

## Vektorszámítás vizsga, beugró zh 2010. 01. 23.

Munkaidő 1 óra. Segédeszköz (könyv, jegyzet, számológép, telefon) NEM használható. Minden feladat 10 pontot ér. Minimális követelmény: helyes válasz legalább 8 feladatra, ebből legalább két vektoranalízis feladatra.

1/ Értelmezd egy  $\mathbf{a}$  oszlopvektor és egy  $\mathbf{B}$  mátrix ebben a sorrendben vett szorzatát! Mi a feltétele a művelet elvégezhetőségének? Milyen matematikai objektum az eredmény? Hány komponense lesz?

2/ Definiáld két vektor,  $\vec{a}$  és  $\vec{b}$  vektoriális szorzatát! Kommutatív-e és asszociatív-e a művelet?

3/ Írd fel a két Levi-Civita szimbólum szorzatára vonatkozó összefüggést! Hogyan változik a képlet, ha a két szimbólumban nem egy, hanem három indexet ejtünk egybe?

4/ Írd fel a három mátrix spurjáról szóló tételt! Mi és hogyan következik ebből egy operátort különböző bázison ábrázoló mátrixok spurjára vonatkozóan?

5/ Számítsd ki az  $\mathbf{a} = (6, 14, 3)$ ,  $\mathbf{b} = (8, 8, -2)$  és  $\mathbf{c} = (1, 5, 2)$  vektorokra egyaránt merőleges  $\mathbf{e}$  egységvektor komponenseit!

6/ A kettős vektorszorzat kifejtési tételét alkalmazva számítsd ki a

$\vec{v} = [(\vec{c} + \vec{a}) \times \vec{b}] \times [(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}]$  vektort a lehető legtömörebb, vektoriális szorzatot nem tartalmazó alakban. Mikor lesz nulla az eredmény, feltéve, ha a szereplő vektorok egyike sem nullvektor?

7/ Egy szimmetrikus  $2 \times 2$ -es mátrix egyik sajátértéke  $-73$ , a hozzá tartozó sajátvektor  $(3, -8)$ . A másik sajátérték  $219$ . Írd fel a mátrixot!

8/ Mikor mondhatjuk, hogy az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  négykomponensű oszlopvektorok lineárisan függetlenek? Igaz-e, hogy bázist alkotnak?

9/ A  $\beta$  paraméter minden lehetséges értéke mellett oldd meg az alábbi lineáris egyenletrendszert  $x$ -re és  $y$ -ra! Milyen paraméterek esetén létezik megoldás? Mi ez a megoldás?

$$\begin{aligned}x - 7y &= \beta^2 + 13\beta + 30 \\ 2\beta x + 42y &= 0\end{aligned}$$

10/ Definiáld egy görbe torzióját és főnormálisát! Az ellipszis melyik pontjában legkisebb a görbület? És melyikben legnagyobb? Miért?

11/ Definiáld egy  $\vec{v}(\vec{r})$  vektormező vonalmenti integrálját! Milyen mennyiség az eredmény? Hogyan kell egy ilyen integrált ténylegesen kiszámítani?

12/ Hozd a legegyszerűbb alakra a következő kifejezést:  
 $\text{rot} [2 \Delta \vec{v} + 9 \text{rot}(\text{rot} \vec{v})]$ !

13/ Alakítsd át a Gauss-tétel segítségével az alábbi integrált:  
 $I = \oint d\vec{F}(\vec{r} \times \text{grad} f)$ , ahol  $f(\vec{r})$  egy skalármező,  $\vec{r}$  a helyvektor,  $d\vec{F}$  pedig egy zárt felület felületelemét jelöli! A szükséges részletszámításokat indexes formában végezd el!