ w_{zy} \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{w}}_y} v_y + \underbrace{\begin{bmatrix} w_{xz} \\ w_{yz} \\ w_{zz} \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{w}}_z} v_z = \underbrace{\begin{bmatrix} w_{xx} & w_{xy} & w_{xz} \\ w_{yx} & w_{yy} & w_{yz} \\ w_{zx} & w_{zy} & w_{zz} \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{W}}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{v}}}.$$

Ebben az egyenletben

$$\underline{\mathbf{W}}_{(3 \times 3)} = \left[\underline{\mathbf{w}}_x \mid \underline{\mathbf{w}}_y \mid \underline{\mathbf{w}}_z \right] = \begin{bmatrix} w_{xx} & w_{xy} & w_{xz} \\ w_{yx} & w_{yy} & w_{yz} \\ w_{zx} & w_{zy} & w_{zz} \end{bmatrix} \quad (8.17)$$

a $\mathbf{W}$ tenzor mátrixa az (xyz) KR-ben és az is kiolvasható a fenti képletekből, hogy a $\mathbf{v}$ leképezésével kapcsolatos $\mathbf{w} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{v}$ egyenletnek az (xyz) KR-beli mátrixokkal írva fel az

$$\underline{\mathbf{w}}_{(3 \times 1)} = \underline{\mathbf{W}}_{(3 \times 3)} \underline{\mathbf{v}}_{(3 \times 1)} \quad (8.18)$$

egyenlet felel meg.

Figyeljük meg, hogy a $\mathbf{W}$ tenzor (xyz) KR-beni $\underline{\mathbf{W}}$ mátrixának oszlopait rendre az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ vektorokhoz tartozó $\mathbf{w}_x$, $\mathbf{w}_y$ és $\mathbf{w}_z$ képvektorok mátrixai, azaz a $\underline{\mathbf{w}}_x$, $\underline{\mathbf{w}}_y$ és $\underline{\mathbf{w}}_z$ oszlopvektorok alkotják.

Megjegyezzük, hogy a képvektorok mátrixokkal történő felírása során a vonatkozó mátrixok méreteit a továbbiakban csak akkor írjuk ki, ha ezt valamilyen okból hangsúlyozni kívánjuk.

A

$$\mathbf{T} = \mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \mathbf{a} \circ (b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y + b_z \mathbf{e}_z) = \underbrace{\mathbf{a} b_x}_{\mathbf{t}_x} \circ \mathbf{e}_x + \underbrace{\mathbf{a} b_y}_{\mathbf{t}_y} \circ \mathbf{e}_y + \underbrace{\mathbf{a} b_z}_{\mathbf{t}_z} \circ \mathbf{e}_z$$

diád mint tenzor mátrixára hasonló gondolatmenettel a

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{T}} &= \left[\underline{\mathbf{t}}_x \mid \underline{\mathbf{t}}_y \mid \underline{\mathbf{t}}_z \right] = \left[\underline{\mathbf{a}} b_x \mid \underline{\mathbf{a}} b_y \mid \underline{\mathbf{a}} b_z \right] = \\
&= \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{a}}_{(3 \times 1)} \underline{\mathbf{b}}_{(1 \times 3)}^T
\end{aligned}$$

eredmény következik.

A fenti képletek szerint *két vektor diádikus szorzatának mátrixa az első vektor oszlopmátrixa és a második vektor oszlopmátrixa transzponáltjának szorzata*. Ezt a szorzatot is diádikus szorzatnak nevezzük.

A $\underline{W}$ tenzor transzponáltjának mátrixa a transzponált tenzort értelmező (8.1)₂ képlet és az előzőek szerint adódik:

$$\underset{(3 \times 1)}{\underline{e}_x} \underset{(1 \times 3)}{\underline{w}_x^T} + \underset{(3 \times 1)}{\underline{e}_y} \underset{(1 \times 3)}{\underline{w}_y^T} + \underset{(3 \times 1)}{\underline{e}_z} \underset{(1 \times 3)}{\underline{w}_z^T} = \begin{bmatrix} w_{xx} & w_{yx} & w_{zx} \\ w_{xy} & w_{yy} & w_{zy} \\ w_{xz} & w_{yz} & w_{zz} \end{bmatrix} = \underline{W}^T,$$

azaz a tenzor transzponáltjának mátrixa megegyezik a tenzor mátrixának transzponáltjával.

Nyilvánvaló, hogy az $\underline{I}$ egységtenzornak az $\underline{I}$ egységmátrix a mátrixa:

$$\underline{I} = \underset{(3 \times 1)}{\underline{e}_x} \underset{(1 \times 3)}{\underline{e}_x^T} + \underset{(3 \times 1)}{\underline{e}_y} \underset{(1 \times 3)}{\underline{e}_y^T} + \underset{(3 \times 1)}{\underline{e}_z} \underset{(1 \times 3)}{\underline{e}_z^T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.19)$$

A (8.10) és (8.11) képletek szerint szimmetrikus tenzornak szimmetrikus, ferdeszimmetrikus tenzornak pedig ferdeszimmetrikus a mátrixa.

A (8.6) egyenletekkel adott felbontási tételnek a

$$\underline{W} = \underline{W}_{sz} + \underline{W}_{asz} \quad (8.20a)$$

egyenlet, itt

$$\underline{W}_{sz} = \frac{1}{2} (\underline{W} + \underline{W}^T) \quad \text{és} \quad \underline{W}_{asz} = \frac{1}{2} (\underline{W} - \underline{W}^T), \quad (8.20b)$$

a mátrix alakja.

A $\underline{W}$ másodrendű tenzor determinánsát a $\det(\underline{W})$ módon jelöljük. Ez értelmezés szerint a tenzor $\underline{W}$ mátrixának determinánsa:

$$\det(\underline{W}) = \det(\underline{W}) \quad (8.21)$$

8.3. Szimmetrikus másodrendű tenzorok sajátértékfeladata. Legyen a $\underline{W}$ tenzor szimmetrikus. Keressük azokat az n irányokat – ezeket *főirányoknak* nevezzük majd – amelyekre nézve fennáll, hogy az irányt adó

$$\underline{n} = n_x \underline{e}_x + n_y \underline{e}_y + n_z \underline{e}_z; \quad n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad (8.22)$$

egységvektor és a hozzá tartozó $\underline{w}_n$ képvektor egymással párhuzamos – a 26. ábra ezt az esetet szemlélteti. Ha párhuzamos a $\underline{w}_n$ és $\underline{n}$ akkor fennáll a

$$\underline{w}_n = \underline{W} \cdot \underline{n} = \lambda \underline{n}, \quad (8.23)$$

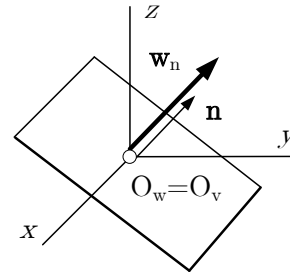
vagy ami ugyanez a

$$(\underline{W} - \lambda \underline{I}) \cdot \underline{n} = 0 \quad (8.24)$$

26. ábra. Párhuzamos $\underline{n}$ és $\underline{w}_n$

egyenlet. A $\underline{W}$ és $\underline{I}$ tenzorok, valamint az $\underline{n}$ vektor mátrixait felhasználva innen a

$$\underbrace{\begin{bmatrix} w_{xx} - \lambda & w_{xy} & w_{xz} \\ w_{yx} & w_{yy} - \lambda & w_{yz} \\ w_{zx} & w_{zy} & w_{zz} - \lambda \end{bmatrix}}_{\underline{W} - \lambda \underline{I}} \underbrace{\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}}_{\underline{n}} = 0 \quad (8.25)$$



homogén lineáris egyenletrendszer következik. Legyen

$$P_3(\lambda) = -\det(\underline{\mathbf{W}} - \lambda \underline{\mathbf{I}}) = -[(\mathbf{w}_x - \lambda \mathbf{e}_x)(\mathbf{w}_y - \lambda \mathbf{e}_y)(\mathbf{w}_z - \lambda \mathbf{e}_z)] \quad (8.26)$$

