Vektorszámítás

Fizika tanárszak I. évfolyam

Lengyel Krisztián

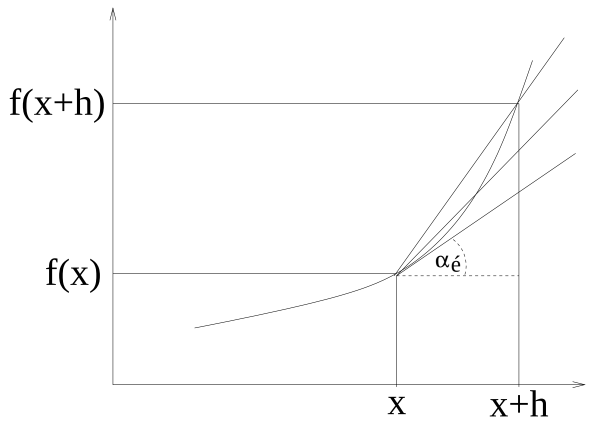
2001

Tartalomjegyzék

1. Deriválás

1.1. Elmélet

A derivált fogalom geometriai bevezetéséhez nézzük meg a következő ábrát:



Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény képe a síkon egy görbe. A görbe tetszőleges két pontját összekötő szakasz a szelő. Válasszunk ki egy pontot (x) a görbén, majd rajzoljunk be az innen induló szelőket. Amint a szelő másik végpontja közelít a kiválasztott ponthoz, a szelő egyre közelebb kerül az érintőhöz. Fejezzük ki a behúzott szelők meredekségét, felhasználva az ábrán látható jelöléseket.

$$m_{sz} = \tan \alpha_{sz} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

A szelő $x + h$ pontjának az x ponthoz való közelítését, a két pont közötti távolság csökkenését határesetben eltűnését a $\lim\limits_{h \to 0}$ formulával jelöljük. Definíció szerint egy függvény deriváltja egy pontban megadja az ahhoz a ponthoz húzott érintő meredekségét. Az ábra jelöléseit felhasználva a következő módon fejezhetjük ki az érintő meredekségét, azaz a deriváltat:

$$m_{\text{é}} = \tan \alpha_{\text{é}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

Az érintő meredeksége megmutatja, hogy abban az adott pontban a függvény hogyan viselkedik. Ha a függvénynek az adott pontban szélsőértéke van, akkor a derivált értéke nulla, mert az érintő vízszintes, ha a függvény az adott pontban szigorúan monoton csökken (nő), akkor $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$).

Egy $f(x)$ függvény legyen deriválható minden pontban. Ekkor $f'(x)$-en azt a függvényt értjük, amely tetszőleges pontban megadja az $f(x)$-hez abban a pontban húzott érintő meredekségét.

Mintapélda: $f(x) = x^2$ függvény deriváltja.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

Többváltozós függvények (általános alakja $f(x, y, z, \dots)$) esetén is beszélhetünk deriváltról. Ebben az esetben a derivált azt mutatja meg, hogy egy kiszemelt irányban hogyan változik a függvény. Technikailag ez azt jelenti, hogy a kiszemelt változón kívül az összes többit állandónak tételezzük fel és úgy járunk el, mintha csak egy változója lenne a függvényünknek. Ennek a jelölése és értelmezése ilyen alakban írható:

$$\frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial x} = \frac{df(x, y = const, z = const, \dots)}{dx}$$

1.2. Deriválási szabályok

Nincs szükség minden egyes függvénynél az elöző eljárást végigcsinálni, ugyanis nagyon sok függvényre elvégezték ezt a munkát. A legfontosabb alapfüggvények deriváltjait a következő táblázat tartalmazza:

$$[\text{const}]' = 0 \qquad [x^n]' = nx^{n-1}$$
$$[\ln x]' = \frac{1}{x} \qquad [e^x]' = e^x$$
$$[\log_a x]' = \frac{1}{x\ln a} \qquad [a^x]' = a^x \ln a$$
$$[\sin x]' = \cos x \qquad [\cos x]' = -\sin x$$
$$[\sinh x]' = \cosh x \qquad [\cosh x]' = \sinh x$$

Az utolsó két függvény nem nagyon ismert, pedig gyakran előfordulnak fizikával kapcsolatos feladatokban, problémákban. Definiciójuk:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

A függvények általában több elemi függvény kapcsolataként állnak elő. Tekintsük át a deriválás hatását ilyen függvényekre.

$$[cf(x)]' = c\,[f(x)]' \qquad [f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$
$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad [f\left(g(x)\right)]' = f'\left(g(x)\right)g'(x)$$
$$\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} \qquad \left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$
$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

1.3. Kidolgozott példák

1. $f(x) = x^2 \sin x$, a szorzat függvény deriválási szabálya szerint:

$$f'(x) = [x^2]' \sin x + x^2[\sin x]' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

2. $f(x) = \tan x$, a törtfüggvényre vonatkozó szabály szerint:

$$f'(x) = \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{[\sin x]' \cos x - \sin x[\cos x]'}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos^2 x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

3. $f(x) = \arcsin x$, az inverz függvényre vonatkozó szabály szerint:

$$f'(x) = [\sin^{-1} x]' = \frac{1}{\cos \arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \arcsin x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

4. $f(x) = \sqrt{x^3+1}$, az összetett függvényre vonatkozó szabály szerint:

$$f'(x) = \left[(x^3+1)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}(x^3+1)^{-\frac{1}{2}}\left[x^3+1\right]' = \frac{1}{2}(x^3+1)^{-\frac{1}{2}}3x^2$$

5. $f(x,y) = x^2\sin y + y^3\cos x$, ez egy kétváltozós függvény, deriváljuk parciálisan mind a kettő változója szerint.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{df(x, y = const)}{dx} = [x^2]'\sin y + y^3[\cos x]' = 2x\sin y - y^3\sin x$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{df(x = const, y)}{dy} = x^2[\sin y]' + [y^3]'\cos x = x^2\cos y + 3y^2\cos x$$

1.4. Feladatok

Ebben a témában gyakorlópéldának szinte bármi jó, ami az ember eszébe jut. Azért álljon itt kedvcsinálónak néhány. Deriváld a következő függvényeket!

(a) $f(x) = \sqrt{x}$	(b) $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$	(c) $f(x) = x^3 - x^{-2} + 6$
(d) $f(x) = \sin x \cos x$	(e) $f(x) = e^x$	(f) $f(x) = \sin x \sinh x$
(g) $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$	(h) $f(x) = \frac{x^{\frac{1}{3}}+2x}{sinx}$	(i) $f(x) = \frac{\cos x \ln x + x^2}{x^3 - \tan x}$
(j) $f(x) = (x^2-3)^5$	(k) $f(x) = \sqrt[3]{x^3+2x}$	(l) $f(x) = e^{x^4-3x^2}$
(m) $f(x) = \arctan x$	(n) $f(x) = \arccos x$	(o) $f(x) = (e^{x^3-1}\ln(x^2+3)+6)^7$

2. Taylor-sor

2.1. Függvénysorozatok és sorok

Tekintsünk egy valós számokból álló sorozatot $a_1,\ a_2,\ a_3\ \ldots\ a_i\ \ldots$ Minden természetes számhoz hozzárendelünk egy valós számot, tehát a sorozat nem más, mint egy függvény, melynek értelmezési tartománya a természetes számok $(\mathbb{N})$ és értékkészlete a valós számok $(\mathbb{R})$, ezt a következő általános alakban jelölhetjük: $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. A sorozat $n.$ tagjáig kiszámított összeget az $n.$ részletösszegnek hívjuk:

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

A részletösszegekből képezett sorozatot az a_i sorozatból képezett sor-nak nevezzük. A sor egyes tagjai tehát:

$$\begin{aligned}
S_0 &= a_0 \\
S_1 &= a_0 + a_1 \\
S_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\
S_3 &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
S_n &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i
\end{aligned}$$

Ha a sornak létezik határértéke a végtelenben, azaz létezik a $\lim_{i\to\infty} S_i$ határérték, akkor az eredeti a_i sorozatnak létezik összege, amely megegyezik a sor határértékével.
Vizsgáljuk meg az $a_i = 0.2^i$ mértani sorozatot. Korábbi tanulmányainkból tudjuk, hogy a mértani sorozat véges tagjának összege: $S_n = a_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$, jelen esetben $S_n = \frac{0.2^{n+1}-1}{-0.8}$. Végezzük el a határértékszámolást, ha n nagyon nagy, akkor a számlálóban a kisebbítendő egyre kisebb lesz, mert 1-nél kisebb számot emelünk hatványra. Határesetben ez a tag eltűnik, így a számlálóban -1 marad. Végeredményül a következőt kapjuk:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{i=0}^{\infty} 0.2^i = \frac{-1}{-0.8} = 1.25$$

Most képzeljünk el egy sorozatot, amelyben nem számok, hanem függvények ($f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) szerepelnek, melyeket valamilyen szabály szerint sorba rakunk. Például: $a_0 = 0,\ f_1(x) = \sin(x),\ f_2(x) = \sin(2x)\ \ldots\ f_i(x) = \sin(ix)\ \ldots$ Ha ebbe a sorozatba x helyére behelyettesítünk egy számot, akkor egy valós számokból képezett sorozatot kapunk. A függvénysorozatból részletösszegeket képezhetünk, melyek előállítják a függvénysort. A példánknál maradva az $f_i(x)$-ből képezett függvénysor tagjai:

$$\begin{aligned}
S_0 &= 0\\
S_1 &= 0 + \sin(x)\\
S_2 &= 0 + \sin(x) + \sin(2x)\\
S_3 &= 0 + \sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x)\\
&\vdots\\
S_n &= 0 + \sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \cdots + \sin(nx) = \sum_{i=0}^{n} \sin(ix)
\end{aligned}$$

Ha létezik olyan $g(x)$ függvény, hogy valamely intervallumban $(x \in [a,b])$ igaz, hogy $\lim_{n\to\infty} S_n = g(x)$ akkor azt mondjuk, hogy az $f_i(x)$ sorozatból képezett sor az $[a,b]$ intervallumon előállítja a $g(x)$ függvényt.
Vizsgáljuk meg a következő sorozatot: $f_i(x) = x^i$. A sorozatból képezett sor tagjai:

$$\begin{aligned}
S_0 &= 1\\
S_1 &= 1 + x\\
S_2 &= 1 + x + x^2\\
S_3 &= 1 + x + x^2 + x^3\\
&\vdots\\
S_n &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \sum_{i=0}^{n} x^i
\end{aligned}$$

Rögzíttett x esetén a sor tagjai egy-egy mértani sorozat részletösszegei, ahol a hányados x. Ha a hányados abszolútértékben kisebb, mint egy, azaz $x \in [-1, 1]$, akkor a mértani sorozatnak véges összege van. A részletösszeg általános alakját megkapjuk, ha alkalmazzuk a mértani sorozat összegére vonatkozó összefüggést $S_n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$. Ha n-et növeljük, akkor a számlálóban a kisebbítendő értéke egyre közeledik nullához, mert egynél kisebb abszolútértékű számot emelünk hatványra, határesetben eltűnik, s a végeredmeny:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$$

Tehát az $f_i(x) = x^i$ sorozatból képezett függvénysor a $[-1, 1]$ intervallumon előállítja a $g(x) = \frac{1}{1-x}$ függvényt.

Hatványsornak hívjuk az olyan függvénysorozatokból képezett függvénysorokat, amelyeknek tagjai hatványfüggvények. Matematikai formulával kifejezve az ilyen sorok általános tagját:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

ahol a_i együtthatók tetszőleges rögzített számok.

2.2. Taylor-sor

Azt, hogy egy tetszőleges hatványsor előállít-e valamilyen függvényt, az együtthatók határozzák meg. Az érdekesebb kérdés az, hogy egy adott $f(x)$ függvény esetén hogyan válasszuk meg az együtthatókat, hogy a sor visszaadja az eredeti függvényt. Ha egy függvény kellő jó tulajdonsággal rendelkezik, akkor a következő módon meghatározott sor előállítja azt.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)\big|_{x=x_0}}{n!} (x-x_0)^n$$

Ahol $f^{(n)}(x)\big|_{x=x_0}$ az $f(x)$ függvény $n.$ deriváltjának értékét jelöli az x_0 helyen. Ezt a sort nevezzük az $f(x)$ függvény x_0 körüli *Taylor-sorának*. Részletesen kiírva a sort a harmadik rendig:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x)|_{x=x_0}}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x)|_{x=x_0}}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x)|_{x=x_0}}{3!}(x-x_0)^3 + \dots$$

A függvény Taylor-sorának kezdő tagjai az x_0 pont körül jól közelítik azt, ezért helyettesíthetjük ezzel a közelítéssel feltéve ha tudjuk, hogy nem távolodunk el messzire a sorbafejtés helyétől. A fizikában Taylor-sort ezen tulajdonsága teszi fontossá és sokat használt módszerré, ugyanis sokat talalkozunk olyan egyenletekkel, amiket nem tudunk analitikusan megoldani, de ezzel a közelítéssel már számolható eredményeket kapunk.

Példaként nézzük meg az e^x függvényt. Az összes deriváltja önmaga, ezért Taylor-sora a 0 pont körül:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Itt egy táblázat néhány nevezetes függvény 0 pont körüli Taylor-soráról:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots$$
$$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots$$
$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots$$

2.3. Kidolgozott példák

1. Számoljuk ki a $f(x) = \sin(2x)$ függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor-sorát 5. rendig. Ehhez először határozzuk meg a deriváltakat:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin(2x) & f(0) &= 0 \\
f^{(1)}(x) &= 2\cos(2x) & f^{(1)}(0) &= 2 \\
f^{(2)}(x) &= -4\sin(2x) & f^{(2)}(0) &= 0 \\
f^{(3)}(x) &= -8\cos(2x) & f^{(3)}(0) &= -8 \\
f^{(4)}(x) &= 16\sin(2x) & f^{(4)}(0) &= 0 \\
f^{(5)}(x) &= 32\cos(2x) & f^{(5)}(0) &= 32
\end{aligned}$$

Behelyettesítjük ezeket az értékeket a Taylor formulába:

$$f(x) \approx 0 + \frac{2}{1!}(x-0)^1 + \frac{0}{2!}(x-0)^2 + \frac{-8}{3!}(x-0)^3 + \frac{0}{4!}(x-0)^4 + \frac{32}{5!}(x-0)^5 = \\ = x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5$$

Természetesen a feladatot megoldhattuk volna egyszerűbben is, ha a $\sin x$ Taylor sorába az x helyére beírunk $2x$-et.

