Matematikai módszerek a fizikában

Gyémánt Iván - Varga Zsuzsa

2008.

Tartalomjegyzék

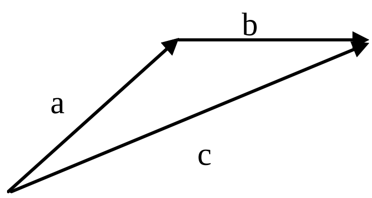
1. Vektoralgebrai bevezetés

1.1. Vektorok 3 dimenzióban, műveletek vektorokkal

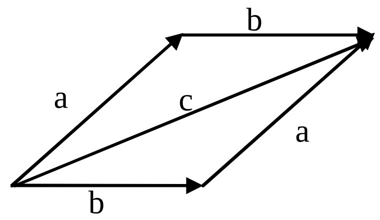
A fizikában gyakran találkozunk olyan mennyiségekkel, amelyeket csak egy adat (plusz a mértékegység) jellemez: tömeg, idő, hőmérséklet. Ezeket skalármennyiségeknek hívják. Ezzel ellentétben a fizikai mennyiségek egy másik csoportjának leírására nem elég csak a nagysága (plusz mértékegység), hanem az irányát is meg kell adni. Ilyenek pl: elmozdulás, sebesség, gyorsulás, erő, elektromos és mágneses térerősség, lendület, perdület, stb.. Ezeket vektormennyiségnek hívják.
A 3 dimenziós térben vektornak nevezünk egy nagysággal és iránnyal jellemzett mennyiséget. Jele félkövér betű **a**, **F**, **p**. A skalármennyiségeket normál betűvel jelöljük: t, x, a, β
A vektort egy irányított szakasznak képzeljük el, a szakasz hossza arányos a nagyságával, irányát a nyíl jelzi.

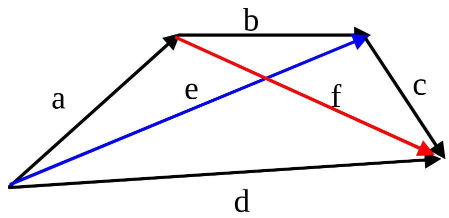
1.1.1. Összeadás:

$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$
Vektorok összegét a háromszög-szabály definiálja:



Az ábrát paralelogrammává egészítve ki, látszik, hogy az *összeadás kommutatív*:
$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
Három vektor összege
$\mathbf{d} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
Az ábrából látszik, hogy előbb összeadhatjuk **a** és **b**-t:
$\mathbf{e} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$,
majd ezt a **e** vektort hozzáadjuk **c**-hez:





$\mathbf{d} = \mathbf{e} + \mathbf{c}$
Vagy előbb összeadjuk **b** és **c**-t:
$\mathbf{f} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$,
és ezt adjuk hozzá az **a** vektorhoz:
$\mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{f}$
Összefoglalva:
$\mathbf{d} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
Vektorok összeadása *asszociatív.*
Megjegyzés:
A fizikai mennyiségek különböző vektorterekbe tartozó vektorokkal írhatók le. Ezzel itt nem foglalkozunk, de világos, hogy pl. az erő és elmozdulás vektorát nem lehet összeadni, csak az azonosfajta vektorokat.
A fizikában különböző vektorokat különböztetünk meg, amely összeadási szabálya nem azonos. Vannak szabad vektorok (a térben önmagukkal párhuzamosan tetszőleges tologathatók), eltolható vektorok (a hatásvonaluk mentén eltolhatók, mint az erő vektora), és kötött vektorok (mint a merev test egy pontjának sebessége).

1.1.2. Kivonás:

$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$
azaz definiálunk egy $-\mathbf{b}$ vektort, amelynek nagysága változatlan, iránya ellentétes. Az előző ábra szerint:
$\mathbf{a} = \mathbf{e} - \mathbf{b}$

1.1.3. Vektor szorzása számmal

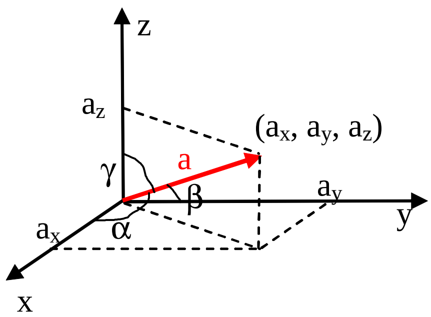
Az $\mathbf{a}$ vektor α számszorosa az $\alpha\mathbf{v}$ vektor, melynek iránya változatlan marad, hossza a szorzó arányában változik.

1.1.4. Nulla vektor (nullvektor)

$\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$.
$\mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{0}$
$0\ \mathbf{a} = \ \mathbf{0}$

1.2. Vektorok komponensei

A definícióból következik, hogy a vektor, mint geometriai objektum független bármely koordinátarendszertől, Vegyünk fel egy derékszögű koordinátarendszert és rajzoljuk be az $\mathbf{a}$ vektort az origóból indulva. A vektor végpontja az $(a_x,\ a_y,\ a_z)$ pontba mutat. Az $(a_x,\ a_y,\ a_z)$ számhármast tekintjük az $\mathbf{a}$ vektor derékszögű *komponens*einek.



Fontos vektor a helyvektor, amely egy test elmozdulását adja meg az origótól az (x, y, z) pontig. A helyvektor jele $\mathbf{r}$. Ha az $\mathbf{r}$ vektor hosszát $r-$rel jelöljük, leolvasható az ábráról, hogy
$x = r\cos\alpha, \qquad y = r\cos\beta \qquad z = r\cos\gamma$
A $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ mennyiségek neve *iránykoszinuszok*, pl. α a vektor és a pozitív x tengely közti szög, stb.
Választhatunk a vektor kétféle reprezentációja közt: a geometriai (irányított szakasz) szemléletes, az algebrai (a számhármas) alkalmas a konkrét számolásra és a vektorfogalom általánosítására. A két reprezentáció i*zomorf.*
A fizikában a vektormennyiségek rendszerint a hely (és idő) függvényei.
pl. $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ erővektor megfelel 3 db 3 változós függyvénynek: $F_x(x, y, z)$, $F_y(x, y, z)$, $F_z(x, y, z)$.
A vektormezők deriválása és integrálása ennek a jegyzetnek fő témája.
Vezessük be a koordinátatengelyek egységvektorait:
$\mathbf{i} = \mathbf{e}_x \longleftrightarrow (1, 0, 0)$
$\mathbf{j} = \mathbf{e}_y \longleftrightarrow (0, 1, 0)$
$\mathbf{k} = \mathbf{e}_z \longleftrightarrow (0, 0, 1)$
A vektorösszeadás szabálya szerint ekkor az $\mathbf{a}$ vektor így írható:
$\mathbf{a} = a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z$
A vektor hossza Pithagorasz tétele alapján:
$a = (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)^{1/2}$
Definiálhatjuk a *nulla-vektort*: hossza nulla, iránya tetszőleges.
$\mathbf{a} = \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_x = a_y = a_z = 0$
Elnevezések:
Az $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ vektorok kifeszítik a 3-dimenziós teret: bármely vektor felírható, mint az $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ vektorok lineáris kombinációja.
Az $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ vektorok lineárisan függetlenek, azaz a 3-dimenziós tér egy *bázis*át alkotják.
Megjegyezzük, hogy ily módon bármely 3 lineárisan független vektor bázis lehet, azaz kifejthető benne a tér bármely vektora. Ezekkel az ún. általános koordinátarendszerekkel a 9. fejezetben foglalkozunk.

1.2.1. Műveletek komponensekkel

összeadás, kivonás: $\mathbf{a} \pm \mathbf{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (a_x \pm b_x,\ a_y \pm b_y,\ a_z \pm b_z)$
szorzás számmal: $\beta\mathbf{a} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\beta a_x,\ \beta a_y,\ \beta a_z)$

vektorok egyenlősége: $\mathbf{a} = \mathbf{b} \iff a_x = b_x,\ a_y = b_y,\ a_z = b_z$

További műveletek lesznek a skalár vagy belső szorzás, a vektori szorzás. Vektorral osztás műveletét nem lehet értelmezni.

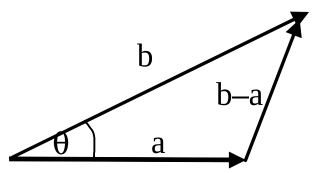
1.3. Skalárszorzat és tulajdonságai

A skalárszorzat definíciója:

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a\ b\ \cos\theta = a_b\ b = a\ b_a$

ahol a és b a vektorok hossza, θ a köztük lévő szög, a_b az $\mathbf{a}$ vetülete $\mathbf{b}$ egyenesére, stb.

Egyelőre csak a vektor hosszának kiszámítási módját ismerjük. Ezért a defíníciót olyanra alakítjuk, hogy $\cos\theta$ ne szerepeljen benne.



Tegyük fel, hogy egyik vektor sem nulla, akkor az ábrán szereplő háromszögre felírhatunk egy koszinusz-tételt:

$|\mathbf{b} - \mathbf{a}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta.$

ebből:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{b} - \mathbf{a}|^2\right)$$

A skalárszorzat tulajdonságai:

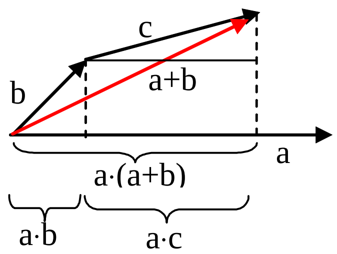
1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (szimmetrikus)
2. ha $a\ b = 0$, akkor $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.
3. ha $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, akkor $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 = a^2 > 0$, ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ (pozitív)
4. ha $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, akkor $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egymásra merőleges.

Bizonyítás: $0 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a\ b\ \cos\theta$. Ez a kifejezés akkor nulla, ha a) vagy $a\ b = 0$, de ekkor $\mathbf{a}$ vagy $\mathbf{b}$ nullavektor, aminek iránya tetszőleges, vagy b) $\cos\theta = 0$, ekkor $\theta = \pi/2$.

5. A skalárszorzat értéke független a koordinátarendszertől. Biz.: definíció szerint csak a vektorok hossza szerepl benne, ami független a vonatkoztatási rendszertől.
6. A skalárszorzat komponensekben:
legyen $\mathbf{a}\tilde{}(a_x,\ a_y,\ a_z)$ és $\mathbf{b}\tilde{}(b_x,\ b_y,\ b_z)$
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-|\mathbf{b}-\mathbf{a}|^2\right) = \frac{1}{2}[a_x^2+a_y^2+a_z^2+b_x^2+b_y^2+b_z^2-(b_x-a_x)^2-(b_y-a_y)^2-(b_z-a_z)^2]$, azaz

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

7. A skalárszorzat disztributív:
$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$, bármely $\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}$ vektorra.

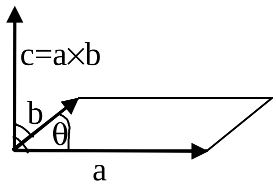


Bizonyítás: az ábrából leolvasható, vagy komponensekkel kiszámíthatjuk.
8. Asszociatív tulajdonság: $(\lambda\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\cdot\lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$
Az 1., a 3., a 7. és a 8. tulajdonság alapján használatos az a beszédmód, hogy a skalárszorzat *pozitív, szimmetrikus, homogén, bilineáris* függvény.
Példák: 1. A munka a fizikában az erő és az elmozdulás skalárszorzata.
2. A bázisvektorok skalárszorzatai:
$\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3 = 1, \qquad \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_1 = 0$
Ez egy *ortonormált* bázis. A kapott eredményt összefoglalva:
$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j = \begin{cases} 1, & \text{ha } i=j \\ 0, & \text{ha } i\neq j \end{cases}, \qquad i,j=1,2,3$$
A Kronecker-delta
Sokszor használjuk a következő, Kronecker-delta néven ismert szimbólumot:
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i=j \\ 0, & \text{ha } i\neq j \end{cases}, \qquad i,j=1,2,3$$

Így a bázis ortonormált voltát röviden így írhatjuk:
$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3)$.

1.4. Vektori szorzat

Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektori szorzata az a $\mathbf{c}$ vektor, melynek nagysága
$c = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin\theta$, a kifeszített paralelogramma területe, iránya merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok síkjára, és $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot.



Példák:
A fizikában vektori szorzat pl. a forgatónyomaték, a perdület, a mozgó töltésre ható erő.
Tulajdonságok:
1. A definícióból következik, hogy $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (antiszimmetrikus)
2. $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$
3. Ha $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, akkor a két vektor párhuzamos.
4. Disztributív: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$

Bizonyítás: *ide kell egy bizonyítás!!!!*

5. Asszociatív: $\mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

1.4.1. A vektori szorzat derékszögű komponensekben

Határozzuk meg előbb a bázisvektorok "szorzótábláját".
Mivel $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot és páronként merőleges egységvektorok, kapjuk:
$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$
$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \qquad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$

Az eredmény egy sorban is összefoglalható, ha használjuk az ún. *Lévi-Civita-szimbólum*ot, melynek definíciója:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, \text{ ha } i,j,k \text{ az } 1,2,3 \text{ számok ciklikus permutációja} \\ -1, \text{ha } i,j,k \text{ az } 1,2,3 \text{ számok páratlan permutációja} \\ 0, \text{ egyébként} \end{cases}$$

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k$$

A komponensek kiszámításához felhasználjuk a szorzótáblát és a vektori szorzás disztributív tulajdonságát.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z) \times (b_x\mathbf{e}_x + b_y\mathbf{e}_y + b_z\mathbf{e}_z) = c_x\mathbf{e}_x + c_y\mathbf{e}_y + c_z\mathbf{e}_z) = \mathbf{c}$$

Az eredmény nem lesz egyszerű:

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y, \qquad c_y = a_z b_x - a_x b_z, \qquad c_z = a_x b_y - a_y b_x$$

vagy röviden:

$c_i = a_j b_k - a_k b_j,$ ahol i,j,k az $1,2,3$ ciklikus permutációja.

Fölírhatjuk a Lévi-Civita szimbólummal is:

$$c_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

A vektori szorzat memorizálása legkényelmesebb, ha determináns alakban írjuk föl:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

1.5. Vektorok többszörös szorzatai

Vegyes szorzat:

$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$,

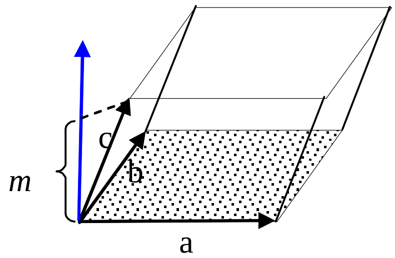
az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon (előjeles) térfogata. Az ábra szerint az alaplap (pontozott) területe $T = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, a magasság $m = |\mathbf{c}| \cos\theta$.

Az ábrából leolvasható a vektori szorzat fontos tulajdonsága:

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

A vegyes szorzat a ciklikus permutációra invariáns.

Ugyanez a tulajdonság leolvasható a vegyes szorzat kifejtéséből is. A skalár és vektori szorzat komponens előállítását fölhasználva:



$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

A determináns sorait ciklikusan felcserélve , annak értéke nem változik.
Példa.
Ha $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ =0, akkor a 3 vektor egy síkban van.
Tehát a vegyes szorzat segítségével eldönthető, hogy 3 vektor lineárisan független-e, és ha igen, akkor jobb- vagy balsodrású-e.
Kettős vektori szorzat
Igazoljuk, a következő azonosságot (a kettős vektori szorzat kifejtési tétele) komponens használata nélkül:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\ (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}\ (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$$

Bizonyítás. A $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ vektori szorzat merőleges a $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok síkjára. Ezért az $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ vektor, ami merőleges a $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ vektorra, a $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok síkjában lesz. Így
$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = x\mathbf{b} + y\mathbf{c}$,
ahol x és y ismeretlen skalárok. Szorozzuk az egyenetet skalárisan $\mathbf{a}$ vektorral.
$0 = x(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) + y(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})$, mivel $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ merőleges az $\mathbf{a}$-ra.
Ennek megoldása lehet
$x = z\ (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})$, és $y = -z\ (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$, keressük z értékét. Visszaírjuk az eredeti egyenletbe
$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = z(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\ \mathbf{b} - z\ (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\ \mathbf{c}$
Megmutatjuk, hogy $z = 1$.
Mivel az egyenlet lineáris, az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok helyett tekinthetünk egységvektorokat. Vezessük be a következő jelöléseket:

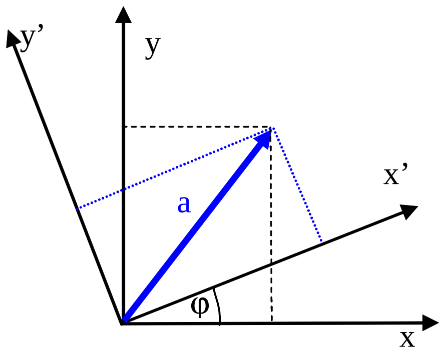
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \cos\gamma, \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = \cos\beta, \qquad \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \cos\alpha$
$|\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|^2 = |\mathbf{a}|^2\,|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|^2\sin^2\theta = |\mathbf{a}|^2\;|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|^2\,(1-\cos^2\theta) = |\mathbf{a}|^2\,|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|^2 -$
$|\mathbf{a}|^2\,|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|^2\cos^2\theta =$
$|\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|^2 = |\mathbf{b}\times\mathbf{c}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c})^2 = 1-\cos^2\alpha - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c})^2$
Másrészt a jobb oldal:
$z^2[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})^2+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2-2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\;(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\;(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})] = z^2[\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\beta\,\cos\gamma\,\cos\alpha]$
Kapjuk, hogy
$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c})^2 = 1-\cos^2\alpha - z^2[\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\beta\;\cos\gamma\;\cos\alpha]$
Mivel a baloldalon ciklikusan cserélni lehet a vektorokat, következik, hogy a jobb oldalon is α,β,γ cserélődik.
Ez csak úgy lehet, ha $z^2 = 1$, azaz $z = \pm 1$.
Nézzünk egy speciális esetet:
$\mathbf{e}_1\times(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2$, másrészt
$z(\mathbf{e_1}\cdot\mathbf{e_2})\;\mathbf{e_1} - z\;(\mathbf{e_1}\cdot\mathbf{e_1})\;\mathbf{e}_2 = -z\mathbf{e}_2 \qquad\Longrightarrow\qquad z = 1$

A fizikában gyakran használják még a következő azonosságot is:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$$

1.6. Vektorok forgatása

Egy természeti törvény nem függhet attól, hogy a leírására milyen koordinátarendszert használunk.
A vektorokkal (tenzorokkal) való leírás azért jó, mert ezek a mennyiségek függetlenek a vonatkoztatási rendszertől. De ha a komponenseket írjuk föl, akkor már használtunk koordinátarendszert. Kérdés, mi a kapcsolat az egyik és másik koordinátarensdszerben felírt vektorkomponensek között ?
Olyan vektortranszfomációt keresünk, ami a vektorok hosszát, és a vektorok közti szöget változatlanul hagyja. Ezeknek neve ortogonális transzformáció. Két ilyen transzformáció van, a forgatás, és a tükrözés.
Nem a vektort forgatjuk (aktív forgatás), hanem a koordinátarendszert (passzív forgatás). Nézzünk egy 2 dimenziós példát, egy z-tengely körüli φ szögű (passzív) forgatást:
Leolvasható az ábrából, egybevágó háromszögeket használva, hogy az **a** vektor komponeseire fennáll:
$a\,'_x = a_x\cos\varphi + a_y\sin\varphi$



$a\,'_y = -a_y \sin\varphi + a_y \cos\varphi$
Vezessük be a következő jelöléseket:
$\alpha_{11} = \cos\varphi, \qquad \alpha_{12} = \sin\varphi,$
$\alpha_{21} = -\sin\varphi, \qquad \alpha_{22} = \cos\varphi.$
A transzformáció:
$a'_1 = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2$
$a'_2 = \alpha_{21}a_1 + \alpha_{22}a_2$
röviden: $\qquad a'_i = \alpha_{ij}a_j$
Az α_{ij} mennyiségek neve *iránykoszinuszok*, az x'_i új tengely és az x_j régi tengely közti szög koszinusza:
$\alpha_{ij} = \cos(x'_i, x_j)$
például $\alpha_{12} = \cos(x', y) = \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \sin\varphi$
$\alpha_{21} = \cos(y', x) = \cos(\frac{\pi}{2} + \varphi) = -\sin\varphi$
Megjegyzés: a forgatást eredetileg az egy darab φ szöggel írtuk le. Helyette 4 db α_{ij} iránykoszinuszunk van. Mert a bevezetett α_{ij}-k nem függetlenek.
Háromdimenzióra kiterjesztve a koordinátarendszer forgatását, azt mondjuk, hogy vektornak nevezzük azt a 3 komponensű mennyiséget, amelynek a komponensei a forgatásra
$v'_i = \alpha_{ij}v_j$
módon transzformálódnak, ahol α_{ij} a forgatás mátrixa (iránykoszinuszok).
Inverz forgatás:

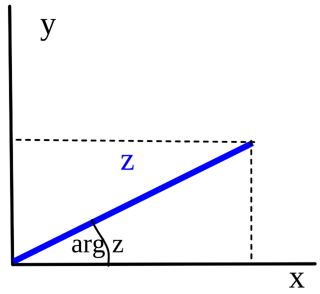
Nem nehéz belátni, hogy fordított irányban a vektorkomponensek transzformációjára a
$v_i = \alpha_{ji} v'_j$
érvényes.
Az α_{ij} mátrix ún. ortogonális mátrix, azaz amelyre fennállnak az ún. ortogonalitási relációk:
$\alpha_{ij}\alpha_{ik} = \delta_{jk}$, vagy $\alpha_{ji}\alpha_{ki} = \delta_{jk}$,
mivel a koordinátarendszert oda, majd vissza forgatva az eredeti vektorkomponest kell visszakapnunk.
Mátrixalakban: $\alpha\ \alpha^T = E$, vagyis $\alpha^T = \alpha^{-1}$
Megjegyzés. Az ortogonalitási relációk miatt 2-dimenzóban a forgatás $4 - 3 = 1$ adattal, 3-dimenzióban $9 - 6 = 3$ adattal írható le. Ez a 3 adat rendszerint az ún. *Euler -féle szögek.*

2. Komplex számok

2.1. Műveletek komplex számokkal

Az $x^2 + 1 = 0$ egyenletnek nincs valós megoldása.
$z^2 + 1 = 0$ egyenletnek "van-e megoldása?": z nem valós szám
$z^2 = -1$ az ilyen z-t i-vel jelöljük: $i^2 = -1$
Az i neve *képzetes egység.*
Próbálkozzunk két valós komponesű mennyiséggel.
$z \to (x, y)$
$z^2 = -1$
Mit értünk z^2-en? $z \cdot z = x \cdot x$? $y \cdot y$?$x \cdot y$
Értelmezni szükséges a szorzást, az összeadást, stb.
Legyen definíció szerint:
$(a,\ b) \pm (c,\ d) = (a \pm c,\ b \pm d)$
$(a, b) \cdot (c,\ d) = (ac - bd,\ ad + bd)$
A nulla: $(0, 0)$.
Az egység: $(1, 0)$.
A valós számokra maradjanak meg az ismert számolási szbályok!
Ha $z = (x, 0)$ valós szám
$(a,\ 0) \pm (c,\ 0) = (a \pm c,\ 0)$
$(a, 0) \cdot (c,\ 0) = (ac,\ 0)$

A fenti definíció ezt teljesíti.
Mi lesz a reciprok?
$(a, b) \cdot (c,\ d) = (1, 0) \qquad c =? \qquad d =?$
$ac - bd = 1$
$ad + bd = 0$
megoldva az egyenletrendszert, kapjuk:
$(c, d) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right), \qquad (a^2 + b^2 \neq 0$, vagyis ha a komplex szám nem nulla)
A reciprok jelölése $(a, b)^{-1}$
$z^2 = (x^2 - y^2, 2xy) = (-1, 0) \qquad \Longrightarrow x = 0,\ y = \pm 1$
$z^2 = -1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = (0, \pm 1)$
A $z = (0, 1)$ komplex számot képzetes egységnek nevezzük, jele i. Valóban, $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$, azaz $i^2 = -1$.
Szorzás valós számmal:
$(a, 0) \cdot (c, d) = a(c, d) = (ac, ad)$
Szorzás képzetes számmal:
$(0, b) \cdot (c, d) = (-bd, bc)$
z komplex konjugáltja: $z^* = (x, y)^* \equiv (x, -y)$. (Megjegyzés: szokásos a $\bar{z}$ jelölés is)
$i^* = -i$
valós szám komplex konjugáltja: önmaga
képzetes szám komplex konjugáltja: önmaga (-1)-szerese
$i^{-1} = -i, \qquad i^2 = -1, \qquad \frac{1}{i} = -i$
Egyszerűbb írásmód:
(x, y) helyett $x + iy$
$(x, 0) + (0, y) = x + y(0, 1)$
$(a + ib) \cdot (c + id) = ac + iad + ibc + ibid = ac - bd + i(ad + bc)$
$(a + ib)^* = a - ib$
$$\frac{1}{a + ib} = \frac{(a - ib)}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{z^*}{|z|^2}$$
$zz^* = x^2 + y^2 = |z|^2, \qquad z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2}$



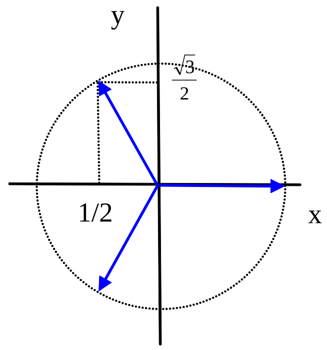
2.2. A komplex számsík

$x = \mathrm{Re}\{z\}$, $y = \mathrm{Im}\{z\}$
$|z| = \sqrt{x^2+y^2} \qquad (\equiv r)$
$\arg z = \mathrm{arctg}\dfrac{\mathrm{Im}\{z\}}{\mathrm{Re}\{z\}} \qquad (\equiv \varphi)$
$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$z = (x, y) = x+iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ trigonometrikus alak (Moivre)
$z^2 = r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + i2\cos\varphi\sin\varphi) = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$
$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$
A z n-edik gyöke olyan szám (jele $\sqrt[n]{z}$), amelynek n-edik hatványa z. Komplex számok esetén n darab ilyen szám van. A z n-edik gyökei:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n})$$
$$\cos\frac{\varphi+2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi}{n}$$
$$\cos\frac{\varphi+4\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+4\pi}{n}$$
$$\vdots$$
$$\cos\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}$$

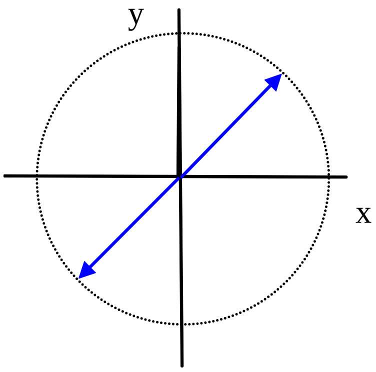
Szorzás:
$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)$
bizonyítás: $(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)$
Példák:

1. $\sqrt[3]{(1,0)} = \begin{cases} \cos\frac{0}{3} + i\sin\frac{0}{3} = 1 \\ \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$



$$\left[\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}\right]^3 = \frac{1}{8}(-1+3i\sqrt{3}+3(-1)i^2+i^3 3) = \frac{1}{8}(-1+9) = 1$$

2. $\sqrt{i} = \sqrt{(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})} = \begin{cases} \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \\ \cos(\frac{\pi}{4}+\pi) + i\sin(\frac{\pi}{4}+\pi) \end{cases} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \end{cases}$



2.3. A komplex számtest ($\mathbb{C}$)

A komplex számok halmazán értelmeztük az összeadást és a szorzást. Mindkét művelet kommutatív és asszociatív, továbbá minden komplex számnak van additív inverze, illetve minden nem-nulla számnak van multiplikatív inverze (reciproka).
Nevezetes komplex számok: $0,\ 1,\ i$.

A komplex számok halmaza a fenti műveletekkel ún. *test*, jele $\mathbb{C}$ (az ún. komplex számtest).
A valós számok halmaza ($\mathbb{R}$) résztestje $\mathbb{C}$-nek.
Érvényes a következő tétel (az algebra alaptétele):
A komplex számtesben egy n-ed fokú egyenletnek n gyöke van, vagyis egy komplex együtthatós n-ed fokú polinom
$f_n(z) = c(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$
elsőfokú gyöktényezők szorzatára bontható ($c \neq 0$).

3. Euklideszi terek

3.1. Valós euklideszi terek

Tekintsünk egy V véges dimenziós vektorteret az $\mathbb{R}$ valós számtest fölött (pl. a valós számhármasok 3-dimenziós vektorterét)!
A V vektorteret (valós) *euklideszi tér*nek nevezzük, ha meg tudunk adni egy ún. belső vagy skalárszorzatot.