Ez a függvény λ köbös polinomja, a karakterisztikus polinom. Triviálistól különböző megoldás csak akkor létezik, ha a fenti egyenletrendszer determinánsa eltűnik, azaz ha

$$P_3(\lambda) = - \begin{vmatrix} w_{xx} - \lambda & w_{xy} & w_{xz} \\ w_{yx} & w_{yy} - \lambda & w_{yz} \\ w_{zx} & w_{zy} & w_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - W_I \lambda^2 + W_{II} \lambda - W_{III} = 0. \quad (8.27)$$

Némi kézi számolással – ezt nem részletezzük – belátható, hogy itt

$$W_I = [\mathbf{w}_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z] + [\mathbf{e}_x \mathbf{w}_y \mathbf{e}_z] + [\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \mathbf{w}_z] = w_{xx} + w_{yy} + w_{zz}, \quad (8.28a)$$

$$\begin{aligned} W_{II} &= [\mathbf{w}_x \mathbf{w}_y \mathbf{e}_z] + [\mathbf{w}_x \mathbf{e}_y \mathbf{w}_z] + [\mathbf{e}_x \mathbf{w}_y \mathbf{w}_z] = \\ &= \begin{vmatrix} w_{xx} & w_{xy} \\ w_{yx} & w_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} w_{xx} & w_{xz} \\ w_{zx} & w_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} w_{yy} & w_{yz} \\ w_{zy} & w_{zz} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (8.28b)$$

és

$$W_{III} = [\mathbf{w}_x \mathbf{w}_y \mathbf{w}_z] = \begin{vmatrix} w_{xx} & w_{xy} & w_{xz} \\ w_{yx} & w_{yy} & w_{yz} \\ w_{zx} & w_{zy} & w_{zz} \end{vmatrix}. \quad (8.28c)$$

A W_I , W_{II} és W_{III} együtthatókat a $\mathbf{W}$ tenzor első, második és harmadik skalárinvariánsainak nevezzük. Az elnevezést az indokolja, hogy a $\mathbf{W}$ szimmetrikus tenzorral kapcsolatos és az (8.23)₂ egyenlettel definiált *sajátértékfeladat* megoldása a tenzorhoz tartozó leképezés egy geometriai sajátosságát tükrözi és mint ilyen KR független. Következően a megoldás első lépésében kiadódó (8.27) *karakterisztikus egyenlet* gyökei is KR függetlenek kell, hogy legyenek. Ez viszont csak akkor lehetséges, ha a karakterisztikus egyenlet (karakterisztikus polinom) W_I , W_{II} és W_{III} együtthatói függetlenek a KR választásától.

A fentebb mondottak akkor is érvényesek, ha nem szimmetrikus a $\mathbf{W}$ tenzor. A továbbiakban azonban kihasználjuk majd a szimmetriát.

Legyen λ_1 és λ_2 a (8.27) *karakterisztikus egyenlet* két különböző gyöke, azaz a sajátértékfeladat két különböző *sajátértéke*. Jelölje $\mathbf{n}_1$ és $\mathbf{n}_2$ a vonatkozó főirányokat kijelölő egységvektorokat. Ekkor

$$(\mathbf{W} - \lambda_1 \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}_1 = 0 \quad \text{és} \quad (\mathbf{W} - \lambda_2 \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}_2 = 0.$$

Innen, első esetben az $\mathbf{n}_2$ -vel, második esetben pedig az $\mathbf{n}_1$ -el történő skaláris szorzással azonnal adódik, hogy

$$\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_1 = \lambda_1 \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_1 \quad \text{és} \quad \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_2 = \lambda_2 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2. \quad (8.29)$$

A szimmetrikus tenzorokkal kapcsolatos (8.4a)₂ képlet alapján

$$\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_2.$$

Az utóbbi egyenlet felhasználva a

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0, \quad \text{azaz az} \quad \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$$

eredmény adódik (a 8.29)-at alkotó egyenletek különbségére: a különböző sajátértékekhez tartozó főirányok merőlegesek tehát egymásra.

Tegyük fel, hogy komplex szám a λ_1 sajátérték. Ekkor a vonatkozó főirányt adó

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_1 = \lambda_1 \cdot \mathbf{n}_1 \quad (8.30)$$

egyenlet jobboldala komplex, a baloldal pedig a $\mathbf{W}$ valós volta miatt csak akkor lehet komplex, ha az $\mathbf{n}_1$ is komplex. Következésképp az $\mathbf{n}_1$ felírható az

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_{1\text{Re}} + i\mathbf{n}_{1\text{Im}}$$

alakban. Nyilvánvaló az is, hogy a $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 \neq \lambda_1$ – a felülvonás a komplex konjugáltat jelöli – ugyancsak sajátérték, a vonatkozó főirány pedig a (8.30) egyenlet konjugálásával írható

$$\mathbf{W} \cdot \bar{\mathbf{n}}_1 = \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\mathbf{n}}_1, \quad \text{azaz a} \quad \mathbf{W} \cdot \bar{\mathbf{n}}_1 = \lambda_2 \cdot \bar{\mathbf{n}}_1$$

képlet szerint

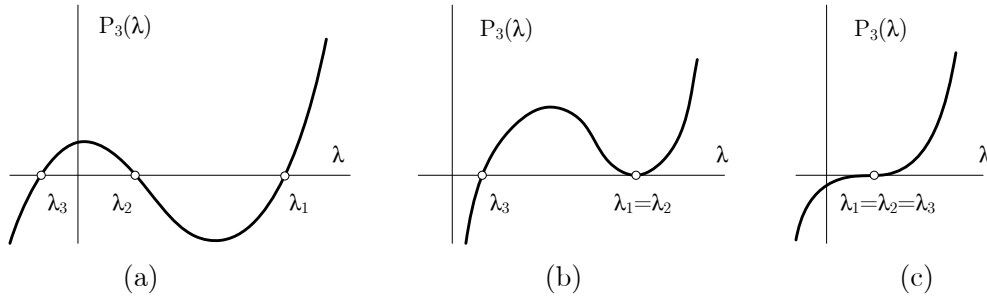
$$\mathbf{n}_2 = \bar{\mathbf{n}}_1 = \mathbf{n}_{1\text{Re}} - i\mathbf{n}_{1\text{Im}}.$$

Mivel $\lambda_1 \neq \lambda_2$ fenn kell állnia az $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$ egyenletnek. Ugyanakkor az $\mathbf{n}_1$ és $\mathbf{n}_2$ -t adó fenti képletek felhasználásával

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = (\mathbf{n}_{1\text{Re}} + i\mathbf{n}_{1\text{Im}}) \cdot (\mathbf{n}_{1\text{Re}} - i\mathbf{n}_{1\text{Im}}) = \mathbf{n}_{1\text{Re}} \cdot \mathbf{n}_{1\text{Re}} + \mathbf{n}_{1\text{Im}} \cdot \mathbf{n}_{1\text{Im}} = |\mathbf{n}_1|^2 \neq 0,$$

azaz nem zérus az $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2$ skalárszorzat. Az a feltevés tehát, hogy a λ_1 komplex ellentmondásra vezet. Következésképp valósak a λ_k ($k = 1, 2, 3$) sajátértékek.

Az alábbiakban a főirányok számítását tekintjük át, ha ismertek a $P_3(\lambda)$ karakterisztikus polinom gyökei. A gyökök nagyságát tekintve három jellegzetes esetet különböztethetünk meg: a gyökök különböznek egymástól (minden gyök egyszeres multiplicitású), van két egybeeső gyök (egy gyök kétszeres, egy gyök egyszeres multiplicitású), mindhárom gyök egybeesik (egy háromszoros multiplicitású gyök van).



27. ábra. A karakterisztikus polinom gyökei

A 27. ábra ezekre az esetekre külön-külön szemlélteti a karakterisztikus polinomot. Az egyes eseteket a továbbiakban vesszük sorra.