2. Mekkora frekvenciával rezeg egy egységnyi tömegű kicsiny részecske, ha az $U(x) = \frac{-1}{1+x^2}$ potenciálban a nyugalmi helyzetéből kicsit kitérítjük?
Régebbi tanulmányainkból tudjuk, hogy a rugóra akasztott test energiája $U(x) = -\frac{1}{2}Dx^2$, ahol D a direkciós állandó és x az egyensúlyi helyzettől való kitérés. A rugóra akasztott test $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ frekvenciával rezeg. A mi esetünkben a potenciál függvényét közelítenünk kell egy olyan függvénnyel, melyben négyzetes tag szerepel. A függvény Taylor-sora a második rendig, éppen ilyen közelítés. Azt mondjuk, hogy olyan kicsi a kitérés, hogy a magasabb rendű tagokat már elhanyagolhatjuk. A függvény minimuma az $x = 0$ helyen van, mert a nevező ekkor a legkisebb és a negatív szám abszolút értékben ekkor a legnagyobb. Határozzuk meg a Taylor-sort $x_0 = 0$ pont körül második rendig:

$$U(x) = \frac{-1}{1+x^2} \qquad U(0) = -1$$

$$U^{(1)}(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} \qquad U^{(1)}(0) = 0$$

$$U^{(2)}(x) = \frac{2-6x^2}{(1+x^2)^2} \qquad U^{(2)}(0) = 2$$

Behelyettesítjük ezeket az értékeket a Taylor formulába:

$$U(x) \approx -1 + 0 + \frac{1}{2}2x^2$$

Az additív tag nem számít, mert a potenciál nullapontját szabadon megválaszthatjuk, az első deriváltnak pedig a minimumnál mindig 0-t kell adnia. Tehát a direkciós állandó $D = 2$, amiből egységnyi tömeg esetén a frekvencia $\omega = \sqrt{2}$.

2.4. Feladatok

1. Számoljuk ki a következő függvények Taylor-sorát 5. rendig. Próbálj általános formulát találni!

(a)	$f(x) = e^{3x}$	$(x_0 = 0)$	(b)	$f(x) = xe^x$	$(x_0 = 0)$
(c)	$f(x) = \ln x$	$(x_0 = 1)$	(d)	$f(x) = x \ln x$	$(x_0 = 1)$
(e)	$f(x) = \tan x$	$(x_0 = 0)$	(f)	$f(x) = e^{-x^2}$	$(x_0 = 0)$
(g)	$f(x) = \frac{1}{x^3+1}$	$(x_0 = 0)$	(h)	$f(x) = \sqrt{x^2+1}$	$(x_0 = 0)$

2. Mekkora frekvenciával rezeg egy egységnyi tömegű kicsiny részecske, ha a következő potenciálok valamelyikében a nyugalmi helyzetéből kicsit kitérítjük?

$$(a)\quad U(x) = \frac{1}{x^4+1} \qquad (b)\quad U(x) = -\cos x$$

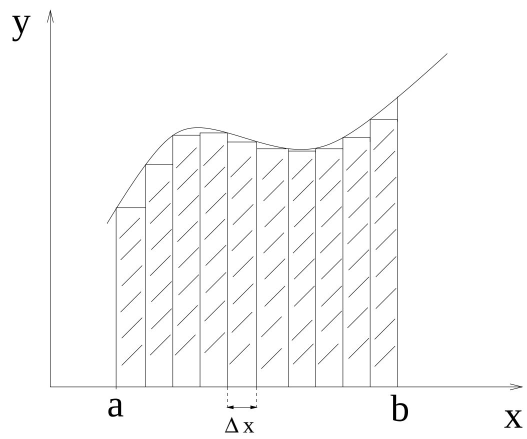
$$(c)\quad U(x) = -e^{-x^2} \qquad (d)\quad U(x) = -\frac{a^2}{1+b^2x^2}$$

$$(e)\quad U(x) = \sqrt{x^2+1} \qquad (f)\quad U(x) = -\sqrt{r^2-x^2}$$

3. Integrálás

3.1. Elmélet

Az integrál fogalmának megértéséhez induljunk ki újra a geometriai értelmezésből. Nézzük a következő ábrát:



A probléma megfogalmazása a következő: Adott egy $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény, amelyet ábrázolva a síkon egy görbét kapunk, számítsuk ki a függvény görbéje és az x tengely közötti területet valamely $x=a$ ponttól $x=b$ pontig. A probléma megoldásához közelítsük a kiszámítandó területet olyan téglalapok összegével, melyeknek szélessége Δx, magassága pedig a függvény legkisebb értéke ezen a kicsiny intervallumon belül. Ezzel megkaptuk a függvény alatti terület alsó közelítő összegét. Látható, hogy ha a felosztást finomítjuk, akkor a közelítő összeg egyre pontosabban visszaadja az eredményt. Ha végtelenül sok intervallumra osztjuk fel az $[a,b]$ intervallumot, akkor pontosan megkapjuk a kérdéses területet. Ezt a következő módon jelöljük:

$$\text{Terület} = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ennek a műveletnek a neve határozott integrál.

Milyen tulajdonságai vannak? Ha a terület az x tengely felett van akkor pozitív, ha alatta akkor negatív előjelű. Ha kiszámítjuk a területet $[a,b]$, $[b,c]$ és $[a,c]$ intervallumon, akkor első kettő terület összege kiadja a harmadikat:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ha az integrál intervallumának eleje és vége ugyanaz, akkor nullát kapunk (nincs közrezárt terület):

$$\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Végül, ha felcseréljük az integrálási határokat, akkor ellenkező előjelű területet kapunk:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ha létezik olyan $F(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, melyre igaz, hogy:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

akkor $F(x)$-et a $f(x)$ függvény primitív függvényének hívjuk. A primitív függvény alakja egy konstans additív tagig határozatlan, mert a különbség képzése során az additív tag kiesik. Határozatlan integrál fogalmán a primitív függvény megkeresését értjük, jelölése a határozott integrál jelölésétől csupán abban különbözik, hogy nem írunk ki határokat:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

Bizonyítható (lásd analízis előadás *Newton-Leibniz tétele*), hogy ha $F(x)$ a $f(x)$ függvény primitív függvénye, akkor $F(x)$ deriváltja éppen $f(x)$.

$$F'(x) = f(x)$$

3.2. Integrálási szabályok

Newton-Leibniz tétel felhasználásával, egyszerűbb függvények esetén könnyen visszakereshetjük a primitív függvényt, íme egy táblázat a legfontosabb alapfüggvények integráljáról:

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x + C$$

$$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C \qquad \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arccos x + C$$

Az összetett függvények integráljának kiszámítása nem egyszerű feladat, a deriválással ellentétben nem minden esetben tehető meg analitikusan. Annyira azért nem reménytelen a helyzet, mert most is érvényes néhány általános formula, melyek használatával nagyon sok integrál eredménye zárt alakban felírható.

$$\int cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

$$\int f(x) \pm g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(y)\,\mathrm{d}y \quad \text{ahol} \quad y = g(x) \tag{4}$$

3.3. Kidolgozott példák és gyakran használt módszerek

Most alkalmazzuk az előző szabályokat és néhány speciális esetet részletesebben is megvizsgálunk:

1. $\int_{-1}^{2} x^3 + 2x^{-2} + 3\sqrt{x} + 6\,\mathrm{d}x = ?$ Összegfüggvény határozott integrálját kell kiszámolni, melyet tagonként számolhatunk (2. formula). Az összes tag polinom melyekre alkalmazva a megfelelő szabályt:

$$\int\limits_1^2 x^3 + 2x^{-2} + 3\sqrt{x} + 6\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_1^2 x^3\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 2x^{-2}\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 3x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 6\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 + \left[\frac{2x^{-1}}{1}\right]_1^2 + \left[\frac{3x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^2 + [6x]_1^2 = \frac{27}{4} + 4\sqrt{2}$$

2. $\int_0^{2\pi} x^2 \sin x\,\mathrm{d}x = ?$ Ez egy szorzatfüggvény, ezért alkalmazzuk rá a parciális integrálás szabályát (3. formula). A probléma az, hogy melyik függvényt válasszuk deriváltnak? A polinom foka a deriválással csökken, így a szabály többszöri alkalmazásával eltűnhet az integrálandó függvényből, ezért következőképp választunk:

$$f'(x) = \sin x \qquad f(x) = -\cos x$$
$$g(x) = x^2 \qquad g'(x) = 2x$$

$$\int\limits_0^{2\pi} x^2 \sin x\,\mathrm{d}x = \left[-x^2\cos x\right]_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi} 2x(-\cos x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -4\pi^2 + 2\int\limits_0^{2\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x =$$

Újra alkalmazzuk a parciális integrálás szabályát:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x & f(x) &= \sin x \\ g(x) &= x & g'(x) &= 1 \end{aligned}$$

$$= -4\pi^2 + 2\int_0^{2\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x = -4\pi^2 + 2\left[x\sin x\right]_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x =$$

$$= -4\pi^2 - 2\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = -4\pi^2 - 2\left[-\cos x\right]_0^{2\pi} = -4\pi^2$$

3. $\int \ln x\,\mathrm{d}x\ = ?$ Ez egy érdekes példa a szorzat függvények integrálására. Ugyanis egy olyan cselt kell alkalmazni, mellyel sokat találkozhatunk a matematika világában. Nevezetesen, ha egy kifejezést megszorzunk 1-gyel, akkor nem változtatjuk meg az értékét. Tekintsük szorzatfüggvénynek a logaritmust az előző értelemben, majd alkalmazzuk rá a parciális integrálás szabályát.

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \int 1\ln x\,\mathrm{d}x$$

A szabály alkalmazásakor a következő választást használjuk:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 & f(x) &= x \\ g(x) &= \ln x & g'(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\int 1\ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int 1\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C$$

4. $\int \frac{3x^2}{x^3+2}\,\mathrm{d}x\ = ?$ Ez a feladat a helyettesítéses integrál egyik speciális esete. A számlálóban lévő függvény a nevező deriváltja. A végeredmény a nevezőben lévő függvény logaritmusa, amiről deriválással könnyen meggyőződhetünk. Matematikai jelöléssel:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$

A feladat megoldása ennek segítségével:

$$\int \frac{3x^2}{x^3+2}\,\mathrm{d}x = \ln\left(3x^2+2\right) + C$$

Az abszolútértéket itt elhagyhatjuk, mert a logaritmus argumentumában szereplő kifejezés minden x-re pozitív.

5. $\int 2x\left(x^2+1\right)^{32}\,\mathrm{d}x\ = ?$ Ez egy másik speciális esete a helyettesítéses integrálnak. A szorzat egyik tagja egy függvény valamilyen kitevőre emelve, a másik tagja pedig a függvény deriváltja. Az eredmény a függvényünk eggyel nagyobb kitevőn osztva az új kitevővel. Deriválás

segítségével meggyőződhetünk a szabály helyességéről. Matematikai jelöléssel:

$$\int f'(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C$$

A feladat megoldása tehát:

$$\int 2x\left(x^2+1\right)^{32}\,\mathrm{d}x = \frac{\left(x^2+1\right)^{33}}{33} + C$$

6. $\int 6\cos(6x-7)\,\mathrm{d}x\ = ?$ Ez a feladat a helyettesítéses integrál alkalmazásával oldható meg (4. formula), ahol a helyettesítendő függvény elsőfokú kifejezés.

$$y = 6x-7 \qquad \to \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 6 \qquad \to \qquad \mathrm{d}y = 6\mathrm{d}x$$

Ezekkel a kifejezésekkel végezzük el a helyettesítéseket.

$$\int 6\cos(6x-7)\,\mathrm{d}x = \int \cos y\,\mathrm{d}y = \sin y + C = \sin(6x-7) + C$$

7. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}+1}\,\mathrm{d}x\ = ?$ Az olyan függvények integrálásánál, amiben szerepel a következő négyzetgyökös kifejezés:$\sqrt{1-x^2}$. gyakran célravezető a következő helyettesítés:

$$x = \sin y \quad \to \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \cos y \quad \to \quad \mathrm{d}x = \cos(y)\mathrm{d}y$$

Ezek segítségével:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos y}{\sqrt{1-\sin^2 y}+1}\,\mathrm{d}y$$

Első ránézésre talán bonyolítottuk a feladatot, de alkalmazva a következő trigonometrikus azonosságokat egyszerűsödik a példa.