3.1.1. Belső szorzat (skalárszorzat), norma, szög, távolság

Valós esetben a *belső szorzat* egy S szimmetrikus bilineáris pozitív definit függvény (leképezés).
(Pl. a valós számhármasok vektortere euklideszi tér a szokásos skalárszorzattal:
$x = (x_1, x_2, x_3), \qquad y = (y_1, y_2, y_3)$
$S(x, y) \equiv \sum_{i=1}^{3} x_i y_i \in \mathbb{R}$ szimmetrikus bilineáris pozitív definit függvény)
Belátható, hogy a valós szám n-esek tere is valós euklideszi tér az
$S(x, y) \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ skalárszorzattal.
(Az S jelet gyakran el is hagyják: $S(x, y) \equiv (x, y)$)
Egy euklideszi térben a *vektorok hossza (normája)* mindig definiálható a skalárszorzat segítségével:
$\|x\| \equiv \sqrt{(x, x)}$ (≥ 0).

Tétel: euklideszi térben bármely x és y vektorra érvényes az ún. Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenség (CBS):

$$|(x,y)| \leq \|x\| \, \|y\| \, .$$

(Megjegyzés: az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha az x és y vektor kolineáris.)
Bizonyítás:
Ha $x = 0$, akkor nyilván igaz. Tfh. $x \neq 0$. Ekkor bármely valós λ-ra $0 \leq \|\lambda x - y\|^2 = (\lambda x - y, \lambda x - y) = \ldots = \lambda^2 \|x\|^2 - 2(x,y)\lambda + \|y\|^2$, ezért ennek a λ-ban másodfokú polinomnak nem lehet két különböző valós gyöke, vagyis a diszkriminánsa nem lehet pozitív:
$(-2(x,y))^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$.
Ebből az állítás már következik.
Könnyű belátni, hogy egy euklideszi tér - a fenti hosszúságfogalommal - *metrikus tér* is, azaz a hosszúságfogalom kielégíti az alábbi követelményeket:
a) $\|x\| \geq 0$ és $\|x\| = 0 \iff x = 0$
b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (háromszög egyenlőtlenség)
Az a) és b) nyilvánvaló, c) pedig a CBS egyenlőtlenség következménye:
$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \leq \|x\|^2 + 2|(x,y)| + \|y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$.
A hosszúságfogalom lehetővé teszi a *távolság* értelmezését:
Az x és y vektorok távolsága
$d(x,y) \equiv \|x - y\|$.
Egy euklideszi tér ezzel a távolság fogalommal ún. *metrikus tér*, hiszen kielégíti az alábbi követelmányeket:
a) $d(x,y) \geq 0$, és $d(x,y) = 0 \iff x = y$
b) $d(x,y) = d(y,x)$
c) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$
A bizonyítást az olvasóra bízzuk.
Valós euklideszi térben értelmezhető az x és y ($\neq 0$) vektorok által bezárt szög (α):
$\cos\alpha = \dfrac{(x,y)}{\|x\| \, \|y\|}$,
mivel a jobb oldali kifejezés a $[-1,1]$ intervallumba esik.

Definíció: az x és y vektorok *ortogonálisak* (merőlegesek), ha $(x, y) = 0$.
(Megjegyzés: a nulla-vektor minden vektorra merőleges).
Egy $x \neq 0$ vektort alkalmas számmal megszorozva mindig elérhető, hogy a hossza 1 legyen (ún. normálás).

3.1.2. Gram-Schmidt ortogonalizálás

Az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ vektorrendszert *ortonormáltnak* nevezzük, ha páronként merőlegesek, és hosszuk 1:

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \qquad (i, j = 1, \ldots, k)$$

Az A $n \times n$-es mátrixot *ortogonális mátrix*nak nevezzük, ha sorvektorai ortonormált vektorrendszert alkotnak, vagyis ha
$AA^T = E$, azaz $A^T = A^{-1}$
Az euklideszi tér tetszőleges $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bázisából (az ún. *Gram-Schmidt-féle ortogonalizálással*) elő tudunk állítani egy $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ortogonális bázist, vagyis euklideszi térben van ortonormált bázis.
Az ortogonalizálási algoritmus alapötlete a következő:
Legyen $e_1 = v_1$ és $e_2 = v_2 + \lambda_{21} e_1$.
Válasszuk meg λ_{21}-et úgy, hogy e_2 legyen merőleges e_1-re!
$(e_2, e_1) = (v_2 + \lambda_{21} e_1, e_1) = (v_2, e_1) + \lambda_{21}(e_1, e_1) = 0$,
ebből

$$\lambda_{21} = -\frac{(v_2, e_1)}{(e_1, e_1)}.$$

Legyen $e_3 = v_3 + \lambda_{31} e_1 + \lambda_{32} e_2$, és válasszuk meg λ_{31}-t és λ_{32}−t úgy, hogy e_3 legyen merőleges e_1-re és e_2−re!

$$(e_3, e_1) = (v_3, e_1) + \lambda_{31}(e_1, e_1) + \lambda_{32}\underbrace{(e_2, e_1)}_{0} = 0, \text{ stb.}$$

Ezekből

$$\lambda_{31} = -\frac{(v_3, e_1)}{(e_1, e_1)}, \qquad \lambda_{32} = -\frac{(v_3, e_2)}{(e_2, e_2)}.$$

(Az eljárás folytatása és az így kapott ortogonális bázis normálása értelmszerű.)

3.1.3. Lineáris transzformáció mátrixa

Euklideszi térben az $\mathcal{A}x \to y$ lineáris transzformációt *szimmetrikusnak* nevezzük, ha minden x, y-ra teljesül, hogy
$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y)$.
Könnyű belátni, hogy ha $\mathcal{A}$ szimmetrikus, akkor mátrixa bármely ortonormált bázisban szimmetrikus, és fordítva, ha egy lineáris transzformáció mátrixa valamely ortonormált bázisban szimmetrikus, akkor a lineáris transzformáció szimmetrikus.
Legyen ugyanis $e_1, \ \ldots, \ e_n$ ortonormált bázis: $(e_i, \ e_j) = \delta_{ij}$.

$$\mathcal{A}e_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} e_k, \ \ x = \sum x_i e_i, \ \ y = \sum y_j e_j$$

$$(\mathcal{A}e_i, \ e_j) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}(e_k, e_j) = \alpha_{ji}$$

$$(e_i, \ \mathcal{A}e_j) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj}(e_i, e_k) = \alpha_{ij}$$

Ha $\mathcal{A}$ szimmetrikus, akkor $\alpha_{ji} = \alpha_{ij}$, vagyis az $\mathcal{A}$ mátrixa szimmetrikus:
$[\mathcal{A}] = [\mathcal{A}]^T$
Fordítva, ha $\alpha_{ki} = \alpha_{ik}$, akkor
$(\mathcal{A}x, y) = \sum x_i \sum y_j (\mathcal{A}e_i, e_j) = \sum \alpha_{ji} x_i y_j$,
$(x, \mathcal{A}y) = \sum x_i \sum y_j (e_i, \mathcal{A}e_j) = \sum \alpha_{ij} x_i y_j$,
vagyis $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y)$
Feladatok: Szimmetrikusak-e az 9.1 pont tenzorai?

3.1.4. Szimmetrikus transzformációk sajátbázisa, diagonalizálás

A fizikai alkalmazások szempontjából nagyon fontos az alábbi
Tétel: Valós euklideszi térben tetszőleges $\mathcal{A}$ szimmetrikus lineáris transzformáció esetén van az $\mathcal{A}$ sajátvektoraiból álló ortonormált bázis. Ebben a bázisban $\mathcal{A}$ mátrixa diagonális, a diagonális elemek az $\mathcal{A}$ sajátértékei:
$\mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i \qquad (\bar{\lambda}_i = \lambda_i), \qquad (e_i, e_j) = \delta_{ij}, \qquad (i, j = 1, \ \ldots, n)$
$(e_i, \ \mathcal{A}e_j) = \alpha_{ij} = ((e_i, \ \lambda_j e_j) = \lambda_j \delta_{ij}$.

3.1.5. Példák sajátértékproblémára és diagonizálásra

A fizikai törvények felállítása során gyakran tapasztalunk lineáris kapcsolatot a fizikai mennyiségek között.

A tehetetlenségi tenzor A merev testek mechanikájából ismeretes, hogy a pörgésből származó impulzusmomentum homogén lineáris függvénye a szögsebességnek:
$\boldsymbol{\omega} \ \rightarrow \ \mathbf{J} = \Theta\boldsymbol{\omega}$
A Θ lineáris transzformáció az ún. *tehetlenségi tenzor*, amelynek komponensei (mátrixelemei) egy szokásos Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben:
$\Theta_{ij} = \sum\limits_a m_a[r_a^2\delta_{ij} - x_{ai}x_{aj}], \qquad (i,j=1,2,3),$
ahol az a index befutja a merev test $m_1, m_2, \ldots, m_n$ tömegpontjait, amelyek helyvektorai:
$\mathbf{r}_a = x_{a1}\mathbf{i}+x_{a2}\mathbf{j}+x_{a3}\mathbf{k}, \qquad (a=1,\ldots,n)$
Láthatóan Θ szimmetrikus, ezért van ortonormált sajátbázis (az ún. főtehetlenségi rendszer), amelyben Θ mátrixa diagonális, a diagonálisban a sajátértékek (ún. főtehetetlenségi nyomatékok) állnak.

Nyúlási tenzor Egy deformálható közegben egy origó körüli kicsiny térfogat $\mathbf{r}$ helyén lévő pont egy kis deformáció hatására történő elmozdulása ($\mathbf{u}(\mathbf{r})$) három tagra bontható fel:
$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_0 + \frac{1}{2}(rot\mathbf{u})_0 \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon}_0\mathbf{r}\,,$
ahol az első tag az ún. transzláció, a második a rotáció és az utolsó tag az ún. tiszta dilatáció. Az ε-nal jelölt lineáris transzformáció az ún. *nyúlási (dilatációs)* tenzor, komponensei egy szokásos $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$ Descartes-féle bázisban ($\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$) :
$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}), \qquad (i,j=1,2,3)$
A nyúlási tenzor szimmetrikus, ezért van olyan ortonormált bázis (fődilatációs tengelyek), amelyben a nyúlási tenzor diagonális. Ha a kis térfogat egy főtengelyekkel párhuzamos élű hasáb, akkor a deformáció során a hasáb éleinek hossza megváltozhat (nyúlnak vagy rövidülnek), de párhuzamosak maradnak a főtengelyekkel.

Dielektromos tenzor Elektrosztatikában az elektromos eltolódásvektor homogén lineáris függvénye az elektromos térerősségnek:
$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$,
ahol ε a dielektromos tenzor. A dielektromos tenzor szimmetrikus, ezért van olyan koordinátarendszer, amelyben az egyes tengelyek mentén az eltolódási vektor és a térerősség párhuzamos marad:
$D = \varepsilon_1 E$ vagy $D = \varepsilon_2 E$, illetve $D = \varepsilon_3 E$,
ahol $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3$ az ε tenzor sajátértékei.

3.1.6. Szimultán diagonalizálás

Tfh. $[\mathcal{A}]$ szimmetrikus pozitív definit mátrix, és $[\mathcal{B}]$ szimmetrikus mátrix. Ekkor van olyan ortonormált bázis, amelyben mind $[\mathcal{A}]$, mind $[\mathcal{B}]$ diagonális.
Bizonyítás: Legyen $[u_1], \ \dots\ , [u_n]$ az $[\mathcal{A}]$ sajátbázisa:
$[\mathcal{A}][u_i] = \mu_i[u_i], \qquad \mu_i > 0.$
Az U mátrixot építsük fel az $[u_i]$ oszlopvektorokból:
$U = ([u_1], \ \dots\ , [u_n])\,, \qquad [\mathcal{A}]' \equiv U^T[\mathcal{A}]U = \mathsf{diag}(\mu_1,\ \dots,\ \mu_n)$
és legyen $M = \mathsf{diag}(\frac{1}{\sqrt{\mu_1}},\ \dots,\ \frac{1}{\sqrt{\mu_n}})$. Nyilván
$[\mathcal{A}]'' \equiv M^T U^T [\mathcal{A}] U M = E \qquad$ (egységmátrix).
Egyszerűen belátható, hogy $[\mathcal{B}]' \equiv M^T U^T [\mathcal{B}] U M$
szimmetrikus mátrix.
Legyen S a $[\mathcal{B}]'$ ortonormált sajátvektoraiból álló transzformáció! Ekkor $S^T[\mathcal{B}]'S$ diagonális mátrix, továbbá
$[\mathcal{A}]''' \equiv S^T[\mathcal{A}]''S = S^T S = E$, ezért a $G \equiv UMS$ transzformáció szimultán diagonalizálja $[\mathcal{A}]$-t és $[\mathcal{B}]$-t.
$G^T[\mathcal{A}]G = E$ és $G^T[\mathcal{B}]G = S^T[\mathcal{B}]'S$ diagonális mátrix.

3.1.7. Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy a szimmetrikus transzformáció sajátértékei valósak!
2. Mutassuk meg, hogy a szimmetrikus transzformáció különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorai ortogonálisak!
3. Mutassuk meg, hogy bármely A valós szimmetrikus mátrixhoz megadható olyan P ortogonális mátrix, amelyre $P^{-1}AP$ diagonális!

4. Mutassuk meg, hogy bármely szimmetrikus bilineáris függvénynek létezik olyan diagonális mátrixa, amelyben a főátló elemi 1, -1 vagy 0! A főátlóban a $+1$, -1 és a 0 elemek száma egyértelműen meghatáeozott.
5. Mutassuk meg, hogy euklideszi térben bármely kvadratikus alakhoz megadható olyan ortonormált bázis, amelyben a kvadratikus alak kanonikus alakú!
6. Oldjuk meg a következő csatolt differenciálegyenletrendszert
$m\ddot{u}_1 + 2ku_1 - ku_2 = 0, \qquad m\ddot{u}_2 + 2ku_2 - ku_2 = 0$
a következő kezdeti feltételek mellett:
$u_1(0) = u_2(0) = 0, \qquad \dot{u}_1(0) = v, \qquad \dot{u}_2(0) = 0.$
Állítsuk elő a megoldást normál módusok szuperpozíciójaként!
7. Adott az $2x^2 + 4xy + 5y^2 = 1$ ellipszis az xy síkon. Mutassuk meg, hogy a koordinátatengelyek alkalmas forgatásával az egyenletet a következő "diagonális alakok bármelyikére lehet hozni:
a) $\xi^2 + 6\eta^2 = 1 \qquad$ b) $6\xi^2 + \eta^2 = 1$
Keressük meg a forgatás mátrixát a két esetben!

3.2. Komplex euklideszi terek

Tekintsünk egy V véges dimenziós vektorteret a $\mathbb{C}$ komplex számtest fölött (pl. a komplex számhármasok $\mathbb{C}^3$ 3-dimenziós tere).
A V vektorteret (komplex) euklideszi térnek nevezzük, ha meg tudunk adni egy pozitív definit ermitikus bilineáris függvényt, az ún. belső (vagy skalár) szorzatot.
Pl. a komplex számhármasok tere ($\mathbb{C}^3$) euklideszi tér a szokásos skalárszorzattal:
$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$
$$S(x,y) \equiv \sum_{i=1}^{3} \bar{\xi}_i \eta_i \in \mathbb{C}$$
pozitív definit, ermitikus bilineáris függvény (a felülhúzás jelöli a komplex konjugálást) Az S betűt nem szokás kiírni.

3.2.1. A belső szorzat tulajdonságai

a) $(y,x) = \overline{(x,y)}$ $\qquad$ (hermitikus szimmetria)

b) $(x+x',y)=(x,y)+(x',y)$
c) $(\lambda x,y)=\bar{\lambda}(x,y)$; $\quad (x,\lambda y)=\lambda(x,y)$
d) $(x,x)\geq 0$ és $(x,x)=0 \iff x=0$
A skalárszorzat normált és metrikus térré teszi a vektorteret.
A *hosszúság* (norma): $\|x\| \equiv \sqrt{(x,x)} \geq 0$.
A *távolság:* $d(x,y) \equiv \|x-y\| \geq 0$.
A szöget általában nem lehet értelmezni, de a merőlegességet igen.
Az x és y vektorok *ortogonálisak*, ha $(x,y)=0$.
Ha z minden vektorra merőleges, akkor z a nulla vektor.

3.2.2. Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség:

Fennáll a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség:
$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \qquad \text{(CBS)}$
Bizonyítás:
$0 \leq (x-\lambda y, x-\lambda y) = \|x\|^2 - \bar{\lambda}(y,x) - \lambda(x,y) - \bar{\lambda}\lambda \|y\|^2$
Legyen $\lambda=(y,x)\alpha$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, ekkor
$\|x\|^2 - 2\alpha |(x,y)|^2 + \alpha^2 |(x,y)|^2 \|y\|^2 \geq 0$,
vagyis a diszkrimináns nem lehet pozitív:
$(2|(x,y)|^2)^2 - 4|(x,y)|^2 \|y\|^2 \ \|x\|^2 \leq 0$, , stb.

A norma segítségével egyértelműen felírható a skalárszorzat:
a) valós euklideszi térben (cos-tétel):
$(x,y)=\frac{1}{2}(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2)$.
b) komplex euklideszi térben:
$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)+\frac{1}{4i}(\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2)$.

A Gram-Schmidt algoritmussal az euklideszi térben mindig elő tudunk állítani *ortonormált bázis*t:
$(e_i,\ e_j)=\delta_{ij} \qquad (i,j=1,\ \ldots,\ n)$

3.2.3. Lineáris transzformáció adjungáltja

Ortonormált bázisban a vektorok és a lineáris trabszformációk komponenseinek előállítása egyértelmű:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \qquad \longleftrightarrow \qquad [x] = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_3 \end{pmatrix}, \text{ és } \xi_i = (e_i, x).$$

Az $x \to \mathcal{A}x$ lineáris transzformáció mátrixát az $e_j \to \mathcal{A}e_j \equiv \sum_{i=i}^{n} \alpha_{ij} e_i$ kifejtéssel definiáljuk, és ortonormált bázis esetén az $\mathcal{A}$ mátrixa:
$[\mathcal{A}] = (\alpha_{ij} = (e_i,\ \mathcal{A}e_j))$.
Könnyen belátható, hogy
a) $(x, y) = \sum_{i=1} \bar{\xi}_i \eta_i = [x]^T \cdot [y]$,
b) $[\mathcal{A}x] = [\mathcal{A}]\ [x]$.
Euklideszi térben minden $\mathcal{A}$ lineáris transzformációhoz létezik pontosan egy olyan $\mathcal{A}^+$ lineáris transzformáció, amelyre minden x, y vektorra $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^+ y)$.
Az így értelmezett $\mathcal{A}^+$ lineáris transzformáció az $\mathcal{A}$ *adjungáltja.*
Ortonormált bázisban $\mathcal{A}$ adjungáltjának mátrixa megegyezik az $\mathcal{A}$ mátrixának adjungáltjával (transzponált komplex konjugáltjával):
$[\mathcal{A}^+] = [\mathcal{A}]^+$.
Megjegyzés: Más skalárszorzatot választva más lesz az adjungált transzformáció is.
Egyszerűen belátható, hogy
$(\mathcal{A}^+)^+ = \mathcal{A}$.

3.2.4. Sajátértékek, sajátvektorok

Komplex euklideszi térben egy $\mathcal{A}$ lineáris transzformációnak mindig van sajátvektora, azaz van olyan $x \neq 0$, hogy
$x \to \mathcal{A}x = \lambda x \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$.
Írjuk fel ugyanis az $\mathcal{A}$ sajátértékproblémáját az $[\mathcal{A}]$ mátrixra:
$([\mathcal{A}] - \lambda[E])[x] = 0$.
Ennek a homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van triviálistól eltérő ($[x] \neq 0$) megoldása, ha
$\det |[\mathcal{A}] - \lambda[E]| = 0$.
Ennek az n-edfokú egyenletnek $\mathbb{C}$-ben n gyöke van: $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n$ (lehetnek köztük egyenlők is). Pl. a λ_1-hez tartozó egyik $[x_1] \neq 0$ megoldáshoz tartozó x_1 vektor a λ_1-hez tartozó sajátvektor lesz.

Egy λ sajátértékhez tartozó összes sajátvektor által generált alteret az $\mathcal{A}$ transzformáció *sajátalterének* nevezzük: U_λ .
Könnyű megmutatni, hogy
1) $\mathcal{A}$ és $\mathcal{A}^+$ egy-egy sajátvektora merőleges egymásra, vagy a sajátértékek egymás komplex konjugáltjai:
$\mathcal{A}x = \lambda x \qquad$ és $\qquad \mathcal{A}^+y = \mu y \qquad \Longrightarrow \qquad (x, y) = 0$ vagy $\mu = \bar{\lambda}$.
2) U az $\mathcal{A}$ invariáns altere akkor és csak akkor, ha $U^\perp$ (azaz az U merőleges kiegészítése) invariáns altere $\mathcal{A}^+$-nak.

3.2.5. Felcserélhető lineáris transzformációk közös sajátvektora

Az euklideszi tér lineáris transzformációinak összegét, számszorosát, továbbá két transzformáció szorzatát a szokásos módon értelmezzük:
$(\mathcal{A} + \mathcal{B})x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x$,
$(\lambda\mathcal{A})x = \lambda(\mathcal{A}x)$,
$(\mathcal{AB})x = \mathcal{A}(\mathcal{B}x)$.
Ezek szintén lineáris transzformációk, és bármely bázisban érvényes, hogy
$[\mathcal{A} + \mathcal{B}] =[\mathcal{A}] + [\mathcal{B}]$,
$[\lambda\mathcal{A}] =\lambda[\mathcal{A}]$,
$[\mathcal{AB}]=[\mathcal{A}][\mathcal{B}]$.
Pl. $[\mathcal{AB}]_{ij} = (e_i, (\mathcal{AB})e_j) = (e_i, \mathcal{A}\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_{kj}e_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \underbrace{(e_i, \mathcal{A}e_k)}_{\alpha_{ik}}\beta_{kj} =$
$([\mathcal{A}][\mathcal{B}])_{ij}$.
Általában $\mathcal{AB} \neq \mathcal{BA}$ (nem kommutatív).
Ha azonban $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ *felcserélhetők* ($\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$), akkor van közös sajátvektoruk.
(Legyen ugyanis U_λ az $\mathcal{A}$ λ sajátértékéhez tartozó sajátaltere!
Ha $x \in U_\lambda$, akkor $\mathcal{A}x = \lambda x$, és $\mathcal{A}(\mathcal{B}x) = \mathcal{BA}x = \mathcal{B}\lambda x = \lambda(\mathcal{B}x)$, vagyis $\mathcal{B}x \in U_\lambda$: U_λ a $\mathcal{B}$ invariáns altere. Ezért U_λ-ban $\mathcal{B}$-nek is van sajátvektora, amely így közös sajátvektor.)
Megmutatható, hogy
$(\mathcal{A} + \mathcal{B})^+ = \mathcal{A}^+ + \mathcal{B}^+$,
$(\lambda\mathcal{A})^+=\bar{\lambda}\mathcal{A}^+$,
$(\mathcal{AB})^+= \mathcal{B}^+\mathcal{A}^+$.

Hajtsunk végre egy olyan *bázistranszformációt,* amely az ortonormált $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$ bázistt átviszi a szintén ortonormált $e'_1,\ e'_2,\ \ldots,\ e'_n$ bázisba:
$e'_i = Se_i$.
Mivel
$(e'_i, e'_j) = (Se_i,\ Se_j) = (e_i,\ S^+Se_j) = \delta_{ij}$,
ezért $S^+S = E$, vagyis $S^+ = S^{-1}$. Ilyen bázistranszformáció esetén a vektorok, illetve a lineáris transzformációk komponensei a következők szerint transzformálódnak:
$[x]' = [S^{-1}]\ [x]$, illetve
$[\mathcal{A}]' = [S^{-1}]\ [\mathcal{A}]\ [S]$.

3.2.6. Normális lineáris transzformáció sajátbázisa

Az $\mathcal{A}$ transzformációt *normálisnak* nevezzük, ha felcserélhető az adjungáltjával: $\mathcal{A}\mathcal{A}^+ = \mathcal{A}^+\mathcal{A}$.
Tétel: Egy véges dimenziós komplex euklideszi térben akkor és csak akkor létezik az $\mathcal{A}$ sajátvektoraiból álló ortonormált bázis, ha $\mathcal{A}$ normális.
A bizonyítás alapgondolata a következő: $\mathcal{A}$ és $\mathcal{A}^+$ felcseerélhető, ezért van közös sajátvektoruk (e_1). Legyen U_{n-1} az e_1-re merőleges kiegészítő tér. U_{n-1} invariáns altere $\mathcal{A}$ és $\mathcal{A}^+$-nak is, továbbá $\mathcal{A}$ az U_{n-1}-ben is normális, így van közös e_2 sajátvektoruk. Ezt az eljárást addig ismételjük, amíg n "elfogy".

3.2.7. Önadjungált és unitér transzformációk

Önadjungált transzformációk
Az $\mathcal{A}$ transzformációt önadjungáltnak nevezzük, ha
$\mathcal{A} = \mathcal{A}^+$.
Mivel egy önadjungált transzformáció egyúttal normális transzformáció, ezért:
Ha $\mathcal{A}$ önadjungált, akkor létezik az $\mathcal{A}$ sajátvektoraiból álló ortonormált bázis (ún. sajátbázis), és sajátértékei valósak. Sajátbázisban az $\mathcal{A}$ mátrixa diagonális, a diagonálisban az $\mathcal{A}$ (valós) sajátértékei állnak.

Unitér transzformációk

Az $\mathcal{A}$ transzformációt unitérnek nevezzük, ha
$\mathcal{A}^+ = \mathcal{A}^{-1}$.
Mivel egy unitér transzformáció egyúttal normális, ezért létezik ortonormált sajátbázisa, továbbá sajátértékeinek abszolut értéke 1.
(Legyen ugyanis x a λ sajátértékhez tartozó normált sajátvektor:
$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x)= \bar{\lambda}\lambda =(x, \mathcal{A}^+\mathcal{A}x) = (x, \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}x) = 1$)
Könnyen belátható, hogy a következő négy állítás ekvivalens:
1) Az $\mathcal{A}$ unitér ($\mathcal{A}^+ = \mathcal{A}^{-1}$),
2) Az $\mathcal{A}$ skalárszorzattartó ($(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y)$),
3) Az $\mathcal{A}$ hossztartó (normatartó) ($\|\mathcal{A}x\| = \|x\|$),
4) Az $\mathcal{A}$ távolságtartó ($d(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = d(x, y)$).
Bizonyítás:
1) $\Longrightarrow$ 2):
$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, \mathcal{A}^+\mathcal{A}y) = (x, y)$
2) $\Longrightarrow$ 1):
$(x, y) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, \mathcal{A}^+\mathcal{A}y) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{A}^+\mathcal{A} = E$
2) $\Longrightarrow$ 3):
$\|x\|^2 = (x, x) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = \|\mathcal{A}x\|^2$
3) $\Longrightarrow$ 2):
A skalárszorzat kifejezhető a norma segítségével, ezért a normatartásból következik a skalárszorzattartás:
$4(x, y) = \left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right) - i\left(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2\right)$.
3) és 4) ekvivalenciája azért nyilvánvaló, mert a távolságot a hosszúság segítségével definiáltuk.

4. Változó vektorok, vektorok deriváltjai

4.1. Időderivált

A legegyszerűbb esetben a vektorfüggvény differenciálása egyszerű kiterjesztése a skalár függvények differenciálásának. Legyen például a vektorfüggvény egy részecske pályája $\mathbf{r}(t)$ ahol t az idő, azaz egy paraméter. Ebben az esetben a t szerinti derivált definíció szerint a test sebessége:
$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

Grafikusan az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ pálya egy térgörbe (ld. 5.fejezet) és a $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ derivált a *pálya érintője.*
Ha az $\mathbf{r}(t)$ függvény helyett a komponenseket használjuk, akkor fennáll, hogy $\mathbf{v}(t)$ komponensei rendre a helyvektor komponenseinek deriváltjai: $v_i(t) = \dfrac{dx_i}{dt}$. Kicsit bonyolultabb lehet a helyzet, ha a koordinátarendszer görbevonalú, azaz a bázisvektorok is változnak helyről helyre.
A fizikai mennyiségek általában az idő mellett a hely függvényei. Meg kell ismerkedni azokkal a mennyiségekkel, amelyekkel a helytől való függés változásainak leírására alkalmasak. A fizika törvényei rendszerint olyan differenciálegyenletek, amelyek a fizikai mennyiségek hely és időfüggését fejezik ki. Szerencsére a hely szerinti deriváltak is olyan szemléletes jelentéssel bírnak többnyire, mint a pálya-sebesség kapcsolat.
Példák a fizikai mennyiségek helyfüggésére:
1. példa: potenciális energia $V(\mathbf{r}) = V(x, y, z)$
Minden $\mathbf{r}$ ponthoz rendel egy $V \in \mathbb{R}$ számot. Ez egy skalármező vagy skalár-vektor függvény.
2. példa: $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ vektormező, vagy vektor-vektor függyvény. Megfelel 3 db skalár-vektor függvénynek. A tér $\mathbf{r}$ helyvektorú pontjaihoz egy vektort rendelünk. Tipikus példa erre az a Coulomb-féle elektrosztatikus mező: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k\dfrac{Q}{r^2} \cdot \dfrac{\mathbf{r}}{r}$ egy ponttöltéstől származó térerősség.

