Vektorszámítás 2012, indexes deriválás feladatok

Tisztelt elsős fizikusok!

Elérkeztünk a vektorszámítás anyag kritikus pontjához, az indexes deriváláshoz.
Erről a témáról sajnos nincs írott vagy nyomtatott feladatgyűjtemény, ezért most így küldök feladatokat.
Az első néhány feladat nehézségi sorrendben van, aztán már csak összevissza, ahogy a papírjaim közt találtam.
A feladat mindig az, hogy a végeredményt tisztán vektoros alakban fejezzük ki, de a részletszámítások során az indexes irásmódot (csakis azt!) valamint az Einstein-féle néma-index konvenciót alkalmazzuk.

Jelölések:

$\mathbf{r}$ a helyvektor
r az $\mathbf{r}$ vektor abszolút értéke
$\mathbf{e} = \mathbf{r}/r$ az $\mathbf{r}$ irányú egységvektor

$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ konstans vektorok
b a $\mathbf{b}$ vektor abszolút értéke
$\mathbf{n}$ konstans egységvektor

$\mathbf{M}$ tetszőleges konstans mátrix
$\mathbf{A}$ tetszőleges konstans antiszimmetrikus mátrix
$\mathbf{S}$ tetszőleges konstans szimmetrikus mátrix

N pozitív egész szám

$\times$ vektoriális szorzás
$\circ$ diadikus szorzás
a skaláris szorzást külön nem jelölöm

∇ nabla
grad, div, rot a szokásos vektoroperációk
Δ a Laplace-operátor

FELADATOK

1. div $\mathbf{r}$
2. rot $\mathbf{r}$
3. div $[\mathbf{r}/r^3]$ Ellenőrzés Gauss-tétellel – nocsak...
4. grad $(\mathbf{a}\,\mathbf{r})$
5. grad $(\mathbf{a}\,\mathbf{e})$
6. rot $(\mathbf{a} \times \mathbf{r})$
7. rot $(\mathbf{a} \times \mathbf{e})$
8. rot $[r^N\,(\mathbf{a} \times \mathbf{r})]$
9. div $[r^N\,(\mathbf{a} \times \mathbf{r})]$
10. grad $[1/(\mathbf{a}\,\mathbf{e})^N]$
11. grad $[(\mathbf{a}\,\mathbf{e})/(\mathbf{b}\,\mathbf{e})]$

12. $\operatorname{div}\left[\dfrac{\mathbf{r}}{r-(\mathbf{r}\mathbf{n})}\right]$ Ellenőrzés Gauss-tétellel, polárkoordinátákban integrálva

13. $\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{e})$

14. $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left[\dfrac{\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{r})}{(\mathbf{a}\,\mathbf{r})}\right]$

15. $\operatorname{rot}\left[(\mathbf{a}\nabla)\left(\dfrac{\mathbf{a}\times\mathbf{r}}{\mathbf{b}\,\mathbf{e}-b}\right)\right]$

16. $\Delta\,(\mathbf{eMe})$

17. $\Delta\,(\mathbf{eSe})$

18. $\Delta\,[\mathbf{eA}\,(\mathbf{b}\times\mathbf{e})]$

19. $\Delta\,[(\mathbf{a}\times\mathbf{e})(\mathbf{be})]$

20. $\Delta\,[(\mathbf{a}\,\mathbf{e})^N\,(\mathbf{b}\times\mathbf{e})]$

21. $\operatorname{div}\Big(r^N\,(\mathbf{b}\circ\mathbf{e})\,[\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{e})]\Big)$

22. $\operatorname{rot}\,[\mathbf{a}\,(\mathbf{e}\circ\mathbf{b})]$

23. $\operatorname{grad}\Big[(r^N\,\Delta(\mathbf{a}\,\mathbf{e})\Big]$

24. $\operatorname{rot}\left[\dfrac{\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\nabla)\mathbf{e}}{r^N}\right]$

25. $\operatorname{grad}\left((\mathbf{a}\times\nabla)\left[\mathbf{b}\times\dfrac{\mathbf{r}}{r^N}\right]\right)$

26. $\operatorname{grad}\Big[\mathbf{a}\Big((\mathbf{e}\circ\mathbf{b})(\mathbf{e}\circ\mathbf{a})\operatorname{rot}\,[((\mathbf{eb})(\mathbf{b}\times\mathbf{r}))]\Big)\Big]$

Nna. Ez mar annyi, mint a téridő dimenziója a bozonikus szuperhúr- elméletben. Ha valaki ezeket vegigsilabizálja, és megprobálja végigszámolni (a bonyolultabbakat esetleg nem is teljesen végig, csak a végső deriválások kijelöléséig), akkor már meg is tanult indexesen deriválni. De ha még nem, ennek alapján bármikor ki tud találni magának akárhány hasonló feladatot.

Sikeres es szintaktikailag helyes deriválgatást kívánok!

dgy