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \qquad\qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Jelen esetben $2\alpha = y$:

$$\int \frac{\cos y}{\sqrt{1-\sin^2 y}+1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{\cos y}{\cos y + 1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{2\cos^2\frac{y}{2}-1}{2\cos^2\frac{y}{2}}\,\mathrm{d}y =$$
$$= \int 1 - \frac{1}{2\cos^2\frac{y}{2}}\,\mathrm{d}y = y - \int \frac{1}{2\cos^2\frac{y}{2}}\,\mathrm{d}y$$

A $z = \frac{y}{2}$ helyettesítéssel:

$$y - \int \frac{1}{2\cos^2\frac{y}{2}}\,\mathrm{d}y = y - \int \frac{1}{\cos^2 z}\,\mathrm{d}z = y - \tan z + C =$$
$$= y - \tan\frac{y}{2} + C = \arcsin x - \tan\left(\frac{\arcsin x}{2}\right) + C$$

Számoljuk ki a $\int \frac{\cos y}{\cos y+1}\,\mathrm{d}y$ integrált egy másik helyettesítés segítségével. Ha olyan függvényt kell integrálni, melyben trigonometrikus kifejezések szerepelnek, és nem akarunk (tudunk) bűvészkedni a különböző azonosságokkal, akkor az esetek többségében segít a következő módszer:

$$t = \tan\frac{y}{2} \quad \text{ekkor} \quad \sin y = \frac{2t}{t^2+1} \quad \text{és} \quad \cos y = \frac{1-t^2}{t^2+1}$$

A derivált és $\mathrm{d}y$ kifejezése pedig:

$$y = 2\arctan t \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{t^2+1} \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}y = \frac{2\mathrm{d}t}{t^2+1}$$

Az integrál a következőképp alakul.

$$\int \frac{\cos y}{\cos y+1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{\frac{1-t^2}{t+1}}{\frac{1-t^2}{t+1}+1}\frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1-t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int -\frac{t^2+1}{t^2+1} + \frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = -t + 2\arctan t + C = -\tan\frac{y}{2} + y + C$$

Ez megegyezik az előző módon számított eredménnyel.

8. $\int \sqrt{4+x^2}\,\mathrm{d}x = ?$ Először hozzuk ki a négyzetgyök alól a 4-t, utánna egy gyakori helyettesítéses szabályt alkalmazunk.

$$\int \sqrt{4+x^2}\,\mathrm{d}x = \int 2\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}\,\mathrm{d}x = 2\int \sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$y = \frac{x}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}x = 2\mathrm{d}y$$

$$2\int \sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x = 4\int \sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y$$

Az integrandusz hasonlít az előző példában látott $\sqrt{1-x^2}$ kifejezéshez, csak most kivonás helyett összeadás szerepel a gyökjel alatt. Ilyenkor a következő helyettesítés a célravezető:

$$y = \sinh z \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = \cosh z \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}y = \cosh(z)\mathrm{d}z$$

Ennek segítségével az integrálunk a következőképp alakul.

$$4\int \sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y = 4\int \sqrt{1+\sinh^2 z}\cosh z\,\mathrm{d}z = 4\int \cosh^2 z\,\mathrm{d}z =$$

$$= 4\int \cosh^2 z\,\mathrm{d}z = 4\int \frac{\cosh(2z)+1}{2}\,\mathrm{d}z = \sinh(2z) + 2z + C = 2y\sqrt{1+y^2} + \text{arsinh}\, y + C$$

9. $\int \sin x \sinh x \, \mathrm{d}x = ?$ Utolsó kidolgozott példánk a parciális integrálás speciális esete. A szorzat mindkét tagja olyan, hogy többször deriválva vagy integrálva önmagát kapjuk. Végezzük el a parciális integrálást kétszer egymás után.

$$f'(x) = \sin x \qquad f(x) = -\cos x$$
$$g(x) = \sinh x \qquad g'(x) = \cosh x$$

$$\int \sin x \sinh x \, \mathrm{d}x = -\cos x \sinh x - \int -\cos x \cosh x \, \mathrm{d}x = -\cos x \sinh x + \int \cos x \cosh x \, \mathrm{d}x$$

$$f'(x) = \cos x \qquad f(x) = \sin x$$
$$g(x) = \cosh x \qquad g'(x) = \sinh x$$

$$-\cos x \sinh x + \int \cos x \cosh x \, \mathrm{d}x = -\cos x \sinh x + \sin x \cosh x - \int \sin x \sinh x \, \mathrm{d}x$$

Írjuk fel újra, hogy milyen kifejezésből indultunk és mihez érkeztünk:

$$\int \sin x \sinh x \, \mathrm{d}x = -\cos x \sinh x + \sin x \cosh x - \int \sin x \sinh x \, \mathrm{d}x$$

Az egyenlet bal oldalán álló kifejezés megtalálható a jobb oldalon is, így egy kicsit átrendezve az egyenletet és kifejezve a keresett integrált a következőt kapjuk:

$$\int \sin x \sinh x \, \mathrm{d}x = \frac{-\cos x \sinh x + \sin x \cosh x}{2} + C$$

3.4. Feladatok

Számold ki a következő határozott és határozatlan integrálokat! Ne feledkezz meg arról, hogy deriválással ellenőrizheted a megoldást!

$$\int_{-1}^{5} x^3 - 2x^{-2} + e^x \,\mathrm{d}x \qquad \int_{0}^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x \qquad \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$$

$$\int_{0}^{\pi} x \cos x \,\mathrm{d}x \qquad \int_{0}^{1} x^2 e^x \,\mathrm{d}x \qquad \int_{0}^{1} \sin\left(x\pi - \frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}x$$

$$\int x \ln x \,\mathrm{d}x \qquad \int \ln^2 x \,\mathrm{d}x \qquad \int e^x \sin x \,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{x}{3x^2-2} \,\mathrm{d}x \qquad \int \tan x \,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{1}{x \ln x} \,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\cos x}{6 \sin x + 1} \,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x + 3} \,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{1}{1+e^{-x}} \,\mathrm{d}x$$

$$\int 4x^3 \left(x^4 - 3\right)^4 \,\mathrm{d}x \qquad \int 3x^2 \sqrt{x^3+2} \,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)^3}{\sqrt{x^2+1}} \,\mathrm{d}x$$

$$\int \ln\left(3x-4\right) \mathrm{d}x \qquad \int \sin\left(2x-2\right)\right) \mathrm{d}x \qquad \int \frac{1}{\cos^2\left(4x+1\right)} \,\mathrm{d}x$$

$$\int x\sqrt{x+2} \,\mathrm{d}x \qquad \int \sqrt{1-x^2} \,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{3-x^2}} \,\mathrm{d}x$$

$$\int x e^{-x^2} \,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} \,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{\cos x - 1} \,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x} \,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\left(1+x\right)\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$$

4. Komplex számok

4.1. Komplex szám fogalma

Kezdetben az ember megszámlálva különböző értékeit (pl. jószágát, termését ...) eljutott a természetes számok halmazához (jele: $\mathbb{N}$) melynek elemei $0, 1, 2, 3 \ldots$ Ennek segítségével könnyen összegezhette azonos fajtájú dolgait. Amint azonban bevezette a különbséget, találkozott olyan mennyiséggel, melynek leírásához ki kellett terjesztenie ezt a halmazt a negatív számokal, így eljutott az egész számok halmazához (jele: $\mathbb{Z}$), melynek elemei $0, 1, -1, 2, -2 \ldots$. Az osztás használatakor, mint a szorzás inverze, két egész szám hányadosaként megjelentek a tört azaz racionális (jele: $\mathbb{Q}$) számok. A hatványozás segítségével vagy geometriai megfontolásokkal olyan számokat is találtak, melyek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként, ezeket irracionális számoknak nevezték el. A racionális és az irracionális számok összességét valós számoknak (jele: $\mathbb{R}$) hívják. Negatív számok négyzetgyöke azonban nem létezik a valós számok halmazán. Vezessük be a képzetes (imaginárius) egységet a következő definícióval:

$$i = \sqrt{-1}$$

Komplex számokon $\mathbb{C}$ olyan számokat értünk, melyek felírhatóak a következő alakban:

$$z = a + bi \quad \text{, ahol } a, b \in \mathbb{R}$$

Az a-t a z komplex szám valós, a b-t a képzetes (imaginárius) részének nevezik és jelölésük: $Re(z) = a$ és $Im(z) = b$ Két komplex szám között a következő módon értelmezzük az összeadást és a szorzást:

$$z_1 \pm z_2 = a_1 + b_1 i \pm a_2 + b_2 i = a_1 \pm a_2 + (b_1 \pm b_2)i$$
$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

Képzeljünk el egy koordináta rendszert, melynek vízszintes tengelyén a komplex szám valós, függőleges tengelyén a képzetes részt ábrázoljuk. A kapott koordináta rendszert komplex számsíknak nevezzük. Egy komplex számot a számsíkon egy vektor reprezentál, ennek segítségével beszélhetünk a komplex szám hosszáról, azaz abszolút értékéről: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Egy komplex szám konjugátján azt a komplex számot értjük, amelynek a képzetes része ellenkező előjelű: ha $z = a + bi$, akkor $z^* = a - bi$. Ennek segítségével könnyen kifejezhető egy komplex szám abszolútérték négyzete: $|z|^2 = zz^*$ és értelmezhetjük két komplex szám hányadosát:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2}$$

A komplex számsíkon egy z számnak egy vektor felel meg, melynek hossza $r = |z|$ és valamely φ szöget zár be a valós tengellyel. Kifejezve a-t és b-t a hosszal és a φ szöggel, a komplex szám trigonometrikus alakját kapjuk:

$$a = r \cos \varphi \quad b = r \sin \varphi$$
$$z = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Ebben az írásmódban geometriai jelentést rendelhetünk a szorzáshoz. Ugyanis:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)) = \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

Azaz, két komplex szám szorzata egy olyan komplex szám, melynek hossza a két hossz szorzata és a valós tengellyel akkora szöget zár be, mint az eredeti két szám szögeinek összege. Egy komplex szám hatványát ezek szerint úgy kapjuk, ha a hosszát a megfelelő hatványra emeljük, a szögét pedig a kitevővel megszorozzuk:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Gyökvonásnál, azaz törtkitevőre emelésnél, figyelembe kell venni, hogy a φ szöghöz 2π többszörösét hozzáadva ugyanazt a komplex számot kapjuk, így:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n})$$

ahol $k = 0 \dots (n-1)$ egész szám. Tehát annyi komplex gyököt kapunk eredményül, amilyen a gyökünk kitevője.

Írjuk fel a Taylor sorát a $\cos\varphi + i \sin\varphi$ függvénynek:

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{24} + \dots = (-1)^n \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!}$$

$$i \sin\varphi = i\varphi - i\frac{\varphi^3}{6} + i\frac{\varphi^5}{120} + \dots = i(-1)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos\varphi + i \sin\varphi = \frac{(i\varphi)^{2n}}{(2n)!} + \frac{(i\varphi)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{(i\varphi)^m}{m!} = e^{i\varphi}$$

Ezzel eljutottunk a komplex számok felírásának exponenciális alakjához. Az exponenciális függvény rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy szorzás esetén a kitevők összeadódnak. Az egységnyi hosszúságú komplex számok fontos szerepet játszanak a fizikában, általános alakjuk: $z_{\text{egységnyi}} = e^{i\varphi}$. Egy nagyon híres és hasznos összefüggés az *Euler* egyenlőség: $e^{i\pi} = -1$. Összefoglalóként itt egy táblázat a komplex számok különböző alakjairól:

Normál	$z = a + bi$	$Re(z) = a$ és $Im(z) = b$
Trigonometrikus	$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$	$r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = r\cos\varphi$, $b = r \sin\varphi$
Exponenciális	$z = re^{i\varphi}$	$r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = r\cos\varphi$, $b = r \sin\varphi$

4.2. Komplex számok függvényei

A valós számok körében megismert függvényeket úgy terjesztjük ki szemléletesen a komplex számokra, hogy a függvények jellegzetes tulajdonságai megmaradjanak.

Ha az exponenciális függvény kitevőjében összeg szerepel, akkor olyan exponenciális szorzattá alakul, melyben az egyes tagok kitevői az eredeti függvény kitevőjének részei:

$$e^{a+bi} = e^a e^{bi} = re^{i\varphi}$$

$$r = e^a \text{ és } \varphi = b$$

Ennek segítségével definiálhatjuk az exponenciális függvény inverzét, a logaritmust, vigyázni kell azonban arra, hogy a φ szöghöz 2π többszörösét hozzáadva ugyanazt a komplex számot kapjuk:

$$\ln re^{i\varphi} = \ln r + i(\varphi + 2k\pi) = a + bi$$

$$a = \ln r \text{ és } b = \varphi + 2k\pi$$

Írjuk fel az egységnyi hosszúságú, φ illetve $-\varphi$ szögű komplex számok trigonometrikus és exponenciális formáját.

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \cos\varphi + i\sin\varphi \\ e^{-i\varphi} &= \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi \end{aligned}$$

A két egyenletből $\sin\varphi$ és $\cos\varphi$ kifejezhető az exponenciális függvények segítségével:

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \\ \sin\varphi &= \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \end{aligned}$$

Ha φ helyére egy komplex számot írunk, akkor megkapjuk a komplex szám szinuszát illetve koszinuszát.

$$\begin{aligned} \cos z = \cos(a+bi) &= \frac{e^{i(a+bi)} + e^{-i(a+bi)}}{2} = \frac{e^{-b}e^{ia} + e^{b}e^{-ia}}{2} = \\ &= \frac{e^{-b}\cos a + ie^{-b}\sin a + e^{b}\cos a - ie^{b}\sin a}{2} = \\ &= \cos a\cosh b - i\sin a\sinh b \end{aligned}$$

Ugyanígy megkapjuk, hogy:

$$\sin z = \sin a\cosh b + i\cos a\sinh b$$

Ha $\cos z$-be z helyére egy tisztán képzetes számot, azaz bi-t írunk, akkor $\cosh b$-t kapjuk eredményül. Ugyanígy $\sin(bi)$ eredménye $i\sinh b$ lesz. A szögek összegére vonatkozó trigonometrikus azonosságok és ezen összefüggések segítségével szintén levezethetjük a komplex számok szinuszát és koszinuszát, melyek ugyanerre az eredményre vezetnek. Vegyük észre, hogy komplex számokra már nem igaz, hogy a szinusz vagy koszinusz eredménye 1-nél kisebb. Most már van megoldása a $\sin x = 2$ egyenletnek is, de csak a komplex számok körében!