4.2. Skalármezők jellemzése. A gradiens-vektor

Legyen $\phi(\mathbf{r}) = \phi(x, y, z)$ skalármező.
Szintfelületek: $\phi(\mathbf{r}) = C = \textit{áll.}$, ez egy felület egyenlete $F(x, y, z) = 0$ implicit alakban megadva (ld. 5. fejezet).
Példa. $\phi = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ szintfelületei gömbfelületek: $x^2 + y^2 + z^2 = C^2$.
A fizikai alkalmazásokban általában feltesszük (ha pl. ϕ a skalárpotenciál), hogy a tér minden pontján egy és csak egy szintfelület halad keresztül, a szintfelületek nem metszhetik egymást.
A skalármező térbeli változásának leírására szolgál a gradiens.

4.2.1. Gradiens:

A gradiens ϕ vektor definíciója:

$$grad\ \phi = \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z} \equiv \mathbf{e}_i\frac{\partial\phi}{\partial x_i}$$

Megmutatható, hogy a $\dfrac{\partial\phi}{\partial x_i}$ parciális deriváltak vektorkomponensként transzformálódnak.
Bizonyítás: $\phi = \phi'$, mert skalár.
$\dfrac{\partial\phi'}{\partial x'_i} = \dfrac{\partial\phi}{\partial x_j}\dfrac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \dfrac{\partial\phi}{\partial x_j}\alpha_{ij}$

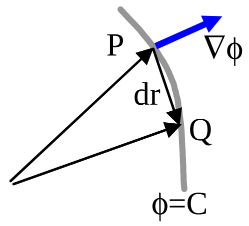
Az ún. nabla-vektor (∇) definíciója:

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

(szimbolikus vektor (differenciálvektor)).
A gradiens a nabla-vektorral így írható: $grad\ \phi = \ \nabla\phi$
1.Példa: $\phi(\mathbf{r}) = r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
$\nabla r = \mathbf{i}\dfrac{\partial r}{\partial x} + \mathbf{j}\dfrac{\partial r}{\partial y} + \mathbf{k}\dfrac{\partial r}{\partial z}$
$\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \dfrac{x}{r}$
$\nabla\phi = \mathbf{i}\dfrac{\partial r}{\partial x} + \mathbf{j}\dfrac{\partial r}{\partial y} + \mathbf{k}\dfrac{\partial r}{\partial z} = \dfrac{1}{r}(\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) = \dfrac{\mathbf{r}}{r} \equiv \mathbf{e}_r$, az $\mathbf{r}$ irányú egységvektor.
2.Példa: $\phi = f(r), \qquad r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$
$(\nabla\phi)_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{df}{dr}\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{df}{dr}\dfrac{x}{r} \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla f(r) = f'\dfrac{\mathbf{r}}{r}$

4.2.2. A gradiens vektor geometriai jelentése

$d\mathbf{r} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$
$\nabla\phi\cdot d\mathbf{r} = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\phi}{\partial y}dy + \dfrac{\partial\phi}{\partial z}dz = d\phi$, a ϕ függvény teljes differenciálja (megváltozásának lineáris része).
Legyen P és Q a szintfelület két közeli pontja.
Mivel $\phi = C$, $d\phi = 0 = \nabla\phi\cdot d\mathbf{r} \Longrightarrow \nabla\phi \perp d\mathbf{r}$.
A gradiens vektor merőleges a szintfelületre.



4.2.3. Az iránymenti derivált:

Legyen $\phi(\mathbf{r})$ skalármező, $\mathbf{k}$ tetszőleges egységvektor. Az $\mathbf{r}$ helyvektorú M ponton keresztül húzzunk egy $\mathbf{k}$ irányú egyenest: $\mathbf{r}' = \mathbf{r}+\varepsilon\mathbf{k}$
Képezzük a következő határértéket, ha ez létezik, ez lesz a ϕ skalármező $\mathbf{k}$ irány menti deriváltja az $\mathbf{r}$ pontban:

$$\frac{d\phi}{dk} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\phi(\mathbf{r}+\varepsilon\mathbf{k}) - \phi(\mathbf{r})}{\varepsilon}$$

Az előállítás szerint ez egy skalár.
Az iránymenti derivált és a gradiensvektor kapcsolata:
Ha ε kicsi, $\phi(\mathbf{r}+\varepsilon\mathbf{k}) = \phi(x,y,z) + \frac{\partial\phi}{\partial x}\varepsilon k_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\varepsilon k_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\varepsilon k_z + \ldots,$ tehát
Tehát $\frac{d\phi}{dk} = \frac{\partial\phi}{\partial x}k_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}k_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}k_z = \nabla\phi\cdot\mathbf{k}$
A gradiens vektor a leggyorsabb változás irányába mutat:
$\frac{d\phi}{dk} = \nabla\phi\cdot\mathbf{k} = |\nabla\phi|\cos\alpha$, mivel $|\mathbf{k}| = 1$.
Ebből leolvasható, hogy az iránymenti derivált akkor a legnagyobb, ha $\cos\alpha = 1$, azaz $\alpha = 0$.

Példák:
A *fizikában* ha $U(x,y,z) = U(\mathbf{r})$ a potenciális energia, az erő $\mathbf{F} = -\operatorname{grad} U$.
a) Homogén gravitációs erőtér: $U = mgz$, $\mathbf{F} = (0,0,mg)$
A szintfelületek $z = \acute{a}ll.$ vízszintes síkok, az erővonalak függőleges, az U leggyorsabb csökkenésének irányába mutató egyenesek (ld. ábra)
b) Ponttöltés térerőssége - Coulomb-tér:

$U = k\frac{q}{r}, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$
$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} U$
$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{-1}{2}\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{r^3},$
$\mathbf{E} = k\frac{q\mathbf{r}}{r^3}$
Mikor adható meg egy vektortér grad$U$ alakban? Erre kérdésre a potenciálelmélet keretében adunk majd választ.

4.3. Vektormező divergenciája

Legyen $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ tetszőleges (x, y, z szerint differenciálható) vektor-vektor függvény vagy vektormező.
Derékszögű koordinátákban: $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = a_x(x,y,z)\mathbf{i} + a_y(x,y,z)\mathbf{j} + a_z(x,y,z)\mathbf{k}$.
Az $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ vektormező *divergenciáj*ának definíciója:

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

A vektormező 3 db skalár-vektorfüggvénnyel - a komponens mezőkkel - adható meg:

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 a_1(\mathbf{r}) + \mathbf{e}_2 a_2(\mathbf{r}) + \mathbf{e}_3 a_3(\mathbf{r})$$

A vektormezőt az erővonalakkal szokás szemlélteni: az erővonalak olyan görbék, melynek érintői adják a vektormező értékét az adott pontban.
Mivel ∇ vektor, képezhetünk vele skalárszorzatot!
A $\nabla \cdot \mathbf{a} = f(\mathbf{r})$ skalármező derékszögű koordinátákban:

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \mathbf{e}_k a_k = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = \operatorname{div}\mathbf{a}$$

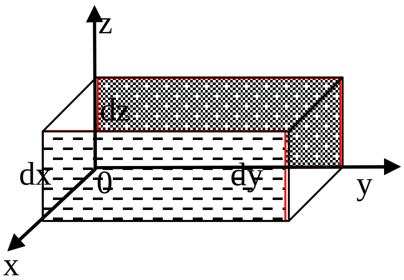
Példa: 1. Coulomb-törvény (ponttöltés elektromos mezője): $\mathbf{E} = k\frac{Q}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \sim \frac{\mathbf{r}}{r^3}$.
$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right).$
Pl. az x szerinti deriváltat számolva:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3}\frac{\partial x}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}.$$
Hasonlóan számolhatunk $y-$ és z-re, így ($r \neq 0$ esetén)

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} = \frac{3}{r^3} - 3\frac{x^2+y^2+z^2}{r^5} =$$
$$\frac{3}{r^3} - 3\frac{r^2}{r^5} = 0.$$

A divergencia jelentése
A divergencia szó latin eredetű, jelentése szétáramlás, szétfolyás. Fizikai jelentése a mező forrásaival van kapcsolatban, (az ún. lokális forráserősség). Ezt a tulajdonságot szemlélteti a következő egyszerű számolás.

Tekintsük egy $\rho(\mathbf{r})$ sűrűségű, $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ sebességterű folyadék kicsiny $dV = dxdydz$ térfogatú hasábját. Számítsuk ki a térfogatból időegység alatt kiáramlott folyadékmennyiséget!



Az x tengellyel párhuzamos normálisú lapokon kiáramlott folyadékmennyiség
$$-dydz\;(\rho v_x)|_{x=0} + dydz\;(\rho v_x)|_{x=dx} = dydz\{(\rho v_x)|_{x=dx} - (\rho v_x)|_{x=0}\} =$$
$$= \frac{(\rho v_x)|_{x=dx} - (\rho v_x)|_{x=0}}{dx}dxdydz.$$
Ha a térfogatot összehúzzuk egy pontra, a hányados a $\dfrac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}$ parciális derivált. Hasonlóan számolhatunk az y és z tengellyel párhuzamos normálisú lapokra. Így

$$\frac{\text{kiáramlott tömeg}}{\text{idő} \cdot \text{térfogat}} = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = \mathrm{div}(\rho \mathbf{v})$$
A bal oldali mennyiség neve lokális forrássűrűség.

A kontinuitási egyenlet
Ha a fenti példában a folyadék tömege állandó, akkor a folyadék kiáramlása miatt a térrészben a folyadék tömege csökken, azaz $-\frac{dm}{dt} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dV$. Így a tömegmegmaradást kifejező ún. kontinuitási egyenlet lokális alakját kaptuk:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \mathrm{div}(\rho \mathbf{v}), \text{ vagy } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

Példák. $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, azt jelenti, hogy az origóba helyezett ponttöltés mezője forrásmentes, ahol $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{r} = \mathbf{0}$-ban a töltéssűrűség szinguláris!
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ azt fejezi ki, hogy a mágneses mező mindig forrásmentes.

4.4. Vektormező rotációja

A $\nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ vektormező neve *rotáció.* Másik jelölése rot $\mathbf{a}$. Kiszámítási szabálya

$$\nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_1\left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}\right) + \mathbf{e}_2\left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}\right) + \mathbf{e}_3\left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\right)$$

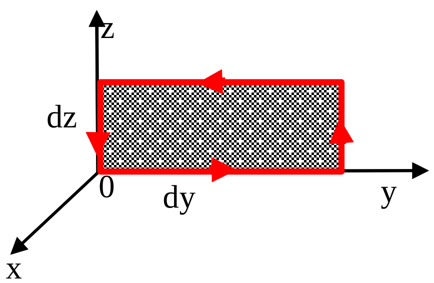
$$\nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \times \mathbf{e}_k a_k = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j}$$

1. példa. $\mathbf{a} = \mathbf{r}$,
$\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{e}_1\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right) + \ldots \qquad = \mathbf{0}$
2. példa. $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{r}$
$\nabla \times (f\mathbf{r}) = \boldsymbol{\nabla} f \times \mathbf{r} + f \nabla \times \mathbf{r} = \frac{f\,'}{r} \mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$
3. példa. Legyen a vektormező $\mathbf{a} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) f(\mathbf{r})$ alakú. A rotáció számolásához ilyen parciális deriváltakat kell számolni: $\frac{\partial a_k}{\partial x_j} = \frac{\partial (f v_k)}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} v_k + f \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = (\nabla f \times \mathbf{v})_i + f(\nabla \times \mathbf{v})_i$. Azt kapjuk tehát, hogy

$$\nabla \times f\mathbf{v} = \nabla f \times \mathbf{v} + f\nabla \times \mathbf{v}$$

Speciális esetként legyen $\mathbf{a} = \mathbf{r}f(r)$, centrális erőtér (ld. 2. példa). Számítsuk ki a rotációját! Az előző azonosságot használva
$\nabla \times f\mathbf{r} = \nabla f \times \mathbf{r} + f\nabla \times \mathbf{r}$,
$\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{e}_1(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}) + \mathbf{e}_2(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}) + \mathbf{e}_3(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}) \equiv 0.$
Másrészt $\nabla f = \mathbf{e}_i \frac{\partial f}{dx_i} = \mathbf{e}_i \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x_i} = -\frac{df}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r}$, így az első tag $-\frac{df}{dr}\frac{1}{r}\mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0$.
Tehát a szigorúan centrális erőtér rotációja mindig nulla.

A rotáció jelentése
A rotáció forgást jelent. Megmutatjuk, hogy a rotáció fizikai jelentése a vektormező forgásával, örvényeivel van kaocsolatban. Számítsuk ki egy $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ sebességű folyadékban felvett kicsiny hurokra az ún. örvényerősséget, azaz a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektormező cirkulációját!



Cirkuláció$=v_y(0,y,0)dy + v_z(0,dy,z)dz - v_y(0,y,dz)dy - v_z(0,0,z)dz =$
$=dydz\left(\frac{v_z(0,dy,z) - v_z(0,0,z)dz}{dy} - \frac{v_y(0,y,dz) - v_y(0,y,0)}{dz}\right)$
A zárójelben fölismerhetjük parciális deriváltak közelítő hányadosát. A lapocska terlülete $dydz$.
Határesetben (az origóra húzva a téglalapot) kapjuk, hogy
lokális örvényerősség$=\lim\frac{\text{cirkuláció}}{\text{terület}} = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = (\text{rot } \mathbf{v})_x$

Ha a mező rotációja nem nulla, akkor a mező örvényes, (pl. az erővonalai zárt görbék).
Ha a vektortér rotációja nulla, a mező örvénymentes. Ilyen pl. a centrális erőtér.
Példa: Faraday-féle indukciós törvény. $\mathrm{rot}\,\mathbf{E}+\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}=0$.
Példák:
1. $\mathbf{F}(\mathbf{r})=(0,0,-mg), \qquad \nabla\times\mathbf{F}=0.$
2. $\mathbf{E}=k\dfrac{q\mathbf{r}}{r^3}, \qquad \nabla\times\mathbf{E}=?$

$(\mathrm{rot}\,\mathbf{E})_1=\dfrac{\partial E_3}{\partial x_2}-\dfrac{\partial E_2}{\partial x_3}$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial}{\partial x_2}\dfrac{x_3}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{3}{2}}}=-\dfrac{3}{2}\dfrac{x_3\cdot 2x_2}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{5}{2}}}\\ -\dfrac{\partial}{\partial x_3}\dfrac{x_2}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{3}{2}\dfrac{x_2\cdot 2x_3}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{5}{2}}}\end{array}\right\}+=0.$$

Kérdés: van kapcsolat $\mathbf{F}=-\,\mathrm{grad}\,U$ és $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}=0$ között? A válasz igen, mert fennáll a következő tétel

$$\mathbf{F}=-\,\mathrm{grad}\,U\Longrightarrow \mathrm{rot}\,\mathbf{F}=0$$

Bizonyítás:
$(rot\,\mathrm{grad}\,U)_x=\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial U}{\partial z}-\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial U}{\partial y}=0$, mivel a differenciálások sorrendje (nagyon általános feltételek mellett) általában felcserélhető. Egyszeresen összefüggő tartomány esetén $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}\Longrightarrow\mathbf{F}=-\,\mathrm{grad}U$ is érvényes.
3. Egy $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességgel forgó merev test egy pontjának sebessége $\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}. \qquad \nabla\times\mathbf{v}=?$
$\mathrm{rot}\,\mathbf{v}=\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v}=\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$
$(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v})_1=\dfrac{\partial}{\partial x_2}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})_3-\dfrac{\partial}{\partial x_3}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})_2=\dfrac{\partial}{\partial x_2}(\omega_1x_2-\omega_2x_1)-\dfrac{\partial}{\partial x_3}(\omega_3x_1-\omega_1x_3)=\omega_1+\omega_1=2\omega_1.$
Tehát $\mathrm{rot}\,\mathbf{v}=2\boldsymbol{\omega}$, vagyis

$$\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})=2\boldsymbol{\omega}$$

4.5. A ∇ aritmetikája, többszörös deriváltak

1) A gradiens, divergencia, rotáció definícióját figyelembevéve, és a vektorazonosságok közül leggyakrabban a kettős vektori szorzat felbontását használva, számos azonosságot lehet gyártani. Ezek többségét legkönnyebb bizonyítani, ha derékszögű komponensben kiírjuk mindkét oldalt.
Az azonosság-gyártás fő szabálya, hogy a ∇ vektoroperátor kettős természetű, így kétféle szabálynak tesz eleget:
a) a vektorszámítás azonosságai,
b) a differenciálás szabályai, különös tekintettel a szorzat deriválására és a láncszabályra.
Az azonosságokhoz a skalár illetve vektormezők szorzatait használjuk, ahol ϕ és ψ skalármezők, $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ pedig vektormezők.
Összetett skalármezők: $\phi\psi$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$. Skalármezőnek gradiense lehet, tehát készíthetünk azonosságot $\nabla(\phi\psi)$, és $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$ kiszámítására.
Összetett vektormezők: $\phi\mathbf{A}$, $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$. Vektormezőre lehet divergenciát és rotációt számolni, tehát azonosságokat lehet gyártani a következők kiszámítására: $\nabla\cdot(\phi\mathbf{A})$, $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$, $\nabla\times\phi\mathbf{A}$, $\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$.
Példa: Adjunk meg kifejezést $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$ kiszámítására.
Először is vegyük észre, hogy a $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$ -szerű kifejezés a kettős vektori szorzat kifejtésében szerepel:
$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$. Például így
$\mathbf{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) = \nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) - (\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}$ (a $\mathbf{B}$ vektort csak a végére írhatjuk, és most $\mathbf{B}$-t differenciáljuk, nem $\mathbf{A}$-t).
A szorzatdifferenciálás szabályai szerint a fordított alak is kell, azaz amikor $\mathbf{A}$-ra vonatkozik a differenciálás:
$\mathbf{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) - (\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A}$
Így kapjuk (egyben bizonyítottuk is), hogy

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A} + (\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B} + \mathbf{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) + \mathbf{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})$$

2) Alkalmazzuk a ∇ vektort a gradiens, divergencia, rotáció kifejezéseire:
$\nabla\phi$ vektor, itt lehet divergenciát és rotációt számolni: a) $\nabla\cdot\nabla\phi$ b) $\nabla\times\nabla\phi$
$\nabla\cdot\mathbf{a}$ skalár, gradiensét lehet venni: c) $\nabla(\nabla\cdot\mathbf{a})$
$\nabla\times\mathbf{a}$ vektor, itt lehet divergenciát és rotációt számolni: d) $\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{a}$ e) $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{a})$

Mind az öt kifejezés másodrendű parciális deriváltakat tartalmaz, és több helyen találkozunk velük, főleg az elektrodinamikában.

a) $\nabla\cdot\nabla\phi = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\phi) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = (\nabla\cdot\nabla)\phi$

Ennek a fontos operátornak külön neve van: *Laplace-operátor*. Jele Δ vagy ∇^2

A $\Delta\phi = 0$ egyenlet neve Laplace-egyenlet.

b) Fontos azonosság: $\nabla\times\nabla\phi \equiv 0$, azaz skalármező gradiensének rotációja mindig nulla. A skalárpotenciál létezésénél lesz szerepe.

Bizonyítás: Írjuk ki pl. az első komponenst:

$(\nabla\times\nabla\phi)_1 = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0$, ha a parciális deriválások sorrendje felcserélhető.

Vagy az i-dik komponest felírva:

$(\nabla\times\nabla\phi)_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial\phi}{\partial x_k} = 0$, ha $\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial\phi}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}$

c) $\nabla(\nabla\cdot\mathbf{a}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\mathbf{a})$

A Laplace operátor vektorokra érvényes alakjában fordul elő, lásd az e) pontot.

d) Fontos azonosság: $\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{a} \equiv 0$, azaz vektormező rotációjának divergenciája mindig nulla. A vektorpotenciál bevezetésénél lesz szerepe.

Bizonyítás: $\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}) = 0$, amennyiben a deriválások sorrendje felcserélhető.

vagy rövidített jelölést használva:

$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 a_k}{\partial x_i\partial x_j} = 0$, ha $\frac{\partial^2 a_k}{\partial x_i\partial x_j} = \frac{\partial^2 a_k}{\partial x_j\partial x_i}$.

e) $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{a}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{a}) - (\nabla\cdot\nabla)\mathbf{a}$

Az azonosság a kettős vektori szorzat kifejtéséből rögtön látható, vagy mindkét oldalt komponensekben fölírva is bizonyítható.

Ez az azonosság a Laplace operátor vektormezőkre kiterjesztett definícióját tartalmazza:

$\Delta\mathbf{a} = (\nabla\cdot\nabla)\mathbf{a} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{a}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbf{a})$

Megjegyzés: könnyen igazolható, hogy a jobboldal kifejtése derékszögű koordinátákban a

$\Delta\mathbf{a} = \Delta a_1\mathbf{e}_1 + \Delta a_2\mathbf{e}_2 + \Delta a_3\mathbf{e}_3 = \Delta a_i\mathbf{e}_i$ összefüggésre vezet, ahol $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.
A görbevonalú rendszerekben azonban $\Delta\mathbf{a}$ a fenti e) azonossággal számolandó.

4.6. Vektormező iránymenti deriváltja, a deriválttenzor

Legyen $\mathbf{k}$ egységvektor. Vizsgáljuk az $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ vektormező változási ütemét a tér $\mathbf{r}$ helyén, ha a $\mathbf{k}$ irányban elmozdulunk. Ezt nevezzük az $\mathbf{a}$ vektormező $\mathbf{k}-$irány menti deriváltjának:
$$\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{k}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\mathbf{a}(\mathbf{r}+\varepsilon\mathbf{k}) - \mathbf{a}(\mathbf{r})\right] \approx \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{e}_j\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\varepsilon k_i = \mathbf{e}_j\frac{\partial a_j}{\partial x_i}k_i = (\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{a}.$$

A deriválttenzor
Az $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ vektormező deriválttenzora $\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{r}}$, melynek komponensei (mátrixa) Descartes-derékszögű koordinátákban:
$$\left(\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{r}}\right)_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}.$$

5. Görbék és felületek

Általában 3-dimenziós euklideszi teret tételezünk föl. Ha mást nem mondunk Descartes derékszögű koordinátákat használunk. Egy pont koordinátáit x, y, z-vel, a bázisvektorokat pedig $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$-val jelöljük, a pont helyvektora $\mathbf{r} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} = (x, y, z)$.

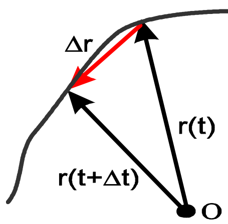
5.1. Görbék megadási módjai, az érintővektor

1. Implicit alak: pl. $ax + by - d = 0$ (egyenes), $ax^2 + by^2 + 2cxy - d = 0$ (kúpszelet).
2. Explicit alak: $y = f(x)$, pl. $y = \cos x$, $y = chx$, $y = \ln x$, $y = \exp(x)$ (síkgörbék).
3. Paraméteres alak: A $t \in [a, b]$ paramétertartomány pontjaihoz a tér $\mathbf{r}(t)$ helyvektorú pontját rendeli:
$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t)),\ t \in [a, b]$.

Feltesszük, hogy az $\mathbf{r}(t)$ függvény folytonos, továbbá néhányszor folytonosan differenciálható t szerint. Legjobb elképzelés a térgörbére a "meghajlított drótdarab". Egy görbe többféleképpen is paraméterezhető, pl. ívhosszparaméter, ld. később. A fizikában görbék pl. a az anyagi pont pályája (itt paraméter az idő), áramlásoknál az áramvonalak, elekromágneses mezőben az E- és B-vonalak, stb.

Példa: hengeres csavarvonal (helix): $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$
Feladat: Írja föl a fenti implicit és explicit módon megadott görbék valamilyen paraméteres alakját!

5.1.1. Az érintővektor:



Az érintővektor a szelők határesete az alábbi értelemben:
$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)$
$\lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$, ha létezik.
Például mechanikában a pálya időderiváltja a sebességvektor, amely érintő irányú: $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$.

5.2. Az ívhossz:

A görbére egy beosztást készítünk. Az osztópontokat egyenes szakaszokkal összekötve egy poligont kapunk: $\Delta s_i = \overline{P_{i-1}P_i}$,a poligon hossza $\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i$. Az ívhossz a poligonok hosszának felső határa, amely differenciálható görbék esetén az alábbi módon írható:

$s = \lim_{\substack{\Delta s_i\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)|\, dt = \int\limits_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\, dt$

A fizikában a pálya egy szakaszának ívhossza az *út*: $s = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\mathbf{r}}(t)|\, dt$.

Feladat: Mutassuk meg, hogy a hengeres csavarvonal ívhossza: $s = t\sqrt{a^2+b^2}$

5.2.1. A görbe ívhossz szerinti paraméterezése

Tekintsük az ívhosszt, mint a t paraméter függvényét:
$s(t) = \int\limits_0^t \sqrt{\dot{x}(t')^2 + \dot{y}(t')^2 + \dot{z}(t')^2}\, dt'$
Az $s(t)$ függvény szigorúan monoton növő, folytonosan differenciálható, így létezik az inverze: $t(s)$.
A görbe t helyett az s ívhosszal is paraméterezhető : $\mathbf{r}(t(s)) = \mathbf{r}(s)$
Az ívhosszparaméter szerinti differenciálást pont helyett vesszővel jelöljük:
$\mathbf{r}' = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \mathbf{r}'' = \dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}.$
Példa: hengeres csavarvonal ívhosszparaméteres alakja:
$x = a\cos(\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}), \ y = a\sin(\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}), \ z = b\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

5.3. Kísérő háromél vagy triéder, görbület, torzió

5.3.1. Az érintő egységvektor $\mathbf{t}(s)$

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}.$$

Tehát az $\mathbf{r}(s)$ függvény s szerinti deriváltja egységvektor, és jelentése szerint az érintő: $\mathbf{t}(s) = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds} = \dfrac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}.$

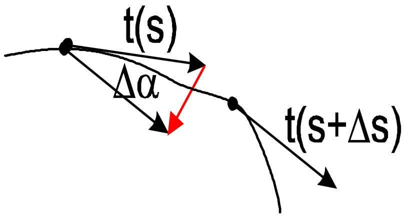
Feladat: Mutassuk meg, hogy az érintő (egyenes) egyenlete $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \lambda\dot{\mathbf{r}}$, ahol $\mathbf{R}$ az egyenes futópontja.

5.3.2. A főnormális egységvektor $\mathbf{n}(s)$

Definíciója: $\mathbf{n}(s) = \dfrac{\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}''|}.$
A főnormális egységvektor merőleges az érintő egységvektorra.

Ennek bizonyítása: $\mathbf{r}'^2 = 1$. Deriváljuk mindkét oldalt s szerint: $2\mathbf{r}'\mathbf{r}'' = 0$.

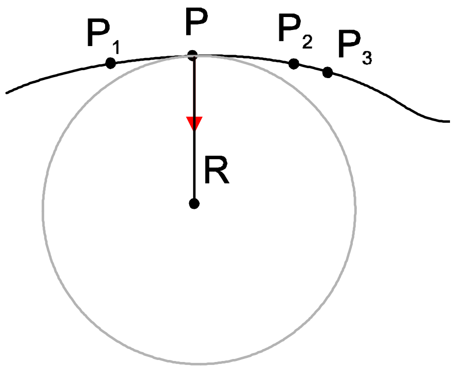
Görbület A görbület az érintő egységvektor elfordulásának üteme, az ívhossz szerinti "szögsebesség":
$G = \lim_{\Delta s \to 0} \dfrac{|\mathbf{t}(s+\Delta s) - \mathbf{t}(s)|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \dfrac{|\Delta\alpha|}{\Delta s}$.



Eszerint $G = |\mathbf{t}'| = |\mathbf{r}''|$ annak mértéke, hogy a görbe mennyire tér el az egyenestől (az egyenes görbülete nulla, a kör görbülete a sugár reciproka, a helix görbülete $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, mint látni fogjuk).

Példák
1. Egyenes $\Leftrightarrow$ $G = 0$, mivel: $G = |\mathbf{t}'| = 0 \quad \Leftrightarrow \mathbf{t} = \mathbf{r}' = \textit{áll} = \mathbf{c}_1 \Leftrightarrow \mathbf{r} = \mathbf{c}_1 s + \mathbf{c}_2$. Az utolsó kifejezés az egyenes egyenlete.
2. Kör
$x = a\cos\dfrac{s}{a}$, $y = a\sin\dfrac{s}{a}$
$x' = -\sin\dfrac{s}{a}$, $\quad y' = \cos\dfrac{s}{a}$
$x" = -\dfrac{1}{a}\cos\dfrac{s}{a}$, $y" = -\dfrac{1}{a}\sin\dfrac{s}{a}$
$G = \sqrt{(x")^2 + (y")^2} = \dfrac{1}{a}$
Feladat: Mutassuk meg hogy a helix görbülete $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$!

Görbületi sugár, görbületi kör
Vegyünk föl a görbén egy P pontot, és a közelében a P_1, P_2, P_3 pontokat. Fektessünk át egy kört a P_1, P_2, P_3 pontokon. Ha a pontokat a P ponthoz közelítjük, az átfektetett kör határesetben a P ponton átmenő



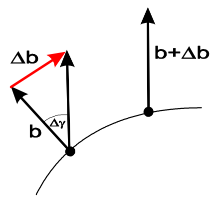
görbületi kör lesz, amelynek sugara R . Megmutatható, hogy a görbület reciproka a görbületi sugár: $R = \dfrac{1}{G}$.
Továbbá az is igaz, hogy az $\mathbf{n}$ főnormális egységvektor egyenese átmegy a görbületi középponton, a görbületi kör pedig a $\mathbf{t}$ és $\mathbf{n}$ síkjában van.