1. Legyenek különbözőek a $P_3(\lambda) = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei: $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$. Jelölje Δ_{mn} az n_x, n_y és n_z -t adó (8.25) lineáris egyenletrendszer

$$\underline{\mathbf{W}} - \lambda \underline{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} w_{xx} - \lambda & w_{xy} & w_{xz} \\ w_{yx} & w_{yy} - \lambda & w_{yz} \\ w_{zx} & w_{zy} & w_{zz} - \lambda \end{bmatrix}$$

együtthatómátrixa nm -ik ($m, n = x, y, z$) eleméhez tartozó előjeles aldeterminánst. Nem nehéz ellenőrizni, hogy

$$P'_3(\lambda_k) = \left. \frac{dP_3(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda_k} = - \left. \frac{d}{d\lambda} \det(\underline{\mathbf{W}} - \lambda \underline{\mathbf{I}}) \right|_{\lambda_k} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{d}{d\lambda} [(\mathbf{w}_x - \lambda \mathbf{e}_x)(\mathbf{w}_y - \lambda \mathbf{e}_y)(\mathbf{w}_z - \lambda \mathbf{e}_z)] \Big|_{\lambda_k} = [(\mathbf{w}_x - \lambda_k \mathbf{e}_x) \mathbf{e}_y (\mathbf{w}_z - \lambda_k \mathbf{e}_z)] + \\
&\quad + [(\mathbf{w}_x - \lambda_k \mathbf{e}_x) \mathbf{e}_y (\mathbf{w}_z - \lambda_k \mathbf{e}_z)] + [(\mathbf{w}_x - \lambda_k \mathbf{e}_x)(\mathbf{w}_y - \lambda_k \mathbf{e}_y) \mathbf{e}_z] = \\
&\quad = \Delta_{xx}(\lambda_k) + \Delta_{yy}(\lambda_k) + \Delta_{zz}(\lambda_k). \quad (8.31)
\end{aligned}$$

Mivel a három gyök különböző, ezért egyszeres, vagyis adott λ_k esetén legalább az egyike a $\Delta_{mm}(\lambda_k)$ determinánsoknak, mondjuk a $\Delta_{zz}(\lambda_k)$, különbözik zérustól. Ha ugyanis nem így lenne, eltűnne a $P'_3(\lambda_k)$ derivált, következésképp nem lenne egyszeres a λ_k gyök – példaként lásd a 27.(b) ábra $\lambda_1 = \lambda_2$ kettős gyökét, ahol vízszintes az érintő.

Ha mondjuk a $\Delta_{zz}(\lambda_k)$ különbözik zérustól, akkor az (8.25) lineáris egyenletrendszer első két egyenlete, n_x és n_y -t ismeretlennek, n_z -t pedig paraméternek véve, független egymástól a megoldás pedig

$$\begin{aligned}
n_x^k &= \frac{\Delta_{xz}(\lambda_k)}{\Delta_{zz}(\lambda_k)} n_z^k, & n_y^k &= \frac{\Delta_{yz}(\lambda_k)}{\Delta_{zz}(\lambda_k)} n_z^k
\end{aligned} \quad (8.32)$$

alakú. Az n_z^k -t az utóbbi megoldás (8.22)₂ normálási feltételbe történő helyettesítésével kapjuk meg:

$$n_z^k = \frac{\Delta_{zz}(\lambda_k)}{D}; \quad D^2 = \Delta_{xz}^2(\lambda_k) + \Delta_{yz}^2(\lambda_k) + \Delta_{zz}^2(\lambda_k).$$

Az n_z^k (8.32)-ba történő visszahelyettesítése szerint egységes formula érvényes mindhárom ismeretlenre:

$$n_m^k = \frac{\Delta_{mz}(\lambda_k)}{D}; \quad m = x, y, z. \quad (8.33)$$

Vegyük észre, hogy ez a megoldás a harmadik egyenletet is kielégíti, hiszen a behelyettesítés szerint

$$\frac{1}{D} [w_{zx} \Delta_{xz}(\lambda_k) + w_{zy} \Delta_{yz}(\lambda_k) + (w_{zz} - \lambda_k) \Delta_{zz}(\lambda_k)] = \frac{P_3(\lambda_k)}{D} = 0,$$

ahol a szögletes zárójelben álló kifejezés – $\det(\mathbf{W} - \lambda \mathbf{I})|_{\lambda_k}$, ha az utolsó sor szerint végezzük el a determináns kifejtését.

A fentebb mondottaknak megfelelően eljárva minden egyes λ_k ($k = 1, 2, 3$) gyökhöz meghatározható olyan

$$\mathbf{n}_k = n_x^k \mathbf{e}_x + n_y^k \mathbf{e}_y + n_z^k \mathbf{e}_z; \quad |\mathbf{n}_k| = 1$$

irányvektor, hogy

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_k = \lambda_k \mathbf{n}_k. \quad (8.34)$$

Az $\mathbf{n}_k$ vektorok előjelét szabadon lehet megválasztani. Következésképp mindig lehetséges olyan választás, hogy az $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ vektorokhoz tartozó irányok jobbsodratú kartéziszi KR-t alkossanak. Ez a KR a *főtengelyek KR-e*, a vonatkozó koordinátasíkok pedig az un. *fősíkok*.

Az $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ egységvektorok által kifeszített kartéziszi KR-ben – azaz a főtengelyek KR-ében – felhasználva a képvektorokat adó (8.34) képletet

$$\mathbf{W} = \mathbf{w}_1 \circ \mathbf{n}_1 + \mathbf{w}_2 \circ \mathbf{n}_2 + \mathbf{w}_3 \circ \mathbf{n}_3 = \lambda_1 \mathbf{n}_1 \circ \mathbf{n}_1 + \lambda_2 \mathbf{n}_2 \circ \mathbf{n}_2 + \lambda_3 \mathbf{n}_3 \circ \mathbf{n}_3 \quad (8.35)$$

a tenzor diádikus alakja. Visszaidezve, hogy adott KR-ben az egységvektorokhoz tartozó képvektorok alkotják a tenzor mátrixának oszlopait írhatjuk, hogy

$$\underset{(3 \times 3)}{\mathbf{W}} = \left[\begin{array}{c|c|c} \underline{\mathbf{w}}_1 & \underline{\mathbf{w}}_2 & \underline{\mathbf{w}}_3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 \underline{\mathbf{n}}_1 & \lambda_2 \underline{\mathbf{n}}_2 & \lambda_3 \underline{\mathbf{n}}_3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{array} \right], \quad (8.36)$$

ahonnan jól látszik, hogy diagonális a tenzor mátrixa.

2. Legyen $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$. Az előzőekben áttekintett gondolatmenet és eredmények változatlanul érvényesek maradnak az $\mathbf{n}_3$ -ra nézve, azaz

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_3 = 0 \quad \text{és} \quad \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3 = 0. \quad (8.37)$$

Ami a kettős gyököket illeti

$$P'_3(\lambda_k) = 0; \quad k = 1, 2$$

és, amint az az (8.31) jobboldalának felhasználásával és némi számolással ellenőrizhető, fennáll, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} P''_3(\lambda_k) &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\lambda} [\mathbf{e}_x (\mathbf{w}_y - \lambda \mathbf{e}_y) (\mathbf{w}_z - \lambda \mathbf{e}_z)] + [(\mathbf{w}_x - \lambda \mathbf{e}_x) \mathbf{e}_y (\mathbf{w}_z - \lambda \mathbf{e}_z)] + \\ &+ [(\mathbf{w}_x - \lambda \mathbf{e}_x) (\mathbf{w}_y - \lambda \mathbf{e}_y) \mathbf{e}_z] \Big|_{\lambda_k} = (w_{xx} - \lambda_k) + (w_{yy} - \lambda_k) + (w_{zz} - \lambda_k); \\ &k = 1, 2 \end{aligned} \quad (8.38)$$

ahol a jobboldalon álló összeg legalább egy összeadandója, mondjuk az első, nem zérus, ellenkező esetben ugyanis három lenne a λ_k gyök multiplicitása.

