BSc Fizika Vektorszámítás gyakorló feladatsor

0.(Beugró) Számoljuk ki a $a = 7 + 2i$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2+2i \\ 3+3i \end{pmatrix}$, $\underline{w} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2-2i \\ -3+3i \end{pmatrix}$ mennyiségekre az $a^* \cdot \underline{v}$, $\underline{v} + \underline{w}$, $\underline{v}\,\underline{w}$, $\mathrm{Re}(\underline{w}\,\underline{v})$, $\underline{v} \times \underline{w}$, $\underline{w} \times \underline{v}$ alapműveletek eredményét! Azonosságokat is szabad használni.

1. Adjuk meg algebrai, trigonometrikus és exponenciális alakban a következő egyenletek komplex megoldásait:

$$\sin z = 2$$

$$\sqrt[5]{q} = 1$$

Számoljuk ki a $z \cdot q$ és z/q mennyiségeket algebrai és exponenciális alakban is, és ellenőrizzük, hogy azonos-e az eredmény! Ábrázoljuk a számokat a Gauss-síkon!

2. Vektortér-e: a) az xyz koordinátarendszerben egy olyan sík, ami nem megy át az origón, ha az összeadást a szokásos módon definiáljuk?

b) a körvonal, ha egy nullpontot kijelölve a többi pontot egy rögzített körbefordulási irány szerint mért szögelfordulással jellemezzük? Az összeadást a szögek összeadásával, a számmal való szorzást a szögek szorzatával definiáljuk.

3. a) Adjuk meg az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorokat, ha

$$\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} \quad \text{merőleges} \quad \alpha\underline{a} - \beta\underline{b}$$

tetszőleges α, β számok esetén!

b) Két egyenes fekszik az xy síkon. Mekkora szöget zárnak be,

- ha egységnyi hosszú irányvektoraik egymásra vett merőleges vetülete $\sqrt{3}/3$?
- ha az irányvektorok által kifeszített paralelogramma területe $\sqrt{2}/2$ lenne?
- ha az egyik vektor első komponense $\sqrt{5}/5$, a másik irányvektor második komponense pedig $\sqrt{3}/2$?

c) Mekkora a távolság a következő egyenesek között? Az egyik egyenes irányvektora párhuzamos az $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ vektorral, a másik egyenes irányvektora párhuzamos az $\underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorral. Az $\underline{a}$-val párhuzamos egyenes átmegy a $\underline{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, a $\underline{b}$-vel párhuzamos egyenes pedig átmegy a $\underline{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ponton.

d) Ugyanaz, mint a c) pontban, de most $\underline{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4. a) A térben milyen geometriai alakzatokat határoznak meg az alábbi egyenletek külön-külön?

$$\begin{aligned} 1x - 2y + 3z &= 9 \\ x^2 - 7x + y^2 + 2y + z^2 + 3z &= 9 \\ (2^2 + 1 + 2^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (-2x + y + 2z)^2 &= 9 \end{aligned}$$

b) Adjuk meg az $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ középpontú, origót érintő gömb felszínének egyenletét!

c) Adjuk meg annak a végtelen hengerpalástnak az egyenletét, aminek a forgástengelye az origón átmegy és az $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorral párhuzamos!

5. Egy autó által megtett út a következő időfüggvénnyel írható le:

$$x(t) = at^2 - 2t^3$$

a) Adjuk meg minden időpillanatban a sebességét, ha $a = 4$!

b) Van-e olyan pillanat, amikor megfordult? Hogyan függ ennek az időpillanatnak az értéke az a paramétertől?

c) Mi volt az a maximális távolság, amire eltávolodott a kiindulóponttól a $0 < t < 3$ időtartam alatt? Hogyan függ ez az érték az a paramétertől?

6. a) Számoljuk ki az $U = x^3y^2 + sin(z^2)/x^3$ skalármező gradiensét!

b) Számoljuk ki az $\underline{v}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} x^3y^2 \\ 2z^3y^2 \\ 3x^3z^2 \end{pmatrix}$ vektormező rotációját!

c) Számoljuk ki az a) pontbeli eredmény, mint vektormező divergenciáját!