Feladat: Határozzuk meg a helix érintő egységvektorát és fönormálisát, és a görbületi kör középpontját az $s = 0$ pontban!

5.3.3. A binormális egységvektor

Definíció szerint $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$.

Torzió (τ vagy T) A torzió definíciója: $\tau = |\mathbf{b}'|$.
A torzió a binormális egységvektor változásának ívhossz szerinti szögsebessége.

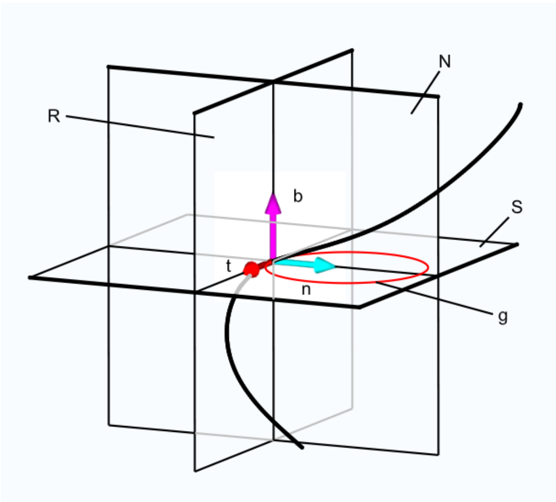


$$|T| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\mathbf{b}(s + \Delta s) - \mathbf{b}(s)|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta \gamma|}{\Delta s}.$$
Síkgörbe esetén $\mathbf{b} = \acute{a}ll.$, azaz $\mathbf{b}' = 0$.

A torzió annak mértéke, hogy a görbe milyen ütemben csavarodik ki a simulósíkjából.
A torzió akkor pozitív, ha a $\mathbf{t}$ érintővektor irányából visszanézve a $\mathbf{b}$ vektor pozitív irányban (az óramutató járásával ellenkező) irányban forog:
Állítás: $\mathbf{b}' = -T\mathbf{n}$.
Bizonyítás: $\mathbf{b}^2 = 1 \implies \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}' = 0$, azaz $\mathbf{b}' \perp \mathbf{b}$.
$\mathbf{b} \cdot \mathbf{t} = 0 \implies \mathbf{b}' \cdot \mathbf{t} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{t}' = 0 \implies \mathbf{b}' \cdot \mathbf{t} = 0$, mert $\mathbf{t}' \parallel \mathbf{n}$,ezért $\mathbf{b} \cdot \mathbf{t}' = 0$.
Tehát $\mathbf{b}' \perp \mathbf{t}$. Így csak $\mathbf{b}' \parallel \mathbf{n}$ lehet, ennélfogva $\mathbf{b}' = -T\mathbf{n}$.
Ezek szerint
$T = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{t})$

Feladat: Mutassuk meg, hogy a helix torziója $T = \dfrac{b}{a^2 + b^2}$.

A görbe minden pontjához megadható három, páronként merőleges egységvektor. $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$. *Ezt a három vektort kisérő háromélnek (triédernek) nevezzük.*



Simulósík (S): $\mathbf{t}$ és $\mathbf{n}$ síkja (a görbületi kör síkja)
Normálsík (N): $\mathbf{n}$ és $\mathbf{b}$ síkja (adott pontban a görbe ezt a síkot éppen merőlegesen átdöfi)
Rektifikálósík (R): $\mathbf{b}$ és $\mathbf{t}$ síkja

Feladatok:
Mutassuk meg, hogy
1. a simulósík egyenlete: $(\mathbf{R}-\mathbf{r})\cdot(\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}})=0$.
2. a normálsík egyenlete: $(\mathbf{R}-\mathbf{r})\cdot\dot{\mathbf{r}}=0$.
3. a rektirikálósík egyenlete: $(\mathbf{R}-\mathbf{r})\cdot(\dot{\mathbf{r}}\times(\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}))=0$.
4. a főnormális egyenesének egyenlete $\mathbf{R}=\mathbf{r}+\lambda\dot{\mathbf{r}}\times(\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}})$. (ez az egyenes megy át a görbületi középponton).

5.4. Frenet képletek:

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{t}' = & * & G\mathbf{n} & * \\ \mathbf{n}' = & -G\mathbf{t} & * & +T\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' = & * & -T\mathbf{n} & * \end{array}$$

A görbét térbeli helyzetétől függetlenül egyértelműen meghatározza a görbülete és a torziója.

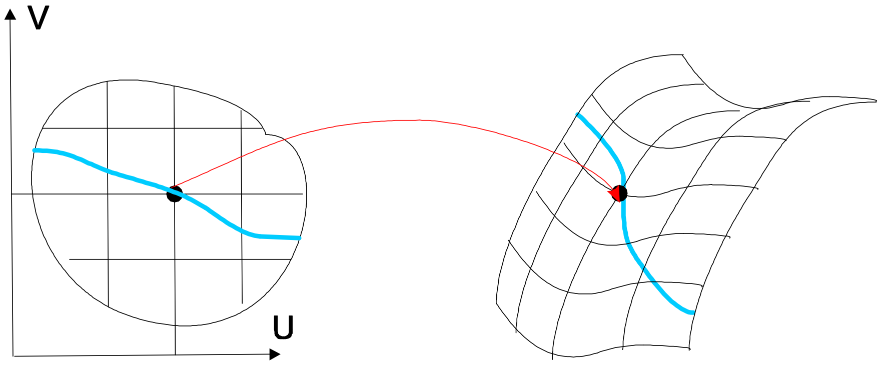
Kérdés: Melyek azok a görbék, melyeknek görbülete és torziója állandó?
Válasz: (egyenes, kör, helix)

Érvényesek az alábbi hasznos formulák:
a) $G=\dfrac{1}{R}=\dfrac{|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}$
b) $T=\dfrac{1}{G^2}\dfrac{\dot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}}\times\dddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|^6}$
Mechanikai alkalmazás:
sebesség: $\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}=v\mathbf{t}$, $\quad v=\dfrac{ds}{dt}$.
gyorsulás: $\mathbf{a}=\dot{\mathbf{v}}=\ddot{\mathbf{r}}=\dot{v}\mathbf{t}+v\dot{\mathbf{t}}=\dot{v}\mathbf{t}+v\mathbf{t}'\dfrac{ds}{dt}=a_t\mathbf{t}+v^2\mathbf{t}'=a_t\mathbf{t}+\dfrac{v^2}{R}\mathbf{n}$.

5.5. Felületek megadási módjai

A felületeket többféle módon meg lehet adni:
1. implicit: $F(x,y,z)=0$.
pl. skalármező szintfelületei: $\phi(\mathbf{r})=\phi(x,y,z)=c$,
$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz-1=0$ (másodfokú felület),

$ax + by + cz - d = 0$ (sík)
2. explicit: $z = f(x, y)$
pl. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - r^2}$ (félgömb)
3. paraméteres: $x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ \ z = z(u, v) \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$
pl. gömbfelület: $x = a \cos\varphi \sin\vartheta,\ y = a \sin\varphi \sin\vartheta,\ z = a \cos\vartheta$
Általában felületnek nevezzük a kétdimenziós $T(u, v)$ paramétersík leképezését a háromdimenziós térbe.
Elvileg a három megadási mód egymással ekvivalens.



5.6. Felületi görbék, érintősík, felületi normális

Legyen a felület $\mathbf{r}(u, v)$ módon megadott, és $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{r}_u$, $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{r}_v$ sehol sem nulla és nincsenek csúcsok, élek.

Felületi görbe: $\mathbf{r}(u(t), v(t)) = \tilde{\mathbf{r}}(t)$ *Speciális felületi görbék*
$u = c,\ \ v = t \qquad \mathbf{r}(u = c, v) \qquad v$-vonal,
$u = t,\ \ v = c \qquad \mathbf{r}(u, v = c) \qquad u$-vonal (vagy u-paramétervonal).
Ezek alapján
$\mathbf{r}_u = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ az u-vonal érintője,
$\mathbf{r}_v = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ a v-vonal érintője.

Érintősík: Legyen $\mathbf{r}(u(t), v(t))$ egy adott M pontján átmenő felületi görbe. Ezen felületi görbe érintője az M pontban
$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} = \mathbf{r}_u \cdot \frac{du}{dt} + \mathbf{r}_v \cdot \frac{dv}{dt}.$
Eszerint az M ponton átmenő bármely felületi görbe érintője benne van az $\mathbf{r}_u$ és $\mathbf{r}_v$ vektorok síkjában. Ez a sík a felület *érintősíkja* az M pontban.

Felületi normális: Az érintősíkra merőleges egységvektor
$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}, \qquad \mathbf{n} \parallel \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$

5.7. Felületek felszíne

A felület felszínének kiszámításához a felületet lefedjük egy alkalmas beosztással. Ilyen az "érintő pikkely". Ha a felület $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ paraméteres alakban van megadva, a felületelem $\Delta S_i = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, \Delta u \Delta v$.
A felület felszíne $S = \sum_i \Delta S_i$. A beosztást finomítva az összeg egy kétváltozós integrálra vezet:
$S = \int dS = \int |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, du dv.$
Irányított felületelemet úgy kapunk, hogy a felületelemet az ottani felületi normális egységvektorral megszorozzuk. A felületi normális egységvektor $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$, így a felületelem vektor $\Delta \mathbf{S}_i = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \Delta u \Delta v$
Ily módon kapjuk, hogy $\mathbf{S} = \int \mathbf{n} dS = \int (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) du dv$. Az $\mathbf{S}$ neve *felületvektor.*

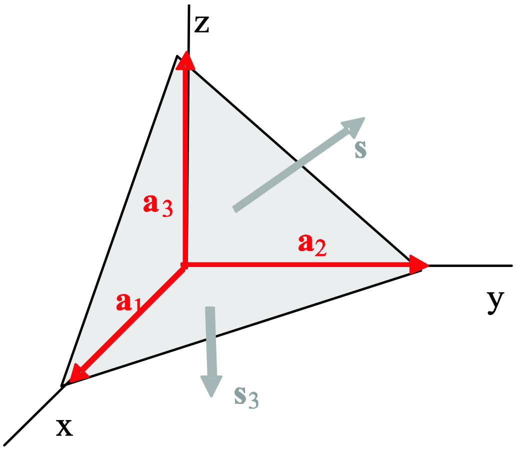
A felszín számítása különböző felületmegadási módok esetén.
1. A felület paraméteres alakja esetén: $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)} = \sqrt{\mathbf{r}_u^2 \mathbf{r}_v^2 - (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v)^2}$
Szokásos jelölések $\mathbf{r}_u^2 = E$, $\mathbf{r}_v^2 = G$, $\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = F$.
$S = \int \sqrt{EG - F^2} du dv$
2. A felület $z = f(x, y)$ explicit módon van megadva. Ez megfelel a $x = u$, $y = v$ paraméterezésnek.

$\mathbf{r}_u = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x})$, $\mathbf{r}_v = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y})$, $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1)$

A felszín számítása $S = \int \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 + 1} \;\; dxdy$

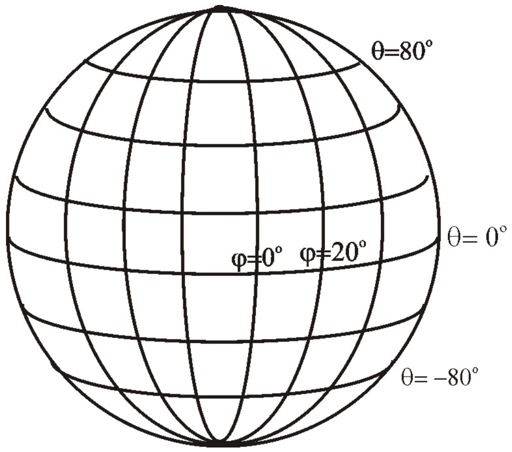
5.7.1. A felületvektor:

A felület felszíne szorozva a felület normális egységvektorával. Például egy tetraéder oldallapjainak felületvektorai a következők:



$(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) \times (\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1) = 2\mathbf{S}$
$\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_1 = 2\mathbf{S}_3 = 2S_{xy}(-\mathbf{e}_z)$
$\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_2 = 2\mathbf{S}_1 = 2S_{yz}(-\mathbf{e}_x)$
$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3 = 2\mathbf{S}_2 = 2S_{zx}(-\mathbf{e}_y)$
Adjuk össze az oldalak felületvektorait:
$2(\mathbf{S} + \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3) = \ldots = \mathbf{0}$
Érvényes tehát, hogy *bármely tetraéder felületvektorainak összege nulla.*
Általánosítva, mivel a belső felületek felületvektorai kiejtik egymást, igaz a következő tétel:
Bármely zárt felület "felületvektora" = 0.
Ezek alapján a tetraéder tetszőleges lapjának felületvektora ($\mathbf{S}$) kifejezhető a többi lap felületvektorával:
$\mathbf{S} = S_{xy}\mathbf{e}_z + S_{yz}\mathbf{e}_x + S_{zx}\mathbf{e}_y$
$d\mathbf{S} = dS_{xy}\mathbf{e}_z + dS_{yz}\mathbf{e}_x + dS_{zx}\mathbf{e}_y$

Példák:
1.A felület $F(x, y, z) = 0$. A felületi normális, mint láttuk párhuzamos a ∇F vektorral.
2. gömbfelület: $x = a\cos\varphi\sin\theta,\ y = a\sin\varphi\sin\theta,\ z = a\cos\theta$
θ vonalak és φ-vonalak a gömbfelületen:



6. Vektorok integrálása

6.1. Görbe menti vagy vonalintegrál

6.1.1. Skalárfüggvény vonalintegrálja

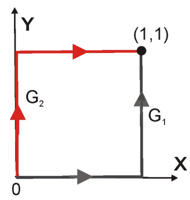
Adott $\phi(\mathbf{r})$, és a $\mathcal{C} : \mathbf{r}(t)$ görbe $(a \leq t \leq b)$. Készítsünk egy beosztást a görbén, az $i-$edik szakasz hossza $|\Delta\mathbf{r}_i|$, az ide mutató közbülső helyvektor $\mathbf{r}_i$.
Képezzük a következő összeget $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi(\mathbf{r}_i)\,|\Delta\mathbf{r}_i|$
Ezen összegek határértéke, ha a beosztások végtelenül finomodnak, azaz a beosztások száma tart a végtelenbe, és a beosztások hossza tart a nullához, a ϕ függvény görbe menti integrálja:
$\lim\sum\limits_{i=1}^{n} \phi(\mathbf{r}_i)\,|\Delta\mathbf{r}_i| = \int\limits_{\mathcal{C}} \phi(\mathbf{r}(s))ds = \int\limits_{a}^{b} \phi(\mathbf{r}(t))\,|\dot{\mathbf{r}}(t)|\,dt.$

6.1.2. Vektormező vonalintegrálja

Adott $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, és a $\mathcal{C} : \mathbf{r}(t)$ görbe ($a \le t \le b$). Készítsünk egy beosztást a görbén, az $i-$edik szakasz irányított hossza $\Delta\mathbf{r}_i$ (Fizikában pl. az elmozdulásvektor). Az "ide" mutató helyvektor $\mathbf{r}_i$.
Képezzük a következő összeget:
$\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{v}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta\mathbf{r}_i$.
Ennek határértéke (ha létezik) a beosztás finomításakor a $\mathbf{v}$ vonalintegrálja:
$\lim\limits_{\Delta\mathbf{r}_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{v}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta\mathbf{r}_i = \int\limits_{\mathcal{C}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = \int\limits_{a}^{b} \mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)\ dt.$
Pl. az $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ erőtérben a *munka* egy $\mathcal{C}$ görbe mentén ($A \to B$):
$W_{A\to B} = \int\limits_{\mathcal{C}} F_s ds = \int\limits_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int\limits_{a}^{b} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)\ dt$

További jelölések:
$d\mathbf{s} = \mathbf{t}ds = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds}ds = d\mathbf{r} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}dt = \dot{\mathbf{r}}dt$
$\int\limits_{\mathcal{C}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int\limits_{\mathcal{C}} v_s ds = \int\limits_{\mathcal{C}} (v_x dx + v_y dy + v_z dz)$

Példák
1. Számítsuk ki a $\mathbf{F} = -\mathbf{i}y + \mathbf{j}x$ erőtér rotációját, valamint a munkát az ábrán jelölt kétféle út esetén!



Megoldás:
$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}0 + \mathbf{j}0 + \mathbf{k}(1+1) = 2\mathbf{k}$
A munka: $F_x = -y,\ F_y = x$

$\int\limits_{\mathcal{G}_1} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int\limits_0^1 F_x(x, y=0)dx + \int\limits_0^1 F_y(x=1, y)dy = \int\limits_0^1 0dx + \int\limits_0^1 1dy = [y]_0^1 = 1$

$\int\limits_{\mathcal{G}_2} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int\limits_0^1 F_y(x=0, y)dy + \int\limits_0^1 F_y(x, y=1)dx = 0 + \int\limits_0^1 (-1)dx = [-x]_0^1 = -1$

Megjegyzés: A munka most függ az úttól. Látni fogjuk, hogy annak szükséges feltétele, hogy a munka független legyen az úttól: $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

2. Adott a $\mathbf{v} = (xy, yz, zx)$ vektormező. Számoljuk a $\int\limits_{\mathcal{G}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ vonalintegrált egy a, b paraméterű hengeres csavarvonal egy menetére!

Megoldás:

$\mathcal{G} : x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt \qquad t = [0,\ 2\pi]$

$\dot{\mathbf{r}} = (-a\sin t,\ a\cos t,\ b)$

$\int\limits_{\mathcal{G}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int \mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)dt = \int_0^{2\pi} [-a^2 \sin^2 t \cos t + a^2 bt \sin t \cos t + ab^2 t \cos t]dt = -\frac{\pi a^2 b}{2}$

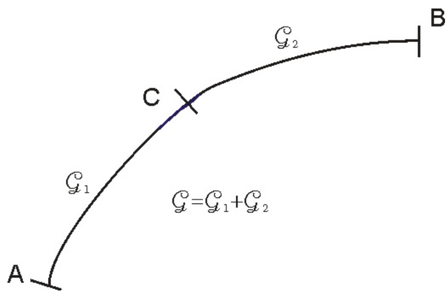
3. Integráljuk a $\mathbf{v} = (y^2,\ xy - x^2,\ 0)$ vektort a $\mathcal{G} : y^2 = 9x$ síkgörbe mentén a $(0,0)$ ponttól az $(1,3)$ pontig!

Megoldás:

$\int\limits_{\mathcal{G}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int\limits_0^3 [\frac{2}{9}y^3 + (\frac{1}{9}y^3 - \frac{1}{81}y^4)]dy = \frac{123}{20}$

Gyakran használjuk a vonalintegrál alábbi tulajdonságait:

1. a vonalintegrál - hasonlóan az egyváltozós integrálokhoz - additív:

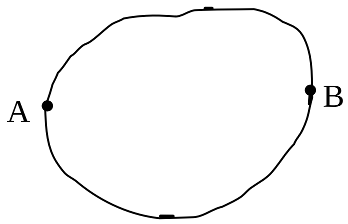


$\int\limits_{A(\mathcal{G})}^{B} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int\limits_{A(\mathcal{G}_1)}^{C} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \int\limits_{C(\mathcal{G}_2)}^{B} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$

2. A vonalintegrál - hasonlóan az egyváltozós integrálokhoz - előjelet vált, ha megváltoztatjuk a görbe irányítását: $\mathcal{G} \to (-\mathcal{G})$

$$\int_{A(\mathcal{G})}^{B} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{B(-\mathcal{G})}^{A} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

3. Gyakran használatos jelölés a zárt görbe mentén vett integrálra (ún. körintegrál): $\oint \mathbf{v} d\mathbf{r}$



4. A zárt síkgörbe területét a következő formulával számolhatjuk ki: $T = \frac{1}{2} \oint (xdy - ydx)$.

Az additivitás és az előjelváltásra vonatkozó tulajdonságok következménye az alábbi nagyon fontos tétel:
A vonalintegrál akkor és csak akkor független az úttól, ha bármely zárt görbére az integrál 0.

Érvényes a következő állítás:
Az $\int_{A(\mathcal{G})}^{B} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ független az úttól (azaz csak az A és B pontoktól függ, az azokat összekötő $\mathcal{G}$ görbétől nem), ha van olyan $U(x, y, z)$ függvény, hogy $\mathbf{v} = \nabla U$ (feltesszük, hogy a tartományunk egyszeresen összefüggő). Ekkor

$$\int_{A}^{B} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = U(B) - U(A).$$

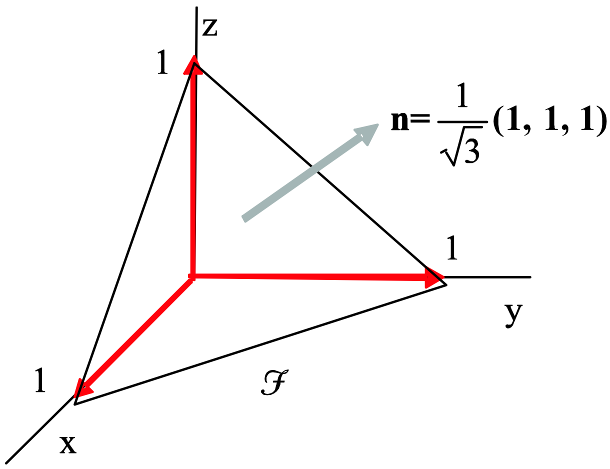
Ennek szükséges feltétele: $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.
Ha a vonalintegrál független az úttól, akkor az U függvény egyszerűen megadható:

$U(P) = \int\limits_A^P \mathbf{v} d\mathbf{r}$ (tetszőleges görbe mentén).
Példa: A konzervatív erőtér.

6.2. Felületi integrálok

Legyen adva a $\phi(x, y, z)$ függvény az $\mathcal{F}$ felület pontjaiban. Képezzük az $\mathcal{F}$ felület egy beosztását (pl. $u-$ és $v-$vonalak hálózatával).
Az i-edik beosztás területe legyen $\Delta f_i (= |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, \Delta u \Delta v)$. Képezzük a
$\sum\limits_i \phi(x_i, y_i, z_i) \Delta f_i$
összeget. Ha a beosztást finomítva ez az összeg közelít egy határértékhez, akkor ezt a határértéket a $\phi(x, y, z)$ függvény $\mathcal{F}$ felületre vett integráljának nevezzük: $\int_{\mathcal{F}} \phi df$.
A fizikában igen gyakran előfordul, hogy egy $\mathbf{v}$ vektormező fluxusát kell kiszámolni egy adott felületre:
$\int_{\mathcal{F}} v_n df = \int_{\mathcal{F}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} df = \int_{\mathcal{F}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$,
ahol $d\mathbf{f} = \mathbf{n} df$ az elemi felületvektor. Például, ha a felület u, v paraméterekkel van megadva:
$d\mathbf{f} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v du dv$.

Példa:
Legyen F az $x + y + z = 1$ síknak a három koordinátasík közé eső darabja! Számoljuk ki az $I = \int_F \mathbf{r} \cdot d\mathbf{f}$ fluxust!
Megoldás:
$\mathbf{r} \cdot d\mathbf{f} = (x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \ df = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + y + z) \ df = \frac{1}{\sqrt{3}} df$, mivel a felület mentén $x + y + z = 1$.
$I = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \int_F df = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot$ (a háromszög területe) $= \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2}$.
Megjegyzés:
Az oldallapokra a fluxus 0, mivel pl. az x, y síkba eső oldallapon az $\mathbf{r}$ vektor z komponense 0, így ezen a lapon $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{f} = (x, y, 0) \cdot (0, 0, -1) df = 0$.
Így a tetraéder zárt felületére vett összes fluxus:
$\oint \mathbf{r} \cdot d\mathbf{f} = \dfrac{1}{2}$.



6.3. Térfogati integrálok

Legyen adva a $\phi(x, y, z)$ függvény az $\mathcal{V}$ térrész (térfogat) pontjaiban. Képezzük a $\mathcal{V}$ térrész egy beosztását (pl. kicsiny hasábokkal). Az $i-$edik beosztás térfogata legyen ΔV_i . Képezzük a $\sum_i \phi(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$ összeget.
Ha a beosztást finomítva ez az összeg közelít egy határértékhez, akkor ezt a határértéket a $\phi(x, y, z)$ függvény $\mathcal{V}$ térfogatra vett integráljának nevezzük:
$\int_{\mathcal{V}} \phi dV$
A dV térfogatelem derékszögű koordinátákban $dV = dx\ dy\ dz$.

6.4. A Stokes-tétel

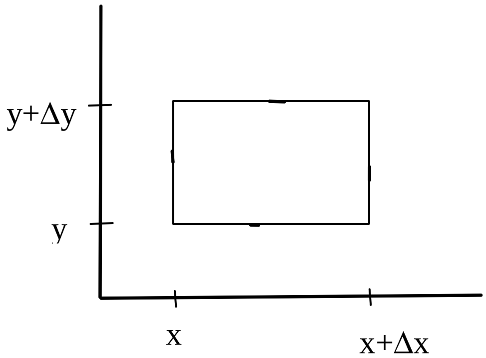
Legyen adva egy $\mathcal{F}$ felület, amelynek pereme a $\mathcal{G}$ zárt görbe. A felületet és a görbét irányítsuk a jobb-csavarnak megfelelően. Ha a $\mathbf{v}$ vektormező folytonosan differenciálható az $\mathcal{F}$ felületen és annak peremén, akkor érvényes az alábbi tétel (*Stokes*)

$$\oint_G \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_F \mathrm{rot}\, \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f},$$

azaz a $\mathbf{v}$ vektormező örvényerősségének fluxusa az $\mathcal{F}$ felületre egyenlő a peremére számolt cirkulációval.

Mielőtt a Stokes-tétel bizonyítását elvégeznénk, bebizonyítunk egy segédtételt, ami tulajdonképpen a Stokes-tétel két-dimenziós megfelelője:

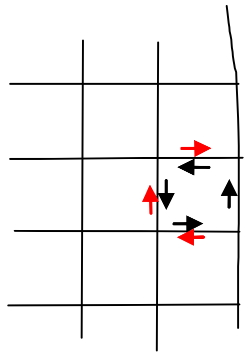
Segédtétel (Green-formula):
Legyen $\mathcal{F}$ az x, y síkban egy kis téglalap, amelynek oldalai Δx, illetve Δy. $\mathcal{G}$ pedig az $\mathcal{F}$-et határoló zárt görbe. Számoljuk ki a $\mathbf{v}$ zárt görbe menti integrálját:



$$\oint_G \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = \int_x^{x+\Delta x} v_x(x', y)dx' + \int_y^{y+\Delta y} v_y(x+\Delta x, y')dy' - \int_x^{x+\Delta x} v_x(x', y+\Delta y)dx' -$$
$$\int_y^{y+\Delta y} v_y(x, y')dy' =$$
$$= \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial v_x}{\partial y}(-\Delta y)dx' + \int_y^{y+\Delta y} \frac{\partial v_y}{\partial x}\Delta x dy' = \left[-\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right]_{(\bar{x},\bar{y})} \cdot \Delta x\ \Delta y =$$
$$\overline{(\nabla \times \mathbf{v})_z} \cdot \Delta x\ \Delta y$$
$$\oint_G v_x dx + v_y dy = \int_F \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)dx\, dy = \int_F (\mathrm{rot}\,\mathbf{v})_z df \qquad \textit{Green-formula}$$
A fenti egyszerű példában kapott ún. *Green-formula* a Stokes-tétel speciális esete, amelyre az általános Stokes-tétel bizonyítása visszavezethető.

6.4.1. A Stokes tétel szemléletes bizonyítása

Osszuk fel a felületet kicsiny négyzetek hálózatára. Alkalmazzuk egy ilyen kicsiny, síknak tekinthető négyzetre a a Green-formulát:



Fennáll a következő közelítő formula:
$\oint\limits_G \mathbf{v}{\cdot}d\mathbf{r} = \sum\limits_{4\ oldal} \mathbf{v}{\cdot}d\mathbf{r} = (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{df}$
Összegezzük a felírt közelítést az összes kis négyzetre. Azt kapjuk, hogy a $\mathbf{v}{\cdot}d\mathbf{r}$ kifejezések a belső oldalaknál kiejtik egymást, és csak a határgörbére vett összeg marad:
$\sum\limits_{perem} \mathbf{v}{\cdot}d\mathbf{r} = \sum\limits_{\ddot{o}sszes\ n\acute{e}gyzet} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{df}$
Ha a négyzetek oldalhosszát és így felszínét a nullához, számukat a végtelenbe tartatjuk (azaz a beosztást finomítjuk), akkor a fenti összefüggések határértékben a következő integrálokat adják

$$\oint\limits_G \mathbf{v}{\cdot}d\mathbf{r} = \int_F \nabla \times \mathbf{v}{\cdot}d\mathbf{f}$$

Ez a Stokes-tétel.