Az $\overset{1}{n}_x$, $\overset{1}{n}_y$ és $\overset{1}{n}_z$ ismeretlenek meghatározására két egyenlet, a (8.25) lineáris egyenletrendszer első egyenlete, valamint a (8.22)₂ normálási feltétel használható fel. Az így kapott megoldással identikusan teljesül a (8.25) lineáris egyenletrendszer második és harmadik egyenlete – ez annak a következménye, hogy $P'_3(\lambda_1) = 0$ és $P_3(\lambda_1) = 0$.⁴

Az $\mathbf{n}_2$ vektort úgy érdemes megválasztani, hogy teljesüljön az $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$ ortogonalitási feltétel. Kettős gyök esetén tehát csak az $\mathbf{n}_3$ főirány egyértelműen meghatározott, a másik kettő elvben szabadon felvehető az $\mathbf{n}_3$ -ra merőleges síkban, célszerű azonban betartani az említett ortogonalitási feltételt. A $\mathbf{W}$ tenzor diádikus előállítását annak figyelembevételével kapjuk, hogy most $\lambda_1 = \lambda_2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \lambda_1 (\mathbf{n}_1 \circ \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 \circ \mathbf{n}_2) + \lambda_3 \mathbf{n}_3 \circ \mathbf{n}_3 = \\ &= \lambda_1 \underbrace{(\mathbf{n}_1 \circ \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 \circ \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3 \circ \mathbf{n}_3)}_I + (\lambda_3 - \lambda_1) \mathbf{n}_3 \circ \mathbf{n}_3 \end{aligned}$$

⁴Kétszeres gyök esetén 1 a $(\mathbf{W} - \lambda \mathbf{I})|_{\lambda_k}$ együtthatómátrix rangja, azaz $\Delta_{mn} = 0$; $m, n = x, y, z$. Következésképp valóban identikusan teljesülnek az $\overset{1}{n}_x$ -re vonatkozó

$$\overset{1}{n}_x = -\frac{1}{w_{xx} - \lambda_1} [w_{xy} \overset{1}{n}_y + w_{xz} \overset{1}{n}_z]$$

megoldás második és harmadik egyenletbe történő visszahelyettesítésével kapott

$$\Delta_{zz} \overset{1}{n}_y - \Delta_{yz} \overset{1}{n}_z = 0 \quad \text{és} \quad -\Delta_{zy} \overset{1}{n}_y + \Delta_{yy} \overset{1}{n}_z = 0$$

egyenletek.

azaz

$$\mathbf{W} = \lambda_1 \mathbf{I} + (\lambda_3 - \lambda_1) \mathbf{n}_3 \circ \mathbf{n}_3 \quad (8.39)$$

Az utóbbi egyenlet szépen mutatja, hogy egyedül $\mathbf{n}_3$ igazi tenzorjellemző. Figyelemmel arra, hogy a főirányokat kijelölő $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ előjele megváltoztatható, mindig biztosíthatjuk, hogy az $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ vektorokhoz tartozó irányok jobbsodratú kartéziszi KR-t alkossanak.

3. Háromszoros gyök esetén $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ és

$$\mathbf{W} = \lambda_1 \mathbf{I}, \quad (8.40)$$

következőleg bármely irány főirány. Az ilyen tenzort izotróp, illetve a korábbiakkal is összhangba gömbi tenzornak nevezzük. Az is nyilvánvaló, hogy az $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ vektorokat mindig megválaszthatjuk oly módon, hogy a hozzájuk tartozó irányok jobbsodratú kartéziszi KR-t alkossanak.

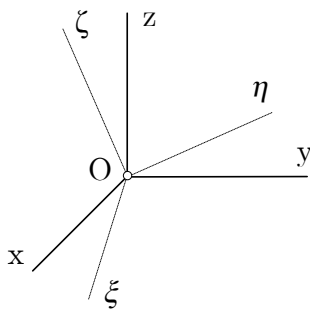
A szimmetrikus tenzorok sajátértékfeladatával kapcsolatos eredményeket illetően összegezésszerűen az alábbiakat emeljük ki. A sajátértékfeladatnak legalább három megoldása van a főirányokra nézve. Ha csak három a megoldások száma, akkor ezek az irányok kölcsönösen merőlegesek egymásra. Ha azonban több mint három a megoldások száma, akkor végtelen sok megoldás van, de mindig kiválasztható ezek közül három egymásra kölcsönösen merőleges megoldás. A λ_k ($k = 1, 2, 3$) sajátértékeket nagyság szerint rendezettnek tekintjük, vagyis úgy választjuk meg az indexüket, hogy fennálljon a

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$$

reláció. A vonatkozó $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ irányvektorokat pedig úgy érdemes megválasztani, hogy azok jobbsodratú kartéziszi KR-t alkossanak. Ez a választás mindig lehetséges.

9. VEKTOROK ÉS TENZOROK TRANSZFORMÁCIÓJA

9.1. Vektorok transzformációja. Legyen xyz és $\xi\eta\zeta$ két, ugyanazon ponthoz kötött de egymástól különböző Descartes-féle KR – 28. ábra. A vonatkozó egységvektorokat (bázisvektorokat) a szokásos módon jelöljük:



28. ábra.

$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ illetve $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$.

Mindkét KR egységvektorai megadhatók a másik KR-ben is, erre jelölésben, ha az szükséges az egyértelműség miatt, a

$$\begin{matrix} \mathbf{e}_x, & \mathbf{e}_y, & \mathbf{e}_z & \text{illetve} & \mathbf{e}_\xi, & \mathbf{e}_\eta, & \mathbf{e}_\zeta \\ (\xi, \eta, \zeta) & (\xi, \eta, \zeta) & (\xi, \eta, \zeta) & & (x, y, z) & (x, y, z) & (x, y, z) \end{matrix}$$

módon, azaz a KR-t azonosító betűhármassnak a változót adó betű alatti kisérdésével utalunk. Ez a jelölésbeli megállapodás általános érvényű, azaz más vektorok, illetve tenzorok esetén is hasonlóan írjuk ki, ha szükséges, hogy melyik KR-ben tekintjük az adott mennyiséget, vektort vagy tenzort.

Legyen a $\mathbf{v}$ tetszőleges vektor. Ez mind az xyz mind pedig a $\xi\eta\zeta$ KR-ben megadható:

$$\begin{matrix} \mathbf{v} & = & v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z, & \mathbf{v} & = & v_\xi \mathbf{e}_\xi + v_\eta \mathbf{e}_\eta + v_\zeta \mathbf{e}_\zeta. \\ (x, y, z) & & & (\xi, \eta, \zeta) & & \end{matrix} \quad (9.1)$$

Ha ismerjük a vektort az egyik KR-ben, és ismerjük ugyanebben a KR-ben a másik KR egységvektorait, akkor a vektor másik KR-ben vett koordinátáit a vonatkozó egységvektorral való skaláris szorzással kapjuk:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} v_m = \underset{(x,y,z)}{\mathbf{v}} \cdot \underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\mathbf{e}_m}, & v_\mu = \underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\mathbf{v}} \cdot \underset{(x,y,z)}{\mathbf{e}_\mu} & \\ m=x,y,z & \mu=\xi,\eta,\zeta & \end{array}} \quad (9.2)$$

Kirészletezve a v_μ számításával kapcsolatos képleteket írhatjuk, hogy

$$v_\mu = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_z = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_z \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} v_x \\ v_y \\ v_z \end{array} \right] \quad \mu=\xi,\eta,\zeta$$

Ez a három egyenlet egy egyenletbe tömöríthető:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c} v_\xi \\ v_\eta \\ v_\zeta \end{array} \right]}_{\underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\mathbf{v}}} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_z \end{array} \right]}_{\underline{\mathbf{Q}}} \underbrace{\left[\begin{array}{c} v_x \\ v_y \\ v_z \end{array} \right]}_{\underset{(x,y,z)}{\mathbf{v}}},$$

vagy ami ugyanaz

$$\boxed{\underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{Q}} \underset{(x,y,z)}{\mathbf{v}}}, \quad (9.3)$$

ahol

$$\underline{\mathbf{Q}} = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_z \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} \cos(\xi, x) & \cos(\xi, y) & \cos(\xi, z) \\ \cos(\eta, x) & \cos(\eta, y) & \cos(\eta, z) \\ \cos(\zeta, x) & \cos(\zeta, y) & \cos(\zeta, z) \end{array} \right]. \quad (9.4a)$$