4.3. Kidolgozott feladatok

1. Egyszerűsítsük a következő komplex törtet: $\frac{3+2i}{1-i}$.
   A feladat megoldásakor a komplex számok osztására vonatkozó szabályt alkalmazva:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2}$$

A mi esetünkben: $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 1 - i \quad \to \quad z_2^* = 1 + i$

$$\frac{3+2i}{1-i} = \frac{(3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3+3i+2i-2}{2} = \frac{1+5i}{2}$$

2. Írjuk fel trigonometrikus és exponenciális alakban a $z = \sqrt{3} - i$ komplex számot!
   A feladat megoldásához számoljuk ki a komplex szám abszolút értékét, majd keressük meg

mekkora szöget zár be a valós tengellyel.

$$z = a + bi \quad \rightarrow \quad a = \sqrt{3}, b = -1$$

$$r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3+1} = 2,\ \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ és } \sin\varphi = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \varphi = -\frac{\pi}{6}$$

Ezek segítségével a két alak:

$$z = \sqrt{3} - i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

3. Határozzuk meg a $\sqrt[3]{1}$ értékeit!
A komplex gyökvonáshoz először átalakítjuk a számot trigonometrikus alakra, majd a szabálynak megfelelően kiszámoljuk a 3 egységgyököt.

$$z = 1 = 1 + 0i \quad \rightarrow \quad r = 1, \varphi = 0 \quad \rightarrow \quad z = \cos 0 + i\sin 0$$

$$\sqrt[3]{z} = 1\cos\frac{0+2k\pi}{3} + i\sin\frac{0+2k\pi}{3} \quad \Longrightarrow \begin{cases} \cos 0 + i\sin 0 = 1 \\ \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

4. Mennyi az értéke a $\sin\left(\frac{\pi}{3} + i\ln 2\right)$ kifejezésnek?
A megoldáshoz használjuk fel a komplex számokra is értelmezett szinusz definicióját.

$$\sin z = \sin a\cosh b + i\cos a\sinh b$$

A mi esetünkben a megfelelő együtthatók és a behelyettesítés utáni érték:

$$a = \frac{\pi}{3} \quad \text{és} \quad b = \ln 2$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + i\ln 2\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cosh\ln 2 + i\cos\frac{\pi}{3}\sinh\ln 2 = \frac{5\sqrt{3}}{8} + i\frac{3}{8}$$

5. Mennyi az értéke a következő kifejezésnek: $z = \log_i(1+i)$?
Először alakítsuk át a kifejezést természetes alapú logaritmusra.

$$z = \log_i(1+i) = \frac{\ln(1+i)}{\ln i}$$

A logaritmus argumentumában álló kifejezéseket alakítsuk át exponenciális formájúra, mert ekkor tudjuk értelmezni azt.

$$\frac{\ln(1+i)}{\ln i} = \frac{\ln(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})}{\ln e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)}{i\left(\frac{\pi}{2} + 2l\pi\right)}$$

Végül a nevezőből tüntessük el az imaginárius egységet.

$$\frac{\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)}{i\left(\frac{\pi}{2} + 2l\pi\right)} = \frac{\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)}{\left(\frac{\pi}{2} + 2l\pi\right)} - i\frac{\ln\sqrt{2}}{\left(\frac{\pi}{2} + 2l\pi\right)}$$

6. Határozzuk meg a $\sin z = 2$ egyenlet gyökét!
   Írjuk fel a $\sin z$ komplex kifejtését és olvassuk le, hogy a valós és a képzetes résznek milyen feltételt kell kielégítenie.

$$\sin z = \sin a \cosh b + i \cos a \sinh b \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \sin a \cosh b = 2 \\ \cos a \sinh b = 0 \end{cases}$$

Ahol már a és b valós számok! A második egyenlet szerint két részre szakad a megoldás.

Első eset

$$\sinh b = 0 \quad \rightarrow \quad b = 0 \quad \rightarrow \quad \cosh b = 1$$

Ilyenkor az első egyenlet szerint:

$$\sin a \cosh b = 2 \quad \rightarrow \quad \sin a = 2$$

Ez viszont lehetetlen a valós számok halmazán.

Második eset

$$\cos a = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi & \rightarrow \quad \sin a = 1 & \rightarrow \quad \cosh b = 2 \\ a = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi & \rightarrow \quad \sin a = -1 & \rightarrow \quad \cosh b = -2 \text{ Ellentmondás!} \end{cases}$$

A végső megoldandó egyenlet $\cosh b = 2$ alakú. Ennek megoldásához írjuk fel a $\cosh$ függvény exponenciális alakját, majd új változót bevezetve egy másodfokú egyenlet megoldására redukálódik a probléma.

$$\frac{e^b + e^{-b}}{2} = 2 \quad y = e^b \quad \rightarrow \quad \frac{y + \frac{1}{y}}{2} = 2$$
$$y^2 - 4y + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad b = \pm \ln(\sqrt{3} + 2)$$
$$\text{A teljes megoldás: } z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \pm i \ln(\sqrt{3} + 2)$$

4.4. Feladatok

Egyszerűsítsd a következő kifejezéseket!

$\dfrac{1-i}{i}$	$\dfrac{2-2i}{3+3i}$	$\dfrac{2-i}{-i}$
$\dfrac{3i+2}{-2+4i}$	$\dfrac{2-i}{2i-6}$	$\dfrac{i-5}{2i+3}$
$\log_3(i)$	$\log_i(-1)$	$\log_{-i}(1)$
$\log_i(1+i)$	$\log_i(2\sqrt{3}-i)$	$\log_{-i}(5-\sqrt{75}i)$

Mennyi az értéke a következő kifejezéseknek?

$\sqrt{-1}$	$\sqrt[3]{8i}$	$\sqrt[4]{2-2i}$
$\sqrt[6]{-\sqrt{3}+i}$	$\sqrt[3]{2-\sqrt{12}i}$	$\sqrt[4]{-1-i}$
$\sin(i)$	$\cos(i\ln 3)$	$\sin(\pi + i\ln 2)$
$\cos\left(\frac{\pi}{3} + i\ln 4\right)$	$\sin\left(-\frac{\ln 6}{i}\right)$	$\tan(-i)$

5. Vektorok

5.1. Vektor fogalma, alapműveletek

Azokat a mennyiségeket, amelyek egy iránnyal és egy mérőszámmal adhatók meg vektoroknak nevezzük. Ilyen például a sebesség, gyorsulás, erő... A vektorok szemléltetésére geometriai módot szoktak használni. Egy nyíllal szokták jelölni a vektort, melynek hossza a vektor nagyságát az iránya a vektor irányát mutatja. A vektort ebben az értelemben kétszer aláhúzott betűvel jelöljük, pl. $\underline{\underline{a}}$. Úgy is felfoghatjuk, hogy a vektor egy olyan utasítás, ami megmondja nekünk, hogy mennyit és milyen irányban mozduljunk egy adott térben. A vektor hosszának, az abszolútértékének jelölése: $\left|\underline{\underline{a}}\right| = a$. A nulla hosszúságú vektort nullvektornak hívjuk.

Két vektor összegén egy olyan harmadik vektort értünk, amely az első vektor kezdetétől a másik vektor végéig mutat. Adott $\underline{\underline{a}}$ és $\underline{\underline{b}}$ vektor esetén a:

$$\underline{\underline{c}} = \underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}}$$

összeget geometriailag úgy képzelhetjük el, hogy a $\underline{\underline{c}}$ vektor az $\underline{\underline{a}}$ és $\underline{\underline{b}}$ vektorok által kifeszített paralelogramma átlója. Több vektor esetén az összeg az első vektor elejétől az utolsó vektor végéig mutat.

A vektor ellentetjén az azonos nagyságú, de ellentétes irányú vektort értjük, jelölése: $-\underline{\underline{a}}$. Egy vektor és annak ellentetjének összege a nullvektort adja eredményül. Ennek segítségével két különbségét úgy képezzük, hogy az első vektorhoz hozzáadjuk a második ellentetjét:

$$\underline{\underline{c}} = \underline{\underline{a}} - \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{a}} + \left(-\underline{\underline{b}}\right)$$

Egy vektort úgy szorzunk meg egy számmal, hogy nagyságát megszorozzuk az adott számmal és a kapott vektor iránya a szorzó szám előjelétől függően vagy azonos (pozitív) vagy ellentétes (negatív) az eredeti vektorhoz képest. Legyen $\underline{\underline{b}} = \alpha\,\underline{\underline{a}}$, ekkor $\underline{\underline{b}}$ egy olyan vektor, amely $\underline{\underline{a}}$-val egyirányú, ha α előjele pozitív és ellentétes, ha α előjele negatív, a nagysága pedig $b = |\alpha|\,a$. Két vektor összege és számmal való szorzása disztributív művelet:

$$\alpha\left(\underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}}\right) = \alpha\,\underline{\underline{a}} + \alpha\,\underline{\underline{b}}$$

Vektorok *lineáris kombinációján* értjük a számmal való szorzás és a vektorok közötti összeadás során kapott kifejezéseket. Például $\underline{\underline{a}}$ és $\underline{\underline{b}}$ vektorok lineáris kombinációja az a $\underline{\underline{c}}$ vektor, amely előáll a következő alakban: $\underline{\underline{c}} = \alpha\,\underline{\underline{a}} + \beta\,\underline{\underline{b}}$.

Két vektor skaláris szorzatán egy olyan számot értünk, melyet a következőképp számítunk ki:

$$\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}} = ab\cos\alpha$$

Ez a szorzat a fizikában gyakran előfordul (például munka...). A skaláris szorzat két vektorhoz egy számot rendel, az asszociativitás nem igaz rá, ezért ki kell tenni a zárójeleket:

$$\left(\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\right)\underline{\underline{c}} \neq \underline{\underline{a}}\left(\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}\right)$$

A skaláris szorzat kommutatív, azaz két vektor skaláris szorzata nem függ a sorrendtől. A vektorok közötti összeadás és a skaláris szorzás között érvényes a disztributivitás.

$$\left(\underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}}\right)\underline{\underline{c}} = \underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}} + \underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}$$

Ha két vektor merőleges egymásra (ortogonális), akkor skaláris szorzatuk nulla. Fordítva is igaz, ha két vektor skaláris szorzata nulla, akkor merőlegesek egymásra (ortogonálisak), vagy az egyik vektor a nullvektor, de annak iránya úgyis tetszőleges. Tetszőlegs vektor saját magával vett skaláris szorzata megadja a hosszának négyzetét $\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{a}} = a^2$.

Valamely $\underline{\underline{v}}$ sebességgel mozgó töltésre $\underline{\underline{B}}$ mágneses térben olyan $\underline{\underline{F}}$ erő hat, melynek iránya merőleges $\underline{\underline{v}}$-re és $\underline{\underline{B}}$-re ($\underline{\underline{v}}$ és $\underline{\underline{B}}$ által kifeszített síkra), nagysága pedig $vB\sin\alpha$-val arányos. A vektoriális szorzat segítségével a Lorenz erőt a következő alakban írhatjuk:

$$\underline{\underline{F}} = q\,\underline{\underline{v}} \times \underline{\underline{B}}$$

Legyen $\underline{\underline{c}} = \underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{b}}$, ekkor $\underline{\underline{a}}$, $\underline{\underline{b}}$ és $\underline{\underline{c}}$ jobbsodrású rendszert alkot, azaz a jobb kezünk hüvelyk, mutató és középső ujjával (ebben a sorrendben) tudjuk őket fedésbe hozni. A vektoriális szorzat nem asszociatív és nem kommutatív. A definicióból következik, hogy:

$$\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{b}} = -\underline{\underline{b}} \times \underline{\underline{a}}$$

A vektorok összeadására és vektoriális szorzására is érvényes a disztributivitás.

$$\left(\underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}}\right) \times \underline{\underline{c}} = \underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{c}} + \underline{\underline{b}} \times \underline{\underline{c}}$$

Az $\underline{\underline{a}}\left(\underline{\underline{b}} \times \underline{\underline{c}}\right)$ szorzatot hármas vegyes szorzatnak nevezik. Ha a három vektor egy síkban fekszik (vagy az egyik a nullvektor), akkor a vegyes szorzatuk nullát ad eredményül. Geometriailag a vegyes szorzat, a három vektor által kifeszített paralelepipedon térfogatát adja. A vegyes szorzat előjele megmutatja, hogy a három vektor jobb- (pozitív előjel) vagy balsodrású rendszert (negatív előjel) alkot. Geometriai megfontolásokból igaz a következő két egyenlőség:

$$\underline{\underline{a}}\left(\underline{\underline{b}} \times \underline{\underline{c}}\right) = \underline{\underline{c}}\left(\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{b}}\right) = \underline{\underline{b}}\left(\underline{\underline{c}} \times \underline{\underline{a}}\right)$$
$$\underline{\underline{a}}\left(\underline{\underline{b}} \times \underline{\underline{c}}\right) = \left(\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{b}}\right)\underline{\underline{c}}$$

A hármas vegyes szorzatot ezen tulajdonságok miatt a következő formulával jelölik: $\underline{\underline{a}}\left(\underline{\underline{b}} \times \underline{\underline{c}}\right) = \left(\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b}}, \underline{\underline{c}}\right)$.

5.2. Bázis, koordináta

Legyen $\underline{\underline{a}}$, $\underline{\underline{b}}$ és $\underline{\underline{c}}$ a tér három olyan vektora, melyekre igaz, hogy az

$$\alpha\,\underline{\underline{a}} + \beta\,\underline{\underline{b}} + \gamma\,\underline{\underline{c}} = 0$$

egyenletnek a triviális $\alpha = \beta = \gamma = 0$ megoldáson kívül nincs másik gyöke. Ekkor azt mondjuk, hogy a három vektor *lineárisan független*. Síkban kettő, térben három lineárisan független vektort találhatunk, természetesen létezhetnek olyan terek is, ahol több lineárisan független vektor létezik. Lineárisan függőek a vektorok, ha létezik más megoldása is az előző egyenletnek, ilyenkor az egyik vektort kifejezhetjük a többi vektor lineáris kombinációjaként.

Vektoregyenleten olyan egyenletet értünk, amikor az ismeretlen mennyiség egy vektor. Tehát keressük azokat a vektorokat az adott térben, amelyeket behelyettesítve az ismeretlen helyére, igaz lesz az egyenlőség. Általában az ismeretlent valamilyen lineárisan független vektorok kompoziciójaként keressük, ahol az új ismeretlenek az együtthatók lesznek. A kidolgozott példáknál olvashatsz többet erről a témáról.