6.4.2. Példák:

1. Alkalmazzuk a Stokes-tételt $\mathbf{v} = \mathbf{c}\phi$ alakú vektormezőre, ahol $\phi(\mathbf{r})$ skalármező, $\mathbf{c}$ tetszőleges, nem nulla, konstans vektor.
$(\nabla \times \mathbf{v}){\cdot}d\mathbf{f} =(\nabla \times \mathbf{c}\phi){\cdot}d\mathbf{f} =(\nabla\phi \times \mathbf{c})d\mathbf{f} =d\mathbf{f}{\times}\nabla\phi \cdot \mathbf{c}$
$\mathbf{c} \cdot \int_F d\mathbf{f} \times \nabla\phi = \mathbf{c} \oint\limits_G \phi d\mathbf{r} \qquad \Longrightarrow \qquad \int_F d\mathbf{f} \times \nabla\phi = \oint\limits_G \phi d\mathbf{r}$

2. Bizonyítsuk be, hogy $\oint\limits_F \nabla \times \mathbf{v}{\cdot}d\mathbf{f} = \mathbf{0}$.

A zárt felületet egy síkkal daraboljuk két részre, és két (most már nem zárt) felületre alkalmazzuk a Stokes tételt:

$$\oint_F \nabla \times \mathbf{v}\cdot d\mathbf{f} = \int_{F_1} \nabla \times \mathbf{v}\cdot d\mathbf{f} + \int_{F_2} \nabla \times \mathbf{v}\cdot d\mathbf{f} = \oint_G \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} - \oint_G \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = \mathbf{0},$$

mivel a határgörbék azonosak, csak ellenkező körüljárásúak.

Következmény:

A $\oint_F \nabla \times \mathbf{v}\cdot d\mathbf{f} = \mathbf{0}$ összefüggésra alkalmazhatjuk a Gauss-tételt (ld. 6.6 pont):

$$\oint_F \nabla \times \mathbf{v}\cdot d\mathbf{f} = \int_V \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) dV = 0. \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

A jól ismert vektorazonosság egy koordinátáktól független bizonyítását kaptuk.

3. Mutassuk meg, hogy $\oint_G \mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = \mathbf{0}$

A Stokes-tétel szerint $\oint_G \mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = \int_F \nabla \times \mathbf{r}\cdot d\mathbf{f} = 0$, mert $\nabla \times \mathbf{r} = 0$.

4. Mutassuk meg, hogy egy síkfelület (amit a G zárt görbe határol) $\mathbf{T}$ felületvektora $\mathbf{T} = \frac{1}{2} \oint_G \mathbf{r}\times d\mathbf{r}$!

a) A helyvektor által súrolt területelem $|\mathbf{r}\times d\mathbf{r}| = r dr \sin\theta = 2dT$. Ebből az állítás látszik.

b) Alkalmazzuk a Stokes-tételt a $\mathbf{v} = \mathbf{c} \times \mathbf{r}$ vektormezőre, ahol $\mathbf{c}$ konstans vektor.

$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\mathbf{c} \times \mathbf{r}) = \mathbf{c}(\nabla \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{r} = 3\mathbf{c} - \mathbf{c} = 2\mathbf{c}$

$\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = \mathbf{c} \times \mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{r}\times d\mathbf{r}$

Kapjuk, hogy $\int_F \nabla\times(\mathbf{c} \times \mathbf{r})\cdot d\mathbf{f} = 2\mathbf{c}\cdot \int_F d\mathbf{f} = \mathbf{c} \cdot \oint_{\mathbf{G}} \mathbf{r}\times d\mathbf{r} \qquad \Longrightarrow \qquad 2\mathbf{T} = \oint_{\mathbf{G}} \mathbf{r}\times d\mathbf{r}$

Megjegyzés:

A Stokes-tételnek a fizikában számos fontos alkalmazása van: konzervatív erőterek, örvények és cirkuláció a folyadékok áramlási terében, Ampére-törvénye, a Faraday-féle indukciós törvény az elektrodinamikában, stb.

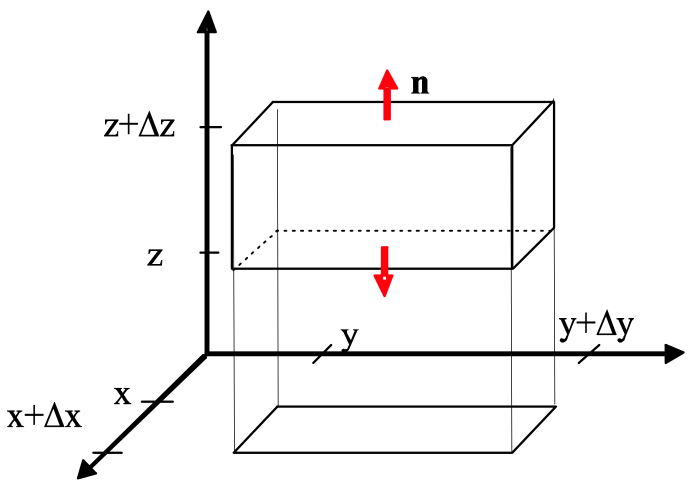
6.5. A Gauss-tétel

Legyen adva egy $\mathcal{F}$ zárt felület, amely egy $\mathcal{V}$ térfogatot (térrészt) fog közre. A felület normálisát kifelé irányítjuk. Ha a $\mathbf{v}$ vektormező folytonosan differenciálható a tartományban és a határán, akkor érvényes a következő tétel:

$$\int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \oint_{\mathcal{F}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$$

azaz a $\mathbf{v}$ vektormező forrássűrűségének térfogatra vett integrálja (az ún. forráserősség) megegyezik a határfelületre vett fluxussal.
A bizonyításhoz előbb belátunk egy segédtételt, amelyre a Gauss-tétel visszavezethető.

Segédtétel:
Legyen az $\mathcal{F}$ zárt felület egy kicsiny, Δx, Δy, Δz oldalhosszúságú téglatest, melynek élei párhuzamosak az x, y, z koordinátatengelyekkel. Érvényes, hogy a téglatest zárt felületére vett fluxus megegyezik a div $\mathbf{v}$ térfogati integráljával:
$\oint_{\mathcal{F}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{v} dV$



Bizonyítás:

Számítsuk ki a téglatest oldallapjaira a $\mathbf{v}$ vektormező fluxusát. Az integrál a hat lapra vett összegre esik szét, és a lapokon vett integrálás helyett számoljunk középértéktétellel. Például a z tengelyre merőleges "felső" és "alsó" lapra kapjuk, hogy:
$v_z(x', y', z+\Delta z)\Delta x\ \Delta y - v_z(x'', y'', z)\Delta x\ \Delta y,$
ahol figyelembe vettük, hogy az alsó lap normálisa $-\mathbf{k}$, és hogy a $\mathbf{v}$ mező értékét a lapok közbülső pontjában kell venni. Vegyük észre, hogy a kapott kifejezés a z szerinti parciális differenciálhányados segítségével így írható:
$$\frac{\partial v_z}{\partial z}\Delta z\ \Delta x\ \Delta y.$$
Hasonlóan eljárva a másik két lap-párra, végül kapjuk, hogy
$$\oint_{\mathcal{F}} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{f} = \frac{\partial v_z}{\partial z}\Delta z\ \Delta x\ \Delta y + \frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\ \Delta z\ \Delta y + \frac{\partial v_y}{\partial y}\Delta y\ \Delta z\ \Delta x = \operatorname{div}\mathbf{v}\ \Delta x\ \Delta z\ \Delta y = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}\mathbf{v} dV,$$
ahol az utolsó előtti kifejezésben a divergencia értékét a tartomány közbülső pontjában számoljuk ki.
A Gauss-tétel a segédtétel felhasználásával könnyen belátható, hiszen egy tetszőleges térfogat kis hasábokkal egyre finomabban kitölthető, illetve a belső felületekre vett fluxusok kiejtik egymást.

Példa:
Legyen $\mathcal{F}$ tetraéder az $x+y+z=1$ sík, és a három koordinátasík által határolt zárt felület. Korábban kiszámoltuk, hogy az $I = \oint \mathbf{r}\cdot d\mathbf{f}$ zárt felületre vett fluxus értéke $\frac{1}{2}$. Számítsuk ki a $\operatorname{div}\mathbf{r}$ tetraéderre vett térfogati integrálját :
$$\int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}\mathbf{r} dV = \int_{\mathcal{V}} 3dV = 3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2},$$
amely eredmény a Gauss-tétel szerint várható is.
A kapott eredmény általánosítható: Egy tartomány V térfogata kiszámítható oly módon, hogy vesszük a $\mathbf{r}$ helyvektor fluxusát a határoló zárt felületre és az eredményt osztjuk 3-mal:
$$V = \int_{\mathcal{V}} dV = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{r}\ dV = \frac{1}{3}\oint_{\mathcal{F}} \mathbf{r}\cdot d\mathbf{f}.$$

6.5.1. A Gauss-tétel szemléletes bizonyítása

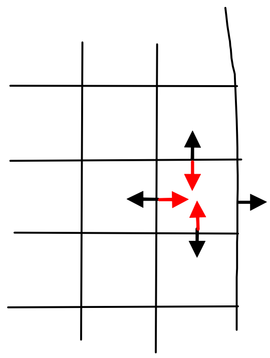
Osszuk fel a térfogatot tetszőlegesen nagy számú elemi kis téglatestre. Az előző pontban bizonyított segédtétel szerint egy ilyen kis tégla egy alkalmas közbülső pontjában:

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{\Delta V}\oint_{\mathcal{F}}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{f},$$

vagyis fennáll a következő formula

$$\oint_{\mathcal{F}}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{f} == \nabla\cdot\mathbf{v}\ \Delta V$$

Adjuk össze az összes kis téglára ezt az összefüggést. Azt kapjuk, hogy a belső felületekre a $\mathbf{v}\cdot d\mathbf{f}$ kifejezések páronként kiejtik egymást, így csak a külső felületre vett összeg marad meg:



$$\sum_{határfelület}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{f} = \sum_{térfogat}\nabla\cdot\mathbf{v}\ \Delta V$$

Ha a téglák száma tart a végtelenbe, miközben oldaléleik hossza, és így térfogatuk a nullához tart, a felírt összegek a következő integrálokhoz tartanak:

$$\oint_{\mathcal{F}}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{f} = \int_{\mathcal{V}}\nabla\cdot\mathbf{v}dV.$$

Eredményül a Gauss-tételt kaptuk.

A Gauss-tételt gyakran használjuk Descartes-féle derékszögű koordinátákban a következő alakban:

$$\sum_{k=1}^{3} \int \frac{\partial}{\partial x_k} (\cdots)_k dV = \sum_{k=1}^{3} \oint df \; n_k (\cdots)_k \; .$$

6.6. Green tételei, a Gauss-tétel további megfogalmazásai

A Gauss-tétel gyakran használt egyik következményének külön neve van: Green tételei.
1. Legyen $\mathbf{v} = \phi \nabla \psi$
$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \nabla \phi \; \nabla \psi + \phi \nabla^2 \psi$
Green I. tétele:

$$\int_{\mathcal{V}} (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \; \nabla \psi) dV = \oint_{\mathcal{F}} \phi \nabla \psi \cdot d\mathbf{f} = \oint_{\mathcal{F}} \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} df$$

2. Legyen $\mathbf{v} = \phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi$
A Gauss-tételbe behelyettesítve kapjuk *Green II. tételét*:

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi \right) dV = = \oint_{\mathcal{F}} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) df$$

2. A Gauss tétel további következményeit kaphatjuk a $\mathbf{v}$ vektormező további speciális választásaival.
a) Legyen $\mathbf{v} = \phi \mathbf{c}$, ahol $\phi(\mathbf{r})$ skalármező, $\mathbf{c}$ tetszőleges, nem zérus, állandó vektor.
$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\phi \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\nabla} \phi.$
Beírva a Gauss-tételbe
$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\nabla} \phi dV = \oint_{\mathcal{F}} \phi \mathbf{c} \cdot d\mathbf{f} \qquad \Longrightarrow \mathbf{c} \cdot [\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla} \phi dV - \oint_{\mathcal{F}} \phi d\mathbf{f}].$
Mivel $\mathbf{c}$ tetszőleges, fennáll, hogy

$$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla} \phi dV = \oint_{\mathcal{F}} \phi d\mathbf{f}$$

(a gradiens koordinátáktól független definíciója)
b) Legyen $\mathbf{v} = \mathbf{c} \times \mathbf{u}$, ahol $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ vektormező, $\mathbf{c}$ tetszőleges, nem zérus, állandó vektor.
$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{u}) = -\mathbf{c} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u})$
$(\mathbf{c} \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{f} = -\mathbf{c} \cdot (d\mathbf{f} \times \mathbf{u})$

Beírva a Gauss-tételbe
$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{c} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}) dV = \oint_{\mathcal{F}} \mathbf{c} \cdot (d\mathbf{f} \times \mathbf{u})$
Mivel $\mathbf{c}$ tetszőleges, következik, hogy

$$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u} dV = \oint_{\mathcal{F}} d\mathbf{f} \times \mathbf{u}$$

(a rotáció koordinátáktól független definíciója)
c) Összefoglalva a Gauss-tétel ilyen alakban írható:
$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla}(...) dV = \oint_{\mathcal{F}} d\mathbf{f}(...)$

$$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla}(...) dV = \oint_{\mathcal{F}} d\mathbf{f}(...)$$

(a ∇ koordinátáktól független definíciója)
3) További példák:
a) $\oint_{\mathcal{F}} d\mathbf{f} = \mathbf{0}$, zárt felület felületvektora mindig nulla.
Bizonyítás: Legyen $\mathbf{v} = \mathbf{c}$ állandó vektor.
$\nabla \cdot \mathbf{c} = 0. \qquad \Longrightarrow \mathbf{0} = \oint_{\mathcal{F}} d\mathbf{f}$
b) Egy tartomány térfogata kiszámítható a $V = \frac{1}{3} \oint_{\mathcal{F}} \mathbf{r} d\mathbf{f}$ képlettel.
Bizonyítás: Alkalmazzuk a Gauss-tételt a $\mathbf{v} = \mathbf{r}$ vektorra.
$\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$ Így
$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{r} dV = 3 \int_{\mathcal{V}} dV = 3V = \oint_{\mathcal{F}} \mathbf{r} d\mathbf{f}$, az állítás leolvasható.
c) *A Laplace-operátor integrál előállítása*
Legyen $\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla}\phi$, ahol $\phi(\mathbf{r})$ skalármező
$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi = \nabla^2 \phi, \qquad \boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \mathbf{n} df = \frac{\partial \phi}{\partial n} df$
A Gauss-tételbe beírva:

$$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla}^2 \phi dV = \oint_{\mathcal{F}} \frac{\partial \phi}{\partial n} df$$

Egy kicsiny térfogatot, és zárt felületet választva a bal oldal (középérték tétellel) így írható:

$$\nabla^2\phi dV = \oint_{\mathcal{F}} \frac{\partial\phi}{\partial n} df \qquad \Longrightarrow \nabla^2\phi = \frac{1}{dV}\oint_{\mathcal{F}} \frac{\partial\phi}{\partial n} df$$

A zárt felületet összehúzva a tartomány egy belső pontjára, kapjuk, hogy

$$\nabla^2\phi = \lim_{dV\to 0} \frac{1}{dV}\oint_{\mathcal{F}} \frac{\partial\phi}{\partial n} df$$

(koordinátáktól független definíció)
Kérdés: $\nabla^2\mathbf{v}$-re nincs hasonló definíció?
Válasz: $\nabla^2\mathbf{v} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} - \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{v}$.
A Gauss-tételnek a fizikában számos fontos alkalmazása van: kontinuitási egyenlet a folyadékok áramlási terében, az elektrodinamikában, kvantummechanikában és általában a megmaradási törvényeknél, Gauss-törvénye az elektrodinamikában, és általában a potenciálelméletben, stb.

6.7. A grad, div, rot, Laplace-operátor (koordinátáktól független) integrál előállítása

Összefoglaljuk az előző fejezetekben kapott hasznos formulákat.
A Gauss-tétel alapján a $\mathbf{v}$ vektormező *divergenciája* egy tetszőleges P pontban meghatározható, mint a $\mathbf{v}$ fluxusa a P-t körülvevő $\mathcal{F}$ felületre osztva a körbezárt térfogattal, és a felületet egyenletesen összehúzva a P pontra:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = \lim_{V\to P} \frac{1}{V}\oint_{\mathcal{F}} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{f}$$

Hasonlóan, a Stokes-tétel alapján a $\mathbf{v}$ vektormező *rotáció*`jának` vetülete egy tetszőleges $\mathbf{n}$ irányra egy teszőleges P pontban meghatározható, mint a P pont körüli zárt $\mathcal{G}$ görbére számított cirkuláció osztva a görbe által körülzárt területtel, majd a görbét egyenletesen összehúzva a P pontra:

$$\mathbf{n}\cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{v} = \lim_{F\to P} \frac{1}{F}\oint_{\mathcal{G}} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}$$

A fentiek alapján könnyen előállíthatjuk a *gradiens* koordinátamentes alakját. Legyen $\mathbf{v} = \varphi\mathbf{a}$, ahol φ skalármező, $\mathbf{a}$ pedig egy tetszőleges konstans vektor.

$\operatorname{div}\mathbf{v} = \operatorname{div}(\varphi\mathbf{a}) = \mathbf{a}\cdot\operatorname{grad}\varphi = \lim\limits_{V\to P}\frac{1}{V}\oint_F(\varphi\mathbf{a})\cdot d\mathbf{f} = \mathbf{a}\cdot\left(\lim\limits_{V\to P}\frac{1}{V}\oint_{\mathcal{F}}\varphi d\mathbf{f}\right)$,
ahonnan leolvasható, hogy

$$\operatorname{grad}\varphi = \lim_{V\to P}\frac{1}{V}\oint_F \varphi d\mathbf{f}$$

A divergencia és a gradiens kifejezése alapján vegyük észre, hogy a *nabla-vektor* előállítható a

$$\nabla(\ldots) = \lim_{V\to P}\frac{1}{V}\oint_F d\mathbf{f}\ (\ldots)$$

alakban. Ezek szerint pl. a rotáció koordinátamentesen definálható az alábbi módon is:

$$\nabla\times\mathbf{v} = \lim_{V\to P}\frac{1}{V}\oint_F d\mathbf{f}\times\mathbf{v}$$

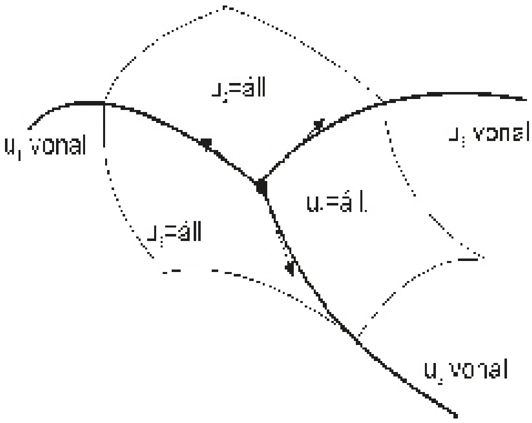
A *Laplace-operátor*ra 3.c példában kapott előállítást is írjuk újra ide:

$$\boldsymbol{\nabla}^2\phi = \lim_{dV\to 0}\frac{1}{dV}\oint_{\mathcal{F}}\frac{\partial\phi}{\partial n}df$$

7. Görbevonalú koordináták

A Descartes derékszögű koordinátarendszert az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ ortonormált bázis feszíti ki. Egy tetszőleges pont helyvektora ebben a bázisban $\mathbf{r} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ ahol x, y, z a pont ún. Descartes-féle derékszögű koordinátái.
Ezek a derékszögű koordináták kifejezhetők 3 másik független adat: u, v, w, ún. általános görbevonalú koordináták segítségével is, vagyis a derékszögű koordináták az új, görbevonalú koordináták függvényei: $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$.
A tér adott pontján három, kölcsönösen merőleges sík metszi egymást: az $x =$ *állandó*, $y =$ *állandó* és a $z =$ *állandó* sík. Egy pont helyzetét megadhatjuk mint ezen három koordinátasík közös pontját. Ha az u, v, w új koordináták közül pl. w-t rögzítjük, a kapott felület neve u, v-felület. Ha az u, v-felületen pl. v-t rögzítjük, a kapott görbe neve u-vonal. Ha az u, v-felületen u-t rögzítjük, akkor v-vonalat kapunk. Hasonlóan értelmezünk két további koordinátafelületet (v, w felület, u, w

felület), valamint a w-vonalat. Ezek felelnek meg a korábbi koordinátasíkoknak és koordináta-tengelyeknek.
A könnyebb jelölés kedvéért a Descartes derékszögű koordinátákat $x_1, x_2,\ x_3$-mal, a görbevonalú koordinátákat $u_1,\ u_2,\ u_3$-mal jelöljük.



A derékszögű koordináták az új, görbevonalú koordináták függvényei:
$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_1,\ u_2,\ u_3)\ :\quad x_1 = x_1(u_1, u_2, u_3),\ \ x_2 = x_2(u_1, u_2, u_3),\quad x_3 = x_3(u_1, u_2, u_3)$.
Mivel u_1, u_2, u_3 független koordináták, az inverz függvényeknek is létezniük kell, azaz a görbevonalú koordináták felírhatók a derékszögű koordinátákkal:
$u_i = u_i(x_1,\ x_2,\ x_3),\ i = 1, 2, 3$.
A koordinátavonalak érintői, amelynek irányában a koordináta változik, a koordinátafelületre merőleges vektorok, pl az u_3 vonal érintője merőleges az $(u_1,\ u_2)$ felületre:

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}$$

A $\mathbf{g}_i$ vektorok Descartes-féle derékszögű koordinátái:

$$\mathbf{g}_i = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_i}, \frac{\partial x_2}{\partial u_i}, \frac{\partial x_3}{\partial u_i}\right)$$

A tér egy P pontjában meghatározott $\mathbf{g}_1,\ \mathbf{g}_2,\ \mathbf{g}_3$ vektorok a görbevonalú koordinátarendszer bázisvektorai. Ily módon a tér minden pontjában definiálunk egy koordinátarendszert. Ha a $\mathbf{g}_1,\ \mathbf{g}_2,\ \mathbf{g}_3$ vektorok páronként merőlegesek, a koordinátarendszert *ortogonális görbevonalú koordinátarendszer*nek hívjuk.

A továbbiakban csak ortogonális koordinátákkal foglalkozunk. A koordinátavonalak minden pontban merőlegesek egymásra. Az u_i koordinátavonal érintő egységvektora

$\mathbf{e}_i = \frac{1}{h_i}\mathbf{g}_i$,

az $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ ortonormált bázis általában helyről-helyre változik (elfordul).

Jelöljük a $\mathbf{g}_i$ bázisvektor hosszát h_i-vel, $h_i = |\mathbf{g}_i|$. A h_1, h_2, h_3 mennyiségeket Lamé-féle állandóknak, vagy *skála-faktor*oknak nevezzük. A Lamé-féle állandók segítségével kifejezhetők az ívhossz-elem, a felületelem és a térfogatelem.

Ívhossz-elem az u_1-vonal mentén: $ds_1 = h_1 du_1$

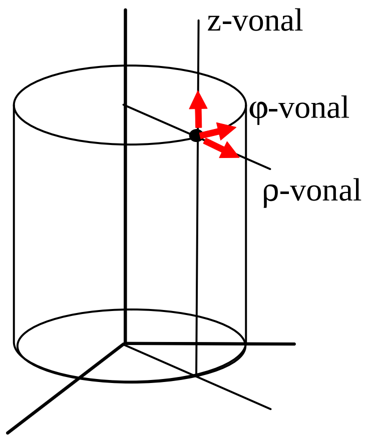
Felületelem az u_1=áll. , vagyis az u_2, u_3 koordinátafelületen: $df_{23} = h_2 h_3 du_2 du_3$

Térfogatelem (a koordinátafelületek által körbefogott térrész térfogata): $dV = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$

7.1. Henger- és gömbi polárkoordinátarendszer

7.1.1. Hengerkoordinátarendszer

hengerkoordináták: $u_1 = \rho$, $u_2 = \varphi$, $u_3 = z$

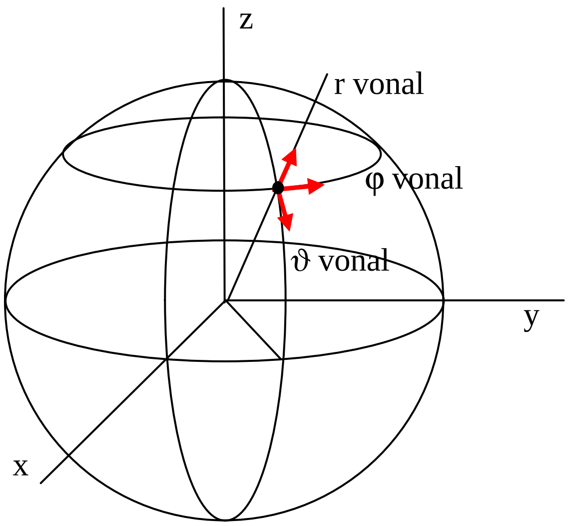


$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\rho, \varphi, z)$

$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad z = z$
Koordinátafelületek:
$\rho = áll.$felület henger
$\varphi = áll.$ felület: félsík
$z = áll.$ felület sík
Koordinátavonalak: ld. ábra
Érintővektorok és skála-faktorok (Lamé-állandók)
$$\mathbf{g}_\rho = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = (\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ 0), \qquad h_\rho = 1$$
$$\mathbf{g}_\varphi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (-\rho\sin\varphi,\ \rho\cos\varphi,\ 0), \qquad h_\varphi = \rho$$
$$\mathbf{g}_\rho = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = (0,\ 0,\ 1), \qquad h_z = 1$$
Ívelem-négyzet: $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$
Felületelemek: $df_z = \rho\ d\rho d\varphi, \qquad df_\varphi = d\rho dz, \qquad df_\rho = \rho d\varphi dz$
Térfogatelem: $dV = \rho\ d\rho d\varphi dz$

7.1.2. Gömbi polárkoordináta-rendszer

Gömbi polárkoordináták: $u_1 = r,\ u_2 = \vartheta,\ u_3 = \varphi$



$\mathbf{r} = \mathbf{r}(r, \vartheta, \varphi)$

$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\vartheta$
Koordinátafelületek:
$r = áll.$ felület: gömb
$\vartheta = áll.$ felület: kúp
$\varphi = áll.$ felület: félsík
Koordinátavonalak: ld. ábra
Érintővektorok és skála-faktorok (Lamé-állandók)

$$\mathbf{g}_r = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = (\sin\vartheta\cos\varphi,\ \sin\vartheta\sin\varphi,\ \cos\vartheta), \qquad h_r = 1$$

$$\mathbf{g}_\varphi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} = (r\cos\vartheta\cos\varphi,\ r\cos\vartheta\sin\varphi,\ -r\sin\vartheta), \qquad h_\vartheta = r$$

$$\mathbf{g}_\varphi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (-r\sin\vartheta\sin\varphi,\ r\sin\vartheta\cos\varphi,\ 0), \qquad h_z = r\sin\vartheta$$

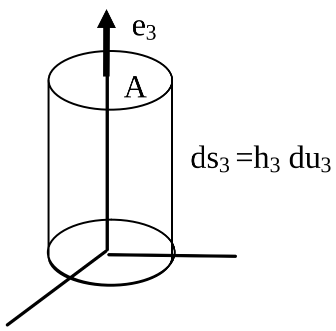
Ívelem-négyzet: $ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta d\varphi^2$
Felületelemek: $df_r = r^2\sin\vartheta\ d\vartheta d\varphi, \qquad df_\vartheta = r\sin\vartheta\ drd\varphi, \qquad df_\varphi = rdrd\vartheta$
Térfogatelem: $dV = r^2\sin\vartheta\ drd\vartheta d\varphi$

7.2. grad, div, rot, görbevonalú koordinátákban

7.2.1. Gradiens

$$\nabla\phi = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint_F \phi\mathbf{n}dF$$

Számoljuk ki a $\nabla\phi$ vetületét pl. a 3. koordinátavonal irányára!
Legyen a térfogat egy kis henger $\mathbf{e}_3$ irányú alkotóval, amelynek hossza $ds_3 = h_3 du_3$, térfogata $V = A \cdot h_3 du_3$.



A $\phi(u_1,\ u_2,\ u_3)$ függvényt a henger felső és alsó lapjára, valamint palástjára kell integrálni, de a palást normálisa merőleges $\mathbf{e}_3$-ra:

$$\nabla\phi \cdot \mathbf{e}_3 = \lim_{\substack{A\to 0,\\ du_3\to 0}} \frac{1}{Ah_3du_3}\left\{[\phi(u_3+du_3)-\phi(u_3)]A + \underbrace{\int\limits_{palást} \phi\mathbf{n}dF\cdot\mathbf{e}_3}_{=0}\right\} =$$

$$\nabla\phi \cdot \mathbf{e}_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u_3}$$

A többi komponensre hasonlóan számolhatunk, így

$$\nabla\phi = \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{h_i}\frac{\partial\phi}{\partial u_i}\mathbf{e}_i$$

Hengerkoordinátákban: $h_\rho = 1,\ h_\varphi = \rho,\ h_z = 1$

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

Gömbi polárkoordinátákban: $h_r = 1,\ h_\theta = r,\ h_\varphi = r\sin\theta$

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi$$

Példa: $\nabla r^n = nr^{n-1}\mathbf{e}_r = nr^{n-2}\mathbf{r}$

7.2.2. Divergencia

$\operatorname{div}\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = \lim\limits_{\mathbf{V}\to\mathbf{0}}\frac{1}{V}\oint\limits_F \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}df$

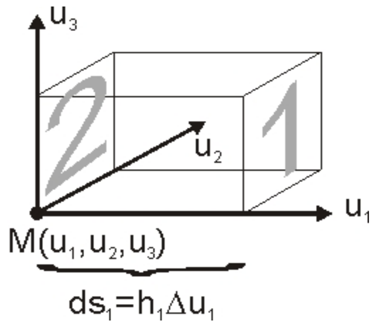
Legyen a térfogat egy kis paralelepipedon a koordinátavonalak mentén (ábra).