A későbbiek kedvéért kiírjuk a $\underline{\mathbf{Q}}$ mátrix transzponáltját is:

$$\underline{\mathbf{Q}}^T = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\xi & \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\eta & \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\zeta \\ \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\xi & \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\eta & \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\zeta \\ \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\xi & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\eta & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\zeta \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} \cos(x, \xi) & \cos(x, \eta) & \cos(x, \zeta) \\ \cos(y, \xi) & \cos(y, \eta) & \cos(y, \zeta) \\ \cos(z, \xi) & \cos(z, \eta) & \cos(z, \zeta) \end{array} \right] \quad (9.4b)$$

Vegyük észre, hogy a $\underline{\mathbf{Q}}$ mátrix oszlopait az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ egységvektorok $\xi\eta\zeta$ KR-ben vett koordinátái, sorait pedig az $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$ és $\mathbf{e}_\zeta$ egységvektorok xyz KR-ben vett koordinátái alkotják. Innen következik a $\underline{\mathbf{Q}}$ mátrix alábbi két tulajdonsága:

1. Az egy-egy sorban illetve egy-egy oszlopban álló elemek négyzetösszege 1, hiszen ez az összeg egy-egy egységvektor abszolútértéke – a második oszlop esetén például $\mathbf{e}_y$ a vonatkozó egységvektor.
2. Zérus az összege a különböző indexű sorban illetve oszlopban azonos helyen álló elemek szorzatának, hiszen ez az összeg valójában két egymásra merőleges egységvektor skalárszorzata – a második és harmadik sor így képzett szorzata például $\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_\zeta$.

A két idézett tulajdonság kihasználásával nem nehéz belátni, hogy

$$\underline{\mathbf{Q}} \underline{\mathbf{Q}}^T = \underline{\mathbf{Q}}^T \underline{\mathbf{Q}} = \underline{\mathbf{I}}$$

azaz, hogy

$$\underline{\mathbf{Q}}^T = \underline{\mathbf{Q}}^{-1} . \quad (9.5)$$

ahol $\underline{\mathbf{Q}}^{-1}$ a $\underline{\mathbf{Q}}$ mátrix inverze. Az olyan mátrixokat, melyekre nézve a mátrix transzponáltja és inverze megegyezik *ortogonális mátrixoknak* nevezzük. A fentiek szerint ortogonális az (9.3) transzformáció $\underline{\mathbf{Q}}$ mátrixa. Következésképpen az

$$\boxed{\begin{matrix} \underline{\mathbf{v}} \\ (x,y,z) \end{matrix} = \underline{\mathbf{Q}}^T \begin{matrix} \underline{\mathbf{v}} \\ (\xi,\eta,\zeta) \end{matrix}} \quad (9.6)$$

egyenlet az említett transzformáció megfordítása.

9.2. Tenzorok transzformációja. A másodrendű $\mathbf{W}$ tenzorral kapcsolatosan azt a kérdést vizsgáljuk,

- (a) hogyan számítható a tenzor $\underline{\mathbf{W}}_{(x,y,z)}$ mátrixa a xyz KR-ben, ha ismerjük a tenzor $\underline{\mathbf{W}}_{(\xi,\eta,\zeta)}$ mátrixát az $\xi\eta\zeta$ KR-ben, illetve megfordítva,
 (b) hogyan számítható $\underline{\mathbf{W}}_{(\xi,\eta,\zeta)}$, ha ismert $\underline{\mathbf{W}}_{(x,y,z)}$.

Idézzük vissza, hogy a (6.23) képlet a $\mathbf{W}$ tenzor mátrixának elemeit adja az (xyz) Descartes-féle KR-ben. Ennek a képletnek a

$$w_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_\nu , \quad \mu, \nu = \xi, \eta, \zeta \quad (9.7)$$

egyenlet a párja a $\xi\eta\zeta$ KR-ben. Az említett két összefüggés felhasználásával azonnal megkapjuk a mátrixok elemeivel kapcsolatos transzformációs képleteket:

$$\boxed{\begin{matrix} w_{mn} = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_n , & w_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_\nu . \\ (x,y,z) & (\xi,\eta,\zeta) & (\xi,\eta,\zeta) & (\xi,\eta,\zeta) & (x,y,z) & (x,y,z) \\ & m,n=x,y,z & & & \mu,\nu=\xi,\eta,\zeta \end{matrix}} \quad (9.8)$$

További és a teljes mátrixokkal kapcsolatos szabályhoz úgy juthatunk, ha felírjuk a $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{w}$ képét megadó egyenletet mindkét KR-ben:

$$\underline{\mathbf{w}}_{(x,y,z)} = \underline{\mathbf{W}}_{(x,y,z)} \underline{\mathbf{v}}_{(x,y,z)} , \quad \underline{\mathbf{w}}_{(\xi,\eta,\zeta)} = \underline{\mathbf{W}}_{(\xi,\eta,\zeta)} \underline{\mathbf{v}}_{(\xi,\eta,\zeta)} . \quad (9.9)$$

Az (9.6) és (9.3) első és második egyenletbe történő helyettesítésével a

$$\underline{\mathbf{w}}_{(x,y,z)} = \underline{\mathbf{W}}_{(x,y,z)} \underline{\mathbf{Q}}^T \underline{\mathbf{v}}_{(\xi,\eta,\zeta)} \quad \text{és} \quad \underline{\mathbf{w}}_{(\xi,\eta,\zeta)} = \underline{\mathbf{W}}_{(\xi,\eta,\zeta)} \underline{\mathbf{Q}} \underline{\mathbf{v}}_{(x,y,z)}$$

képleteket kapjuk. Ha az első egyenletet $\underline{\mathbf{Q}}$ -val a másodikat $\underline{\mathbf{Q}}^T$ -vel szorozzuk, és figyelembe vesszük a vektorokkal kapcsolatos (9.3) és (9.6) transzformációs szabályokat, akkor

$$\underline{\mathbf{w}}_{(\xi,\eta,\zeta)} = \underline{\mathbf{Q}} \underline{\mathbf{w}}_{(x,y,z)} = \underline{\mathbf{Q}} \underline{\mathbf{W}}_{(x,y,z)} \underline{\mathbf{Q}}^T \underline{\mathbf{v}}_{(\xi,\eta,\zeta)} \quad \underline{\mathbf{w}}_{(x,y,z)} = \underline{\mathbf{Q}}^T \underline{\mathbf{w}}_{(\xi,\eta,\zeta)} = \underline{\mathbf{Q}}^T \underline{\mathbf{W}}_{(\xi,\eta,\zeta)} \underline{\mathbf{Q}} \underline{\mathbf{v}}_{(x,y,z)} \quad (9.10)$$

eredményre jutunk, ahonnan azonnal kiolvashatók – az első egyenletet (9.9)₂-vel, a másodikat (9.9)₁-el kell egybevetni – a $\mathbf{W}$ tenzor mátrixaival kapcsolatos

$$\boxed{\underline{\mathbf{W}}_{(\xi,\eta,\zeta)} = \underline{\mathbf{Q}} \underline{\mathbf{W}}_{(x,y,z)} \underline{\mathbf{Q}}^T \quad \text{és} \quad \underline{\mathbf{W}}_{(x,y,z)} = \underline{\mathbf{Q}}^T \underline{\mathbf{W}}_{(\xi,\eta,\zeta)} \underline{\mathbf{Q}}} \quad (9.11)$$

transzformációs szabályok.

10. FELADATOK MEGOLDÁSOKKAL, GYAKORLATOK

10.1. Mintafeladatok

1. Feladat: Vizsgálja meg elfajuló esetben a leképezést adó tenzor jellegét!

Megoldás: Nem elfajuló esetben a $\mathbf{w}_x$, $\mathbf{w}_y$ és $\mathbf{w}_z$ képvektorok nem fekszenek egy síkban következésképpen a tenzor három diádikus szorzat segítségével adható meg. Elfajuló esetben a három képvektor vagy egy síkban fekszik, vagy egy egyenesre esik, vagy mindegyik zérusvektor.