Adott valamilyen *vektortér*, azaz olyan tér, ahol értelmezve vannak valamilyen vektorok összeadással, számmal való szorzással és valamilyen skaláris szorzattal. Ha meghatározunk annyi lineárisan független vektort, melyekből lineáris kombinációként a tér összes vektora előállítható, akkor ezeket a vektorokat *bázisnak* hívjuk. A bázisvektorok számát az adott vektortér dimenziójának nevezzük. Síkban kettő, térben három lineárisan független vektor kell egy bázis kialakításához. Legyen $\underline{\underline{a}}$, $\underline{\underline{b}}$ és $\underline{\underline{c}}$ egy bázis a térben. Ekkor tetszőleges $\underline{\underline{x}}$ vektorra definíció szerint igaz, hogy $\underline{\underline{x}} = \alpha\,\underline{\underline{a}} + \beta\,\underline{\underline{b}} + \gamma\,\underline{\underline{c}}$ és a felbontás egyértelmű, tehát α, β és γ számok egyértelműen jellemzik az $\underline{\underline{x}}$ vektort. Az α, β, γ számhármast az $\underline{\underline{x}}$ vektor *koordinátáinak* nevezzük az $\underline{\underline{a}}$, $\underline{\underline{b}}$, $\underline{\underline{c}}$ vektorok által kifeszített *koordináta rendszerben*.

Egy bázist *ortogonálisnak* nevezünk, ha vektorai egymásra páronként merőlegesek, azaz skaláris szorzatuk nullát ad eredményül.

Ha egy ortogonális bázis minden vektora egységnyi hosszú, akkor *ortonormált* bázisról beszélünk. A vektorok leírása ilyen bázisban általában egyszerű és könnyen követhető, a továbbiakban ezzel foglalkozunk részletesen. Legyen $\underline{\underline{e}}^{(1)}$, $\underline{\underline{e}}^{(2)}$, $\underline{\underline{e}}^{(3)}$ egy ortonormált bázis a térben, ekkor definíció szerint igazak a következő egyenlőségek:

$$\begin{aligned} e^{(1)} = e^{(2)} = e^{(3)} &= 1 \quad \text{egységnyi hosszúak} \\ \underline{\underline{e}}^{(1)}\,\underline{\underline{e}}^{(2)} = \underline{\underline{e}}^{(1)}\,\underline{\underline{e}}^{(3)} = \underline{\underline{e}}^{(2)}\,\underline{\underline{e}}^{(3)} &= 0 \quad \text{páronként merőlegesek} \end{aligned}$$

5.3. Reprezentáció, indexes írásmód

Legyen $\underline{\underline{a}}$, $\underline{\underline{b}}$ és $\underline{\underline{c}}$ egy bázis a térben, amelyek kifeszítik a K koordináta rendszert. Ekkor tetszőleges $\underline{\underline{x}}$ vektorra definíció szerint igaz, hogy $\underline{\underline{x}} = x_1\,\underline{\underline{a}} + x_2\,\underline{\underline{b}} + x_3\,\underline{\underline{c}}$. Az x_1, x_2 és x_3 koordinátákat, mint számhármast, az $\underline{\underline{x}}$ vektor K koordináta rendszerbeni reprezentációjának nevezzük. Jelölése: $\underline{\underline{x}} = x_1, x_2, x_3$.

Adott egy ortonormált bázis. Ekkor egy tetszőleges $\underline{\underline{a}}$ vektor a következő alakban írható fel:

$$\underline{\underline{a}} = a_1\,\underline{\underline{e}}^{(1)} + a_2\,\underline{\underline{e}}^{(2)} + a_3\,\underline{\underline{e}}^{(3)} = \sum_{i=1}^{3} a_i\,\underline{\underline{e}}^{(i)}$$

Szorozzuk be mindkét oldalt $\underline{\underline{e}}^{j}$-vel, ahol $i = 1, 2, 3$ lehet. Mivel a bázis ortonormált, ezért a jobb oldalon csak az a tag nem nulla, ahol az azonos bázisvektorral szorozzuk, ami viszont éppen egyet ad eredményül, így:

$$\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{e}}^{(j)} = \sum_{i=1}^{3} a_i\,\underline{\underline{e}}^{(i)}\,\underline{\underline{e}}^{(j)} = a_j$$

Tehát egy vektor koordinátáit úgy kapjuk meg, hogy skalárisan összeszorozzuk a megfelelő bázisvektorokkal. Ennek megfelelően a bázisvektorok reprezentációi:

$$\underline{\underline{e}}^{(1)} = 1, 0, 0 \qquad \underline{\underline{e}}^{(2)} = 0, 1, 0 \qquad \underline{\underline{e}}^{(3)} = 0, 0, 1$$

Nézzük meg hogyan reprezentálódnak a vektorok közötti műveletek. Legyen $\underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{c}}$, írjuk ki a bázisvektorok segítségével az összeadást majd olvassuk le az eredményt.

$$\underline{a} = a_1, a_2, a_3 \quad \underline{b} = b_1, b_2, b_3 \quad \underline{c} = c_1, c_2, c_3$$
$$\underline{\underline{a}} = \sum_{i=1}^{3} a_i \, \underline{\underline{e}}^{(i)} \quad \underline{\underline{b}} = \sum_{i=1}^{3} b_i \, \underline{\underline{e}}^{(i)} \quad \underline{\underline{c}} = \sum_{i=1}^{3} c_i \, \underline{\underline{e}}^{(i)}$$
$$\sum_{i=1}^{3} a_i \, \underline{\underline{e}}^{(i)} + \sum_{i=1}^{3} b_i \, \underline{\underline{e}}^{(i)} = \sum_{i=1}^{3} (a_i + b_i) \, \underline{\underline{e}}^{(i)} = \sum_{i=1}^{3} c_i \, \underline{\underline{e}}^{(i)}$$
$$\text{Tehát: } c_i = a_i + b_i \quad \text{más jelöléssel: } \underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$$

Tehát összeadás során a megfelelő koordináták összeadódnak. A $c_i = a_i + b_i$ formát indexes irásmódnak nevezzük, ekkor az indexben szereplő betű felveheti térben $1, 2, 3$ értékeket. Ezzel a jelöléssel megspóroljuk, hogy mind a három egyenletet ki kelljen írnunk.

Legyen $\underline{\underline{b}} = \lambda \, \underline{\underline{a}}$. Az előző gondolatmenetet végigcsinálva a következőt kapjuk.

$$\underline{a} = a_1, a_2, a_3 \quad \underline{b} = b_1, b_2, b_3$$
$$\underline{\underline{a}} = \sum_{i=1}^{3} a_i \, \underline{\underline{e}}^{(i)} \quad \underline{\underline{b}} = \sum_{i=1}^{3} b_i \, \underline{\underline{e}}^{(i)}$$
$$\lambda \sum_{i=1}^{3} a_i \, \underline{\underline{e}}^{(i)} = \sum_{i=1}^{3} \lambda a_i \, \underline{\underline{e}}^{(i)} = \sum_{i=1}^{3} b_i \, \underline{\underline{e}}^{(i)}$$
$$\text{Tehát: } b_i = \lambda a_i \quad \text{más jelöléssel: } \underline{b} = \lambda \, \underline{a}$$

Ilyenkor tehát minden koordinátát meg kell szorozni az adott számmal.

Skaláris szorzat reprezentálásához megint írjuk ki a bázisvektorok segítségével az $\underline{\underline{a}} \, \underline{\underline{b}}$ szorzatot.

$$\underline{a} = a_1, a_2, a_3 \quad \underline{b} = b_1, b_2, b_3$$
$$\underline{\underline{a}} = \sum_{i=1}^{3} a_i \, \underline{\underline{e}}^{(i)} \quad \underline{\underline{b}} = \sum_{j=1}^{3} b_j \, \underline{\underline{e}}^{(i)}$$
$$\sum_{i=1}^{3} a_i \, \underline{\underline{e}}^{(i)} \sum_{j=1}^{3} b_i \, \underline{\underline{e}}^{(j)} = \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \, \underline{\underline{e}}^{(i)} \, \underline{\underline{e}}^{(j)}$$

Itt fontos, hogy a két vektor megfelelő komponenseit ne ugyanazzal a betűvel indexeljük, mert akkor nem kapnánk meg a tényleges szorzatot. Az utolsó szorzatnál megint a bázisvektorok szorzatát látjuk, amelyek csak akkor adn egyet, ha ugyanazokat a vektorokat szorozzuk össze, minden más esetben nulla az értéke. Ez a tulajdonság, sokszor fordul elő a vektorok világában, ezért bevezették a *Kronecker delta* szimbólumot:

$$\delta_{ij} = \underline{\underline{e}}^{(i)} \, \underline{\underline{e}}^{(j)}$$

ami egy, ha az indexei megegyeznek és nulla, ha különböznek. Ennek segítségével a következőképp alakítható a skaláris szorzat:

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \, \underline{\underline{e}}^{(i)} \, \underline{\underline{e}}^{(j)} = \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$$

Tehát skaláris szorzat a megfelelő koordináták szorzatainak az összege. Indexes formában az összeg három tagja helyett ($i = 1, 2, 3$) csupán egy tényezőt és az összegző jelet kell kiírni. Későbbiekben látunk olyan példát, ahol a tényleges összeg sokkal több tagból állna, de ezzel az írásmóddal rövidebben le lehet írni a kifejezést.

A vektoriális szorzat vizsgálatát kezdjük a bázisvektorok egymással vett vektoriális szorzatával. Mivel ortonormált bázisunk van, ezért a vektoriális szorzat definiciójából következik, hogy:

$$\underline{\underline{e}}^{(1)} \times \underline{\underline{e}}^{(2)} = \underline{\underline{e}}^{(3)} \qquad \underline{\underline{e}}^{(2)} \times \underline{\underline{e}}^{(3)} = \underline{\underline{e}}^{(1)} \qquad \underline{\underline{e}}^{(3)} \times \underline{\underline{e}}^{(1)} = \underline{\underline{e}}^{(2)}$$
$$\underline{\underline{e}}^{(2)} \times \underline{\underline{e}}^{(1)} = -\underline{\underline{e}}^{(3)} \qquad \underline{\underline{e}}^{(3)} \times \underline{\underline{e}}^{(2)} = -\underline{\underline{e}}^{(1)} \qquad \underline{\underline{e}}^{(1)} \times \underline{\underline{e}}^{(3)} = -\underline{\underline{e}}^{(2)}$$

minden más esetben nullát eredményez a szorzás. Ennek rövidebb leírására bevezettek a *Levi-Civita* szimbólumot.

$$\underline{\underline{e}}^{(i)} \times \underline{\underline{e}}^{(j)} = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \underline{\underline{e}}^{(k)}$$

Kiírva részletesen a *Levi-Civita* szimbólumot:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, \text{ ha } i,j,k \text{ az 1,2,3 ciklikus permutációja,} \\ -1, \text{ ha } i,j,k \text{ az 1,2,3 nem ciklikus permutációja,} \\ \ \ 0, \text{ ha } i,j,k \text{ az 1,2,3-nak nem permutációja.} \end{cases}$$

Definiciójából következik, hogy ha a *Levi-Civita* szimbólum indexeit ciklikusan permutáljuk, akkor nem változik meg az értéke. Ez a tulajdonsága segít a későbbiekben bonyolult kifejezések egyszerűsítésében.

A *Levi-Civita* szimbólum felhasználásával nézzük meg az $\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{c}}$ vektoriális szorzatot.

$$\underline{a} = a_1, a_2, a_3 \qquad \underline{b} = b_1, b_2, b_3 \qquad \underline{c} = c_1, c_2, c_3$$
$$\underline{\underline{a}} = \sum_{i=1}^{3} a_i\, \underline{\underline{e}}^{(i)} \qquad \underline{\underline{b}} = \sum_{j=1}^{3} b_j\, \underline{\underline{e}}^{(j)} \qquad \underline{\underline{c}} = \sum_{k=1}^{3} c_k\, \underline{\underline{e}}^{(k)}$$
$$\sum_{i=1}^{3} a_i\, \underline{\underline{e}}^{(i)} \times \sum_{i=1}^{3} b_i\, \underline{\underline{e}}^{(i)} = \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j\, \underline{\underline{e}}^{(i)} \times \underline{\underline{e}}^{(j)} = \sum_{i,j,k=1}^{3} a_i b_j \varepsilon_{ijk}\, \underline{\underline{e}}^{(k)}$$

Az utóbbi összeg 27 tagból állna részletesen kiíra, de az indexes irásmód leegyszerűsíti azt. Ennek a vektornak az l. komponensét úgy kapjuk, ha beszorzunk $\underline{\underline{e}}^{(l)}$ bázisvektorral.

$$\underline{\underline{c}}\, \underline{\underline{e}}^{(l)} = c_l = \sum_{i,j,k=1}^{3} a_i b_j \varepsilon_{ijk}\, \underline{\underline{e}}^{(k)}\, \underline{\underline{e}}^{(l)} = \sum_{i,j,k=1}^{3} a_i b_j \varepsilon_{ijk} \delta_{kl} = \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ijl} a_i b_j$$

Részeletesen kiírva a koordinátákat a következő formulát kapjuk:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_2 b_1 - a_1 b_2 \end{pmatrix}$$

Tekintsük a következő vegyes hármas szorzatot $\underline{a}(\underline{b} \times \underline{c})$, számoljuk ki egy adott koordináta rendszerben az értékét, azaz $\underline{a}(\underline{b} \times \underline{c})$ szorzatot. A skaláris és a vektoriális szorzat eddigi kifejezését felhasználva a következőt kapjuk:

$$\underline{a}(\underline{b} \times \underline{c}) = \sum_{i=1}^{3} a_i(\underline{b} \times \underline{c})_i = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{jki} a_i b_j c_k$$

Definició szerint ezt az összeget nevezik a vektorhármas determinánsának, jelölése:

$$\det(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{jki} a_i b_j c_k = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$

Az utolsó formula a *Levi-Civita* tulajdonságaiból következik, amely így könnyebben megjegyezhető.