Az integrált a hat lapra írt összegként kezeljük:

Írjuk fel például az $\mathbf{e}_1$ normálisú 1. és a $-\mathbf{e}_1$ normálisú 2. lapra vett felületi integrált:

$v_1h_2h_3du_2du_3|_{1.\ lapon} - v_1h_2h_3du_2du_3|_{2.\ lapon}$

Ha ezt osztjuk a $V = ds_1ds_2ds_3 = h_1h_2h_3du_1du_2du_3$ térfogattal, kapjuk hogy



$$\lim_{\mathbf{V}\to\mathbf{0}} \frac{1}{h_1h_2h_3} \frac{v_1h_2h_3|_{1.lapon} - v_1h_2h_3|_{2.lapon}}{du_1} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial(v_1h_2h_3)}{\partial u_1}$$

A másik két szemközti lap-párra hasonlóan eljárva, adódik:

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{v_i}{h_i}h_1h_2h_3\right)$$

Hengerkoordinátákban:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(A_1\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_2}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

(Figyelem! A v_i komponens a $\mathbf{v}$ vektor vetülete a $\mathbf{g}_i$ irányra: $v_i = \mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_i$)
Gömbi polárkoordinátában:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(A_1r^2) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_2\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(A_3)$$

7.2.3. Rotáció

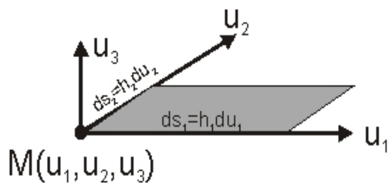
$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v} = \lim\limits_{\mathbf{V}\to\mathbf{0}}\frac{1}{V}\oint\limits_F \mathbf{n}\times\mathbf{v}dF,$

vagy

$\mathbf{k}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v} = \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v} = \lim\limits_{\mathbf{A}\to\mathbf{0}}\frac{1}{A}\oint\limits_G \mathbf{v}\cdot d\mathbf{s}.$

Az utóbbi alkalmasabb a komponensek meghatározására. Legyen a kis sík felület az előző ábra $\mathbf{k} = \mathbf{e}_3$ normálisú lapja.

$A = h_1du_1h_2du_2$



Számoljuk ki a vonalintegrálokat a szemközti oldalpárokra:
$\mathbf{e}_3 \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} = (\operatorname{rot} \mathbf{v})_3 =$
$$\lim_{\mathbf{A}\to\mathbf{0}} \frac{1}{h_1 du_2 h_2 du_3}[v_1 h_1 du_1|_{u_2} - v_1 h_1 du_1|_{u_2+du_2} + v_2 h_2 du_2|_{u_1+du_1} - v_2 h_2 du_2|_{u_1}] =$$
$$= \lim_{\mathbf{A}\to\mathbf{0}} \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{v_2 h_2|_{u_1+du_1} - v_2 h_2|_{u_1}}{du_1} - \frac{v_1 h_1|_{u_2+du_2} - v_1 h_1|_{u_2}}{du_2}\right]$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{v})_3 = \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}(v_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial u^2}(v_1 h_1)\right]$$

Az első és második komponenst hasonlóan kaphatjuk meg. Az eredményeket egy formulába összefoglalva:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \frac{h_i}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial v_k h_k}{\partial u_j} \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i .$$

Praktikusan megjegyezhető determináns alakban:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 h_1 & \mathbf{e}_2 h_2 & \mathbf{e}_3 h_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ v_1 h_1 & v_2 h_2 & v_3 h_3 \end{vmatrix} .$$

A rotáció hengerkoordinátákban
$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_3}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial r}\right)\mathbf{e}_2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r v_2)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_1}{\partial \varphi}\right)\mathbf{e}_3$$

Gömbi polárkoordinátákban:
$$(\operatorname{rot} \mathbf{v})_1 = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(v_3 r \sin\theta) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(v_2 r)\right] = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_3 \sin\theta) - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_2}{\partial \varphi}$$
stb.

7.3. A Laplace-operátor görbevonalú koordinátákban

a) Skalárfüggvényre: $\nabla^2\Phi = \nabla(\nabla\Phi)$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{h_1h_2h_3}{h_i^2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_i}\right)$$

b) Vektormezőre: $\nabla^2\mathbf{A} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}) - \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})$
Derékszögű koordinátarendszerben:
$\nabla^2\Phi = \sum\limits_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$
Hengerkoordinátarendszerben:
$\nabla^2\Phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$
Gömbi polárkoordinátarendszerben:
$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$

8. A potenciálelmélet alapjai

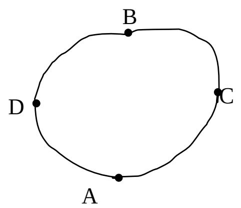
8.1. Skalárpotenciál

Legyen adva egy $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ erőtér (mező) a tér $(\mathbf{r})$ egy egyszeresen összefüggő tartományában.
Ha az $\mathbf{F}$ erőtér felírható egy skalárfüggvény gradienseként
(a) $\quad \mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi$,
akkor a $\Phi(\mathbf{r})$ neve skalárpotenciál. A skalárpotenciál segítségével az erőteret 3 (komponens)függvény helyett egy (skalár)függvénnyel tudjuk leírni. A skalárpotenciál, mint látni fogjuk egy additív konstans erejéig van meghatározva. A skalárpotenciálból származtatható erőtér neve *konzervatív erőtér.*
Kérdés, hogy adott erőtér esetén mikor létezik a skalárpotenciál? Megfogalmazunk két további álítást:
(b) $\quad \nabla\times\mathbf{F} = 0$,

(c) $\oint\limits_G \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 0,$

azaz a tetszőleges zárt görbére végzett munka nulla, vagyis a munka független az úttól.
Megmutatjuk, hogy ez 3 állítás ekvivalens, azaz bármelyikből kindulva következik a másik kettő.
(a)→(b)→(c):
Tegyük fel, hogy $\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi \quad \Longrightarrow \quad \nabla\times\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\Phi \equiv 0$, és így a Stokes-tétel alapján $\oint\limits_G \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 0.$

$\oint\limits_G \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -\oint\limits_G \nabla\Phi\cdot d\mathbf{s} = -\oint\limits_G d\Phi = 0$, amennyiben a potenciál egyértékű függvény
(c)→(a):
Induljunk abból, hogy fennáll $\oint\limits_G \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \mathbf{0}$ bármely zárt görbére. Ez azt jelenti, hogy az A és a B pontok közti integrál értéke független az úttól.



$$\oint\limits_{ACBDA} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \oint\limits_{ACB} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -\oint\limits_{BDA} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \oint\limits_{ADB} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

Fizikában úgy mondjuk, hogy a munka független az úttól, értéke csak a kezdő és végponttól függ, azaz definiálunk egy függvényt (a skalárpotenciált), amelyre

$$\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \Phi(A) - \Phi(B)$$

Ha B a változó pont, mondjuk, az A pontban pedig $\Phi(A) = 0$, akkor $\Phi(\mathbf{r})$ definíciója

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\int_A^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \text{ (tetszőleges görbé mentén számolható!)}$$

Most megmutatjuk, hogy $\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi$.

Legyen A és B közeli pontok: $A = \mathbf{r}$, $B = \mathbf{r} + \mathbf{dr}$, $\Phi(A) - \Phi(B) = -d\Phi$

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \approx \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -d\Phi = -\nabla\Phi \cdot d\mathbf{r} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{F} = -\nabla\Phi.$$

A hármas ekvivalenciát az ábra szemlélteti:

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\mathbf{F} = -\nabla\Phi} \arrow[dl] & \\
\boxed{\nabla \times \mathbf{F} = 0} \arrow[rr, "\text{Stokes}"'] & & \boxed{\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0} \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Probléma: Miért kell megkövetelni, hogy a koordináta-tér egyszeresen összefüggő legyen?

8.2. A vektorpotenciál

A fizika némely területén, pl. az elektrodinamikában szokás bevezetni egy ún. $\mathbf{A}$ vektorpotenciált a mágneses indukcióvektor helyett, a következő módon:

$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$.

Mi haszna egy vektormező helyett egy másikat bevezetni? Például, hogy ugyanolyan potenciálegyenlet érvényes rá, mint a Φ-re.

1) Ha $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$.

(Az egyik Maxwell-egyenlet automatikusan teljesül!)

Bizonyítás: $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \equiv 0$.

Az olyan vektormezőket, amelynek divergenciája nulla *szolenoid (divergenciamentes)* mezőnek nevezik. Megmutatjuk, hogy a fordított állítás

is igaz. Ha a $\mathbf{B}$ vektormező divergenciamentes, akkor létezik a vektorpotenciál, és $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$. A bizonyításhoz adunk egy konkrét számolási utasítást az $\mathbf{A}$ vektorpotenciálra.
Tegyük fel hogy adott a $\mathbf{B} = B_1\mathbf{e}_1 + B_2\mathbf{e}_2 + B_3\mathbf{e}_3$ vektormező. Keressük az $\mathbf{A}$ vektor A_1 A_2, A_3 komponenseit, ha tudjuk, hogy $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$. A rotációt kifejtve

$$\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = B_1,$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = B_2,$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = B_3.$$

Legyen $A_1 = 0$ (látni fogjuk, hogy ezt szabad megtenni). Ekkor

$$B_2 = -\frac{\partial A_3}{\partial x}$$

$$B_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x}.$$

Integrálva x szerint

$$A_2 = \int_{x_0}^{x} B_3 dx + f_2(y, z),$$

$$A_3 = -\int_{x_0}^{x} B_2 dx + f_3(y, z),$$

ahol f_2 és f_3 tetszőleges függvényei y és z-nek, de x-től nem függnek. Behelyettesítve a B_1-et tartalmazó egyenletbe:

$$B_1(x, y, z) = \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = -\int_{x_0}^{x} \left(\frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} \right) dx + \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial B_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z},$$

ahol fölhasználtuk, hogy $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} = 0$ ($\mathbf{B}$ forrásmentes!).
A jobb oldalon integrálunk x szerint:

$$B_1(x, y, z) = B_1(x, y, z) - B_1(x_0, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}$$

Mivel f_2, f_3 tetszőleges függvénye y, z-nek, válasszunk így: $f_2 = 0$,

$$f_3 = \int_{y_0}^{y} B_1(x_0, y, z) dy.$$

Az így kapott

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_2 \int_{x_0}^{x} B_3 dx + \mathbf{e}_3 \left[\int_{y_0}^{y} B_1(x_0, y, z) dy - \int_{x_0}^{x} B_2 dx \right]$$

vektormezőre nyilván teljesül, hogy $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$.
Megjegyzés: **A** meghatározása nem egyértelmű. Egy tetszőleges skalárfüggvény gradiensének hozzáadása ugyanazt a **B** mezőt adja.
Bizonyítás: Legyen $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\psi$ egy másik vektorpotenciál. Mivel $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\psi \equiv 0$, ezért

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}' = \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\psi) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\psi = \mathbf{B}.$$

A vektorpotenciál ezen megváltoztatását *mértéktranszformációnak* nevezik ($\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\psi$).

8.3. Gauss-törvény, Poisson- és Laplace-egyenlet

A Coulomb-törvény szerint az origóban elhelyezett q ponttöltés

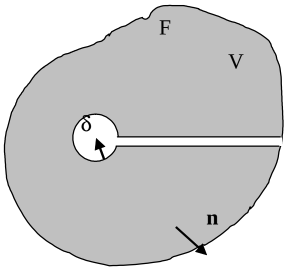
$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\mathbf{e}_r}{r^2}$$

elektromos mezőt kelt. Levezetjük ebből Gauss törvényét, amely azt állítja, hogy az elektromos mező fluxusa tetszőleges zárt felületre, ha az körbezárja az origót $\frac{q}{\varepsilon_0}$, és nulla, ha az origó a felületen kívül van.A Gauss-tétel szerint
(hagyjuk el a $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}$ konstanst)

$$\oint_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \oint_F \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} \cdot d\mathbf{f} = \int_V \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{e}_r}{r^2} \right) dV = 0,$$

minden olyan zárt felületre, amely nem tartalmazza belsejében az origót, mert az origóban az integrandus nincs értelmezve.
Ezzel a Gauss-törvény egyik felét beláttuk.
Számoljuk ki a fluxust egy olyan felületre, amely körbefogja az origót. A Gauss-tétel alkalmazásához az origót kizárjuk egy kis δ sugarú gömbbel, és hogy világos legyen, melyik a külső oldal, egy nagyon vékony, elhanyagolható térfogatú csövel összekötjük a külső felülettel. Így az új felület is zárt maradt, amelyre már alkalmazhatjuk a Gauss-tételt:

$$\oint_F \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} \cdot d\mathbf{f} + \oint_{\delta\ gömb} \frac{\mathbf{e}_r}{\delta^2} \cdot d\mathbf{f} = \mathbf{0}.$$



A második integrált ki tudjuk számítani. A felületelem a δ sugarú gömbön $d\mathbf{f} = -\mathbf{e}_r\delta^2 d\Omega$, ahol $d\Omega$ az elemi térszög. Így

$$\oint\limits_{\delta\ gömb} \frac{\mathbf{e}_r}{\delta^2}\cdot d\mathbf{f} = -\oint\limits_{\delta\ gömb} \frac{\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_r\delta^2 d\Omega}{\delta^2} = -4\pi,$$

független a δ sugártól. Visszahelyettesítve, megkaphatjuk a fluxus értékét, arra az esetre, amikor a térfogat tartalmazza az origót:

$$\oint\limits_F \frac{\mathbf{e}_r}{r^2}\cdot d\mathbf{f} = 4\pi$$

Visszaírva az elhagyott $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}$ konstanst, megkaptuk az elektrodinamika Gauss-törvényét:

$$\oint\limits_F \mathbf{E}\cdot d\mathbf{f} = 4\pi\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Kicsit tovább alakítjuk a kapott Gauss-törvényt. Ha bevezetjük a ρ térfogati töltésűrűséget, akkor a térfogatba bezárt töltés így írható $q = \int\limits_V \rho dV$.

Írjuk be a Gauss-törvénybe

$$\oint\limits_F \mathbf{E}\cdot d\mathbf{f} = \int\limits_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV.$$

Alkalmazzuk a Gauss-tételt:

$$\oint\limits_F \mathbf{E}\cdot d\mathbf{f} = \int\limits_V \nabla\cdot\mathbf{E} dV = \int\limits_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV$$

Mivel a térfogat tetszőleges, következik az integrandusok egyenlősége:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Ez az egyik Maxwell-egyenlet, amely azt fejezi ki (azt jelenti), hogy az elektromos mező forrásai a töltések.

8.3.1. Poisson- és Laplace-egyenlet

Az elektrosztatikus **E** mező konzervatív, létezik skalárpotenciálja, tehát $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi$.
Behelyettesítve a $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ egyenletbe, kapjuk, hogy
$\nabla \cdot \boldsymbol{\nabla}\Phi = \nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$
Az egyenlet bal oldala a Laplace-operátort tartalmazza, a jobb oldala adott függvény. Az ilyen egyenletek neve *parciális differenciálegyenlet* (röviden PDE), mivel benne az ismeretlen függvény parciális deriváltjai szerepelnek.
Speciálisan a

$$\nabla^2\Phi = f(\mathbf{r})$$

alakú egyenlet neve *Poisson-egyenlet,* ahol $f(\mathbf{r})$ ismert függvény. Ha a jobboldalon nulla áll, az ún. *Laplace-egyenlet*et kapjuk:

$$\nabla^2\Phi = 0$$

A Laplace- és Poisson-egyenlet a fizika minden területén előfordulnak, megoldásaival a *potenciálelmélet* foglalkozik.

8.4. Peremérték problémák: Dirichlet- és Neumann-probléma

A PDE megoldásának keresését másképpen peremérték-problémának nevezik. Hasonló ez ahhoz, ahogy a mozgásegyenlet alapján a fizikai rendszer mozgását bármely időben meg tudjuk mondani, ha ismerjük a rendszer kezdeti helyét és sebességét.

PDE esetében olyan megoldást keresünk, amelyik illeszkedik a tartomány határára előírt feltételekhez. Poisson- és Laplace-egyenlet esetén a következő fajta peremfeltételek fordulnak elő:
Dirichlet-probléma
A keresett függvény adott a tartomány zárt határfelületén. Pl. elektrosztatikában adott a potenciál a határfelületen.
Neumann-probléma
A keresett függvény normálismenti deriváltja adott a tartomány határfelületén. Pl. elektrosztatikában adott a határfelületen a $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = E_n$, azaz a térerősség normális komponense.
Dirichlet vagy Neumann-határfeltétel esetén a Poisson-egyenlet megoldása egyértelmű a tartományban, pontosabban Neumann-hatrárfeltétel esetén egy konstans erejéig meghatározott.
Bizonyítás:
Tegyük fel,hogy $\nabla^2\Phi = f(\mathbf{r})$ egyenletnek a V térrészben létezik két különböző megoldása, Φ_1 és Φ_2 melyek ugyanazon határfeltételeket elégítik ki.
Legyen $U = \Phi_1 - \Phi_2, \qquad \nabla^2 U = 0$ V-ben,
a határfeltételek Dirichlet-esetben $U = 0$, Neumann esetben $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$.
Alkalmazzuk az I. Green-tételt $u = v = U$ választással:
$\int\limits_V (U\ \nabla^2 U + \nabla U \cdot \nabla U) dV = \oint\limits_F U\ \nabla U d\mathbf{f}$.
A jobb oldal nulla bármelyik határfeltételre.
$\int_V (\nabla U)^2 dV = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla U = 0 \quad . \qquad \Longrightarrow \qquad U = \acute{a}ll.$ a térfogatban.
a) Dirichlet-feladat: $U = 0$ a zárt határfelületen $\Longrightarrow$ $U = 0$ a térfogatban is $\Longrightarrow$ $\phi_1 = \phi_2$.
b) Neumann-feladat: $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$ a zárt határfelületen $\Longrightarrow$ U =állandó , azaz $U =$ állandó a térfogatban is, tehát $\phi_1 - \phi_2$ =állandó.

8.5. Helmholtz tétele

A következőkben két tételt mondunk ki, amelyek a vektormező rotációjával és divergenciájával, közvetetten a Laplace- és Poisson-egyenlettel vannak kapcsolatban.

1. A vektormező egyértelműen meghatározott, ha adott a rotációja és divergenciája egy térrészben, és a normális komponense a térrész határán.
Bizonyítás: Adott V-ben $s(\mathbf{r}) = \operatorname{div} \mathbf{v}_1$, $\mathbf{c}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{v}_1$, és $f = v_{1n}|_F$
Megmutatjuk, hogy $\mathbf{v}_1$ egyértelmű.
Tegyük fel, hogy létezik egy másik vektormező, $\mathbf{v}_2$, amelyre s, és $\mathbf{c}$,illetve a határon vett érték ugyanaz.
Legyen
$\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$.
Ekkor
$\operatorname{div} \mathbf{w}$ =0, $\operatorname{rot} \mathbf{w} = \mathbf{0}$, és $w_n|_F = 0$.
Mivel $\mathbf{w}$ rotációmentes, létezik a ϕ skalárpotenciál, és így
$\mathbf{w} = -\nabla\phi$
Behelyettesítve a divergencia kifejezésébe, a Laplace-egyenletet kapjuk:
$\nabla^2\phi$=0.
Alkalmazzuk az I. Green-tételt a $u = v = \phi$ választással. Mivel $\dfrac{\partial\phi}{\partial n} = w_n = 0$ a határon és $\nabla^2\phi = 0$ a tartományban, a Green-tételből ennyi marad
$\int_V (\nabla\phi)^2 dV = 0 \qquad \Longrightarrow \int_V \mathbf{w}^2 dV = 0.$
Mivel $\mathbf{w}^2 \geq 0$ a feltétel szerint, csak az lehet, hogy $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$.
Tehát $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$, azaz a vektormező egyértelmű V-ben.

2. Ha egy $\mathbf{v}$ vektormezőre fönnáll, hogy divergenciája és rotációja, azaz $s(\mathbf{r}) = \operatorname{div} \mathbf{V}$, és $\mathbf{c}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{V}$, a végtelenben eltűnnek, akkor a mező egy rotációmentes és egy szolenoid (divergenciamentes) mező összegeként fölírható. Ez Helmholtz-tétele, másképpen a vektoranalízis alaptétele.
A tétel állítása szerint $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ mezők összege, ahol $\nabla \times \mathbf{v}_1 = 0$, és $\nabla \cdot \mathbf{v}_2 = 0$.
Mivel $\mathbf{v}_1$ rotációmentes, származtatható skalárpotenciálból: $\mathbf{v}_1 = -\nabla\phi$, és mivel $\mathbf{v}_2$ divergenciamentes, eéúállítható egy vektorpotenciálból: $v_2 = \nabla \times \mathbf{A}$.
Eszerint Helmholtz tétele azt mondja, hogy a $\mathbf{v}$ vektormező így írható:
$\mathbf{v} = -\ \nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A}$
Bizonyítás:
Ha $\mathbf{v}$ adott, akkor ismerjük az $s(\mathbf{r}) = \nabla\cdot\mathbf{v}$ és $\mathbf{c}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v}$ függvényeket is.

Írjuk be a divergencia és a rotáció kifejezésébe a vektormező feltételezett fölbontását:

$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (-\nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A}) = \boxed{-\nabla^2\phi = s}$

$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v} = \nabla \times (-\nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A}) = \boxed{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{c}}$

Állítjuk, hogy a $\nabla^2\phi = -s$ egyenlet megoldása

$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV'$

A $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{c}$ egyenlet megoldása

$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{c}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV'$

Megjegyzés.

A tétel speciális eseteivel már külön-külön találkoztunk.

a) Ha $\mathbf{c} = \mathrm{rot}\,\mathbf{V} = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{A} = 0$. Tehát $\mathbf{V} = -\nabla\phi$, összhangban azzal, hogy a rotációmentes mezőt a skalárpotenciál határozza meg. A potenciálegyenlet

$\nabla^2\phi = -s,$

(ún. skaláris Poisson-egyenlet)

b) Ha $s = \mathrm{div}\,\mathbf{V} = 0$, akkor $\phi = 0$. Tehát $\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{A}$. Ez összhangban van azzal, hogy a mezőt ilyenkor szolenoidmezőnek neveztük és a vektorpotenciál határozza meg. A vektorpotencuál egyenlete

$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{c}.$

A bal oldalt kifejtve

$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} = \mathbf{c}$

Ha előírjuk a $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$ mellékfeltételt (mértéktranszformációval ez mindig elérhető), a vektorpotenciál egyenlete egy vektori Poisson egyenlet:

$\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A} = -\mathbf{c}$.

Ezekkel a módszerekkel hamarosan találkozunk az elektrodinamikában, és általában a mezők fizikájában.

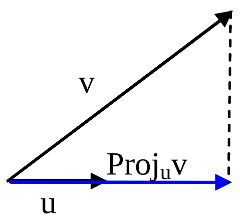
9. A tenzoralgebra elemei

9.1. Másodrendű tenzorok

Az olyan homogén, lineáris függvényeket (transzformációkat), amelyek vektorhoz vektort rendelnek *másodrendű tenzor*oknak nevezzük. A ten-

zor további elnevezése homogén lineáris vektoroperátor vagy vektortranszformáció.
A tenzor szó a rugalmasságtanból származik (tension feszültség), ahol is a feszültségtenzor kapcsolja össze a felületi normálist az ott ható erővel. További fontos példa a tehetetlenségi tenzor a merev testeknél, vagy az anizotróp kristályok dielektromos tenzora stb.
A tenzor jele félkövér nagybetű lesz és mindig megelőzi azt a vektort, amire hat. Pl. az $\mathbf{A}$ másodrendű tenzor az $\mathbf{a} \in U$ vektortérbeli vektorokat a V vektortérbe képezi le:
$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{a}$, ahol $\mathbf{b} \in V$.
A fizikában rendszerint a két vektortér nem azonos: pl. merev test perdülete a szögsebességvektor homogén lineáris függvénye:
$\mathbf{N} = \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\omega}$,
ahol $\boldsymbol{\Theta}$ a tehetetlenségi tenzor.
A homogén lineáris leképezés azt jelenti, hogy fennáll, bármely $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorra és α, β számokra, hogy
$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{A}\mathbf{a}+\beta\mathbf{A}\mathbf{b}$

Példák másodrendű tenzorokra
a) *Projekció.*
Legyen $\mathbf{u}$ tetszőleges, de adott egységvektor. Egy $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{u}$ irányú vetülete a következő:
$\mathrm{Proj}_u(\mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}$



A Proj_u másodrendű tenzor. Vektorhoz vektort rendel, csak azt kell belátni, hogy homogén lineáris-e?
$\mathrm{Proj}_u(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}) = [(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b})\cdot\mathbf{u}]\mathbf{u} = [\alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})+\beta(\mathbf{b}\cdot\mathbf{u})]\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}+\beta(\mathbf{b}\cdot \mathbf{u})]\mathbf{u} = \alpha\mathrm{Proj}_u(\mathbf{a})+\beta\mathrm{Proj}_u(\mathbf{b})$
ahol a skalárszorzás azonosságait használtuk fel.

b) *Diadikus szorzat, diádok*
Legyen adott az $\mathbf{u}$ és a $\mathbf{v}$ vektor. Az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok diadikus szorzata (jele $\mathbf{u} \circ \mathbf{v}$) egy tenzor, amely bármely $\mathbf{a}$ vektorhoz a következő vektort rendeli hozzá:
$(\mathbf{u} \circ \mathbf{v})\mathbf{a} = \mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})$
Az előző projekció tenzor eszerint
$\mathrm{Proj}_u = \mathbf{u} \circ \mathbf{u}$
A diadikus szorzat alakú tenzor neve *diád*.
c) A vektori szorzat
Legyen adott $\boldsymbol{\omega}$ vektor, amely bármely $\mathbf{a}$ vektorhoz az $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}$ vektort rendeli hozzá, vagyis $\mathbf{A}\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}$
A vektori szorzás tulajdonságai miatt $\mathbf{A} = \boldsymbol{\omega}\times$ homogén lineáris függvény.