Ha a három képvektor egysíkú, akkor mondjuk a harmadik képvektor előállítható az első és második képvektor egy lineáris kombinációjaként, azaz

$$\mathbf{w}_z = \lambda_x \mathbf{w}_x + \lambda_y \mathbf{w}_y,$$

ahol λ_x és λ_y alkalmasan választott skalár. Az utóbbi előállítás (6.20)-ba történő helyettesítésével

$$\mathbf{W} = \mathbf{w}_x \circ (\mathbf{e}_x + \lambda_x \mathbf{e}_z) + \mathbf{w}_y \circ (\mathbf{e}_y + \lambda_y \mathbf{e}_z)$$

a tenzor alakja, ami azt jelenti, hogy a tenzor két diád összegeként adható meg.

Ha a három képvektor egy egyenesre esik, akkor mondjuk a második és harmadik képvektor mindig felírható a

$$\mathbf{w}_y = \lambda_y \mathbf{w}_x, \quad \mathbf{w}_z = \lambda_z \mathbf{w}_x$$

alakban, amivel (6.20)-ból

$$\mathbf{W} = \mathbf{w}_x \circ (\mathbf{e}_x + \lambda_y \mathbf{e}_x + \lambda_z \mathbf{e}_x)$$

a tenzor, azaz egy diád alkotja a tenzort.

item Tegyük fel, hogy a merev test egy rögzített és az xyz KR O origójával egybeeső pontja körül forog. Tegyük fel továbbá, hogy kicsi a merev test elfordulása és jelölje $\boldsymbol{\varphi} = \varphi_x \mathbf{e}_x + \varphi_y \mathbf{e}_y + \varphi_z \mathbf{e}_z$ a forgásvektort. Ismeretes, hogy kicsiny $|\boldsymbol{\varphi}|$ -re $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$ a merev test $\mathbf{r}$ helyvektorral azonosított pontjának elmozdulása. Homogén lineáris-e ez a vektor-vektor függvény?

Legyen $\mathbf{r} = \lambda_1 \mathbf{r}_1 + \lambda_2 \mathbf{r}_2$, ahol λ_1 és λ_2 tetszőleges skalár és $\mathbf{r}_1$ illetve $\mathbf{r}_2$ egymástól különböző vektorok. A vektoriális szorzás jól ismert tulajdonságai alapján

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= f(\mathbf{r}) = f(\lambda_1 \mathbf{r}_1 + \lambda_2 \mathbf{r}_2) = \boldsymbol{\varphi} \times (\lambda_1 \mathbf{r}_1 + \lambda_2 \mathbf{r}_2) = \\ &= \underbrace{(\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_1)}_{\mathbf{u}_1} \lambda_1 + \underbrace{(\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_2)}_{\mathbf{u}_2} \lambda_2 = f(\mathbf{r}_1) \lambda_1 + f(\mathbf{r}_2) \lambda_2 = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2, \end{aligned}$$

azaz a függvény homogén lineáris.

Vegyük észre azt is, hogy a fenti vektor-vektor függvény elfajuló. Geometriaileg ez abból következik, hogy a vektoriális szorzás $\mathbf{u}$ eredménye (a képvektorok halmaza) benne van az O_w origón átmenő és a $\boldsymbol{\varphi}$ vektorra merőleges síkban.

Jelölje $\boldsymbol{\Psi}$ az $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$ homogén lineáris függvényhez tartozó másodrendű tenzort. Nyilvánvaló, hogy

$$\boldsymbol{\Psi} = \psi_x \circ \mathbf{e}_x + \psi_y \circ \mathbf{e}_y + \psi_z \circ \mathbf{e}_z,$$

ahol

$$\psi_x = \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_x, \quad \psi_y = \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_y \quad \text{illetve} \quad \psi_z = \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_z.$$

Ha a ψ_x , ψ_y és ψ_z képvektorok komplanárisok, és a $\boldsymbol{\varphi}$ -re merőleges síkban fekszenek, akkor

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{\varphi} &= \psi_x (\mathbf{e}_x \cdot \boldsymbol{\varphi}) + \psi_y (\mathbf{e}_y \cdot \boldsymbol{\varphi}) + \psi_z (\mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\varphi}) = \psi_x \varphi_x + \psi_y \varphi_y + \psi_z \varphi_z = \\ &= \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_x \varphi_x + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_y \varphi_y + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_z \varphi_z = \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\varphi} = 0 \end{aligned}$$

azaz

$$\psi_x \varphi_x + \psi_y \varphi_y + \psi_z \varphi_z = 0,$$

ahonnan $\varphi_z \neq 0$ esetén a képvektorok komplanaritását kifejező

$$\psi_z = -\psi_x \frac{\varphi_x}{\varphi_z} - \psi_y \frac{\varphi_y}{\varphi_z}$$

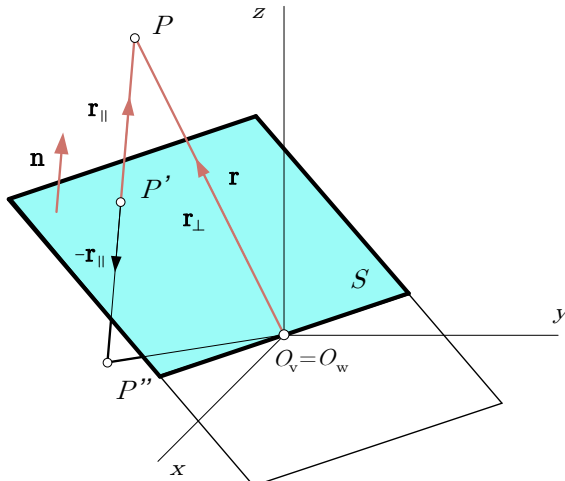
képlet következik. Ezt az eredményt felhasználva a $\boldsymbol{\Psi}$ tenzor, az elfajuló tenzorokra jellemző módon, két diád segítségével írható fel:

$$\boldsymbol{\Psi} = \psi_x \circ \left(\mathbf{e}_x - \frac{\varphi_x}{\varphi_z} \mathbf{e}_z \right) + \psi_y \circ \left(\mathbf{e}_y - \frac{\varphi_y}{\varphi_z} \mathbf{e}_z \right).$$

2. Feladat: Legyen $\mathbf{n}$; $|\mathbf{n}| = 1$ az origón átmenő S sík normálisa. Mutassa meg, hogy az $\mathbf{r}$ rádiuszvektor S síkba eső $\mathbf{r}_\perp$ összetevője az $\mathbf{r}_\perp = \mathbf{W} \cdot \mathbf{r}$ leképezéssel számítható, ahol

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 - n_x n_x & -n_x n_y & -n_x n_z \\ -n_y n_x & 1 - n_y n_y & -n_y n_z \\ -n_z n_x & -n_z n_y & 1 - n_z n_z \end{bmatrix}.$$

Megoldás:



29. ábra.

Leolvasható a 29. ábráról, hogy az $\mathbf{r}$ vektor S síkra eső vetülete az

$$\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r} - \mathbf{r}_\parallel = \mathbf{r} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})$$

módon számítható. Figyelembevéve a diádikus szorzat értelmezését és az $\mathbf{I}$ egységtenzorral kapcsolatos leképezés tulajdonságait írhatjuk, hogy

$$\mathbf{r}_\perp = (\mathbf{I} - \mathbf{n} \circ \mathbf{n}) \cdot \mathbf{r},$$

ahonnan

$$\mathbf{W} = \mathbf{I} - \mathbf{n} \circ \mathbf{n}$$

a leképezés tenzora.

3. Feladat: Határozzuk meg a helyvektorokat az y tengely körül $\varphi = \varphi_y$ szöggel elforgató

$$\mathbf{Q} = \mathbf{a} \circ \mathbf{e}_x + \mathbf{b} \circ \mathbf{e}_y + \mathbf{c} \circ \mathbf{e}_z$$

tenzort.