Indexes irásmóddal felírt kifejezésekben észrevették, hogy azok az indexek, amelyekre összegzés történik, mindig párosával jelentkeznek. Az *Einstein* konvenció szerint, nem írjuk ki a szorzat elé a $\sum$ jelet, hanem amelyik index kétszer szerepel, arra automatikus összegzést végzünk. Néhány eddig tárgyalt kifejezés az *Einstein* konvenció segítségével a következő alakban írható.

$$\underline{a}\,\underline{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_i b_i$$

$$(\underline{a} \times \underline{b})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{jki} a_j b_k = \varepsilon_{jki} a_j b_k$$

$$\underline{a}(\underline{b} \times \underline{c}) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$

A kifejezések a következőkben mindig ebben a formában lesznek megadva.

5.4. Kidolgozott feladatok

1. Adott három lineárisan független vektor a térben $\underline{\underline{x}}^{(1)}, \underline{\underline{x}}^{(2)}, \underline{\underline{x}}^{(3)}$ és ezekkel kifejezve négy vektor:

$$\underline{\underline{a}} = \underline{\underline{x}}^{(1)} + 2\,\underline{\underline{x}}^{(2)} - \underline{\underline{x}}^{(3)} \qquad \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{x}}^{(1)} - \underline{\underline{x}}^{(2)} + 4\,\underline{\underline{x}}^{(3)}$$

$$\underline{\underline{c}} = 2\,\underline{\underline{x}}^{(1)} - 3\,\underline{\underline{x}}^{(2)} - \underline{\underline{x}}^{(3)} \qquad \underline{\underline{d}} = 5\,\underline{\underline{x}}^{(1)} + 3\,\underline{\underline{x}}^{(2)} + 2\,\underline{\underline{x}}^{(3)}$$

(a) Bizonyítsd be, hogy $\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b}}, \underline{\underline{c}}$ vektorok lineárisan függetlenek!

(b) Fejezd ki a $\underline{\underline{d}}$ vektort $\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b}}, \underline{\underline{c}}$ vektorok lineáris kombinációjaként!

(a) Három vektor a térben akkor lineárisan független egymástól, ha a lineáris kombinációjuk akkor ad nullát, ha a vektorok együtthatói nullák.

$$\alpha\,\underline{\underline{a}} + \beta\,\underline{\underline{b}} + \gamma\,\underline{\underline{c}} = 0$$

egyenletnek csak az

$$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad \gamma = 0$$

eset lehet a megoldása. Beírva a vektorok kifejezéseit a következő egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha\,\underline{\underline{a}} + \beta\,\underline{\underline{b}} + \gamma\,\underline{\underline{c}} = \\ &= \alpha\left(\underline{\underline{x}}^{(1)} + 2\,\underline{\underline{x}}^{(2)} - \underline{\underline{x}}^{(3)}\right) + \beta\left(\underline{\underline{x}}^{(1)} - \underline{\underline{x}}^{(2)} + 4\,\underline{\underline{x}}^{(3)}\right) + \gamma\left(2\,\underline{\underline{x}}^{(1)} - 3\,\underline{\underline{x}}^{(2)} - \underline{\underline{x}}^{(3)}\right) = \\ &= \underline{\underline{x}}^{(1)}\left(\alpha + \beta + 2\gamma\right) + \underline{\underline{x}}^{(2)}\left(2\alpha - \beta - 3\gamma\right) + \underline{\underline{x}}^{(3)}\left(-\alpha + 4\beta - \gamma\right) \end{aligned}$$

Azt tudjuk, hogy $\underline{\underline{x}}^{(1)}$, $\underline{\underline{x}}^{(2)}$, $\underline{\underline{x}}^{(3)}$ vektorok lineárisan függetlenek, tehát az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha ezen vektorok együtthatói nullák. Ennek segítségével három egyenletet kapunk a három ismeretlenre.

$$\begin{cases} 0 = \alpha + \beta + 2\gamma \\ 0 = 2\alpha - \beta - 3\gamma \\ 0 = -\alpha + 4\beta - \gamma \end{cases}$$

Az első egyenlethez a harmadik egyenletet a másodikhoz pedig a harmadik egyenlet kétszeresét hozzáadva, a következő két egyenletre jutunk.

$$\begin{cases} 0 = 5\beta + \gamma \\ 0 = 7\beta - 5\gamma \end{cases}$$

Az első egyenlet ötszörösét hozzáadva a második egyenlethez, már csak egy ismeretlenünk marad.

$$0 = 32\beta$$

Ezt megoldva, majd visszahelyetesítve az előző egyenletekbe megkapjuk a megoldást.

$$\beta = 0 \quad \rightarrow \quad \gamma = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = 0$$

Tehát $\underline{\underline{a}}$, $\underline{\underline{b}}$, $\underline{\underline{c}}$ vektorok lineárisan függetlenek egymástól!

(b) Hasonlóképp kell eljárni, mint az előző esetben, csak itt $\underline{\underline{a}}$, $\underline{\underline{b}}$, $\underline{\underline{c}}$ vektorok lineárkombinációjának nem nullát, hanem a $\underline{\underline{d}}$ vektort kell kiadnia. Az egyenlet a következő alakban írható fel:

$$\underline{\underline{d}} = \alpha\,\underline{\underline{a}} + \beta\,\underline{\underline{b}} + \gamma\,\underline{\underline{c}}$$

Írjuk be megint a vektorok kifejtését.

$$\begin{aligned} 5\,\underline{\underline{x}}^{(1)} + 3\,\underline{\underline{x}}^{(2)} + 2\,\underline{\underline{x}}^{(3)} &= \alpha\left(\underline{\underline{x}}^{(1)} + 2\,\underline{\underline{x}}^{(2)} - \underline{\underline{x}}^{(3)}\right) + \beta\left(\underline{\underline{x}}^{(1)} - \underline{\underline{x}}^{(2)} + 4\,\underline{\underline{x}}^{(3)}\right) + \\ &+ \gamma\left(2\,\underline{\underline{x}}^{(1)} - 3\,\underline{\underline{x}}^{(2)} - \underline{\underline{x}}^{(3)}\right) \end{aligned}$$

Rendezzük az egyenletet, összegyűjtve az azonos vektorokat.

$$0 = \underline{\underline{x}}^{(1)} (\alpha + \beta + 2\gamma - 5) + \underline{\underline{x}}^{(2)} (2\alpha - \beta - 3\gamma - 3) + \underline{\underline{x}}^{(3)} (-\alpha + 4\beta - \gamma - 2)$$

Az együtthatóknak megint nullát kell adnia, így megint kapunk három egyenletet a három ismeretlenre.

$$\begin{cases} 5 = \alpha + \beta + 2\gamma \\ 3 = 2\alpha - \beta - 3\gamma \\ 2 = -\alpha + 4\beta - \gamma \end{cases}$$

Az első egyenlethez a harmadik egyenletet a másodikhoz pedig a harmadik egyenlet kétszeresét hozzáadva, a következő két egyenletre jutunk.

$$\begin{cases} 7 = 5\beta + \gamma \\ 7 = 7\beta - 5\gamma \end{cases}$$

Az első egyenlet ötszörösét hozzáadva a második egyenlethez, már csak egy ismeretlenünk marad.

$$42 = 32\beta$$

Ezt megoldva, majd visszahelyetesítve az előző egyenletekbe megkapjuk a megoldást.

$$\beta = \frac{21}{16} \quad \rightarrow \quad \gamma = \frac{7}{16} \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{45}{16}$$

Most már felírhatjuk a $\underline{\underline{d}}$ vektor kifejtését.

$$\underline{\underline{d}} = \frac{45}{16}\underline{\underline{a}} + \frac{21}{16}\underline{\underline{b}} + \frac{7}{16}\underline{\underline{c}}$$

2. Adott három vektor reprezentációja egy ortonormált bázisban:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Számoljuk ki a következő kifejezéseket:

$$\underline{a}\,\underline{b} \qquad (3\,\underline{a} - \underline{b})\,\underline{c} \qquad \underline{a} \times (\underline{b} + 2\,\underline{c})$$

(b) Mekkora szöget zár be a $\underline{b}$ és a $\underline{c}$ vektor?

(a) Vegyük sorra a kifejezéseket.

$$\underline{a}\ \underline{b} = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = 0$$

Tehát a két vektor merőleges egymásra.
A $(3\,\underline{a} - \underline{b})\,\underline{c}$ kifejezésnél először a zárójelben lévő tagot számoljuk ki.

$$3\,\underline{a} - \underline{b} = 3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-1\\3+1\\0-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$$

Most már könnyen elvégezhetjük a skaláris szorzást.

$$(3\,\underline{a} - \underline{b})\,\underline{c} = (3\,\underline{a} - \underline{b})_i\, c_i = 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 = -6$$

A harmadik kifejezésnél szintén a zárójeles taggal kell kezdeni.

$$\underline{b} + 2\,\underline{c} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-5\\4\end{pmatrix}$$

A vektoriális szorzat kiszámításának szabálya: $\underline{a} \times \underline{b} = \begin{pmatrix}a_2 b_3 - a_3 b_2\\ a_3 b_1 - a_1 b_3\\ a_2 b_1 - a_1 b_2\end{pmatrix}$

$$\underline{a} \times (\underline{b} + 2\,\underline{c}) = \begin{pmatrix}1 \cdot 4 - 0 \cdot (-5)\\ 0 \cdot 5 - 1 \cdot 4\\ 1 \cdot 5 - 1 \cdot (-5)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-4\\10\end{pmatrix}$$

(b) Két vektor hajlászögének meghatározására, a skaláris szorzat két kiszámítási módja ad lehetőséget.

$$\underline{b}\ \underline{c} = b_i c_i = bc\cos\alpha$$

Ahol b és c a két vektor hosszát, α pedig a közrezárt szöget jelenti.

$$b_i c_i = 2 + 2 + 2 = 6$$
$$b = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6} \quad c = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$$
$$\cos\alpha = \frac{b_i c_i}{bc} = \frac{6}{3\sqrt{6}} \quad \rightarrow \quad \alpha = 35.3°$$

3. Írjuk fel indexes írásmódban, egyszerűsítsük majd írjuk át vektoros alakra az $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c}$ kifejezést!
Ennek a kifejezésnek az eredménye egy vektor lesz, ezért indexes felírásnál ennek a vektornak az i. komponensét fejezzük ki. A felírásnál arra kell ügyelni, hogy két vektoriális szorzás van, ezért az eredményben két *Levi-Civita* szimbólum fog szerepelni.

$$((\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c})_i = \varepsilon_{jki}(\underline{a} \times \underline{b})_j c_k = \varepsilon_{jki}\varepsilon_{lmj} a_l b_m c_k = \varepsilon_{lmj}\varepsilon_{jki} a_l b_m c_k$$

Az egyszerűsítéshez alkalmazni kell egy fontos összefüggést, amely arról szól, hogy ha két *Levi-Civita* szimbólumnak van egy közös összegző indexe, akkor szorzatuk átírható a következő, *Kronecker delta* szimbólumokat tartalmazó, kifejezéssé.

$$\boxed{\varepsilon_{lmj}\varepsilon_{jki} = \delta_{lk}\delta_{mi} - \delta_{mk}\delta_{li}}$$

$$\varepsilon_{lmj}\varepsilon_{jki}a_l b_m c_k = (\delta_{lk}\delta_{mi} - \delta_{mk}\delta_{li})a_l b_m c_k = \delta_{lk}\delta_{mi}a_l b_m c_k - \delta_{mk}\delta_{li}a_l b_m c_k$$

További egyszerűsítést, a *Kronecker delta* szibólum biztosít. Ez a szimbólum csak akkor ad egyet, ha az indexei megegyeznek, ezért ha az egyik indexére összegzés van, akkor az összegből csupán az az egy tag marad meg, amelyben az összegző index megegyezik a másik indexszel. Tehát a *Kronecker delta* szimbólum megszünteti az egyik indexre vonatkozó összegzést és ahol a kifejezésben (a szorzatban) az az index szerepel, kicseréli a másik indexére.

$$\delta_{lk}\delta_{mi}a_l b_m c_k - \delta_{mk}\delta_{li}a_l b_m c_k = \delta_{mi}a_k b_m c_k - \delta_{mk}a_i b_m c_k$$

Az első tagban a δ_{lk} megszűnt és a szorzatban az l helyére k-t írtunk. A második tagban a δ_{li} szűnt meg és a szorzatban az l helyére i-t írtunk. A többi szimbólumot is hasonló módon eltüntetve.

$$\delta_{mi}a_k b_m c_k - \delta_{mk}a_i b_m c_k = a_k b_i c_k - a_i b_k c_k = b_i a_k c_k - a_i b_k c_k$$

Az első tagban az $a_k c_k$ a másodikban $b_k c_k$ skaláris szorzatokat jelölnek, így a végeredményt a következő alakban írhatjuk:

$$((\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c})_i = b_i(\underline{a}\,\underline{c}) - a_i(\underline{b}\,\underline{c}) \quad \rightarrow \quad (\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = \underline{b}(\underline{a}\,\underline{c}) - \underline{a}(\underline{b}\,\underline{c})$$

Nem használtuk ki sehol sem, hogy konkrétan milyen koordináta rendszert használunk, ezért ezek az összefüggések igazak koordináta rendszertől függetlenül is, azaz vektoros felírásban.

$$\left(\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{b}}\right) \times \underline{\underline{c}} = \underline{\underline{b}}\left(\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}}\right) - \underline{\underline{a}}\left(\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}\right)$$

4. Írjuk fel indexes írásmódban, majd egyszerűsítsük a $(\underline{a} \times \underline{b})(\underline{c} \times \underline{d})$ kifejezést!
A kifejezés értéke egy szám lesz, rögtön írhatjuk a skaláris szorzat majd a vektoriális szorzatok kifejtését.

$$(\underline{a} \times \underline{b})_k(\underline{c} \times \underline{d})_k = \varepsilon_{ijk}a_i b_j \varepsilon_{lmk}c_l d_m = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}a_i b_j c_l d_m$$

Alkalmazzuk megint a *Levi-Civita* szimbólumokra vonatkozó azonosságot.