9.2. Speciális másodrendű tenzorok, műveletek

Egyenlőség:
$\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ tenzorok egyenlők ($\mathbf{A} = \mathbf{B}$), ha bármely $\mathbf{v}$ vektorra
$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{B}\mathbf{v}$
Zérustenzor:
Bármely $\mathbf{v}$ vektort a nulla vektorba visz:
$\mathbf{0}\mathbf{v} = \mathbf{0}$
Egységtenzor:
Bármely $\mathbf{v}$ vektort önmagába képez le :
$\mathbf{E}\mathbf{v} = \mathbf{v}$
Tenzor transzponáltja:
A $\mathbf{T}$ tenzor transzponáltja a $\mathbf{T}^T$ tenzor, amelyre bármely $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektor esetén
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{T}\mathbf{v} = \mathbf{T}^T\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$
Szimmetrikus tenzor, ha $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$
Antiszimmetrikus tenzor, ha $\mathbf{T} = -\mathbf{T}^T$
Minden másodrendű tenzor szimmetrikus és antiszimmetrikus tenzor összezgére bontható:
$\mathbf{T} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T)$,
mivel
$(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T) = (\mathbf{T} + \mathbf{T}^T)^T = \mathbf{T}^T + \mathbf{T}$, szimmetrikus, és

$(\mathbf{T}-\mathbf{T}^T) = (\mathbf{T}-\mathbf{T}^T)^T = \mathbf{T}^T - \mathbf{T}$ antiszimmetrikus
Példák:
1) A $\mathrm{Proj}_u = \mathbf{u} \circ \mathbf{u}$ tenzor szimmetrikus.
Bizonyítás: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{u} \circ \mathbf{u})\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{b})] = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{b}) = [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}] \cdot \mathbf{b} = [(\mathbf{u} \circ \mathbf{u})\mathbf{a}] \cdot \mathbf{b}$
2) Az $\mathbf{A} = \boldsymbol{\omega} \times$ vektroi szorzás antiszimmetrikus tenzor
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{b} = -(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{A}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

9.3. Másodrendű tenzor komponensei

Megmutatjuk, hogy kölcsönösen egyértelmű leképezés áll fenn a $\mathbf{T}$ tenzorok és a 3×3-as mátrixok között.
Legyen $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_1\mathbf{e}_1 = v_i\mathbf{e}_i$ derékszögű komponensekkel megadott vektor.
$\mathbf{T}\mathbf{v} = \mathbf{T}v_i\mathbf{e}_i = v_i\mathbf{T}\mathbf{e}_i,$
mivel $\mathbf{T}$ lineáris. Látható, hogy elég megadni a $\mathbf{T}\mathbf{e}_i$ vektorok komponenseit.
$\mathbf{T}\mathbf{e}_i = T_{1i}\mathbf{e}_1 + T_{2i}\mathbf{e}_2 + T_{3i}\mathbf{e}_3 = T_{ji}\mathbf{e}_j$
Szorozzuk be mindkét oldalt skalárisan $\mathbf{e}_k$-val és használjuk föl, hogy a bázis ortonormált ($\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k = \delta_{jk}$):
$\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_i = T_{ji}\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j = T_{ji}\delta_{kj} = T_{ki}$
Másodrendű tenzor komponenseit a
$T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_j$
adja. Ez egy 3×3-as mátrixba rendezhető:
$$\mathbf{T}\tilde{} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$
Ezek alapján a $\mathbf{T}\mathbf{v}$ komponensei:
$\mathbf{u} = \mathbf{T}\mathbf{v} = \mathbf{T}v_i\mathbf{e}_i = v_iT_{ji}\mathbf{e}_j = T_{ji}v_i\mathbf{e}_j = u_j\mathbf{e}_j,$ azaz
$u_i = T_{ij}v_j$
Ha az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorokat oszlopvektornak írjuk, a kapott eredmény a mátrixszorzásnak felel meg:
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

9.3.1. Tenzorműveletek komponensekkel:

Egyenlőség: $\mathbf{A} = \mathbf{B} \iff A_{ij} = B_{ij}$
Zérustenzor: $\mathbf{0v} = \mathbf{0} \iff \mathbf{0}_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{0e}_j = 0$
Egységtenzor: $\mathbf{Ev} = \mathbf{v} \iff \mathbf{E}_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{Ee}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$,
$\mathbf{E}\tilde{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, az egységmátrix
Tenzorok összege: $\mathbf{T} + \mathbf{S} \iff T_{ij} + S_{ij}$
Tenzor transzponáltja: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{Tb} = a_i T_{ij} b_j = T_{ij} a_i b_j = (\mathbf{T}^T \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \implies T^T_{ji} = T_{ij}$, a mátrix transzponáltja
Szimmetrikus tenzor: $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T \iff T^T_{ij} = T_{ji} = T_{ij}$, a mátrix szimmetrikus, 6 komponense van
Antiszimmetrikus tenzor: $\mathbf{T} = -\mathbf{T}^T \iff T^T_{ij} = -T_{ji} = T_{ij}$, a mátrix antiszimmetrikus, 3 komponense van

9.3.2. Másodrendű tenzor bázisa

Amikor egy vekort a $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$ alakban írunk, azt mondtuk, hogy kifejtettük az $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\}$ bázisban, és $v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i$
Mi az ennek megfelelő állítás tenzorok esetében? A $T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{Te}_j$ kifejtési együtthatók milyen bázisra vonatkoznak?
$\mathbf{u} = \mathbf{Tv} = T_{ji} v_i \mathbf{e}_j = T_{ji}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_j = T_{ji}(\mathbf{e}_j \circ \mathbf{e}_i)\mathbf{v}$, ebből
$\mathbf{T} = T_{ij}(\mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j)$
Az $\mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j$ másodrendű tenzorok a bázisvektorok diadikus szorzatai, röviden diádok. A tenzor bázisa az $\mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j$ 9 darab diád.

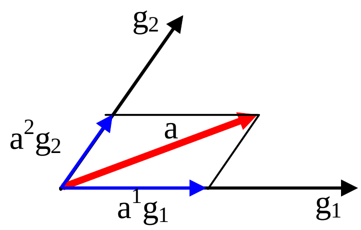
Példa:
Kiszámítjuk az $\mathbf{u} \circ \mathbf{v}$ diadikus szorzat komponenseit:
$(\mathbf{u} \circ \mathbf{v})_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{u} \circ \mathbf{v})\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_j)\mathbf{u} = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_j) = u_i v_j$

$$\mathbf{u} \circ \mathbf{v}\tilde{} \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 \end{pmatrix}$$

pl. $\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, stb.

9.4. Ferdeszögű koordináták

Bármely 3 nem komplanáris vektor $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ kifeszít egy ferdeszögű koordinátarendszert.
$V = \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3 \neq 0,\qquad V > 0$ jobbrendszer, $V < 0$ balrendszer
Ebben a bázisban egy **a** tetszőleges vektor kifejthető:
$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{g}_1 + \beta\mathbf{g}_2 + \gamma\mathbf{g}_3,$ ahol $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ egyértelműen meghatározott.
vagy
$\mathbf{a} = a^1\mathbf{g}_1 + a^2\mathbf{g}_2 + a^3\mathbf{g}_3 = \sum_{i=1}^{3} a^i\mathbf{g}_i = a^i\mathbf{g}_i$
Itt az *Einstein-féle összegzési szabály*t használtuk:
1) Ha egy index egyszer fent és egyszer lent szerepel, az összegzést jelent 1–től 3-ig (vagy n-ig, ha a tér n dimenziós). Az összegző index az ún."néma" index, amelyet lehet cserélgetni: $a^i\mathbf{g}_i = a^k\mathbf{g}_k$
2) magában álló index vektor(tenzor)komponenst jelent, illetve magát a vektort(tenzort) jelenti pl. a^i
nem írjuk ki, de beleértjük, hogy $i = 1, ..., n$
Hogyan lehet az a^i komponenseket megtalálni?
a) geometriai úton projekcióval (két dimenzióban nem nehéz az ábrázolás),



b) $\mathbf{a} = a^i\mathbf{g}_i$ lineáris egyenletrendszer (az **a** és $\mathbf{g}_i$ -k derékszögű komponenseit használva) megoldásával,
c) a reciprokbázis használatával.

9.5. Reciprokbázis

A $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ bázis reciprokbázisa $\{\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3\}$, ha

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j = \begin{cases} 1 \ , & \text{ha } i = j \\ 0 \ , & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

Tulajdonságok pl. $\mathbf{g}^1$ -re
$\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}^1 = 1$, azaz $|\mathbf{g}_1| \cdot |\mathbf{g}^1| \cos\alpha = 1 \quad \Longrightarrow \alpha < \dfrac{\pi}{2}$
$\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{g}_2 = 0, \;\; \mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{g}_3 = 0 \quad \Longrightarrow \mathbf{g}^1 \perp \mathbf{g}_2$ és $\mathbf{g}^1 \perp \mathbf{g}_3$
A $\{\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3\} = \{\mathbf{g}^i\}$ *reciprokbázis kiszámítása*
a) Az eredeti bázis a $G = [\mathbf{g}_i]$ mátrixban írható ($\mathbf{g}_i$ oszlopvektorokkal).
$\det G \neq 0$.
Mivel $\det G \neq 0$, a G mátrixnak létezik az inverze, és ennek sorai lesznek a reciprokvektorok:

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}^1 \\ \mathbf{g}^2 \\ \mathbf{g}^3 \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás: a $\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j$ összefüggés éppen a $GG^{-1} = E$ összefüggésnek felel meg.
Egyébként $(\det G^{-1}) = V' = \mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{g}^2 \times \mathbf{g}^3 \neq 0$.
b) Sokszor praktikus a következő előállítás, amely a felírt tulajdonságokat használja ki:
$\mathbf{g}^1 = m\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3$
Szorozzuk mindkét oldalt skalárisan $\mathbf{g}_1$-gyel. Mivel $V = \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3$,
$1 = mV, \quad m = \dfrac{1}{V}, \quad \Longrightarrow \mathbf{g}^1 = V^{-1}(\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3)$
c) A reciprok elnevezés eredete a következő állítás:
$V \cdot V' = 1$, vagy
$\det(G) \cdot \det(G^{-1}) = 1$,
ami a determinánsok szorzattételéből következik, mivel $GG^{-1} = E$.

9.6. Vektorok kovariáns és kontravariáns komponensei

A reciprokbázis használatával könnyen (és formálisan) tudunk komponenseket számítani
Legyen $\mathbf{a} = a^i \mathbf{g}_i$
Szorozzuk mindkét oldalt skalárisan a $\mathbf{g}^j$ reciprokvektorral:
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{g}^j = a^i \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = a^i \delta_i^j = a^j$, az

$a^i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{g}^i$
komponensek neve *kontravariáns komponens*, vagy *felülindexelt komponens.*
Ezek a kifejtési együtthatók az eredeti bázis szerint.
Készíthetünk olyan szorzatot is, hogy
$a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{g}_i$.
Ez is komponens (mivel a reciprokvektorok szerinti kifejtésben $\mathbf{a} = a_i \mathbf{g}^i$), neve: *kovariáns komponens* vagy *alulindexelt komponens.*
Megjegyezzük, hogy a bázisok egymásnak reciprokai, hogy melyiket tekintjük eredetinek, az mindegynek tűnik, bár a fizikában vannak erre nézve szokások.
Példa. Tekintsünk egy ortogonális bázist: $\mathbf{g}_i \mathbf{g}_j = 0$, ha $i \neq j$
Állítás: $\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j = 0 \quad (i \neq j), \quad \mathbf{g}^i = \dfrac{\mathbf{g}_i}{h_i^2}$ (i -re nincs összeg), ahol
$h_i = |\mathbf{g}_i|$
azaz az erdeti és reciprokrendszer egybeesik, csak a bázisvektorok hossza más.
Bizonyítás: Mivel $\mathbf{g}^i \| \mathbf{g}_i \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j = 0 \quad (i \neq j)$
$\mathbf{g}^i = p\mathbf{g}_i$, szorozzuk mindkét oldalt skalárisan $\mathbf{g}_i$-vel (nincs összegzés!)
$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^i = 1 = p\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_i = ph_i^2$, ahol $h_i^2 \equiv \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_i$, neve skála-faktor (v. Lamé-együttható)
$p = \dfrac{1}{h_i^2}$
Könnyű látni, hogy ha $(h^i)^2 = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^i$, akkor $p = (h^i)^2$, így $h^i = \dfrac{1}{h_i}$.
Ha $\mathbf{e}_i = \dfrac{\mathbf{g}_i}{h_i}, \mathbf{e}^i = \dfrac{\mathbf{g}^i}{h^i}$ egységvektorok, akkor igaz, hogy $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}^i$
Ez a tulajdonság teszi lehetővé a görbevonalú ortogonális koordinátarendszerek olyan tárgyalását, ahol kovariáns és kontravariáns komponensekről nem esik szó.
Egy vektor kovariáns és kontravariáns komponensei nem függetlenek, kapcsolatuk a metrikus tenzor segítségével írható föl.
Legyen
$\mathbf{a} = a_i \mathbf{g}^i = a^j \mathbf{g}_j$
Szorozzuk mindkét oldalt skalárisan $\mathbf{g}_k$-val:
$a_i \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_k = a^j \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}_k \quad \Longrightarrow \quad a_i \delta_k^i = a^j \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}_k$
A $g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$ vagy $g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j$

kétindexű kifejezés neve *metrikus tenzor* vagy *alaptenzor.*További tulajdonságaira a fejezet későbbi részében visszatérünk.
$a_k = a^j g_{jk} = g_{kj} a^j$ "indexlehúzás"
$a^k = a_j g^{jk} = g^{kj} a_j$ "indexfelhúzás"

9.7. Tenzorok komponensei

Másodrendű tenzorokat tekintünk.
Legyen $\mathbf{T}$ másodrendű tenzor, azaz lineáris vektor-vektor függvény:
$\mathbf{b} = \mathbf{Ta}$
Legyen a bázis $\{\mathbf{g}_i\}$,illetve $\{\mathbf{g}^i\}$
$\mathbf{Ta} = \mathbf{T}a^i\mathbf{g}_i = a^i\mathbf{Tg}_i$ vagy $\mathbf{Ta} = a_j\mathbf{Tg}^j$
Így a tenzorkomponensek meghatározásához elég ismerni a $\mathbf{Tg}_i$ és $\mathbf{Tg}^j$ vektorokat.
a) $\mathbf{Tg}_i = T_{ji}\mathbf{g}^j \quad / \cdot \mathbf{g}_k$
$\mathbf{g}_k\mathbf{Tg}_i = T_{ji}\mathbf{g}^j \cdot \mathbf{g}_k = T_{ji}\delta^j_k = T_{ki} \quad \Longrightarrow \; T_{ij} = \mathbf{g}_i\mathbf{Tg}_j$ tiszta kovariáns
b) $\mathbf{Tg}^j = T^{ij}\mathbf{g}_i \quad / \cdot \mathbf{g}^k$
$\mathbf{g}^k\mathbf{Tg}^j = T^{ij}\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^k = T^{ij}\delta^k_i = T^{kj} \quad \Longrightarrow \; T^{ij} = \mathbf{g}^i\mathbf{Tg}^j$ tiszta kontravariáns
c) más kifejtések is lehetnek - "vegyes komponensek"
$\mathbf{Tg}_j = T^i_{\cdot j}\mathbf{g}_i \quad \Longrightarrow \; T^i_{\cdot j} = \mathbf{g}^i\mathbf{Tg}_j$
$\mathbf{Tg}^j = T_i^{\cdot j}\mathbf{g}^i \quad \Longrightarrow \; T_i^{\cdot j} = \mathbf{g}_i\mathbf{Tg}^j$
általában $\mathbf{g}^i\mathbf{Tg}_j \neq \mathbf{g}_j\mathbf{Tg}^i$, azaz $T^i_{\cdot j} \neq T_j^{\cdot i}$
Szimmetrikus másodrendű tenzor: $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$
komponensben: $T_{ij} = \mathbf{g}_i\mathbf{Tg}_j = \mathbf{Tg}_i \cdot \mathbf{g}_j = \mathbf{g}_j\mathbf{Tg}_i = T_{ji} \quad T^{ij} = T^{ji}$
$T_i^{\cdot j} = \mathbf{g}_i\mathbf{Tg}^j = \mathbf{Tg_i} \cdot \mathbf{g}^j = \mathbf{g}^j\mathbf{Tg_i} = T^j_{\cdot i} = T^j_i$
d) tenzorkomponensek süllyesztése és emelése:
$T_{ij} = \mathbf{g}_i\mathbf{Tg}_j = g_{ik}\mathbf{g}^k\mathbf{Tg}_j = g_{ik}T^k_{\cdot j}$
$\quad = g_{ik}\mathbf{g}^k\mathbf{T}g_{jl}\mathbf{g}^l = g_{ik}g_{jl}T^{kl}$ stb.

9.8. A metrikus tenzor

Tekintsük az $\mathbf{E}$ egységtenzort: bármely vektorra fennáll, hogy
$\mathbf{Ea} = \mathbf{a}$
$\mathbf{E}$ komponensei egy ferdeszögű KR-ben:
$E_{ij} = \mathbf{g}_i\mathbf{Eg}_j = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = g_{ij}$,

$g^{ij} = \mathbf{g}^i \mathbf{E} \mathbf{g}^j$
$g^i_j = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = \delta^i_j$
Tehát a kovariáns-kontravariáns komponenseknél megjelent mennyiség az egységtenzor.
További hasznos formulák:
a) $a^i = g^{ij} a_j = g^{ij} g_{jk} a^k = \delta^i_k a^k \quad \Longrightarrow \boxed{g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k}$ mátrixalakban
$\boxed{g^{-1} g = E}$
b) $\boxed{\mathbf{g}_i = g_{ij} \mathbf{g}^j}$
Biz.: szorozzuk mindkét oldalt $\mathbf{g}_k$-val:
$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_k = g_{ij} \mathbf{g}^j \cdot \mathbf{g}_k = g_{ij} \delta^j_k = g_{ik}$
c) Tétel: ha $V = \det(G) = \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3$, akkor $\det(g) = V^2$, vagy $V = \sqrt{\det(g)}$
Bizonyítás:
1. $V = \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3 = g_{1l} g_{2m} g_{3n} \underbrace{\mathbf{g}^l \cdot \mathbf{g}^m \times \mathbf{g}^n}_{\varepsilon^{lmn} V'}$

mivel $VV' = 1$, így
$V^2 = \varepsilon^{lmn} g_{1l} g_{2m} g_{3n} = \det(g)$
A b) tulajdonság szerint $\mathbf{g}_i = g_{ij} \mathbf{g}^j \quad \Longrightarrow \boxed{\det(G) = \det(g) \det(G^{-1})}$

Példa:
Skalár- és vektori szorzat ferdeszögű koordinátarendszerben
Skalárszorzat:
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i \mathbf{g}_i \cdot b^j \mathbf{g}_j = g_{ij} a^i b^j = g^{ij} a_i b_j = \delta^i_j a_i b^j = a_i b^i$
A vektori szorzat rettentő bonyolult:
$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = a^i \mathbf{g}_i \times b^j \mathbf{g}_j = a^i b^j \varepsilon_{ijk} \det(g) \mathbf{g}^k \quad \Longrightarrow \quad c_k = a^i b^j \varepsilon_{ijk} \det(g)$ stb.

9.9. Bázistranszformációk

Legyen A ortogonális koordináta transzformáció: $\{\mathbf{g}_i\} \rightarrow \{\tilde{\mathbf{g}}_i\}$
$\tilde{\mathbf{g}}_i = A^j_i \mathbf{g}_j$, vagy mátrixalakban $\tilde{G} = GA$
Fordított transzformáció:
$\mathbf{g}_j = (A^{-1})^i_j \tilde{\mathbf{g}}_i$ vagy $G = \tilde{G} A^{-1}$
Mivel $\det(\tilde{G}) = \det(G) \det(A) \quad \Longrightarrow \quad \det(A) \neq 0$, azaz A^{-1} létezik.
1) Az A transzformácó kifejezése a régi és új bázisvektorokkal
a) $\tilde{\mathbf{g}}_i = A^j_i \mathbf{g}_j \qquad / \cdot \mathbf{g}^k$

$\mathbf{g}^k \cdot \tilde{\mathbf{g}}_i = A_i^j \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}^k = A_i^j \delta_j^k = A_i^k$, azaz $A_i^k = \mathbf{g}^k \cdot \tilde{\mathbf{g}}_i$
b) $\mathbf{g}_j = (A^{-1})_j^i \tilde{\mathbf{g}}_i \qquad / \cdot \tilde{\mathbf{g}}^k$
$\tilde{\mathbf{g}}^k \cdot \mathbf{g}_j = (A^{-1})_j^i \tilde{\mathbf{g}}^k \cdot \tilde{\mathbf{g}}_i = \delta_i^k (A^{-1})_j^i$, azaz $(A^{-1})_j^k = \tilde{\mathbf{g}}^k \cdot \mathbf{g}_j$
c) ortogonalitás:
$\tilde{\mathbf{g}}_i = A_i^j \mathbf{g}_j = A_i^j (A^{-1})_j^k \tilde{\mathbf{g}}_k \qquad \Longrightarrow \qquad A_i^j (A^{-1})_j^k = \delta_i^k \qquad AA^{-1} = E$
2) A reciprokvektorok transzformációja
$\tilde{\mathbf{g}}^i = B_j^i \mathbf{g}^j \qquad / \cdot \mathbf{g}_k$
$\tilde{\mathbf{g}}^i \cdot \mathbf{g}_k = B_k^i = (A^{-1})_k^i$, azaz $\tilde{\mathbf{g}}^i = (A^{-1})_j^i \mathbf{g}^j$ "odatranszformáció" (A^{-1})-gyel, $\tilde{G}^{-1} = G^{-1} A^{-1}$
visszafelé transzformáció: $G^{-1} = A \tilde{G}^{-1}$, $\qquad \mathbf{g}^i = A_k^i \tilde{\mathbf{g}}^k$
3) A vektorkomponensek transzformációja
kovariáns komponensekre
$\tilde{v}_i = \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_i = \mathbf{v} \cdot A_i^k \mathbf{g}_k = A_i^k v_k \qquad$ azaz mint $\mathbf{g}_i \to \tilde{\mathbf{g}}_i$ (oda)
kontravariáns komponensekre
$\tilde{v}^i = \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{g}}^i = \mathbf{v} \cdot (A^{-1})_k^i \mathbf{g}^k = (A^{-1})_k^i v^k \qquad$ azaz mint $\tilde{\mathbf{g}}_i \to \mathbf{g}_i$ (vissza)
A "visszafelé" transzformációk
$v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}_i = \mathbf{v} \cdot (A^{-1})_i^j \tilde{\mathbf{g}}_j = (A^{-1})_i^j \tilde{v}_j$
$v^i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}^i = \mathbf{v} \cdot (A)_j^i \tilde{\mathbf{g}}^j = (A)_j^i \tilde{v}^j$
4) A tenzorkomponensek transzformációja
nézzük másodrendű tenzorra
$\tilde{T}_{ij} = \tilde{\mathbf{g}}_i \mathbf{T} \tilde{\mathbf{g}}_j = A_i^k \mathbf{g}_k \mathbf{T} A_j^m \mathbf{g}_m = A_i^k A_j^m T_{km}$
Tehát indexenként úgy transzformálódik, mint egy vektor

9.10. n-ed rendű tenzorok

Az n-ed rendű tenzor a 3-dimenziós térben az a mennyiság, amelynek 3^n konponense van, $n = p + q$, p-szer kovariáns, q-szor kontravariáns, és a következőképpen transzformálódik:
$\tilde{C}_{i_1 i_2 \dots i_p}{}^{j_1 j_2 \dots j_q} = A_{i_1}^{k_1} \dots A_{i_p}^{k_p} (A^{-1})_{l_1}^{j_1} \dots (A^{-1})_{l_q}^{j_q} C_{k_1 \dots k_p}{}^{l_1 \dots l_q}$
Ha a tér nem 3-dimenziós, az indexek nem 1-től 3-ig, hanem a megfelelő dimenziószámig futnak.

Példák:
a) A skalár eszerint nulladrendű tenzor: $n = 0 \qquad \tilde{\phi} = \phi$
b) A vektorok elsőrendű tenzorok:
pl a skaláris szorzat:

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \tilde{a}_i \tilde{b}^i = A_i^j a_j (A^{-1})_k^i b^k = \delta_k^j a_j b^k = a_j b^j$, azaz skalár.
c) tenzorok ($n = 2$)
$Spur(\mathbf{T}) = \tilde{T}_i^i = A_i^j (A^{-1})_k^i T_j^k = \delta_k^j T_j^k = T_k^k$ tehát skalár.
Megjegyzés: $\tilde{T}_{ii} = A_i^j A_i^k T_{jk}$ nem az átlósösszeg, hanem másodrendű tenzor
A fizika törvényeit koordinátarendszertől függetlenül általános tenzori egyenletekben szokás megfogalmazni.
A görbevonalú koordinátarendszerek tekinthetők lokálisan egy ferdeszögű koordinátarendszernek. Mivel a bázisvektorok függvények, ez a ferdeszögű rendszer pontról pontra más és más.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v, w) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{matrix} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{matrix}$$

koordináta-vonalak: pl. u-vonal: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v = \acute{a}ll., w = \acute{a}ll.)$
koordináta-felületek: pl. u-felülete: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u = \acute{a}ll., v, w)$
bázisvektorok (a koordinátavonalak érintői):

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \qquad \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \qquad \mathbf{g}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}$$

$\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ bázist alkotnak, mert lineárisan függetlenek:

$$V = \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \end{bmatrix} = \det \underbrace{\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}} \neq 0 \qquad \text{(Jacobi-mátrix)}$$

b) indexes jelölés:
$x = x^1, y = x^2, z = x^3 \qquad \mathbf{r} = x^i \mathbf{e}_i$
$u = u^1, v = u^2, w = u^3$

Állítás: $\mathbf{g}_i = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}$ kovariáns bázisvektorok

Biz: $\mathbf{g}_i = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} = \dfrac{\partial (x^k \mathbf{e}_k)}{\partial u^i} = \dfrac{\partial x^k}{\partial u^i} \mathbf{e}_k$

Másrészt $d\mathbf{r} = dx^i \mathbf{e}_i = \dfrac{\partial x^i}{\partial u^j} du^j \mathbf{e}_i \qquad dx^i = \dfrac{\partial x^i}{\partial u^j} du^j$, azaz $A_j^i = \dfrac{\partial x^i}{\partial u^j}$

következmény: $(A^{-1})_k^i = \dfrac{\partial u^i}{\partial x^k}$

Descartes derékszögű koordinátarendszerben nem szoktuk használni a kovariáns-kontaravariáns megkülönböztetést, hiszen láttuk, hogy az ere-

deti és reciprokrendszer egybeesik.
Így az n-ed rendű tenzor egy 3^n komponensű mennyiség, melynek komponensei

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_n} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n} T_{j_1 j_2 \dots j_n}$$

módon transzformálódnak. (n db a mátrix szerint).

Példák:
1. **Tv** vektor-e?
$T'_{ij}v'_j = a_{ik}a_{jm}T_{km}a_{jl}v_l = a_{ik}\delta_{ml}T_{km}v_l = a_{ik}T_{km}v_m$ ez vektorként transzformálódik.
2. δ_{ij} másodrendű tenzor (ezt persze abból is tudjuk, hogy az egységtenzor komponense)
$\delta_{ij}a_{li}a_{kj} = a_{li}a_{ki} = \delta'_{lk}$, azaz tenzorként transzformálódik, ráadásul ún. invariáns tenzor, azaz komponensei bármely koordinátarendszerben ugyanazok.

9.11. Műveletek n-ed rendű tenzorokkal

1. Összeadás, különbség
$\underset{(n)}{A} + \underset{(n)}{B} = \underset{(n)}{C}$
ugyanolyan rendű tenzorok adhatók adhatók össze.
2. Szimmetrikus (indexpárra): $A_{ij\dots} = A_{ji\dots}$
Antiszimmetrikus (indexpárra): $A_{ij\dots} = -A_{ji\dots}$
Teljesen antiszimmetrikus vagy szimmetrikus, ha a fenti állítás bármely indexpárra igaz.
3. Kontrakció vagy indexegybeejtés: két indexet azonossá teszünk = összegzés erre az indexre
példa: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ = skalár, $T_{ij}v_j$ vektor
$B'_{ii} = a_{ij}a_{ik}B_{jk} = \delta_{jk}B_{jk} = B_{jj} = B_{kk} = Sp(\mathbf{B})$ = skalár
A tenzor rendje 2-vel csökken.
4. Direkt vagy külső szorzat
$\underset{(n)}{A} \circ \underset{(m)}{B} = \underset{(n+m)}{C}$,
$A_{ij\dots}B_{mn\dots} = C_{ij\dots mn\dots}$

Példa: $a_i b_j$ másodrendű tenzor, $(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})$, neve diadikus szorzat, vagy diád.

9.12. Ortogonális transzformációk osztályozása.

1. Forgatás vagy folytonos korrdinátatranszformáció: $\det(a) = 1$
   pl. az azonos transzformáció
2. Inverzió vagy nem folytonos transzformáció: jobbrendszert balsodrásúba visz vagy fordítva:
   pl. $(x, y, z) \to (-x, -y, -z)$,
   $a_{ij} = -\delta_{ij}, \qquad \det(a) = -1.$

1. Példa: $\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i = x'_i \mathbf{e}'_i \qquad x'_i = a_{ij} x_j = -\delta_{ij} x_j = -x_i$
Az olyan vektorokat, amelynek komponensei az inverzióra előjelet váltanak, *poláris* vagy *valódi* vektoroknak nevezzük.
Kérdés: van másmilyen is?
2. példa: $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ valódi vektorok vektori szorzata: $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \quad c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2, ...$
Most egy inverzió: $a'_i = -a_i$, $b'_j = -b_j$, de $c'_k = c_k$ nem váltott előjelet!
Az ilyen vektor neve: *axiális* vagy *pszeudovektor*
Példák pszeudovektorra az elemi fizikából:
$\boldsymbol{\omega}$ szögsebesség, $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ perdület, $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ forgatónyomaték.
Lényeges a *vektori szorzás,* amelyet a jobbkéz-szabállyal definiálunk, azaz az irány megállapodás kérdése!
Valódi és pszeudovektorok egyszerű megkülönböztetése a tükör-módszerrel.
(most a vektort transzformáljuk, nem a KR-t)
ha valódi: a tükörben az iránya ellenkező,
ha pszeudo: a tükörben az irány nem változik.
Az univerzum nem törődik azzal, hogy a KR jobb- vagy bal sodrású-e.
Következésképp, nincs értelme összeadni poláris és axiális vektort. (van kivétel)
Hasonló igaz skalárra és tenzorra is.

9.13. Pszeudotenzorok

def: pszeudoskalár: $S' = \det(a)\ S$
pszeudovektor: $c'_i = \det(a)\ a_{ij} c_j$

pszeudotenzor: $A'_{ij\ldots} = \det(a)\ a_{ip}a_{jr}\ldots A_{pr\ldots}$
Ha $\det(a) = 1$, (tiszta forgatás) szabályos tenzorként viselkednek.
Inverzióra $\det(a) = -1$.
például: $V = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ pszeudoskalár!

9.13.1. Az ε tenzor

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i,j,k \text{ az } 1,2,3 \text{ ciklikus permutációja} \\ -1, & \text{ha } i,j,k \text{ az } 1,2,3 \text{ nemciklikus permutációja} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Megmutatjuk ε_{ijk}harmadrendű, teljesen antiszimmetrikus pszeudotenzor, és invariáms tenzor is.
Bizonyítás.
1. ε_{ijk} teljesen antiszimmetrikus: a definícióból trivi.
2. tenzor: Tfh. δ_{ijk}harmadrendű pszeudotenzor, és van egy KR, ahol $\delta_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$.
Egy K'-ben, mivel δ_{ijk} tenzor

$$\delta'_{ijk} = \det(a)\ a_{ip}a_{jq}a_{kr}\varepsilon_{pqr}$$

Viszont pl. $a_{1p}a_{2q}a_{3r}\varepsilon_{pqr} = \det(a)$
$\Longrightarrow \delta'_{123} = (\det(a))^2 = 1 = \varepsilon_{123}$
az összes többi komponenst végignézve: $\delta'_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$.
Ráadásul az is kijött, hogy ε_{ijk} *invariáns tenzor,* azaz komponensei minden KR-ben azonosak.
Mivel
$\varepsilon_{ijk} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k$, minden elem egyúttal egy pszeudoskalár.