Megoldás: A 30. ábráról leolvasható, hogy

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_x \cos \varphi - \mathbf{e}_z \sin \varphi,$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{c} = \mathbf{e}_x \sin \varphi + \mathbf{e}_z \cos \varphi.$$

Ennek alapján

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= (\mathbf{e}_x \cos \varphi - \mathbf{e}_z \sin \varphi) \circ \mathbf{e}_x + \\ &+ \mathbf{e}_y \circ \mathbf{e}_y + (\mathbf{e}_x \sin \varphi + \mathbf{e}_z \cos \varphi) \circ \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

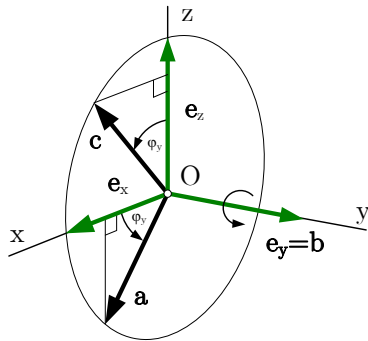
a tenzor diádikus alakja.

A tenzor mátrixának felírásakor azt kell figyelembe venni, hogy annak oszlopait az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ képvektorok alkotják:

$$\underline{\mathbf{Q}} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

A tetszőleges $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ vektort a tenzor az

$$\mathbf{r}' = \underline{\mathbf{Q}} \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \varphi + z \sin \varphi \\ y \\ -x \sin \varphi + z \cos \varphi \end{bmatrix},$$



30. ábra.

vagyis az

$$\mathbf{r}' = (x \cos \varphi + z \sin \varphi) \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + (-x \sin \varphi + z \cos \varphi) \mathbf{e}_z$$

vektorba forgatja. A tenzor szimmetrikus és ferdeszimmetrikus része:

$$\underline{\mathbf{Q}}_{sz} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{Q}}_{asz} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kis szögekre $\cos \varphi \approx 1$ és $\sin \varphi \approx \varphi$. Ezeknek a képleteknek felhasználásával linearizálhatók kis szögekkel történő forgatásra a fenti tenzorok:

$$\underline{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\varphi & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{Q}}_{sz} = \underline{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{Q}}_{asz} = \underline{\Psi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varphi \\ 0 & 0 & 0 \\ -\varphi & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az utóbbi képletekkel kis szöggel történő forgatásra

$$\mathbf{r}' = \underline{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{r} = (\underline{\mathbf{Q}}_{sz} + \underline{\mathbf{Q}}_{asz}) \cdot \mathbf{r} = \underline{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{r} + \underline{\Psi} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} + (\varphi \mathbf{e}_y) \times \mathbf{r}$$

a képvektor, ahol azt is kihasználtuk, hogy a tenzor ferdeszimmetrikus részéhez tartozó leképezés az (8.1) képlet szerint a vektorinvariáns – ez most $\varphi \mathbf{e}_y = \varphi_y \mathbf{e}_y$ – való szorzással képezhető. Az eredményt általánosítva azt mondhatjuk, hogy a

$$\varphi = \varphi_x \mathbf{e}_x + \varphi_y \mathbf{e}_y + \varphi_z \mathbf{e}_z; \quad |\varphi| \ll 1$$

vektor által leírt forgatás, amely az $\mathbf{r}$ rádiuszvektorokat az

$$\mathbf{e} = \frac{\varphi}{|\varphi|}; \quad |\varphi| = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2}$$

tengely körül a $\varphi = |\varphi|$ kis szöggel fordítja el a

$$\mathbf{r}' = \underline{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{r} = (\underline{\mathbf{Q}}_{sz} + \underline{\mathbf{Q}}_{asz}) \cdot \mathbf{r} = \underline{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{r} + \underline{\Psi} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} + \varphi \times \mathbf{r} \quad (10.1)$$

képlettel számítható, ahol

$$\underline{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 1 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 1 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{I}} + \underline{\Psi}. \quad (10.2)$$

Kiolvasható az (10.1) képletből, hogy a rádiuszvektor végpontjának

$$\mathbf{u} = \underline{\Psi} \cdot \mathbf{r} = \varphi \times \mathbf{r} \quad (10.3)$$

az elmozdulásvektora a forgatásból, hiszen az előtte álló tag maga a rádiuszvektor így a mozgást csak az utána álló, azaz a fenti tag adhatja meg. A képletben álló $\underline{\Psi}$ tenzor a forgató tenzor kis forgásra.

4. Feladat: Határozza meg a

$$\underline{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} 85 & 0 & 25 \\ 0 & -10 & 0 \\ 25 & 0 & -35 \end{bmatrix}$$

mátrixával adott $\underline{\mathbf{W}}$ tenzor sajátértékeit és főirányait.!

Megoldás: Vegyük észre, hogy az y irány főirány hiszen $w_{xy} = w_{yz} = 0$. A vonatkozó sajátértéket jelölje λ_a . Ez nyilvánvalóan a második oszlop diagonális eleme: $\lambda_a = -10$. A

$$\begin{aligned} P_3(\lambda) &= -\det(\underline{\mathbf{W}} - \lambda \underline{\mathbf{E}}) = - \begin{vmatrix} w_{xx} - \lambda & w_{xy} & w_{xz} \\ w_{yx} & w_{yy} - \lambda & w_{yz} \\ w_{zx} & w_{zy} & w_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= \lambda^3 - W_I \lambda^2 + W_{II} \lambda - W_{III} = (\lambda - \lambda_a)(\lambda - \lambda_b)(\lambda - \lambda_c) = 0 \end{aligned}$$

karakterisztikus egyenletből – mivel nem ismerjük a karakterisztikus értékek sorrendjét azokat egyszerűen λ_a , λ_b és λ_c jelöli – helyettesítések után a

$$P_3(\lambda) = \begin{vmatrix} 85 - \lambda & 0 & 25 \\ 0 & -10 - \lambda & 0 \\ 25 & 0 & -35 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 40\lambda^2 - 4100\lambda - 36\,000 = 0$$

eredmény következik, azaz

$$W_I = \lambda_a + \lambda_b + \lambda_c = 40, \quad W_{II} = -4100, \quad W_{III} = \lambda_a \lambda_b \lambda_c = 36\,000,$$

ahol a főtengelek KR-ét véve alapul és a későbbiek kedvéért kiírtuk képletszerűen is a W_I és W_{III} skalárinvariánsokat. Ha $\lambda \neq \lambda_a$ akkor átoszthatjuk a $P_3(\lambda) = 0$ karakterisztikus egyenletet a $\lambda - \lambda_a$ gyöktényezővel:

$$\frac{P_3(\lambda)}{\lambda - \lambda_a} = (\lambda - \lambda_b)(\lambda - \lambda_c) = \lambda^2 - (\lambda_b + \lambda_c)\lambda + \lambda_b \lambda_c = 0,$$

ahol

$$\lambda_b + \lambda_c = W_I - \lambda_a = 50 \quad \text{és} \quad \lambda_b \lambda_c = \frac{W_{III}}{\lambda_a} = -36\,00.$$

Következésképp a

$$\lambda^2 - (W_I - \lambda_a)\lambda + \frac{W_{III}}{\lambda_a} = \lambda^2 - 50\lambda - 36\,00 = 0$$

egyenlet megoldása megadja a két hiányzó sajátértéket: $\lambda_b = 90, \lambda_c = -40$. Nagyság szerint rendezve

$$\lambda_1 = \lambda_b = 90, \quad \lambda_2 = \lambda_a = -10, \quad \lambda_3 = \lambda_c = -40$$

és mostmár az is nyilvánvaló, hogy $\mathbf{e}_y = \mathbf{n}_2$. Az $\mathbf{n}_1$ meghatározásához az

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} w_{xx} - \lambda_1 & w_{xy} & w_{xz} \\ w_{yx} & w_{yy} - \lambda_1 & w_{yz} \\ w_{zx} & w_{zy} & w_{zz} - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{x1} \\ n_{y1} \\ n_{z1} \end{bmatrix} &= \\ &= \begin{bmatrix} 85 - \lambda_1 & 0 & 25 \\ 0 & -10 - \lambda_1 & 0 \\ 25 & 0 & -35 - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{x1} \\ n_{y1} \\ n_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (10.4) \end{aligned}$$

azaz a

$$\begin{aligned} -5n_{x1} + 25n_{z1} &= 0, \\ -100n_{y1} &= 0, \\ 25n_{x1} - 125n_{z1} &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer kell megoldani. Mivel $\Delta_{zz} = -5 \times (-100) \neq 0$ választható az első két egyenlet ahonnan, amint az várható is – ortogonalitás –, $n_{y1} = 0$ és

$$n_{x1} = 5n_{z1}.$$

Ennek az egyenletnek egy megoldását a már normált

$$\mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{26}}(5\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z)$$

vektor adja. Az $\mathbf{n}_3$ a sajátvektorok ortogonalitását és azt figyelembevéve számítható hogy az $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ jobbsodratú bázis:

$$\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{26}}(5\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z) \times \mathbf{e}_y = \frac{1}{\sqrt{26}}(-\mathbf{e}_x + 5\mathbf{e}_z).$$

Nem nehéz ellenőrizni, hogy ezekkel a megoldásokkal valóban teljesül az a (8.23) egyenlet.