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}a_i b_j c_l d_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{jl}\delta_{im})a_i b_j c_l d_m = \delta_{il}\delta_{jm}a_i b_j c_l d_m - \delta_{jl}\delta_{im}a_i b_j c_l d_m$$

Majd a *Kronecker delta* szimbólumok tulajdonságait felhasználva.

$$\begin{aligned}\delta_{il}\delta_{jm}a_i b_j c_l d_m - \delta_{jl}\delta_{im}a_i b_j c_l d_m &= \delta_{jm}a_l b_j c_l d_m - \delta_{jl}a_m b_j c_l d_m = \\ &= a_l b_m c_l d_m - a_m b_l c_l d_m = \\ &= a_l c_l b_m d_m - b_l c_l a_m d_m\end{aligned}$$

Végül írjuk vissza vektoros alakra a kifejezést.

$$a_l c_l b_m d_m - b_l c_l a_m d_m = (\,\underline{a}\;\underline{c}\,)(\,\underline{b}\;\underline{d}\,) - (\,\underline{b}\;\underline{c}\,)(\,\underline{a}\;\underline{d}\,)$$

Ebben a feladatban sem használtuk ki, hogy milyen koordináta rendszert használunk, így az eredményünk igaz vektoros alakban is.

$$\left(\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{b}}\right)\left(\underline{\underline{c}} \times \underline{\underline{d}}\right) = \left(\underline{\underline{a}}\;\underline{\underline{c}}\right)\left(\underline{\underline{b}}\;\underline{\underline{d}}\right) - \left(\underline{\underline{b}}\;\underline{\underline{c}}\right)\left(\underline{\underline{a}}\;\underline{\underline{d}}\right)$$

5. Milyen $\underline{\underline{r}}$ vektorokra lesz igaz a $\underline{\underline{r}} \times \underline{\underline{a}} = \underline{\underline{b}}$ egyenlet?
Az ilyen egyenleteket ugyanúgy kell vizsgálni, mint a paraméteres egyenleteket. Először meg kell vizsgálni a speciális eseteket.

   (a) $\underline{\underline{a}} = 0,\ \underline{\underline{b}} \neq 0$ Ebben az esetben az egyenletünk $0 = \underline{\underline{b}}$ alakú, aminek nincs megoldása.

   (b) $\underline{\underline{b}} = 0,\ \underline{\underline{a}} \neq 0$ Ebben az esetben az egyenlet $\underline{\underline{r}} \times \underline{\underline{a}} = 0$ alakú. A vektoriális szorzat definiciója alapján ekkor az $\underline{\underline{r}} = \alpha\,\underline{\underline{a}}$ alakú vektorok mind kielégitik az egyenletet, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (c) $\underline{\underline{a}} = 0,\ \underline{\underline{b}} = 0$ Ebben az esetben az egyenlet $0 = 0$ azonosság, tehát tetszőleges $\underline{\underline{r}}$ vektor megoldás.

   (d) $\underline{\underline{a}} \neq 0,\ \underline{\underline{b}} \neq 0,\ \underline{\underline{a}} \parallel \underline{\underline{b}}$ Ekkor a vektoriális szorzat definiciójából következik, hogy nincs megoldása az egyenletnek, mert a vektoriális szorzat eredménye mindig merőleges az összeszorzott vektorokra.

   (e) $\underline{\underline{a}} \neq 0,\ \underline{\underline{b}} \neq 0,\ \underline{\underline{a}} \nparallel \underline{\underline{b}}$ Ebben az esetben $\underline{\underline{a}},\ \underline{\underline{b}},\ \underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{b}}$ három lineárisan független vektor a térben. Keressük a megoldást a következő alakban.

$$\underline{\underline{r}} = \alpha\,\underline{\underline{a}} + \beta\,\underline{\underline{b}} + \gamma\,\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{b}}$$

Írjuk be ezt a kifejezést az egyenletbe.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{b}} &= \left(\alpha\,\underline{\underline{a}} + \beta\,\underline{\underline{b}} + \gamma\,\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{b}}\right) \times \underline{\underline{a}} \\ &= \alpha\,\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{a}} + \beta\,\underline{\underline{b}} \times \underline{\underline{a}} + \gamma\left(\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{b}}\right) \times \underline{\underline{a}} \\ &= 0 - \beta\,\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{b}} + \gamma a^2\,\underline{\underline{b}} - \gamma\,\underline{\underline{a}}\left(\underline{\underline{a}}\;\underline{\underline{b}}\right) \end{aligned}$$

Rendezzük az egyenletet egy oldalra.

$$0 = -\beta\,\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{b}} + (\gamma a^2 - 1)\,\underline{\underline{b}} - \gamma\,\underline{\underline{a}}\left(\underline{\underline{a}}\;\underline{\underline{b}}\right)$$

Három lineárisan független vekor lineáris kombinációja csak akkor adhat nullát, ha az együtthatók nullák, kapunk tehát három egyenletet.

$$\begin{cases} 0 = -\beta \\ 0 = \gamma a^2 - 1 \\ 0 = -\gamma\,\underline{\underline{a}}\;\underline{\underline{b}} \end{cases}$$

Az első észrevétel, hogy α nem szerepel az egyenletekben, így annak értéke tetszőleges. Az első egyenletből következik, hogy $\beta = 0$ viszont γ a második és a harmadik egyenletben is szerepel.

$$0 = \gamma a^2 - 1 \quad \rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{a^2}$$

$$0 = -\gamma \underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \gamma = 0 \text{ ha } \underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}} \neq 0 \\ \gamma = \text{tetszőleges ha } \underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}} = 0 \end{cases}$$

Csak akkor kapunk megoldást ha $\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}} = 0$, azaz ha $\underline{\underline{a}}$ és $\underline{\underline{b}}$ vektorok merőlegesek egymásra, ez várható volt a vektoriális szorzat definiciójából.
Tehát ebben az esetben a következő megoldást kaptuk:
Ha $\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}} \neq 0$, akkor ellentmondásra vezet a feladat, nincs megoldás.
Ha $\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}} = 0$, akkor $\alpha =$tetszőleges, $\beta = 0$, $\gamma = \frac{1}{a^2}$ és a megoldás a következő alakban írható:

$$\underline{\underline{r}} = \alpha \underline{\underline{a}} + \frac{1}{a^2} \underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{b}} \quad \text{ahol } \alpha \in \mathbb{R}$$

5.5. Feladatok

1. Adott három lineárisan független vektor a térben $\underline{\underline{x}}^{(1)}$, $\underline{\underline{x}}^{(2)}$, $\underline{\underline{x}}^{(3)}$ és ezekkel kifejezve hat vektor:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{a}} &= 3\underline{\underline{x}}^{(1)} + 2\underline{\underline{x}}^{(2)} + \underline{\underline{x}}^{(3)} & \qquad \underline{\underline{b}} &= -\underline{\underline{x}}^{(1)} - 2\underline{\underline{x}}^{(2)} + 7\underline{\underline{x}}^{(3)} \\ \underline{\underline{c}} &= \underline{\underline{x}}^{(1)} - \underline{\underline{x}}^{(2)} - \underline{\underline{x}}^{(3)} & \qquad \underline{\underline{d}} &= \underline{\underline{x}}^{(1)} + 3\underline{\underline{x}}^{(2)} + 2\underline{\underline{x}}^{(3)} \\ \underline{\underline{e}} &= \underline{\underline{x}}^{(1)} + \underline{\underline{x}}^{(2)} + \underline{\underline{x}}^{(3)} & \qquad \underline{\underline{f}} &= 5\underline{\underline{x}}^{(1)} - 4\underline{\underline{x}}^{(2)} + 2\underline{\underline{x}}^{(3)} \end{aligned}$$

   (a) Igaz-e, hogy a hat vektor közül bármely három lineárisan független egymástól?

   (b) A hat vektor közül válassz ki tetszőlegesen egyet és fejezd ki valamely másik három lineárkombinációjaként!

2. Egy koordináta rendszerben adottak a következő vektorok reprezentációi:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{e} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{f} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

   (a) Számold ki a hat vektor közül két tetszőlegesnek a skaláris szorzatát!

   (b) Számold ki a hat vektor közül két tetszőlegesnek a vektoriális szorzatát!

   (c) Számold ki a hat vektor közül két tetszőlegesnek a közrezárt szögét!

   (d) Számold ki a hat vektor közül három tetszőlegesnek a hármas vegyes szorzatát!

3. Írd át a következő kifejezéseket indexes írásmódra, ahol lehet egyszerűsíts és írd vissza őket vektoros alakra!

$$(a)\quad (\underline{a}\,\underline{b})(\underline{a}\times\underline{b}) \qquad (b)\quad ((\underline{a}\times\underline{b})\times\underline{c})\,\underline{a}$$
$$(c)\quad ((\underline{a}\times\underline{b})\times\underline{c})\times\underline{d} \qquad (d)\quad ((\underline{a}\times\underline{b})\times\underline{c})(\underline{d}\times\underline{e})$$
$$(e)\quad ((\underline{a}\times\underline{b})\times\underline{a})\,\underline{b} \qquad (f)\quad (\underline{a}\times\underline{b}+\underline{c})(\underline{b}\times\underline{c})$$

4. Oldd meg a következő vektoregyenleteket!

$$(a)\quad (\underline{r}\times\underline{a})+\underline{a}=\underline{b} \qquad (b)\quad (\underline{r}\times\underline{a})\times\underline{b}=\underline{a}$$
$$(c)\quad \underline{r}\times\underline{a}=(\underline{r}\,\underline{a})\,\underline{b} \qquad (d)\quad \underline{r}\times\underline{a}=\underline{r}\times\underline{b}$$

6. Lineáris operátorok

6.1. Lineáris operátor fogalma, tulajdonságai

Operátornak hívjuk azokat a függvényeket, amelyek valamely vektortéren értelmezettek és vektort adnak eredményül, ennek jelölésére a:

$$\underline{\underline{A}} : V_1 \to V_2 \quad \text{, azaz} \quad \underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{x}}\right) = \underline{\underline{y}}$$

kifejezés szolgál. Jelen jegyzetben csak euklédeszi vektorterekkel foglalkozunk. Általánosan elfogadott konvenció, hogy az operátorokat kétszeresen aláhúzott nagybetűkkel jelölik pl. $\underline{\underline{A}}$. Két operátor összege egy olyan operátor, amelyik úgy hat, mintha az eredeti operátorok hatását összeadnánk, azaz:

$$\left(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}\right)\left(\underline{\underline{a}}\right) = \underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{a}}\right) + \underline{\underline{B}}\left(\underline{\underline{a}}\right) .$$

Két operátor szorzatán egy olyan opertátort értünk, amelyik úgy hat, mintha a két operátor egymás után hatna a vektorra.

$$\left(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}\right)\left(\underline{\underline{a}}\right) = \underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{B}}\left(\underline{\underline{a}}\right)\right)$$

Itt nagyon kell vigyázni arra, hogy általában a szorzat nem felcserélhető! A szorzás azonban a definicióból következően asszociatív, tehát a zárójelezés elhagyható. Egységoperátoron azt az operátort értjük, amelyik minden vektorhoz saját magát rendeli.

$$\underline{\underline{E}}\left(\underline{\underline{a}}\right) = \underline{\underline{a}}$$

Egy operátor inverzén azt az operátort értjük, amelyik hatása után visszakapjuk az eredeti vektort. Megkülönböztetünk jobb és baloldali inverzet aszerint, hogy melyik operátor hat előbb. Inverz operátor nem mindig létezik, s ha létezik is nem biztos, hogy a jobb és baloldali megegyezik. Jelölésük:

$$\underline{\underline{A}}^{-1}\left(\underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{a}}\right)\right) = \underline{\underline{a}}$$

Vektortereken általában értelmezve van egy skaláris szorzat, ennek segítségével értelmezzük az operátorok transzponáltját:

$$\left(\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{b}}\right)\right) = \left(\underline{\underline{\tilde{A}}}\left(\underline{\underline{a}}\right), \underline{\underline{b}}\right)$$

Vagy a skaláris szorzat elöző fejezetben bevezetett jelölésével:

$$\underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{b}}\right) = \underline{\underline{\tilde{A}}}\left(\underline{\underline{a}}\right) \cdot \underline{\underline{b}}$$

Az operátorok sokfélék lehetnek, azonban a fizikában nagyon fontos szerepük van a lineáris operátoroknak melyek a következő tulajdonsággal rendelkeznek:

$$\underline{\underline{A}}\left(\alpha\,\underline{\underline{a}} + \beta\,\underline{\underline{b}}\right) = \alpha\,\underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{a}}\right) + \beta\,\underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{b}}\right) ,$$

ahol α és β valós számok. Erre nagyon jó példák a geometriai transzformációk, azaz forgatás, tükrözés és projekció. A definicióból következik, hogy a lineáris operátorok a nullvektorhoz a nullvektort rendelnek, ugyanis:

$$\underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{0}}\right) = \underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{a}} - \underline{\underline{a}}\right) = \underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{a}}\right) - \underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{a}}\right) = \underline{\underline{0}}$$

Egy érdekes kérdés, amely sokszor felmerül az alkalmazásokban, hogy egy adott lineáris operátorhoz tartoznak-e olyan vektorok, amelyeknek a képe az eredeti vektoroktól csak egy skalár szorzóban különbözik. Ez a kérdés csak akkor értelmes, ha az operátor ugyanabba a térbe képez le, amilyen térben hat. Ezeket a vektorokat sajátvektornak hívják és a skalár szorzókat pedig sajátértéknek:

$$\underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{a}}\right) = \lambda\, \underline{\underline{a}}$$

Tekintsük azt az operátor, amelyik egy $\underline{\underline{n}}$ vektor irányára vetít (projekció), ahol $\underline{\underline{n}}$ az egyszerűség kedvéért legyen egységvektor. A skalárszorzat geometriai jelentését figyelembe véve az operátor a következő módon hat egy tetszőleges vektorra:

$$\underline{\underline{P}}\left(\underline{\underline{a}}\right) = \underline{\underline{n}}\left(\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{a}}\right) = \left(\underline{\underline{n}} \circ \underline{\underline{n}}\right)\underline{\underline{a}} \quad \longrightarrow \quad \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{n}} \circ \underline{\underline{n}}$$

A skalárszorzat tulajdonságaiból következik, hogy ez az operátor lineáris. Sajátvektorai az $\underline{\underline{n}}$ vektorral párhuzamos vektorok illetve az arra merőleges vektorok, sajátértéke az első esetben $\lambda_{\mathrm{p}} = 1$, a második esetben $\lambda_{\mathrm{m}} = 0$.