9.14. Duális tenzorok

Pszeudovektor és antiszimmetrikus tenzor
példa: Legyen $\mathbf{T} = \mathbf{a} \circ \mathbf{b}$, azaz $T_{ij} = a_i b_j$ ($\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ valódi vektorok)
Minden másodrendű tenzor szimmetrikus és aszimmetrikus tenzor összegére bontható, azaz

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(a_i b_j + a_j b_i) + \frac{1}{2}(a_i b_j - a_j b_i)$$

A második rész az $\frac{1}{2}$ rész kivételével éppen a $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ axiális vagy pszeudovektor, tehát az aszimmetrikus tenzor tekinthető pszeudovektornak és fordítva:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} \\ -C_{12} & 0 & C_{23} \\ -C_{13} & -C_{23} & 0 \end{pmatrix}, \text{ és } \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3) = (C_{23}, C_{31}, C_{12})$$

azaz

$C_{ij} = \varepsilon_{ijk} c_k$, és $c_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} C_{jk}$

Szokás a **c** vektort a **C** aszimmetrikus tenzor *duális* vektorának nevezni. Azt jelenti, hogy ugyanazt a mennyiséget tekinthetem vektornak vagy tenzornak, a kifejtés szerint.

Példák: ε_{ijk}-re vonatkozó azonosságok

1. Igazoljuk a következő azonosságokat:

(a) $\delta_{ii} = 3$

(b) $\delta_{ij} \varepsilon_{ijk} = 0$

(c) $\varepsilon_{ipq} \varepsilon_{jpq} = 2\delta_{ij}$

(d) $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6$

(e) $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqk} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}$

(f) $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix}$

9.15. Másodrendű tenzorok sajátértékei és sajátvektorai

Példa: A merev test impulzusmomentuma

$\mathbf{N} = \Theta \boldsymbol{\omega}$, ahol $\Theta = \sum m_a (r_a^2 \mathbf{E} - \mathbf{r}_a \circ \mathbf{r}_a)$ a tehetetlenségi tenzor, $\boldsymbol{\omega}$ a szögsebesség.

Komponensekben $N_i = \Theta_{ij} \omega_j$, és $\Theta_{ij} = \sum m_a (r_a^2 \delta_{ij} - x_i^{(a)} x_j^{(a)})$.

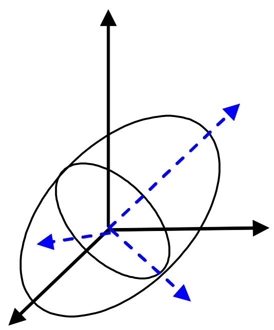
Kérdés, hogy van-e olyan ω vektor, amelyre az **N** és az $\boldsymbol{\omega}$ vektor párhuzamos egymással?

A válasz: Mivel Θ szimmetrikus, ezért mindig van 3 olyan, egymásra merőleges $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$, $\boldsymbol{\omega}_3$ vektor (a Θ sajátvektorai), amelyre $\Theta \boldsymbol{\omega} = \Theta_i \boldsymbol{\omega}_i$. Ezek irányába mutató ortonormált bázist választva (ún. főtehetlenségi rendszert), ebben a tehetetlenségi tenzor diagonális, azaz ekkor az

ún. deviációs nyomatékok nullák, és a diagonálisban a Θ_1, Θ_2, Θ_3 főtehetetlenségi nyomatékok állnak.
A válasz szemléltetéséhez a geometriából veszünk fogalmakat.

9.15.1. Tenzorfelület

Legyen $\mathbf{T}$ másodrendú szimmetrikus tenzor, $\mathbf{r}$ a helyvektor. Az
$\mathbf{r} \cdot \mathbf{Tr} = 1$
összefüggés (komponensben $x_i T_{ij} x_j = 1$) másodrendű felületet határoz meg. Neve *tenzorfelület*.
A másodrendű felületek pl. az ellipszoid, a paraboloid és a hiperboloid.
Ha a tenzor nem szimmetrikus, akkor a hozzárendelés nem egyértelmű:
Legyen $\mathbf{T}$ másodrendű tenzor, ekkor
$\mathbf{T} = \mathbf{A} + \mathbf{S}$, ahol $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$ antiszimmetrikus, $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$ szimmetrikus.
A tenzorfelület definíciója szerint:
$1 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{Tr} = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{S})\mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{Ar} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{Ar} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{Sr}$
Ha a szimmetrikus tenzor pozitív definit is, akkor a tenzorfelület ellipszoid. A fizikában legtöbbször ellipszoid tenzorfelületek fordulnak elő.
A pozitív definit tenzor azt jelenti, hogy bármely $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektorra $\mathbf{a} \cdot \mathbf{Ta} > \mathbf{0}$.
Ilyen pl a forgási energia $E_{forg} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\omega_i \Theta_{ij} \omega_j$, ami definíció szerint $\geq \mathbf{0}$, tehát a Θ tehetlenségi tenzor pozitív definit.
A tehetetlenségi ellipszoid:
Ha $\mathbf{u}^2 = 1$ tetszőleges egységvektor, akkor az ún. tehetlenségi nyomaték:
$\Theta_u = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\Theta}\mathbf{u} = u_i \Theta_{ij} u_j \quad (\geq \mathbf{0})$
Osztva Θ_u-val , a tenzorfelület egyenletét kapjuk, amely eszerint ellipszoid, de általában nem főtengelyes helyzetű.



A geometriában a főtengelyes helyzetű ellipszoid egyenlete
$1 = \Theta_1\xi_1^2 + \Theta_2\xi_2^2 + \Theta_3\xi_3^2$
Az új koordinátarendszerben a tenzor diagonális. Így a f*őtengelyrehozás* és az ehhez tartozó koordinátarendszer, az ún főtengelyrendszer megkeresése mátrix nyelven fogalmazva a sajátértékprobléma.

9.15.2. Sajátértékek és sajátvekrorok

Sajátértékprobléma:
Keressük azt a $\boldsymbol{\omega}$ vektort, amelyre
$\Theta\boldsymbol{\omega} = \lambda\boldsymbol{\omega}$
komponensekben:
$(\Theta_{ij} - \delta_{ij}\lambda)\omega_j = 0.$
Ez egy homogén, lineáris egyenletrendszer ω_j-re. λ neve sajátérték vagy főérték. Az $\boldsymbol{\omega}$ neve sajátvektor.
Az egyenletrendszernek akkor és csak akkor van nemtriviális megoldása, ha a determinánsa nulla:
$\det|\boldsymbol{\Theta} - \lambda\mathbf{E}| = 0,$
vagy komponensekben:

$$\begin{vmatrix} \Theta_{11}-\lambda & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22}-\lambda & \Theta_{23} \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Ez a sajátértékegyenlet, λ-ban harmadfokú (ún. karakterisztikus) egyenlet gyökei koordinátarendszertől függetlenek, hiszen a keresett λ skalár.
Az egyenlet kifejtve ilyen alakú:

$$\lambda^3 - (\Theta_{11} + \Theta_{22} + \Theta_{33})\lambda^2 + \left(\begin{vmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{13} \\ \Theta_{31} & \Theta_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Theta_{22} & \Theta_{23} \\ \Theta_{32} & \Theta_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda - \det|\boldsymbol{\Theta}| = 0.$$

A λ együtthatói eszerint a tenzorból képzett skalárok, az ún. *tenzorinvariáns*ok. Ilyen pl. a tenzor átlósösszege, illetve determinánsa:
$Tr(\boldsymbol{\Theta}) = Sp(\boldsymbol{\Theta}) = \Theta_{11} + \Theta_{22} + \Theta_{33}$, illetve $\det|\boldsymbol{\Theta}|$.
Ha a tenzor szimmetrikus, akkor a sajátértékegyenletnek 3 valós gyöke van, és mindig található 3 db egymásra merőleges sajátvektor (de nem feltétlen egyértelműen vannak meghatározva). Mivel az egyenletrendszer homogén, a sajátvektorok számszorosa is megoldás. A sajátvektorokból derékszögű koordinátarenszer bázisát lehet képezni. A sajátvek-

torokat ezért főirányoknak is szokás nevezni, a koordinátarendszert pedig, amiben a tenzor diagonális lesz főtengelyrendszernek.
Pozitív definit tenzor főértékei pozitívak.
A főtengelyek helyzetét legtöbbször a test szimmetriatulajdonságaiból rögtön is meg lehet mondani: ha pl. a testnek szimmetriatengelye van, az biztosan főtengely. (biz. hf)

9.15.3. A főtengelyrendszer tulajdonságai

a) Könnyű megmutatni, hogy ha $\lambda_1 \neq \lambda_2$ akkor $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0$
Legyenek a $\mathbf{T}$ szimmetrikus tenzor sajátértékei $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$, a megfelelő sajátvektorok $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ tegyük fel, hogy páronként merőlegesek.
A főtengelyrendszer ortonormált bázisa: $\hat{\mathbf{a}}_i = \dfrac{\mathbf{a}_i}{|\mathbf{a}_i|}$, $i = 1, ..., 3$.
A tenzor komponensei ebben a bázisban:

$$T_{ij} = \hat{\mathbf{a}}_i \cdot \mathbf{T}\hat{\mathbf{a}}_j = \hat{\mathbf{a}}_i \cdot \lambda_j \hat{\mathbf{a}}_j = \lambda_j (\hat{\mathbf{a}}_i \cdot \hat{\mathbf{a}}_j) = \lambda_j \delta_{ij} \qquad T_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

A tenzorfelület:
$1 = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2$, főtengelyes helyzetű másodrendű felület.
b) Legyen a főtengelyrendszerben $\mathbf{p}$ tetszőleges vektor: $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$.
Alkalmazzuk rá a $\mathbf{T}$ tenzort, az eredmény a
$\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ vektor:
$\mathbf{q} = \mathbf{T}\mathbf{p}$, komponensekben:
$q_1 = \lambda_1 p_1$,
$q_2 = \lambda_2 p_2$,
$q_3 = \lambda_3 p_3$,
amely általában nagyságban és irányban különbözik $\mathbf{p}$-től.
b1) Legyen most $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq \lambda_3$. Kapjuk, hogy
$q_1 = \lambda p_1$,
$q_2 = \lambda p_2$,
$q_3 = \lambda_3 p_3$,
azaz bármely $\mathbf{p}^* = (p_1, p_2, 0)$ vektorra fennáll, hogy $\mathbf{q}^* = \lambda \mathbf{p}^*$. Tehát a $\mathbf{p}^*$ vektor sajátvektor, azaz az $\hat{\mathbf{a}}_3$-ra merőleges sík bármely vektora sajátvektor (ún. sajátértéktér), és $\mathbf{p}^* \cdot \hat{\mathbf{a}}_3 = 0$.
Egy harmadik ($\mathbf{p}^{**}$) sajátvektor is ebben a síkban van, és előírhatjuk, hogy $\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{p}^{**} = 0$ legyen.

A tenzorfelület forgásszimmetrikus pl. forgási ellipszoid: $1 = \lambda(x^2 + y^2) + \lambda_3 z^2$
b2) Legyen most $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$. Kapjuk, hogy
$\mathbf{q} = \lambda\mathbf{p}$,
azaz bármely vektor sajátvektor. Választhatunk 3 darab egymásra merőlegest is.
A tenzorfelület most gömb:
$1 = \lambda(x^2 + y^2 + z^2)$.
A tenzor komponensei $T_{ij} = \lambda\delta_{ij}$, az egységtenzor számszorosa. Az ilyen tenzor neve gömbi tenzor.

10. A tenzoranalízis elemei

Tekintsünk egy tetszőleges görbevonalú koordinátarendszert, nem feltétlen ortogonálisat. Az $\mathbf{r}$ helyvektor eredeti (derékszögű) koordinátáit jelöljük így
$x = x^1, \qquad y = x^2, \qquad z = x^3$ (kontravariáns komponensnek tekintjük),
A görbevonalú koordináták $u^1,\ u^2,\ u^3$.
$x^i = x^i(u^1,\ u^2,\ u^3)$
A bázisvektorok :
$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}, \qquad (i = 1, 2, 3).$$
Ebben a fejezetben előállítjuk a gradiens, divergencia, rotáció és a Laplace-operátor kifejezését általános görbevonalú rendszerben. Speciális esetként visszakapjuk az ortogonális görbevonalú koordinátákban kapott eredményeket is. Most tisztán csak deriválni fogunk, nem kavarjuk bele az integráldefiníciókat. Bár az eljárás első pillanatra bonyolultnak tűnik, a parciális deriválás szabályain túl csak az alsó-felső indexek helyzetére kell figyelni.

10.1. A gradiens

Legyen $\Phi(\mathbf{r}(\mathbf{u})) = \Phi(u^1,\ u^2,\ u^3)$ skalárfüggvény. Próbálkozzunk a $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ derékszügű kifejezés mintájára.

Képezzük a görbevonalú koordináta szerinti parciális deriváltakat pl.
$\dfrac{\partial\Phi}{\partial u^i}$

A $\dfrac{\partial\Phi}{\partial u^i}$ mennyiség kovariáns vektorkomponensként transzformálódik, ugyanis
$\dfrac{\partial\Phi}{\partial u^{i'}} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial u^j}\dfrac{\partial u^j}{\partial u^{i'}}$,
tehát a gradiens vektor:

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial u^i}\mathbf{g}^i.$$

Megjegyzés: ha a koordinátarendszer ortogonális, ($\mathbf{g}^i = h^i\mathbf{e}^i = \dfrac{\mathbf{e}^i}{h_i}$, továbbá $\mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i$. (ld. 9.6 fejezet)), kapjuk, hogy
$\nabla\Phi = \sum_i \dfrac{\mathbf{e}^i}{h^i}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u^i}$.
Ezt a kifejezést kaptuk meg a 7.2.1 fejezetben.

10.2. Kovariáns derivált, Christoffel-szimbólumok

Legyen $\mathbf{v}(u^1,\ u^2,\ u^3) = v^i\mathbf{g}_i$ vektormező. Képezzük az u^j szerinti parciális deriváltat:
$\dfrac{\partial\mathbf{v}}{\partial u^j} = \dfrac{\partial v^i}{\partial u^j}\mathbf{g}_i + v^i\dfrac{\partial\mathbf{g}_i}{\partial u^j}$,
mivel a bázisvektorok is a koordináták függvényei.
A $\dfrac{\partial\mathbf{g}_i}{\partial u^j}$ vektorok is kifejthetők a $\{\mathbf{g}_k\}$ bázisban:

$$\frac{\partial\mathbf{g}_i}{\partial u^j} = \Gamma^k_{ij}\mathbf{g}_k$$

A kifejtési együttható neve másodfajú *Christoffel-szimbólum*. A fenti kifejtést szorozva $\mathbf{g}^m$ vektorral (és fölhasználva, hogy $\mathbf{g}_k\cdot\mathbf{g}^m = \delta^m_k$), kapjuk hogy

$$\Gamma^m_{ij} = \mathbf{g}^m\frac{\partial\mathbf{g}_i}{\partial u^j}.$$

A Christoffel-szimbólum dacára a 3 indexnek nem tenzor. Ezt könnyű belátni. Derékszögű koordinátarendszerben az összes Christoffel-szimbólum nulla, mert a bázisvektorok konstansok. A tenzor definíciója

szerint akkor minden más koordinátarenszerben is nullát kellene kapnunk, de ez nem így van.
Igaz a következő: $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$, szimmetrikus az alsó indexben.
Bizonyítás: $\Gamma^k_{ij} = \mathbf{g}^k \dfrac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial u^j} = \mathbf{g}^k \dfrac{\partial}{\partial u^j}\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} = \mathbf{g}^k \dfrac{\partial}{\partial u^i}\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j} = \mathbf{g}^k \dfrac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial u^i} = \Gamma^k_{ji}$.

10.2.1. Kovariáns derivált vagy deriválttenzor

Térjünk vissza a vektor parciális deriváltjához:
$\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^j} = \dfrac{\partial v^i}{\partial u^j}\mathbf{g}_i + v^i \dfrac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial u^j} = \dfrac{\partial v^i}{\partial u^j}\mathbf{g}_i + v^i \Gamma^k_{ij}\mathbf{g}_k$
A második tagban $i \longleftrightarrow k$ indexcserét hajtunk végre (összegző indexek):
$\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^j} = \dfrac{\partial v^i}{\partial u^j}\mathbf{g}_i + v^k \Gamma^i_{kj}\mathbf{g}_i = (\dfrac{\partial v^i}{\partial u^j} + v^k \Gamma^i_{kj})\mathbf{g}_i$
Látható, hogy a $\dfrac{\partial v^i}{\partial u^j}$ parciális derivált most nem tenzor, de a két tag együtt igen.
A

$$v^i_{;j} = \frac{\partial v^i}{\partial u^j} + v^k \Gamma^i_{kj}$$

kifejezés neve *kovariáns derivált.* Ez lép a sima parciális derivált helyébe általános görbevonalú rendszerben, pl a görbült téridőben is. Igy a fizika törvényei változatlanul néznek ki. A kovariáns derivált másodrendű tenzor, és most láthatóan vegyes komponensekben van megadva. Így

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^j} = v^i_{;j}\mathbf{g}_i$$

Derékszögű koordinátákban:
$v^i_{;j} = \dfrac{\partial v^i}{\partial x^j}$
a rendes parciális derivált.
A kovariáns derivált kovariáns komponensekben (a vektor kovariáns komponensben van megadva):

$$v_{i;j} = \frac{\partial v_i}{\partial u^j} - v_k \Gamma^k_{ij}$$

Bizonyítás:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^j}=\frac{\partial v_i}{\partial u^j}\mathbf{g}^i+v_i\frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial u^j}$$

Tudjuk, hogy $\mathbf{g}_k\cdot\mathbf{g}^i=\delta^i_k$. Deriváljuk u^j szerint

$$\frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial u^j}\cdot\mathbf{g}^i+\mathbf{g}_k\cdot\frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial u^j}=0, \qquad \Longrightarrow \qquad \Gamma^i_{kj}+\mathbf{g}_k\cdot\frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial u^j}=0, \text{ amiből}$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial u^j}=-\mathbf{g}^k\Gamma^i_{kj}$$

Behelyettesítve $\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^j}$ kifejezésébe:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^j}=\frac{\partial v_i}{\partial u^j}\mathbf{g}^i-v_i\mathbf{g}^k\Gamma^i_{kj}=\frac{\partial v_i}{\partial u^j}\mathbf{g}^i-v_k\mathbf{g}^i\Gamma^k_{ij}=\left[\frac{\partial v_i}{\partial u^j}-v_k\Gamma^k_{ij}\right]\mathbf{g}^i$$

10.2.2. A Christoffel-szimbólum, mint a metrikus tenzor deriváltjai

Szükség lesz néhány hasznos azonosságra a divergencia kiszámításához. Szokás bevezetni az ún. *elsőfajú Christoffel-szimbólumot*:

$$[ij,k]=g_{mk}\Gamma^m_{ij}$$

(mint amikor a felső indexet a metrikus tenzorral levisszük). Itt

$g_{mk}=\mathbf{g}_m\cdot\mathbf{g}_k$

a metrikus tenzor. Beírva a definícióba Γ^m_{ij}-t, kapjuk

$$[ij,k]=g_{mk}\mathbf{g}^m\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial u^j}=\mathbf{g}_k\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial u^j}$$

Most deriváljuk $g_{ij}=\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}_j$ kifejezés mindkét oldalát u^k szerint:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}=\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial u^k}\cdot\mathbf{g}_j+\mathbf{g}_i\cdot\frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial u^k}=[ik,j]+[jk,i]$$

Ennek segítségével, közvetlen behelyettesítéssel beláthatjuk a következő azonosságot:

$$[ij,k]=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right]$$

Használjuk föl, hogy $\Gamma^s_{ij}=g^{ks}\,[ij,k]$, így az azonosság egy másik igen praktikus alakja:

$$\Gamma^s_{ij}=\frac{1}{2}g^{ks}\left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right]$$

Ebből lehet a leggyorsabban Christoffel szimbólumokat számolni adott koordinátarendszerben.

10.3. A divergencia

A parciális derivált helyett a kovariáns deriváltat kell venni, így a divergencia definíció szerint

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = v^i_{;i} = \frac{\partial v^i}{\partial u^i} + v^k \Gamma^i_{ik}$$

A továbblépéshez kiszámítjuk a Γ^i_{ij}-t.
Az utolsó azonosság szerint, a $s \to i,\ i \to i,\ j \to k,\ k \to m$ indexcserével
$\Gamma^i_{ik} = \frac{1}{2} g^{mi} \left[\frac{\partial g_{im}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^m} \right] = \frac{1}{2} \left[g^{mi} \frac{\partial g_{im}}{\partial u^k} + g^{mi} \frac{\partial g_{km}}{\partial u^i} - g^{mi} \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^m} \right]$
Az utolsó tagban az $i \longleftrightarrow m$ cserét végrehajtva, látszik, hogy azonos a második taggal. Így marad:
$\Gamma^i_{ik} = \frac{1}{2} g^{mi} \frac{\partial g_{im}}{\partial u^k}$
Ezt a kifejezést a következő azonossággal lehet tovább írni:
Ha $G = \det(g_{ij})$, akkor
$\frac{\partial G}{\partial u^k} = G g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial u^k}$.
(Az állítás bizonyítása a determinánsok kifejtési tételén alapszik, és megtalálható pl. Jánossy-Tasnádi: Vektorszámítás I. könyvében a 168. oldalon)
Az azonosságot fölhasználva, kapjuk, hogy
$\Gamma^i_{ik} = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial u^k} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u^k}$,
mivel $\frac{\partial G}{\partial u^k} = \frac{\partial \sqrt{G}\sqrt{G}}{\partial u^k} = 2\sqrt{G} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u^k}$.
Visszahelyettesítve a divergencia kifejezésébe:
$\nabla \cdot \mathbf{v} = v^i_{;i} = \frac{\partial v^i}{\partial u^i} + v^k \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u^k} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sqrt{G} v^i \right)$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sqrt{G} v^i \right)$$

Ha $\sqrt{G} = h_1 h_2 h_3$, ismerős az eredmény.

Megjegyzés. Most a vektorkomponens definíciója $v^i = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{v}$, míg az ortogonális görbevonalú rendszereknél egységvektorokat használtunk: $\tilde{v}^i = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{v}$, a kétféle kompones kapcsolata: $\tilde{v}^i = h_i v^i$ ($i-$re nincs összeg)

10.4. A Laplace-operátor

A Laplace operátor skalárfüggvényre: $\nabla \cdot \nabla\Phi = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\Phi)$

Most tehát a divergencia kifejezésében $\mathbf{v} = \nabla\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u^i}\right)\mathbf{g}^i = v_i \mathbf{g}^i$ írandó.

$v^i = g^{ik} v_k = g^{ik} \frac{\partial\Phi}{\partial u^k}$

$$\nabla \cdot \nabla\Phi = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial u^i}\left(\sqrt{G} g^{ik} \frac{\partial\Phi}{\partial u^k}\right)$$

Ha a rendszer ortogonális $g^{ik} = 0$,ha $i \neq k$, és $g^{ii} = \frac{1}{h_i^2}$

$$\nabla \cdot \nabla\Phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \frac{\partial\Phi}{\partial u^i}\right)$$

Ismerős eredményt kaptunk.

10.5. A rotáció:

Definíció szerint a következő másodrendű antiszimmetrikus (kovariáns komponensű) tenzor:

$v_{i;j} - v_{j;i} = \frac{\partial v_i}{\partial u^j} - v_k \Gamma^k_{ij} - \left(\frac{\partial v_j}{\partial u^i} - v_k \Gamma^k_{ji}\right) = \frac{\partial v_i}{\partial u^j} - \frac{\partial v_j}{\partial u^i}$

Eszerint a rot$\mathbf{v}$ definíció szerint másodrendű antiszimmetrikus tenzor.

A. A Dirac delta függvény

Vezessük be a "*Dirac delta függvényt*" egy dimenzóban a következő módon:

$\delta(x) = 0$, ha $x \neq 0$, és tetszőleges $f(x)$ függvény esetén

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$.

Így például $f(x) = 1$ esetén $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$.

Példa.

Elektrosztatikában egy, az origóban levő ponttöltés potenciálja (a konstansok nélkül) $\Phi = \frac{1}{r}$.

Az elektromos térerősség $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla\Phi} = -\mathbf{n}\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{\mathbf{n}}{r^2}$, ahol $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$.

A Gauss-törvény szerint $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}[\sin\theta \frac{\partial}{\partial r}(r^2(E_r))]$

$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{1}{r^2}) = 0$, ha $r \neq 0$.

A Gauss-tétel szerint viszont, ha felületnek egy r sugarú gömböt veszünk, aminek középpontja az origó (ott van a töltés)

$\int \nabla \cdot \mathbf{E}\ dV = \oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\ df = \oint \frac{\mathbf{n}}{r^2} \cdot \mathbf{n}\ r^2 d\Omega = 4\pi$.

Ez az eredmény jön ki akkor is, ha "szabályosan" járunk el: az origót ki kell zárni (ott ugyanis $\nabla \cdot \mathbf{E}$ nem korlátos) egy kis ε sugarú gömbbel, és utána $\varepsilon \to 0$ határesetet venni.

A kétféle eredményt a háromdimenziós Dirac-deltával így össze lehet foglalni:

$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \nabla\Phi = -\nabla^2\Phi = 4\pi\delta(\mathbf{r}) = 4\pi\delta(x)\delta(y)\delta(z)$

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r})$$

$\delta(x)$ valójában nem függvény, hanem ún. *disztribúció* (egy függvénytéren ható lineáris funkcionál). ilyen értelemben közönséges függvények sorozatának határértékeként előállítható. Ilyen közelítő függvények:

1) $\delta_n(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{1}{2n} \\ n, & -\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2n} \\ 0, & x > \frac{1}{2n} \end{cases}$

2) $\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2x^2)$

3) $\delta_n(x) = \frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2}$

4) $\delta_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\pi x} = \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_{-n}^{n} e^{ixt} dt$

Különböző célokra praktikusak az egyes alakok. pl. 1) $\delta(x)$ tulajdonságaihoz (ahol integrálni kell), 4) az ún. Fourier-integrál előállítás, sokszor kell használni pl. a kvantummechanikában.

Mindegyik függvény normált: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)dx = 1$.

Egyébként mindegyik függvényre igaz, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n(x)$ nem létezik (divergens).

Létezik azonban a $\delta_n(x)$ függvényekkel képezett integrálok sorozatának a hatáeértéke:

$\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)f(x)dx = f(0)$

Ezt határértékképzési eljárást jelöljük formálisan a Dirac-deltával:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0)$$

1.Példa. Igazoljuk (1)$-$ t az 1) közelítő függvényt használva:

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)f(x)dx = \int\limits_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} nf(x)dx =$

$= \dfrac{1}{n} nf(\xi) = f(\xi)$, ahol $\xi \in [-\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{2n}]$.(az integrálszámítás középértéktétele szerint), így

$\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi) = f(0)$

Tulajdonságok:

1.$\delta(x) = \delta(-x)$ (páros)

2.$\delta(ax) = \dfrac{1}{|a|}\delta(x)$

Biz.: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(ax)f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(ax)f(\dfrac{ax}{a})\dfrac{1}{a}d(ax) = \dfrac{1}{a}\int\limits_{\mp\infty}^{\pm\infty} \delta(y)f(\dfrac{y}{a})d(y) =$
$\dfrac{1}{|a|}f(0)$.

3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)f(x-a+a)d(x-a) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(y)f(y+a)dy = f(a)$

4. $\delta(g(x)) = \sum\limits_i \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}$, ahol $g(x_i) = 0$, és $g'(x_i) \neq 0$.

Biz.: Fejtsük sorba a $g(x)$ függvényt a zéróhelyei körül:

$$g(x) = 0 + \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x_i} (x - x_i) + ...$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(g(x))f(x)dx = \sum_i \int\limits_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} \delta[g'(x_i)(x-x_i)]f(x)dx = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|} f(x_i)$$

5. derivált: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta'(x-a)f(x)dx = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)f'(x)dx = -f'(a)$

Biz. formálisan parciális integrálással:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta'(x-a)f(x)dx = \underbrace{f(x)\delta(x-a)|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)f'(x)dx = -f'(a)$$

Ha a közelítő fügvények sorozatát használjuk ugyanígy kell eljárni.

A Dirac delta 3 dimenzióban:

1. $\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$

def.: $\int_V f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r})d^3\mathbf{r} = \begin{cases} f(0), \text{ ha az origó benne van } V\text{-ben} \\ 0, \text{ha az origó nincs benne } V\text{-ben} \end{cases}$

2. Gömbi polárkoordinátákban

$\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2}\delta(r)\delta(\cos\theta)\cos\phi$