10.2. Gyakorlatok

1. Határozza meg azon tenzorok mátrixait, melyek az xy, xz és yz síkokra tükrözik az $\mathbf{r}$ rádiuszvektort.
2. Határozza meg azon tenzorok mátrixait, melyek az xy sík minden $\mathbf{r}$ helyvektorához annak
 - (a) az origóra vonatkozó szimmetria pontját,
 - (b) az x tengelyre vonatkozó szimmetria pontját, illetve
 - (c) 30° -al az óramutató járásával egyező irányba való elforgatottját rendeli.

3. Legyen $\mathbf{n}$; $|\mathbf{n}| = 1$ az origón átmenő S sík normálisa. Mutassa meg, hogy az $\mathbf{r}$ rádiusvektor S síkra vonatkozó $\mathbf{R}$ tükörképe az $\mathbf{R} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{r}$ leképezéssel számítható, ahol

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 - 2n_x n_x & -2n_x n_y & -2n_x n_z \\ -2n_y n_x & 1 - 2n_y n_y & -2n_y n_z \\ -2n_z n_x & -2n_z n_y & 1 - 2n_z n_z \end{bmatrix}.$$

4. Határozzuk meg a helyvektorok végpontjának elmozdulását leíró $\mathbf{Q}$ tenzort a z tengely körüli φ szöggel történő forgatáskor. Általánosítsa az eredményt az **1.3.** Mintafeladat φ vektora által leírt kis forgás esetére.
5. Mutassa meg a karakterisztikus polinom W_I , W_{II} és W_{III} együtthatóit adó (8.28) képletek helyességét.
6. Mutassa meg, hogy

$$-\frac{d}{d\lambda} \det(\mathbf{W} - \lambda \mathbf{I}) \Big|_{\lambda_k} = \Delta_{xx}(\lambda_k) + \Delta_{yy}(\lambda_k) + \Delta_{zz}(\lambda_k).$$

7. Igazolja az előző eredmény felhasználásával, hogy

$$-\frac{d^2}{d\lambda^2} \det(\mathbf{W} - \lambda \mathbf{I}) \Big|_{\lambda_k} = 2[(w_{xx} - \lambda_k) + (w_{yy} - \lambda_k) + (w_{zz} - \lambda_k)].$$

8. Igazolja felhasználva a $\mathbf{W}$ tenzor inverzét adó (8.16) összefüggést, hogy

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{W}^{-1} = \mathbf{I}.$$

9. Igazolja hogy a másodrendű tenzor inverzének mátrixa megegyezik a tenzor mátrixának inverzével.
10. Határozza meg a mátrixával adott P pontbeli $\mathbf{T}_P$ feszültségi tenzor sajátértékeit és főirányait. Írja fel a tenzor mátrixát a főtengelyek KR-ben.

$$\mathbf{T}_P = \begin{bmatrix} 44 & 60 & 0 \\ 60 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

(Vegye figyelembe, hogy a z irány ismert főirány.)

11. Határozza meg a mátrixával adott $\mathbf{W}$ tenzor sajátértékeit és főirányait. Írja fel a tenzor mátrixát a főtengelyek KR-ében.

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Vegye figyelembe, hogy $\lambda_1 = 4$ sajátérték.)

12. A $\xi\eta\zeta$ KR-t az xyz KR z tengely körül φ_z szöggel pozitív irányba történő elforgatásával kapjuk, azaz $z = \zeta$, és az elforgatás utáni x és y tengelyek alkotják a ξ és η tengelyeket. Írja fel az

$$\mathbf{e}_{\xi} \underset{(x,y,z)}{,} \quad \mathbf{e}_{\eta} \underset{(x,y,z)}{,} \quad \mathbf{e}_{\zeta} \underset{(x,y,z)}{,}$$

egységvektorokat és a két KR közötti transzformáció $\mathbf{K}$ illetve $\mathbf{K}^T$ mátrixait ha $\varphi_z = 30^\circ$.

13. Legyen $\mathbf{v}$ egy az origón áthaladó anyagi pont sebessége, és legyen adott a $\mathbf{T}$ feszültségi tenzor mátrixa az xyz KR origójában:

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{e}_x - 3\sqrt{3}\mathbf{e}_y \text{ [m/s]}, \quad \mathbf{T}_O \underset{(x,y,z)}{=} \begin{bmatrix} 300 & 400 & 0 \\ 400 & -300 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}.$$

Határozza meg a sebességvektort és a feszültségi tenzor mátrixát a $\xi\eta\zeta$ KR-ben.

10.3. Olvasásra ajánlott. A statika problémakörét illetően magyar nyelven az [1, 1960] és [2, 1966] (alapl művek, de ma már nehezen beszerezhetők), valamint a [3, 2003] (építőmérnöki szemléletű) és [4, 1996] (gépszemléletű) tankönyvekre, angol nyelven pedig az [5, 1977] tankönyvre (két háromévente jelenik meg újabb és újabb kiadása) érdemes hivatkozni.

A szilárdságtan tárgykörét illetően magyar nyelven a [6, 1964] (ma már nehezen beszerezhető összefoglaló jellegű munka), valamint a [7, 1999] (ma is kapható) tankönyveket, továbbá

a [8, 1967] jegyzetet (haladó szintű, igényesen összeállított és emellett jelentős anyagot felölelő jegyzet – sajnálatos, hogy könyv formában nem jelent meg) ajánljuk az olvasó figyelmébe. Angol nyelven a [9, 1987] tankönyv érdemel a szerző véleménye szerint kiemelést.

Ami a vektor és tenzorszámítást illeti érdemes lehet letölteni a Magyar Elektronikus Könyvtárból a [10, 2013] könyvet, url cím:

<http://mek.oszk.hu/11700/11757/index.phtml>.

Köszönetnyilvánítás. Az oktatási segédlet kidolgozása a Miskolci Egyetem társadalmi – gazdasági szerepének fejlesztése, különös tekintettel a duális képzési típusú megoldásokra témakörű K+F projektje keretében - TÁMOP-4.1.1.F-13/1-2013-0010 - az „ELTÉRŐ UTAK A SIKERES ÉLETHEZ” projekt részeként – az Új Széchenyi Terv keretében – az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

HIVATKOZÁSOK

- [1] Sályi István. *Műszaki Mechanika I., A kinematika elemei*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1960.
- [2] Sályi István. *Műszaki Mechanika II., A dinamika elemei*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.
- [3] Kurutzné Kovács Márta. *Tartók statikája*. Műegyetemi Könyvkiadó, Budapest, 2003.
- [4] Csizmadia Béla és Nándori Ernő szerkesztők. *Mechanika Mérnököknek: Statika*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1996.
- [5] Ferdinand P. Beer and E. Russel Johnston JR. *Vector Mechanics for Engineers, Statics (Si Metric Edition)*. Number ISBN 0-07-004278-0. McGraw-Hill, 1977.
- [6] Mutnyánszky Ádám. *Statika*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1964.
- [7] Csizmadia Béla és Nándori Ernő szerkesztők. *Mechanika Mérnököknek: Szilárdságtan*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.
- [8] Kozák Imre. *Szilárdságtan V., Nehézipari Műszaki Egyetem, Miskolc, Jegyzet*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1967.
- [9] Ferdinand P. Beer and E. Russel Johnston JR. *Mechanics of Materials (Si Metric Edition)*. McGraw-Hill, 1987.
- [10] Kozák Imre Szeidl György. *Tenzorszámítás indexes jelölésmódban*. Második bővített kiadás, 1913.