6.2. Lineáris operátor reprezentációja

Alkossanak $\underline{\underline{e}}^{(i)}$ vektorok egy ortonormált bázist egy vektortérben. Az elöző fejezetben a bázis segítségével bevezettük a vektorok reprezentációját. Legyen $\underline{\underline{A}}$ egy lineáris operátor, továbbá tegyük fel, hogy:

$$\underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{a}}\right) = \underline{\underline{b}}$$

Az elöző fejezetben láttuk, hogy $\underline{\underline{a}} = a_i\, \underline{\underline{e}}^{(i)}$ és $\underline{\underline{b}} = b_i\, \underline{\underline{e}}^{(i)}$. Szorozzuk be az elöző egyenlet mindkét oldalát $\underline{\underline{e}}^{(j)}$-vel. Kihasználva a lineáris operátor tulajdonságait:

$$\underline{\underline{e}}^{(j)}\, \underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{a}}\right) = \underline{\underline{e}}^{(j)}\, \underline{\underline{A}}\left(a_i\, \underline{\underline{e}}^{(i)}\right) = a_i\, \underline{\underline{e}}^{(j)}\, \underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{e}}^{(i)}\right) = a_i A_{ji} = \underline{\underline{b}}\, \underline{\underline{e}}^{\,j} = b_j$$

Azt kaptuk eredményül, hogy egy lineáris operátort egy ortonormált bázisban egy 2 indexű számtömb, egy mátrix reprezentál. A mátrix oszlopai azok a vektorok, melyeket úgy kapunk, hogy az operátort hattatjuk a bázisvektorokra. A reprezentációt az operátortól jelölésben úgy különböztetjük meg, hogy csak egyszer húzzuk alá, hasonló módon, mint a vektorok reprezentálásánál. Összefoglalva:

$$\text{ha } \underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{a}}\right) = \underline{\underline{b}} \text{ akkor egy ortonormált bázisban } \underline{A}\; \underline{a} = \underline{b}$$

ahol $\underline{A}$ az $\underline{\underline{A}}$ lineáris operátort reprezentáló mátrix. A komponenseket kiírva:

$$b_i = A_{ij} a_j \quad \text{vagy másképp:} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

.

Ha felírjuk a transzponált mátrix definícióját valamely reprezentációban, megkapjuk hogyan kell a megfelelő komponenseket egymásba átszámolni.

$$A_{ij} = \underline{\underline{e}}^{(i)}\, \underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{e}}^{(j)}\right) = \underline{\underline{\tilde{A}}}\left(\underline{\underline{e}}^{(i)}\right)\, \underline{\underline{e}}^{(j)} = \underline{\underline{e}}^{(j)}\, \underline{\underline{\tilde{A}}}\left(\underline{\underline{e}}^{(i)}\right) = \tilde{A}_{ji}$$

Tehát a transzponált mátrixot az eredeti mátrix indexeinek felcserélésével kapjuk meg. Ha a lineáris operátorunk ugyanabba vektortérbe képez, mint amelyik téren hat, akkor az őt reprezentáló mátrix négyzetes, ebben az esetben a transzpozició a főtengelyre való tükrözést jelent.

Két lineáris operátor összegének reprezentációja a reprezentációk összege, az összegmátrixot úgy képezzük, hogy a két mátrix azonos indexű elemeit össze kell adni. Az összegnek csak akkor van értelme, ha két azonos dimenziójú mátrixot adunk össze (ez analóg azzal, hogy csak két olyan operátort adhatunk össze, amik azonos téren hatnak és azonos térbe képeznek).

$$(\underline{A} + \underline{B})_{ij} = \underline{e}^{(i)} \left(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} \right) \underline{e}^{j} = \underline{e}^{(i)} \underline{\underline{A}}\, \underline{e}^{j} + \underline{e}^{(i)} \underline{\underline{B}}\, \underline{e}^{j} = A_{ij} + B_{ij}$$

A számmal való szorzásnál hasonló levezetéssel kapjuk, hogy a mátrix minden elemét meg kell szorozni az adott számmal.

Két lineáris operátor szorzatának reprezentációja a reprezentációk, mint mátrixok, szorzata. A szorzatmátrix nem az azonos indexű elemek szorzatából áll, hanem az első mátrix sorainak elemeit kell megszorozni a második mátrix megfelelő oszlopainak elemeivel, majd a szorzatokat össze kell adni.

$$(\underline{C}\; \underline{b})_i = ((\underline{A}\; \underline{B})\; \underline{b})_i = A_{ij} (\underline{B}\; \underline{b})_j = A_{ij} B_{jk} b_k \quad \longrightarrow \quad C_{ik} = A_{ij} B_{jk}$$

A szorzat szemléltetésére álljon itt két 2x2-es mátrix szorzata:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

A determináns fogalmával találkoztunk a vektorok résznél. Ha egy 3x3-es mátrixot nézünk, akkor az oszlopaiból, mint vektorokból képzett vegyes szorzatot hívtuk determinánsnak. Ez a mennyiség megmutatta a három vektor által határolt paralellopipedon térfogatát. A lineáris operátort reprezentáló mátrixban az oszlopok a bázisvektorok képei. A determináns megmutatja, hogy a lineáris operátor hányszorosára változtatja egy alakzat térfogatát (területét...), csak négyzetes mátrixnak létezik determinánsa. Két dimenziós mátrixok esetén a determináns:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Több dimenziós mátrixok esetén alkalmazni lehet a kifejtési tételt. Ennek segítségével egy n dimenziós mátrix determinánsát visszavezethetjük n db $n-1$ dimenziós mátrix determinánsára. A tétel rekurzív alkalmazásával eljutunk a 2x2-es mátrixok (vagy 3x3 mátrixok) determinánsáig, amiket már könnyen kiszámolhatunk.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = + a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$- a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \dots$$

A sajátértékek és sajátvektorok kiszámítását a következő módon végezhetjük el. Írjuk fel a sajátvektorokra vonatkozó egyenleteket egy adott reprezentációban (koordináta rendszerben).

$$\underline{A}\,\underline{r} = \lambda\,\underline{r} \quad \longrightarrow \quad (\,\underline{A} - \lambda\,\underline{E}\,)\,\underline{r} = \underline{0}$$

Ez a kifejezés azonban az $\underline{r}$ vektor komponenseire egy lineáris egyenletrendszer, ha kiírjuk tagonként, akkor n darab n ismeretlenes egyenletet kapunk (a térben $n = 3$, síkban $n = 2$). Viszont egy ilyen egyenletrendszernek csak akkor van a triviálistól különböző megoldása, ha az $\underline{A} - \lambda\,\underline{E}$ mátrixnak a determinánsa nulla!

$$|\,\underline{A} - \lambda\,\underline{E}\,| = 0$$

Ebből a feltételből kapjuk a sajátértékeket, amiket visszaírva az egyenletekbe meghatározhatjuk a hozzájuk tartozó sajátvektorokat.

6.3. Kidolgozott feladatok

1. Határozzuk meg annak a projektornak a mátrixát, amelyik síkban hat és az $(1, 0)$ irányra vetít!
   A mátrix oszlopait megkapjuk, ha megnézzük, hogy a bázisunk egységvektorait mire képezi le az operátor:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

   ezek segítségével az operátorunk:

$$\underline{P}_{\,(1,0)\text{-ra vetít}} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

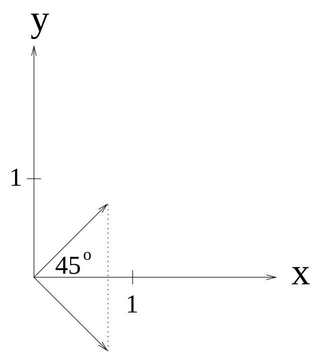
2. Határozzuk meg az xy-síkra tükröző operátor mátrixát!
   Ez az operátor a térben hat. Megint meg kell nézni, hogy a három bázisvektornak mi lesz a képe, majd a kapott vektorokat beírni a mátrix oszlopainak.

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

   Beírva a megfelelő oszlopokba a kapott vektorokat:

$$\underline{T} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

3. Számoljuk ki a z tengely körül az óramutató járásával egyirányba 45^o-os szöggel forgató operátor mátrixát!
   Amire nagyon oda kell figyelni, hogy ilyenkor ha a z tengely felénk néz, akkor az x tengely a $-y$ irányba az y tengely pedig az x irányba fordul el.



A rajzról leolvasható, hogy:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Tehát a forgató mátrixunk:

$$\underline{O} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

4. Számoljuk ki a z tengely körül az óramutató járásával egyirányba α szöggel forgató operátor mátrixát!
   Ha megnézzük az elöző ábrát a megfelelő szögfüggvényekkel kifejezhetjük a bázisvektorok képeit:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}\cos\alpha\\-\sin\alpha\\0\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}\sin\alpha\\\cos\alpha\\0\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

   Tehát a forgató mátrixunk:

$$\underline{O} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\-\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

   Az ellenkező irányú forgatást, ami éppen az inverz operátor úgy kapjuk, hogy α helyére $-\alpha$-t írunk. Ekkor a szögfüggvények tulajdonságai miatt éppen az eredeti mátrix transzponáltját kapjuk. Ez a mátrix azt fejezi ki, hogy ha a koordinátarendszert forgatjuk el, akkor az új rendszerben mi lesz a vektor reprezentációja.

$$\underline{\tilde{O}} = \underline{O}^{-1} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

5. Számoljuk ki az xy síkra tükröző operátor mátrixának determinánsát!
   Egy alakzat térfogatát ez a transzformáció nem változtatja meg, de a csúcsok sorrendjét meg-

változtatja. Nézzk mit kapunk, ha alkalmazzuk a kifejtési tételt:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= -1 - 0 + 0 = -1$$

Bizonyítható, hogy a tükrözés mátrixának determinánsa mindig -1

6. Számoljuk ki a determinánsát a z tengely körül forgató operátort reprezentáló mátrixnak! Szemléletesen azt várjuk, hogy a végeredmény egy lesz, mert a forgatás nem változtatja meg az alakzatokat, így a térfogatuk is megmarad. Számoljuk ki a determinánst a kifejtési tétel szerint:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos\alpha \begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \sin\alpha \begin{vmatrix} -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -\sin\alpha & \cos\alpha \\ 0 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= \cos\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\sin\alpha + 0 = 1$$

Bizonyítható, hogy a forgatás mátrixának determinánsa mindig 1.

7. Mik sajátértékei és sajátvektorai az alábbi 2x2 mátrixnak?

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

A sajátérték kiszámításához fel kell írni a $\underline{A} - \lambda\,\underline{E}$ mátrixot:

$$\underline{A} - \lambda\,\underline{E} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -3 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

aminek a determinánsát kiszámolva felírjuk a sajátértékegyenletet:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \longrightarrow \quad (1-\lambda)^2 - 9 = 0$$

Ennek az egyenletnek a megoldásai a $\lambda_1 = 4$ és $\lambda_2 = -2$. A két esetben a sajátvektort úgy kapjuk meg, ha visszaírjuk a sajátértékeket a vektoregyenletbe:

$$\begin{pmatrix} 1-4 & -3 \\ -3 & 1-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} -3x - 3y &= 0 \\ -3x - 3y &= 0 \end{cases}$$

Amiből azt kapjuk, hogy $x = 1$ és $y = -1$. A másik esetben:

$$\begin{pmatrix} 1-(-2) & -3 \\ -3 & 1-(-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} 3x - 3y &= 0 \\ -3x + 3y &= 0 \end{cases}$$

Amiből azt kapjuk, hogy $x = 1$ és $y = 1$. Összefoglalva a sajátértékek és normált sajátvektorok:

$$\lambda_1 = 4 \qquad \underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_2 = -2 \qquad \underline{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8. Mik a sajátértékei és sajátvektorai az alábbi 3x3 mátrixnak?

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Íjuk fel a $|\,\underline{A} - \lambda\,\underline{E}\,| = 0$ egyenletet:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \longrightarrow \quad (1-\lambda)\,((1-\lambda)\,(2-\lambda) - 6) = 0$$

Az egyenlet megoldásai $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1$ és $\lambda_3 = 4.$ A sajátvektor meghatározása $\lambda_1 = 1$-nél:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} 0 &= 0 \\ -x + 3z &= 0 \\ 2y + z &= 0 \end{cases}$$

Az egyenletrendszer megoldásával kapott normált sajátvektor: $\underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

A sajátvektor meghatározása $\lambda_2 = -1$-nél:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} 2x &= 0 \\ -x + 2y + 3z &= 0 \\ 2y + 3z &= 0 \end{cases}$$

Az egyenletrendszer megoldásával kapott normált sajátvektor: $\underline{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

A sajátvektor meghatározása $\lambda_3 = 4$-nél:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} -3x &= 0 \\ -x - 3y + 3z &= 0 \\ 2y - 2z &= 0 \end{cases}$$

Az egyenletrendszer megoldásával kapott normált sajátvektor: $\underline{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

6.4. Feladatok